Àlgebra lineal
Enginyeria Química
Curs 2003/04.1er semestre.
Examen final.(13-02-2004)

I. Nombres i convergència,(1.(1 punt),2.(1 punt))

1. Donada la successió recurrent $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(log(n+1))^4} + a_n$ per $n \geq 1$, amb $a_1 = 0$. Proveu que és creixent i està acotada superiorment. Proveu que $\{a_n\}$ té límit, i expresseu aquest límit l d'alguna forma diferent al de "límit de la successió $\{a_n\}_n$ o de successions parcials d'$\{a_n\}_n$".
2. Calculeu els següents límits,
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n (n!)^{\frac{n!+1}{n!}}}{(2n)! \sqrt[n]{1^{2004} + 2^{2004} + \ldots + n^{2004}}}$

II. Espais vectorials.(1.(1'75 punts),2.(1'25 punts))

1. Donat el conjunt
$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; contínues | y^{(5)} + 4y' = g(x)\}$$
que està inclòs dins el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que anomenàvem $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ($g(x)$ denota una funció contínua).
   i. Per a quines $g(x)$, $E_{g(x)}$ és un subespai vectorial?
   ii. Calculeu les arrels λ de $z^5 + 4z$ i per cada λ anterior, calculeu $Re(e^{\lambda x})$ i $Im(e^{\lambda x})$ amb $x \in \mathbb{R}$.
   iii. Considerem l'espai vectorial E_0 (estem prenent $g(x) = 0$). Suposem que sabem que té dimensió 5 i que una base de E_0 és:
$$\mathcal{B} = \{1, cos(x)e^x, sin(x)e^x, cos(x)e^{-x}, sin(x)e^{-x}\}.$$
   Considereu el subespai $W \subset E_0$ definit per
$$W = \{f \in E_0 | f(0) = 0 \; i \; f(\frac{\pi}{2}) = 0\}.$$
   Respongueu a les següents preguntes:
      A. Esciviu les coordenades del vector de E_0
$$e^x sin(x) - e^{-x} sin(x)$$
      en la base $\mathcal{B}$ de E_0.
      B. Doneu-me quatre vectors diferents de W. Doneu uns vectors de W que generin W.
      C. Trobeu tres vectors de W que siguin linealment independents.
      D. Doneu si es posible dues bases per a W on cap dels vectors triats siguin iguals. Calculeu $dim(W)$.
2. Sigui $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 | x - 2y + z + t = 0, t + z - 3x = 0\}$ i $W = < (1, 1, 1, 4), (2i, i, i^3, 3i), (3, 2, 0, 7) >$ dos $\mathbb{C}$-subespais vectorials de $\mathbb{C}^4$. Calculeu una base i la dimensió de V, W, $V + W$ i $V \cap W$ com subespais de $\mathbb{C}^4$.

III. Aplicacions lineals.(1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Sigui l'aplicació lineal, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, donada per $f(x,y)=(3x+y,x+3y,x-y)$.
   - i. Doneu una matriu associada a f. Quin tamany té qualsevol matriu associada a f?
   - ii. Donada la base $\mathcal{B}_1=\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, calculeu la matriu de f associada a $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, és a dir $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.
   - iii. Existeix una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ on la $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{C})$ és la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

2. Sigui $h:V\to V$ (on V denota l'$\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis de grau ≤ 1 ($dimV=2$)) l'aplicació lineal definida per,

$$h(ax+b)=(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b)x+(-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b)$$

   - i. Doneu una matriu associada a h.
   - ii. Calculeu una base del nucli i de la imatge de h. És exhaustiva h?, és injectiva h?
   - iii. Té sentit parlar si h diagonalitza? En cas afirmatiu, i sense calcular-ne el polinomi característic: té h el valor propi zero?
   - iv. És el vector $x+1$ un vector propi? En cas afirmatiu, digueu també el seu valor propi.

IV. Aplicacions de diagonalització. (1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Considerem la matriu

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Estudiar la diagonalització de A a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$. Calculeu $A^n\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Una reacció elemental irreversible l'escriurem per

$$aA+bB+\ldots\to eE+fF+\ldots$$

   on $a,b,...,e,f,...$ són els coeficients estequiomètrics i $A,B,...,E,F,..$ les espècies químiques. Aquest procés té una constant k anomenada cinètica de la reacció.
   Considerem la reacció de dues reaccions elementals irreversibles,

$$A\to^{k_1}B\to^{k_2}C$$

   on $k_1=2$ i $k_2=3$ $segons^{-1}$. Denotem per x =concentració de A en mmol/l en la reacció, y =concentració de B en mmol/l i si z=concentració de C en mmol/l en la reacció, es té pel principi de conservació de la matèria que $x+y+z$ =Constant=$\mathcal{K}$. Suposem que inicialment hi ha 4mmol/l del component A (és a dir $\mathcal{K}=4mmol/l$) i sabem que x i y satisfan el sistema d'equacions diferencials,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   (aquests valors 2 i 3 en la matriu provenen de les constants cinètiques de la reacció que són k_1 i k_2).
   En aquesta situació, calculeu quan val la concentració del producte C en aquesta reacció.