Àlgebra lineal i equacions diferencials
Enginyeria Química
Curs 2001/02

I. Exemple de sistema amb valors propis complexos on pensada la matriu A com coeficients a $\mathbb{C}$ diagonalitza a $\mathbb{C}$.
Resoleu

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{X} \tag{1}$$

Calculem primer els valors propis de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ i obtenim que $det(A - xId) = x^2 - 2x + 2$, igualant-ho a zero obtenim que els valors propis son $\lambda = 1 + i$ i $\overline{\lambda} = 1 - i$. Estem doncs en el cas $j = 1$, observeu que la metodologia en números complexos ens donen dos vectors solució columna en aquest cas i com estem en una matriu 2×2 obtindrem la solució general del sistema d'equacions diferencial 1.

Calculem una base per $Ker(A - \lambda Id)$ que té dimensió 1 i triem per exemple la base formada per $K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$. La teoria ens diu que el vector $\overline{K_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$ és una base per $Ker(A - \overline{\lambda} I)$. Aplicant que $B_{1,1} = \frac{1}{2}[K_1 + \overline{K_1}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $B_{2,1} = \frac{i}{2}[K_1 - \overline{K_1}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ on ara $\beta = 1$ i $\alpha = 1$ obtenim les solucions per la equació homogènea,

$$\mathfrak{X}_{1,\lambda,1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} cost + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} sint \right) e^t$$

$$\mathfrak{X}_{2,\lambda,1} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} cost - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} sint \right) e^t$$

que son l.i, i com en tenim dos en un sistema de 2 equacions obtenim que hem obtingut la solució general del sistema i

$$\mathfrak{X}_{homog,solucio} = c_1 \mathfrak{X}_{1,\lambda,1} + c_2 \mathfrak{X}_{2,\lambda,1}.$$

II. Exercici. Resoleu el següent sistema d'equacions diferencials

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{X} \tag{2}$$

.

III. Exemple de sistema amb valor propi real λ amb multiplicitat > 1 i que $dim_{\mathbb{R}} Ker(A - \lambda I) = 1$.

Resoleu

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathfrak{X} \tag{3}$$

Calculem el polinomi característic associat a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i trobem que és $(x-2)^3$, per tant tenim un únic valor propi per A que és 2 que té multiplicitat 3. Calculem una base de vectors propis de valor propi 2, es a dir una base per $Ker(A - 2Id)$ i obtenim que té dimensió 1 i podem triar com base $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tenim sol un vector propi, per tant la base que triarem per trobar les solucions ha de ser per força (via Jordan, aixi es com s'anomena la manera que hem fet per triar les bases per donar les solucions)

on aquí $s = 3$ per força. Fixem-nos que b volem que sigui $(A-2Id)^2 u_{1,1}$ per un vector $u_{1,1}$ que compleix $(A-2Id)^3 u_{1,1} = 0$ i $(A-2Id)^2 u_{1,1} \neq 0$ i la base de $Ker(A - 2Id)^3$ per donar la solució segons a teoria seria $u_{1,1}, (A - 2Id)u_{1,1}, (A - 2Id)^2 u_{1,1}$ on $(A - 2Id)^2 u_{1,1}$ és justament un vector propi de valor propi 2. Per buscar el $u_{1,1}$ resolem el sistemes $(A - 2Id)q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $(A - 2Id)p = q$. Observem que $u_{1,1} := p$ és el que busquem i $q = (A - 2Id)u_{1,1}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 2Id)^2 u_{1,1}$, resolem aquests sistemes lineals i ens donen que

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; i \;\; p = u_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

per tant obtenim 3 solucions l.i. donades per

$$\mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathfrak{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathfrak{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} e^{2t}$$

per tant com tenim un sistema format per 3 equacions i tenim 3 solucions l.i., obtenim que la solucio general del sistema 3 és

$$\mathfrak{X}_{homog} = c_1 \mathfrak{X}_1 + c_2 \mathfrak{X}_2 + c_3 \mathfrak{X}_3$$

amb c_1, c_2, c_3 constants.

