Àlgebra lineal i Equacions diferencials.
Enginyeria Química
Curs 2002/03.1er semestre(2na convocatòria).
Exàmen final.(30-06-2003)

I. Espais vectorials.

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ contínues | y^{(4)} + 4y = g(x)\}$$

que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).

   i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial? Justifiqueu la resposta.

   ii. Considera el polinomi $P(D) = D^4 + 4$. Troba les arrels a $\mathbb{C}$, diga-li a les arrels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Calcula també expressant-ho en forma cartesiana en funció de la variable x(pensada com variable real: x té valors a $\mathbb{R}$) la exponencial complexa $e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}$ i $e^{\alpha_3 x}$. Són aquestes exponencials complexes vectors de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

   iii. Són les funcions $y = y(x)$: $e^x sin(x), e^x cos(x), e^{-x} sinx$ i $e^{-x} cosx$ $\mathbb{R}$-linealment independents en $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   Comproveu que obteniu aquestes quatre funcions prenent la part real i/o la part imaginària de les exponencials complexes $e^{\alpha_i x}$ de l'apartat anterior.

   iv. Considerem E_0 (és us espai vectorial, estem prenent $g(x) = 0$). Suposant que sabem que té dimensió 4, trobeu una base de $E_0^2 = \{(f, g) \in \mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2 | f, g \in E_0\}$.
   Indicació: Podeu usar aquí que $y(x) = e^x sin(x), e^x cos(x), e^{-x} sinx$ i $e^{-x} cosx$ satisfan $y^{(4)} + 4y = 0$ i per tant pertanyen a E_0 aquestes quatre funcions.

2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0, 2x + 3y + z - t = 0, x + 2y - 2t = 0\}$ i $W =< (1, 1, 4, -5), (1, 0, -1, 0), (0, -1, 1, +1) >$ dos $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$.
Doneu una base per V, W i $V + W$ com subespais de $\mathbb{R}^4$. Calculeu $dim_{\mathbb{R}}(V \cap W)$.

II. Aplicacions lineals.

1. Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donada per la matriu $M(f, \mathcal{B}, can) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (1, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Expresseu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^2$, és a dir calculeu $M(f, can, can)$. És injectiva i/o exhaustiva f? En cas de ser bijectiva doneu l'expressió per l'aplicació lineal inversa i calculeu $f^{-1}(1, 0)_{can}$ i $f^{-1}(1, 0)_{\mathcal{B}}$.

2. El vostre cap al laboratori us afirma el següent: suposem que tenim dos grups de bacteris: bacteris A, i bacteris B diferents, que en trobar-se junts interrelacionen i evolucionen en un any de la manera següent
nombre(=:#)bacteris A (després 1 any)=2(#bacteris A(en l'inici))+1(# bacteris B (inici))
#bacteris B (després 1 any)=1(#bacteris A inici)+2(# bacteris B inici).
Sigui (x, y) amb x la quantitat de bacteris de la classe A i y la quantitat de bacteris de la classe B, i h que sigui l'aplicació que envia (x, y) a la població que correspondria en l'any següent prenent (x, y) com a valors inicials. En el model proposat pel vostre cap és $h(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.
Segons aquest model, contesteu les següents preguntes:

i. Pot ser que hi hagi algun valor de bacteris A i B on al cap d'un any hagin desaparegut els bacteris A i B?

ii. Si volem que al cap d'un any el nombre de bacteris de A siguin 234 i B sigui 234, és possible obtenir-ho introduint-hi en l'any inicial algun valor concret de A i B? En cas afirmatiu trobeu aquest/s valor/s.

iii. Si el model fos correcte al llarg dels anys i la població actual de bacteris de A fos 2 i de B fos 3, quina quantitat de bacteris tindríem després de tres anys?

iv. Augmenta sempre la quantitat de bacteris($A+B$) després d'un any o potser hi ha algun valor en què disminueix després d'un any?

III. Aplicacions de diagonalització.

1. Considerem la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Resoleu el sistema d'equacions diferencials,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$
Són les solucions d'aquest sistema un subespai vectorial de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$?

IV. Equacions diferencials lineals i d'ordre superior.

1. Resolt l'equació diferencial $(x + y) - (1 + x)y' = 0$.

2. Resoleu l'equació diferencial
$$y'' - 9y = 6e^{3x} + sin(x)$$
amb $y(0) = 4$ i $y'(0) = 1$.