Àlgebra lineal

Enginyeria Química. Curs 2003/04.1er semestre.
2ona convocatòria. 28-06-2004.

I. Nombres i convergència,(1.(0'75 punts),2.(0'75 punts),3.(0'5 punts))

1. Calculeu els següents límits,
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n\log n}$
2. Estudieu la convergència o no de les següents sèries:
   a) $\sum_{n=467}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2}$.
3. Factoritza en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$ el polinomi x^5+16.

II. Sistemes d'equacions. Espais vectorials.(1.(1'5 punts),2.(1'5 punts))

1. Considera el següent sistema d'equacions lineals als nombres reals en funció d'un paràmetre real a :
$$\begin{cases} x-2z=2 \\ 3x+ay+2z=2 \\ -x+y+az=-3 \end{cases}$$
   Discuteix la compatibilitat de l'anterior sistema, segons el valor d'a i, en el cas de ser compatible, dóna els graus de llibertat del conjunt de les solucions. Pels valors de a on el sistema és compatible determinat, calculeu-ne la solució.
2. Considereu els següents $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$: $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | x-2y+3z-t=0, 3z-t=0\}$ i $W=<(1,2,1,1),(1,2,2,4),(4,8,1,5)>$. Calculeu una base i la dimensió de V, W, $V+W$ i $V\cap W$ com subespais de $\mathbb{R}^4$.

III. Aplicacions lineals.(2'5 punts)

Sigui l'aplicació lineal, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, donada per
$$f(x,y,z)=(x+2y+3z, 2x+3y+z, -2x-y+9z).$$

1. Calculeu una matriu associada a f. És injectiva f? és f exhaustiva? és f bijectiva?
2. Calculeu base i dimensió del nucli de f (és a dir de $\ker(f)$) i de la imatge de f (és a dir de $\mathrm{Im}(f)$).
3. Calculeu la matriu $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ amb les bases $\mathcal{B}_1=\{(1,1,1),(-1,1,-1),(0,2,2)\}$ i $\mathcal{B}_2=\{(1,-1,0),(1,1,2),(1,-1,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Pot ser possible una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ complint que $f(1,0,0)_{\mathcal{B}}=(3,2,5)$, $f(0,1,0)_{\mathcal{B}}=(0,-1,1)$ i $f(0,0,1)_{\mathcal{B}}=(0,0,0)$? En cas afirmatiu trobeu una $\mathcal{B}$.
5. Pot existir una base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^3$ complint que
$$M(f;\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}})=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

IV. Aplicacions de diagonalització. (1. (1'5 punts), 2. (1 punt))

1. Considerem la matriu
$$A=\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}.$$
   Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n\in M_2(\mathbb{R})$.
2. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials lineals
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Cal justificar les respostes.