Enginyeria Química

PROBLEMES D'ÀLGEBRA LINEAL

Problemes d'Inducció

1. Proveu per inducció les següents igualtats:

   (a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

   (b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ per a $n \geq 1$,

   (c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   (d) $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $r \neq 1$.

2. Proveu o refuteu la següent igualtat:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3. Feu una conjectura per respondre a les següents preguntes i intenteu demostrar-la per inducció.

   (a) Quin número és més gran: n^2 o $3n+1$?

   (b) Quin número és més gran: 2^n o n^2?

   (c) Quin número és més gran: $n-2$ o $\frac{n^2-n}{12}$?

4. Sigui $P(n)$ la proposició:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2} \quad , \ n \in \mathbb{N}$$

   Demostreu que si $P(k)$ és certa llavors també ho és $P(k+1)$.

   És certa $P(n)$ per tot $n \in \mathbb{N}$? i per algun $n \in \mathbb{N}$?

5. Demostreu o refuteu les següents afirmacions:

   (a) $n^3 - n$ és múltiple de 6.

   (b) $n^5 - n$ és múltiple de 10.

6. Llegiu i trobeu l'errada:

   Demostrarem per inducció que tothom té el mateix nom. En particular, provarem que, donada una col·lecció de n persones amb $n \in \mathbb{N}$ qualsevol, totes les persones tenen el mateix nom.

   La primera etapa és trivial, perquè si $n = 1$, qualsevol persona té el mateix nom que ella mateixa.

   La hipòtesi d'inducció és que, en tota col·lecció de k persones, totes tenen el mateix nom.

   Ara considerem una col·lecció de $k + 1$ persones. Fem marxar una d'aquestes persones. Per la hipòtesi d'inducció, les altres k persones tenen totes el mateix nom. Ara canviem la persona que és a fora per una d'aquestes k persones. Tornem a tenir un grup de k persones que, per la hipòtesi d'inducció, tenen el mateix nom. Per tant la persona que acaba d'entrar es diu igual que la resta. Així les $k + 1$ persones tenen el mateix nom.