Àlgebra lineal
Enginyeria Química
Curs 2002/03.1er semestre.
Exàmen final.(05-02-2003)

I. Nombres i convergència,

1. Sigui x_n la quantitat de producte A en l'any n i suposem que aquesta quantitat de producte A compleix la següent relació vers la quantitat de producte de A en l'any anterior,

$$2x_{n+1} = \frac{1}{2} + x_n^2.$$

sempre i quan $x_0 \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ on x_0 és la quantitat de producte A que hi posem inicialment(any zero).
Existeix algun x_0 de manera que x_n creix cada any i té per limit $+\infty$? En cas afirmatiu trobeu aquest(s) valor(s) per a x_0.

2. Calculeu els següents límits,
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1^3) + \log(2^3) + \cdots + \log(n^3)}{n \log(n^3)}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^n(n!)}$

3. Estudieu la convergència o divergència de les sèries,
a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)!}{(n+2)!}$ b)$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n!)^{1/(n!)}}{(n+2)!}$

II. Espais vectorials.

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ contínues | y^{(3)} - y^{(2)} + y' - y = g(x)\}$$

que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).

i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial? Justifiqueu la resposta.
ii. Són les funcions $y = y(x)$: $sin(x), cos(x)\ i\ e^x$ $\mathbb{R}$-linealment independents en $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Són els vectors $(sinx, cosx), (cosx, sinx)$ de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ $\mathbb{R}$-linealment independents? Justifiqueu les respostes.
iii. Considerem E_0 (és us espai vectorial, estem prenent $g(x) = 0$). Suposant que sabem que té dimensió 3, trobeu-ne una base. (Indicació: adoneu-vos que les funcions de l'apartat anterior pertanyen a E_0).

2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y+z, t = z+3x\}$ i $W =< (1, 1, 4, -5), (1, 0, -1, 0), (0, -1, 1, +1) >$ dos $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$. Doneu una base per V i $V + W$ com subespais de $\mathbb{R}^4$. Calculeu la dimensió de V,W,$V + W$ i $V \cap W$. Justifiqueu la resposta.

III. Aplicacions lineals.

1. Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donada per la matriu $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ expressat la matriu en la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (1, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Expresseu la matriu de f en

la base canònica de $\mathbb{R}^2$, és a dir calculeu $M(f, can, can)$. Calculeu $f(1,1)$. En cas de ser bijectiva doneu l'expressió per l'aplicació lineal inversa i calculeu $f^{-1}(1,1)$.

2. Sigui $h : M_2(\mathbb{R}) \to V$ (on V denota l'$\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 1 ($dimV = 2$)) l'aplicació lineal definida per,

$$h(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+b+c)x + (a+b+c+d)$$

   i. Doneu una matriu associada a h.
   ii. Doneu-me les coordenades del vector $3x - 4$ de V respecte la base $\{\sqrt{2}x - 3, x + 2\}$ de V.
   iii. Calculeu una base del nucli i de la imatge de h. És exhaustiva h?, és injectiva h?

IV. Aplicacions de diagonalització.

1. Considerem la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Resoleu el sistema d'equacions diferencials,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$
Són les solucions d'aquest sistema un subespai vectorial de $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$?
Indicació: La part real del vector solució i la part imaginaria del vector solució que us surti son les solucions del sistema del sistema que busquem si imposem que $x(t)$ i $y(t)$ funcions de una variable real.