Àlgebra lineal i Equacions diferencials.
Enginyeria Química
Curs 2002/03.1er semestre.
Exàmen final.(05-02-2003)

I. Espais vectorials.

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ contínues | y^{(3)} - y^{(2)} + y' - y = g(x)\}$$

que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).

   i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial? Justifiqueu la resposta.
   ii. Són les funcions $y = y(x)$: $sin(x), cos(x)\ i\ e^x$ $\mathbb{R}$-linealment independents en $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Són els vectors $(sinx, cosx), (cosx, sinx)$ de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ $\mathbb{R}$-linealment independents? Justifiqueu les respostes.
   iii. Considerem E_0 (és us espai vectorial,estem prenent $g(x) = 0$). Suposant que sabem que té dimensió 3, trobeu-ne una base. (Indicació: adoneu-vos que les funcions de l'apartat anterior pertanyen a E_0).

2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y+z, t = z+3x\}$ i $W =< (1, 1, 4, -5), (1, 0, -1, 0), (0, -1, 1, +1) >$ dos $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$. Doneu una base per V i $V + W$ com subespais de $\mathbb{R}^4$. Calculeu la dimensió de V,W,$V + W$ i $V \cap W$. Justifiqueu la resposta.

II. Aplicacions lineals, planteig equacions diferencials lineals.

1. Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donada per la matriu $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ expressat la matriu en la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (1, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Expresseu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^2$, és a dir calculeu $M(f, can, can)$. Calculeu $f(1, 1)$. En cas de ser bijectiva doneu l'expressió per l'aplicació lineal inversa i calculeu $f^{-1}(1, 1)$.

2. Planteja l'equació diferencial amb les condicions que tens per l'enunciat següent:
Segons la llei de refredament de Newton, la velocitat a la que es refreda una substància és proporcional a la diferència de temperatura entre la substància i l'ambient. Si la temperatura ambient és de 30^0C i sabem que la substància es refreda de 1000^0C a 70^0C en 15 minuts.

   Com creus que serà aquesta funció que descriu la temperatura de la substància? cap a quin valor creieu que hauria d'anar quan el temps tendeix a infinit?

III. Aplicacions de diagonalització.

1. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Resoleu el sistema d'equacions diferencials,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Són les solucions d'aquest sistema un subespai vectorial de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$?

Calculeu també la solució del sistema amb condicions inicials $x(0) = 1$ i $y(0) = 1$.

IV. Equacions diferencials lineals i d'ordre superior.

1. Resolt l'equació diferencial $(x + 2y) - (1 - x)y' = 0$.
2. Resoleu l'equació diferencial

$$y'' - 25y = 6e^{5x}$$

amb $y(0) = 4$ i $y'(0) = 1$.