Àlgebra lineal

Enginyeria Química. Curs 2004/05. 1er semestre.

1era convocatòria.(24-01-2005)

I. Nombres i convergència,(1.(0,75 punts),2.(0,75 punts),3.(0.5 punts))

1. Calculeu els següents límits,
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1)+\log(2)+\cdots+\log(n)}{2005n\log(n)}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+2+\ldots+n}}$
2. Sigui a_n la successió:
$$a_n = \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^2} + a_{n-1},\ per\ a\ n \geq 1$$
   amb $a_0 = a \in \mathbb{R}$. Per a quins valors de a la successió té límit un número real? Justifica la resposta.
3. Factoritza en factors irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$ el polinomi $(x^4+1)(x^2+2x+1)$.

II. Matrius i espais vectorials(I).(1.(1'5 punts),2.(1'5 punts))

1. Estudieu per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ el següent sistema és compatible (a $\mathbb{R}$), i en casos en que ho sigui calcula la/les solucio/ns:
$$\left\{\begin{array}{rl} (a-1)x - 3ay - 2az & = a \\ 2x + 3ay + 6z & = 6a+1 \\ x + (a-1)y + 2z & = 4 \end{array}\right.$$
2. Considerem els següents $\mathbb{R}$-subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$: $V = \{(x,y,z,t) | x+4y-z-4t = 0\}$ i $W = <(4,2,4,5),(1,2,1,1),(1,2,3,4)>$. Calculeu una base i la dimensió de V, W, $V+W$ i $V\cap W$ com a subespais de $\mathbb{R}^4$.

III. Espais vectorials II i aplicacions lineals.(1.(2 punts), 2.(1 punt))

1. Sigui l'aplicació $\mathbb{C}$-lineal, $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, donada per $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+3y+4z, 3x+4y+5z)_{\mathcal{C}}$ on $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ és una base de $\mathbb{C}^3$.
   i. Calculeu una matriu associada a f.
   ii. Calculeu una base i la dimensió de $ker(f)$ i de $imatge(f)$. És injectiva f? és f exhaustiva? és f bijectiva?
   iii. Calculeu la matriu $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{C})$ on $\mathcal{B}_1$ és la base de $\mathbb{C}^3$ donada per $\{(1,1,1),(-1,1,-1),(0,2,2)\}$.
   iv. Pot ser possible una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ complint que $f(1,0,0)_{\mathcal{B}} = (3,2,5)$, $f(0,1,0)_{\mathcal{B}} = (0,-1,1)$ i $f(0,0,1)_{\mathcal{B}} = (0,0,0)$? En cas afirmatiu trobeu $\mathcal{B}$. Justifiqueu la resposta.
2. Considerem V el s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (les aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) on una base de V és $\{e^x, sinx, cosx\}$. Sigui $h : V \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació $\mathbb{R}$-lineal donada per $h(e^x) = (1,2,3)$, $h(sinx) = (2,3,4)$ i $h(cosx) = (3,4,5)$. Considereu $W \subseteq V$ el $\mathbb{R}$-subespai de V definit per $W = \{y(x) \in V | y(0) = 0\}$.
   i. Doneu un vector de V que no és de W. Doneu un vector de W.
   ii. Trobeu una base de W.
   iii. Definim l'aplicació lineal $\tilde{h} : W \to \mathbb{R}^3$ via $\tilde{h}(w) = h(w)$. Calcula el/s vector/s w de W complint $\tilde{h}(w) = (2,2,2)$.
   iv. Calcula una matriu associada per a l'aplicació lineal $\tilde{h}$ i per a l'aplicació h.

IV. Aplicacions de diagonalització.

1. Considereu l'$\mathbb{R}$-endomorfisme $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donat per $f_a(x,y) = (3x+ay, -10x-8y)$. Estudieu en funció de $a \in \mathbb{R}$ quan l'anterior endomorfisme és diagonalitzable o no n'és.

2. Considerem la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$
Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu A^{2005}.