IV. Tobeu la solució general del sistema no homogeni,

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \mathfrak{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Primer resolem el sistema homogeni,

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \mathfrak{X} \tag{5}$$

la matriu $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ té valors propis $-2, -5$ i un vector de valor propi -2 és per exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i un de valor propi -5 és $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Observem que A diagonalitza per tant obtenim que les solucions del sistema homogeni 5 és

$$\mathfrak{X}_{homog} = c_1 \begin{pmatrix} 1e^{-2t} \\ 1e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Anem a trobar una solució particular, anem a seguir com hem fet la teoria utilitzant la variació de paràmetres. Seguint la notació de teoria tenim,

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

calculem la inversa de l'anterior matriu i obtenim que és

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

La teoria ens diu que obtenim la solució particular calculant

$$\Phi \int \Phi^{-1} F(t) dt \tag{6}$$

on $F(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ en el nostre cas.

Anem a calcular doncs 6 en la nostra situació. Hem de calcular

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt.$$

Observeu que

$$\int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

on la ultima igualtat be de que integrar una matriu es integrar cada funció en cada posició i posar aquesta funcio integrada en el mateix lloc (fila i columna de la matriu) que ocupava la funcio sense integrar.

Per tant obtenim que l'expressió 6 és igual a

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

per tant obtenim que la solució de 4 bé donada per

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{homog} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Observació: Com la matriu A diagonalitza a $\mathbb{R}$ aquest exercici també l'hagessim pogut fer fent el canvi de variables via P, com haviem explicat la resolució de sistemes $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} + F(t)$ quan A era una matriu diagonalitzable a $\mathbb{R}$.

V. Resoldre el sistema 4 amb la condició que $\mathfrak{X}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{27}{50} \\ -\frac{21}{50} \end{pmatrix}$.

Tenim la igualtat

$$\begin{pmatrix} -\frac{27}{50} \\ -\frac{21}{50} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2*0} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5*0} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} 0 - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-0}.$$

això ens dona un sistema per c_1, c_2 següent,

$$\begin{pmatrix} -\frac{27}{50} \\ -\frac{21}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - \frac{27}{50} + \frac{1}{4} \\ c_1 - 2c_2 - \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'on obtenim que $c_2 = \frac{1}{12}$ i $c_1 = -\frac{1}{3}$ per tant la solució demanada és

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}.$$

VI. **Exemple equació dif. d'ordre n lineal homogenea a coef.constants.** Resoleu

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 5y^{(4)} - 16y^{(3)} - 24y'' = 0$$

on $y = y(t)$.

Per això considerem l'operador derivar $D = \frac{d}{dt}$, l'anterior equació diferencial es pot escriure per

$$P(D)y = 0$$

on $P(D) = D^6 - 2D^5 + 5D^4 - 16D^3 - 24D^2$, hem de buscar la factorització a $\mathbb{C}$ del polinomi $P(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 24x^2$, buscant les arrels via Ruffini i resolent els polinomis que ens surt despres de treure totes les arrels reals obtenim $P(x) = x^2(x+1)(x-3)(x-i2\sqrt{2})(x+i2\sqrt{2})$ és a dir tenim arrel 0 amb multiplicitat 2,arrel -1 amb multiplicitat 1, arrel 3 amb multiplicitat 1, arrels a $\mathbb{C}$ $\pm i2\sqrt{2}$ amb multiplicitat 1. A cada arrel li corresponen tantes solucions l.i. de la homogenea com la seva multiplicitat, per tant obtenim:

$$de\ l'arrel\ 0:\ e^{0t} = 1,\ te^{0t} = t$$

$$de\ l'arrel\ -1:\ e^{-1t} = e^{-t}$$

$$de\ l'arrel\ 3:\ e^{3t}$$

$$de\ les\ arrels\ \{\pm 2\sqrt{2}i\}: e^{0t}cos(2\sqrt{2}t) = cos(2\sqrt{2}t),$$

$$i\ tambe\ la\ solucio\ e^{0t}sin(2\sqrt{2}t) = sin(2\sqrt{2}t)$$

per tant la solució general és

$$y_{solucio}(t) = c_1 1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{3t} + c_5 cos(2\sqrt{2}t) + c_6 sin(2\sqrt{2}t)$$

amb $c_1, \ldots, c_6$ constants.

