**Àlgebra lineal**
Enginyeria Química
Curs 2002/03.1er semestre(2ona convocatòria).
Exàmen final.(30-06-2003)

I. Nombres i convergència,

1. Sigui $x_n$ la quantitat de producte $A$ en l'any $n$ i suposem que aquesta quantitat de producte $A$ compleix la següent relació vers la quantitat de producte de $A$ en l'any anterior,

$$x_n = \frac{1}{n^2} + x_{n-1},\ per\ a\ n \geq 1,$$

sempre i quan $x_0 \geq 1$ on $x_0$ és la quantitat de producte $A$ que hi posem inicialment(any zero).
Existeix algun $x_0$ de manera que $x_n$ creix cada any i té per limit $+\infty$? Justifiqueu la resposta.

2. Calculeu els següents límits,
a) $\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt[3]{\frac{n^2-3n+6}{n^2+3n+1}} \right)^{\frac{n^2+1}{\sqrt{2}n+\sqrt{3}}}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{log((n!)^2)}{n!}$

3. Estudieu la convergència o no convergència de les sèries,
a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{n}}$ b)$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi n^n (n!)}{(2n)!}$

II. Espais vectorials.

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ contínues | y^{(4)} + 4y = g(x)\}$$

que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).

   i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial? Justifiqueu la resposta.
   ii. Considera el polinomi $P(D) = D^4 + 4$. Troba les arrels a $\mathbb{C}$, diga-li a les arrels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Calcula també expressant-ho en forma cartesiana en funció de la variable $x$(pensada com variable real: $x$ té valors a $\mathbb{R}$) la exponencial complexa $e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\ i\ e^{\alpha_3 x}$. Són aquestes exponencials complexes vectors de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
   iii. Són les funcions $y = y(x)$: $e^x sin(x), e^x cos(x), e^{-x} sinx\ i\ e^{-x} cosx$ $\mathbb{R}$-linealment independents en $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
   Comproveu que obteniu aquestes quatre funcions prenent la part real i/o la part imaginària de les exponencials complexes $e^{\alpha_i x}$ de l'apartat anterior.
   iv. Considerem $E_0$ (és us espai vectorial, estem prenent $g(x) = 0$). Suposant que sabem que té dimensió 4, trobeu una base de $E_0^2 = \{(f,g) \in \mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 | f, g \in E_0\}$.
   Indicació: Podeu usar aquí que $y(x) = e^x sin(x), e^x cos(x), e^{-x} sinx\ i\ e^{-x} cosx$ satisfan $y^{(4)} + 4y = 0$ i per tant pertanyen a $E_0$ aquestes quatre funcions.

2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0, 2x + 3y + z - t = 0, x + 2y - 2t = 0\}$ i $W =< (1, 1, 4, -5), (1, 0, -1, 0), (0, -1, 1, +1) >$ dos $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$.
Doneu una base per $V$, $W$ i $V + W$ com subespais de $\mathbb{R}^4$. Calculeu $dim_{\mathbb{R}}(V \cap W)$.

III. Aplicacions lineals.

1. Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donada per la matriu $M(f, \mathcal{B}, can) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (1, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Expresseu la matriu de $f$ en la base canònica de $\mathbb{R}^2$, és a dir calculeu $M(f, can, can)$. És injectiva i/o exhaustiva $f$? En cas de ser bijectiva doneu l'expressió per l'aplicació lineal inversa i calculeu $f^{-1}(1, 0)_{can}$ i $f^{-1}(1, 0)_{\mathcal{B}}$.
2. El vostre cap al laboratori us afirma el següent: suposem que tenim dos grups de bacteris: bacteris $A$, i bacteris $B$ diferents, que en trobar-se junts interrelacionen i evolucionen en un any de la manera següent
nombre(=:#)bacteris $A$ (després 1 any)=2(#bacteris $A$(en l'inici))+1(# bacteris $B$ (inici))
#bacteris $B$ (després 1 any)=1(#bacteris $A$ inici)+2(# bacteris $B$ inici).
Sigui $(x, y)$ amb $x$ la quantitat de bacteris de la classe $A$ i $y$ la quantitat de bacteris de la classe $B$, i $h$ que sigui l'aplicació que envia $(x, y)$ a la població que correspondria en l'any següent prenent $(x, y)$ com a valors inicials. En el model proposat pel vostre cap és $h(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.
Segons aquest model, contesteu les següents preguntes:
   i. Pot ser que hi hagi algun valor de bacteris $A$ i $B$ on al cap d'un any hagin desaparegut els bacteris $A$ i $B$?
   ii. Si volem que al cap d'un any el nombre de bacteris de $A$ siguin 234 i $B$ sigui 234, és possible obtenir-ho introduint-hi en l'any inicial algun valor concret de $A$ i $B$? En cas afirmatiu trobeu aquest/s valor/s.
   iii. Si el model fos correcte al llarg dels anys i la població actual de bacteris de $A$ fos 2 i de $B$ fos 3, quina quantitat de bacteris tindríem després de tres anys?
   iv. Augmenta sempre la quantitat de bacteris($A+B$) després d'un any o potser hi ha algun valor en què disminueix després d'un any?

IV. Aplicacions de diagonalització.

1. Considerem la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar la diagonalització de $A$ a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n \in M_2(\mathbb{R})$.
2. Resoleu el sistema d'equacions diferencials,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$
Són les solucions d'aquest sistema un subespai vectorial de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$?