

Àlgebra lineal (Mètodes Matemàtics I)
Enginyeria Química
Curs 2002/03
Prova parcial.(28 Abril 2003)

I. Propietats dels nombres reals.

1. Sigui x_n la successió recurrent definida per $x_0 = 1$ i

$$x_{n+1} = \frac{1}{7} + x_n.$$

Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Calculeu,

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 - 4n + 1}} \right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^n n!}$

3. Estudieu la convergència per a les sèries següents, tot justificant la resposta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+2)!}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n n!}$

II. Espais vectorials.

1. Trobeu dimensió i una base pel \mathbb{R} -subespai vectorial

$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{de grau} \leq 3 \text{ amb } p(2) = 0\}$$

dels polinomis a coeficients reals.

2. Calcula una \mathbb{C} -base per $E + F$ i la dimensió de $E \cap F$, on E, F són els \mathbb{C} -subespais vectorials de \mathbb{C}^3 següents:

$$E = \{(x, y, z) \mid x = 2y + z\}$$

$$F = \langle (1, 2, i), (i, 2i, -1), (i, i, i) \rangle_{\mathbb{C}}.$$

III. Aplicacions lineals.

1. Decidiu si és injectiva, exhaustiva l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida per $f(x, y, z) = (2x - 2y, x + y + z, 3x + 4z, x - 2y - z)$. Trobeu una base del nucli i de la imatge de f .

2. La matriu associada a una aplicació lineal $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ bé donada per la matriu

$$M(g, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu associada a g respecte la base canònica de \mathbb{R}^2 i la base canònica de \mathbb{R}^3 .

IV. Aplicacions de la diagonalització.

1. Calculeu A^{2003} amb $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Resoleu el sistema d'equacions diferencials següent:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Són les solucions d'aquest sistema un subespai vectorial d'algun \mathbb{R} -espai vectorial? en cas afirmatiu digues quin és aquest \mathbb{R} -espai vectorial.