Observació: fixeu-vos que obtenim 6 funcions solució l.i. que correspon al ordre de la equació diferencial, aixo recordeu es un fet general, es necesita sempre per resoldre una equació diferencial a coeficients constants (aquesta condicio pot ser mes general) d'ordre n homogenea en general (sense condicions frontera) trobar n funcions l.i. que siguin solució de la equació (és un teorema donat a classe en el tema 3).

VII. **Cas no homogeni, mètode 1: variació de paràmetres** Estem buscant la solució de

$$P(D)y = g(t)$$

on sabem que la solució general de $P(D)y = 0$ ve donada per $y_{homog} = c_n f_n + \ldots + c_n f_n$, i la solució buscada per $P(D)y = g(t)$ s'escriu per

$$y_{part} + y_{homog}$$

on y_{part} és una solució concreta qualsevol per $P(D)y = g$. Anem aquí a explicitar com el mètode 1 de variació de paràmetres ens permet trobar aquest y_{part}. Busquem solucions particulars de la forma

$$y_{part} = c_n(t)f_n + \ldots + c_n(t)f_n$$

on ara $c_i(t)$ son funcions en t a determinar(les funcions f_i les coneixem de calcular la solució de la equació homogènea associada $P(D)y = 0$). Anem a imposar que y_{part} ha de satisfer $P(D)y = g(t)$, això ens dona (no directe) un sistema de equacions lineals amb u_i' com a incognites; usant la regla de Cramer s'obté,

$$u_k(t)' = \frac{W_k}{W},\ k = 1, \ldots, n;$$

on $W = W(f_1, \ldots, f_n)$ és el wronskià de $f_1, \ldots, f_n$ i W_k és el determinant que s'obté sustituint la columna k-èssima del wronskià de $f_1, \ldots, f_n$ per la columna $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$, i observeu $u_k' = \frac{W_k}{W}$ es una equació de variables separables de primer grau, d'aquí obtenim $u_k(t)$ concretes i per tant una solució particular.

Exemple: Resoldre $y'' + 8y = 5t + e^{-t}$.(cas amb n=2)

Calculem primer la solució de la equació homogènea, $y'' + 8y = 0$, tenim $P(x) = x^2 + 8$ on els zeros son $\pm i2\sqrt{2}$ amb multiplicitat 1, per tant tenim

$$y_{homog} = c_1 sin(2\sqrt{2}t) + c_2 cos(2\sqrt{2}t).$$

Busquem solucions particulars de la forma

$$y_{part} = c_1(t)sin(2\sqrt{2}t) + c_2(t)cos(2\sqrt{2}t),$$

observem que aquí el wronskià és

$$W(sin(2\sqrt{2}t), cos(2\sqrt{2}t)) = \begin{vmatrix} sin(2\sqrt{2}t) & cos(2\sqrt{2}t) \\ 2\sqrt{2}cos(2\sqrt{2}t) & -2\sqrt{2}sin(2\sqrt{2}t) \end{vmatrix} = -4\sqrt{2}$$

(en general el wronskià sera una funció en t, pero en el nostre cas surt una constant), calculem quan val W_1 i W_2, que són respectivament,

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & cos(2\sqrt{2}t) \\ 5t + e^{-t} & -2\sqrt{2}sin(2\sqrt{2}t) \end{vmatrix},\ W_2 = \begin{vmatrix} sin(2\sqrt{2}t) & 0 \\ 2\sqrt{2}cos(2\sqrt{2}t) & 5t + e^{-t} \end{vmatrix}.$$

on obtenim que $c_1'(t) = \frac{cos(2\sqrt{2}t)(5t+e^{-t})}{4\sqrt{2}}$ i $c_2'(t) = \frac{-sin(2\sqrt{2}t)(5t+e^{-t})}{4\sqrt{2}}$, per tant

$$y_{part} = (\int \frac{cos(2\sqrt{2}t)(5t+e^{-t})}{4\sqrt{2}}dt)sin(2\sqrt{2}t)+(\int \frac{-sin(2\sqrt{2}t)(5t+e^{-t})}{4\sqrt{2}})cos(2\sqrt{2}t)$$

