

**Àlgebra lineal**  
 Enginyeria Química  
 Curs 2003/04.1er semestre.  
 Examen final.(13-02-2004)

I. Nombres i convergència,(1.(1 punt),2.(1 punt))

1. Donada la successió recurrent  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^4} + a_n$  per  $n \geq 1$ , amb  $a_1 = 0$ .  
 Proveu que és creixent i està acotada superiorment. Proveu que  $\{a_n\}$  té límit, i expresseu aquest límit  $l$  d'alguna forma diferent al de "límit de la successió  $\{a_n\}_n$  o de successions parcials d' $\{a_n\}_n$ ".

2. Calculeu els següents límits,

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (n!)^{\frac{n+1}{n}}}{(2n)! \sqrt[n]{1^{2004} + 2^{2004} + \dots + n^{2004}}}$$

II. Espais vectorials.(1.(1'75 punts),2.(1'25 punts))

1. Donat el conjunt

$$E_{g(x)} = \{y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínues} | y^{(5)} + 4y' = g(x)\}$$

que està inclòs dins el  $\mathbb{R}$ -espai vectorial de les funcions contínues de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  que anomenàvem  $\mathcal{F}_{cont}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , ( $g(x)$  denota una funció contínua).

- i. Per a quines  $g(x)$ ,  $E_{g(x)}$  és un subespai vectorial?
- ii. Calculeu les arrels  $\lambda$  de  $z^5 + 4z$  i per cada  $\lambda$  anterior, calculeu  $Re(e^{\lambda x})$  i  $Im(e^{\lambda x})$  amb  $x \in \mathbb{R}$ .
- iii. Considerem l'espai vectorial  $E_0$  (estem prenent  $g(x) = 0$ ). Suposem que sabem que té dimensió 5 i que una base de  $E_0$  és:

$$\mathcal{B} = \{1, \cos(x)e^x, \sin(x)e^x, \cos(x)e^{-x}, \sin(x)e^{-x}\}.$$

Considerem el subespai  $W \subset E_0$  definit per

$$W = \{f \in E_0 | f(0) = 0 \text{ i } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\}.$$

Respongueu a les següents preguntes:

- A. Escriviu les coordenades del vector de  $E_0$

$$e^x \sin(x) - e^{-x} \sin(x)$$

en la base  $\mathcal{B}$  de  $E_0$ .

- B. Doneu-me quatre vectors diferents de  $W$ . Doneu uns vectors de  $W$  que generin  $W$ .
  - C. Trobeu tres vectors de  $W$  que siguin linealment independents.
  - D. Doneu si es possible dues bases per a  $W$  on cap dels vectors triats siguin iguals. Calculeu  $\dim(W)$ .
2. Sigui  $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 | x - 2y + z + t = 0, t + z - 3x = 0\}$  i  $W = \langle (1, 1, 1, 4), (2i, i, i^3, 3i), (3, 2, 0, 7) \rangle$  dos  $\mathbb{C}$ -subespais vectorials de  $\mathbb{C}^4$ . Calculeu una base i la dimensió de  $V$ ,  $W$ ,  $V + W$  i  $V \cap W$  com subespais de  $\mathbb{C}^4$ .

III. Aplicacions lineals.(1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Sigui l'aplicació lineal,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donada per  $f(x, y) = (3x + y, x + 3y, x - y)$ .
  - i. Doneu una matriu associada a  $f$ . Quin tamany té qualsevol matriu associada a  $f$ ?
  - ii. Donada la base  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , calculeu la matriu de  $f$  associada a  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$ , és a dir  $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ .
  - iii. Existeix una base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  on la  $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{C})$  és la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

2. Sigui  $h : V \rightarrow V$  (on  $V$  denota l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial dels polinomis de grau  $\leq 1$  ( $\dim V = 2$ )) l'aplicació lineal definida per,

$$h(ax + b) = \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x + \left(-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$$

- i. Doneu una matriu associada a  $h$ .
- ii. Calculeu una base del nucli i de la imatge de  $h$ . És exhaustiva  $h$ ?, és injectiva  $h$ ?
- iii. Té sentit parlar si  $h$  diagonalitza? En cas afirmatiu, i sense calcular-ne el polinomi característic: té  $h$  el valor propi zero?
- iv. És el vector  $x + 1$  un vector propi? En cas afirmatiu, digueu també el seu valor propi.

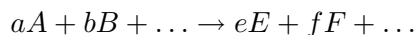
IV. Aplicacions de diagonalització. (1. (1'25 punts), 2. (1'25 punts))

1. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

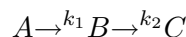
Estudiar la diagonalització de  $A$  a  $\mathbb{R}$  i a  $\mathbb{C}$ . Calculeu  $A^n \in M_2(\mathbb{R})$ .

2. Una reacció elemental irreversible l'escriurem per



on  $a, b, \dots, e, f, \dots$  són els coeficients estequiomètrics i  $A, B, \dots, E, F, \dots$  les espècies químiques. Aquest procés té una constant  $k$  anomenada cinètica de la reacció.

Considerem la reacció de dues reaccions elementals irreversibles,



on  $k_1 = 2$  i  $k_2 = 3$  *segons*<sup>-1</sup>. Denotem per  $x$  =concentració de  $A$  en mmol/l en la reacció,  $y$  =concentració de  $B$  en mmol/l i si  $z$ =concentració de  $C$  en mmol/l en la reacció, es té pel principi de conservació de la matèria que  $x + y + z = \text{Constant} = \mathcal{K}$ . Suposem que inicialment hi ha 4mmol/l del component  $A$  (és a dir  $\mathcal{K} = 4 \text{mmol/l}$ ) i sabem que  $x$  i  $y$  satisfan el sistema d'equacions diferencials,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(aquests valors 2 i 3 en la matriu provenen de les constants cinètiques de la reacció que són  $k_1$  i  $k_2$ ).

En aquesta situació, calculeu quan val la concentració del producte  $C$  en aquesta reacció.