i la solució general és

$$y_{homog} + y_{part}$$

VIII. Resoldre $y'' + 8y = 5t + e^{-t}$ (amb el mètode 2).
Considerem la equació homogènia $P(D)y = 0$ amb $P(D) = D^2 + 8$. Tenim que

$$y_{homog} = c_1 sin(2\sqrt{2}t) + c_2 cos(2\sqrt{2}t)$$

ja que $P(x)$ té arrels $\pm i2\sqrt{2}$ amb multiplicitat 1. La solució general del la equació $y'' + 8y = 5t + e^{-t}$ és $y_{homog} + y_{part}$, anem a buscar una solució particular. Busquem un polinomi $P_1(x)$ on $P_1(D)$ anul.li $g(t) = 5t + e^{-t}$. Observem que $\frac{d^2}{d^2t}5t = 0$, és a dir $D^2(5t) = 0$ i $(D+1)e^{-t} = 0$, per tant considerem $P_1(D) = D^2(D-1)$, $(P_1(x) = x^2(x-1))$, fixem-nos que $P_1(D)(5t + e^{-t}) = 0$, considerem llavors la nova equació diferencial

$$P_1(D)P(D)z = 0$$

com les arrels de $P_1(x)P(x)$ són 0(amb multiplicitat 2),-1(mulitplicitat 1),$\pm i2\sqrt{2}$(mulitplicitat 1), tenim que la solució és

$$z_{homog} = k_1 + k_2 t + k_3 e^{-t} + k_4 sin(2\sqrt{2}t) + k_5 cos(2\sqrt{2}t)$$

per tant busquem solucions particular pel nostre sistema de la forma,

$$y_{part} = k_1 + k_2 t + k_3 e^{-t}$$

anem a sustituir a l'equació $y'' + 8y = 5t + e^{-t}$ per obtenir un sistema que ens determinarà k_1, k_2, k_3.

$$y'_{part} = k_2 - k_3 e^{-t}$$

$$y''_{part} = k_3 e^{-t}$$

per tant obtenim la igualtat al sustiuir a $y'' + 8y = 5t + e^{-t}$:

$$k_3 e^{-t} + 8(k_1 + k_2 t + k_3 e^{-t}) = 5t + e^{-t}$$

ara com les funcions $1, t, e^{-t}$ són l.i. igualant la igualtat funció per funció obtenim:

$$k_3 + 8k_3 = 1,\ 8k_1 = 0,\ 8k_2 t = 5t$$

per tant

$$y_{part} = \frac{5}{8}t + \frac{1}{9}e^{-t}.$$

IX. Resoldre $y^{''} + 8y = 5t + e^{-t}$ amb $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

En l'apartat anterior hem vist que la solució general de $y^{''} + 8y = 5t + e^{-t}$ ve donada per,

$$y_{sol} = c_1 sin(2\sqrt{2}t) + c_2 cos(2\sqrt{2}t) + \frac{5}{8}t + \frac{1}{9}e^{-t}.$$

Anem a imposar les condicions $y(0) = y'(0) = 1$ a la solució general per tal d'obtenir la solució demanada (un resultat de teoria us afirma que la solució és única!). Tenim que de $y(0) = 1$ obtenim

$$1 = c_1 sin0 + c_2 cos0 + \frac{5}{8}0 + \frac{1}{9}e^0$$

i de $y'(0) = 1$ com $y'_{sol} = c_1 2\sqrt{2}cos(2\sqrt{2}t) - c_2 2\sqrt{2}sin(2\sqrt{2}t) + \frac{5}{8} - \frac{1}{9}e^{-t}$ obtenim

$$1 = 2\sqrt{2}c_1 cos0 - 2\sqrt{2}c_2 sin0 + \frac{5}{8} - \frac{1}{9}e^0$$

per tant obtenim el sistema lineal

$$\begin{cases} 0c_1 + c_2 = \frac{8}{9} \\ 2\sqrt{2}c_1 + 0c_2 = \frac{35}{72} \end{cases}$$

per tant la solució demanada és

$$\frac{35}{144\sqrt{2}} sin(2\sqrt{2}t) + \frac{8}{9}cos(2\sqrt{2}t) + \frac{5}{8}t + \frac{1}{9}e^{-t}.$$

X. **Com d'una equació diferencial d'ordre n podem passar a un sistema de n equacions diferencials d'ordre 1.**

Comencem primer amb un exemple concret, considerem l'equació diferencial d'ordre 2

$$y'' + 4y' + 2y = e^t$$

posem $z(t) = y'(t)$ llavors podem escriure l'anterior equació pel següent sistema format per 2-equacions:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -4y' - 2y + e^t = -4z - 2y + e^t \end{cases}$$

escrivint per $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ obtenim el sistema

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \mathfrak{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},$$

que correspon a un sistema d'equacions lineal de primer ordre.

Anem a pasar un equació lineal d'ordre n a un sistema d'equ. diferencials d'ordre 1 format per n-equacions, en generalitat.

Escrivim una equació lineal d'ordre n per

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

denotem per $y_i(t) := y^{(i)}(t)$ la derivada i-èssima de la funció y respecte parametre t, observem que tenim el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y_0' = y'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y''(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-2}'(t) = y^{(n-1)}(t) = y_{n-1}(t) \\ y_{n-1}'(t) = y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \ldots - a_1(t)y' - a_0(t)y + g(t) \\ = -a_{n-1}(t)y_{n-1} - \ldots - a_1(t)y_1 - a_0(t)y_0 + g(t) \end{array}\right.$$

es a dir obtenim el següent sistema,

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & 1 \\ -a_0 & \ldots & & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

per tant tota equació d'ordre n la transformem en un sistema de n-equacions d'ordre 1.
Observació: Això ens diu que resoldre una equació diferencial d'ordre n es equivalent a resoldre un sistema d'equacions diferencials d'ordre 1.

XI. **Passar un sistema d'equacions diferencials d'ordre 1 format per n equacions a una equació diferencial d'ordre n.**
Anem a veure-ho en un exemple. Utilitzem el mètode de sustitució.

Considerem el sistema,

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -x - y + 2e^{-t} \\ y' = & 4x - y \end{array}\right.$$

és a dir el sistema, $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathfrak{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ a on $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Agafem la segona equació del sistema, es a dir $y' = 4x - y$ i derivem-la respecte t obtenim

$$y'' = 4x' - y'$$

volem obtenir una igualtat sol depengui de y, les derivades en y i funcions en t, per tant el $4x'$ ens molesta. Anem a la primera equació del sistema que ens diu $x' = -x - y + 2e^{-t}$ sustituint x' obtenim

$$y'' = 4x' - y' = -4x - 4y + 8e^{-t} - y'$$

encara hi ha $-4x$ molestant pero la segona equacio del sistema ens diu que $-4x = -y' - y$ per tant obtenim

$$y'' = -4x - 4y + 8e^{-t} - y' = -y' - y - 4y + 8e^{-t} - y' = -2y' - 5y + 8e^{-t}$$

una equació d'ordre 2 en y que és

$$y'' + 2y' + 5y = 8e^{-t}$$

per tant resolent aquesta eq.dif. d'ordre 2 obtenim $y_{solucio}$ i com de $y' = 4x - y$ tenim que $x_{solucio} = \frac{y'_{solucio} + y_{solucio}}{4}$ obtenint la solució del sistema $(x(t), y(t))$.

Observació: Obtenim que resoldre aquest sistema de 2 equacions, es pot fer resolent una equacio d'ordre 2 i despres per sustitució trobar la solució del sistema.

XII. **Una idea per la resolució de equacions diferencials.** Una equació diferencial arbitrària es usualment dificil de resoldre a excepció que es correspongui a un dels tipus "estandard", part d'ells han estat explicats al llarg de les últimes semanes d'aquest curs.

Una idea general per intentar trobar una solució d'una equació diferencial arbitrària

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

al voltant de un punt $x = x_0$, pensant que busquem solucions infinitament diferenciables (funcions molt bones) seria buscar funcions de la forma

$$y(x)_{candidat} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n$$

i tota funció en x que ens apareix a l'equació $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ la sustituim pel seu desenvolupament de Taylor al voltant del x_0, d'aquesta manera com $(x - x_0)^j$ son l.i., igualant per cada j els coeficients de $(x - x_0)^j$ que ens dona la equació $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ podem obtenim els c_n i d'aquí una solució de la equació diferencial si es que aquesta serie ens convergeix.