Àlgebra lineal i equacions diferencials
Química
Curs 2001/02
Exemple de diagonalització.

Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Calculeu els valors propis de la matriu A. Calculeu els vectors propis pels valors propis anteriors. Decidiu si la matriu A diagonalitza o no. En cas afirmatiu trobeu una base en que diagonalitza. Quina seria la matriu en aquesta base. Trobeu la matriu P del canvi de base de la base en que diagonalitza en la base en que estava expressada A. Calculeu A^n.
-Càlcul dels valors propis.
Per això cal trobar els zeros del polinomi caracteristic,

$$det(A - \lambda Id)$$

on λ és la variable. Fixeu-vos que

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & -3 \\ 3 & -1-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -3 \\ 3 & -1-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4.$$

Els zeros del polinomi $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$ són (ho podeu fer utilizant Ruffini) $\{-1, 2\}$, per tant A té dos valors propis que són $\{-1, 2\}$.
-Càlcul de vectors propis.

I. Càlcul de $Ker(A - (-1)Id)$, en particular calcul dels vectors propis de valor propi -1.
   Observeu que

$$A - (-1)Id = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

busquem el nucli, per això hem de resoldre el sistema,

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim el sistema

$$\begin{cases} 6x - 3y - 3z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

Ens dona un S.C.I. amb 1 grau llibertat amb solució, $x = y = z$, per tant

$$Ker(A - (-1)Id) = \{(x, x, x) | x \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, 1) >$$

per tant té dimensió 1, i una base seria per exemple$\{(1, 1, 1)\}$. (Observeu que tot element diferent del zero de $Ker(A - (-1)Id)$ és un vector propi de valor propi -1 per la matriu A).

II. Càlcul de $Ker(A - 2Id)$ i en particular dels vectors propis de valor propi 2.
Observeu que

$$A - (2)Id = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

busquem el nucli, per això hem de resoldre el sistema,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim el sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y - 3z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ens dona un S.C.I. amb 2 graus de llibertat amb solució, $x = y + z$, per tant

$$Ker(A - (2)Id) = \{(y + z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, 0), (1, 0, 1) >$$

fixeu-vos que aquests dos generados del s.e.v. $Ker(A - 2Id)$ són L.I., per tant $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ són una base per $Ker(A - 2Id)$ per tant té dimensió 2. (Observeu que tot element diferent del zero de $Ker(A - (2)Id)$ és un vector propi de valor propi 2 per la matriu A).

-Decidir si A diagonalitza.

Com $dim(Ker(A-2Id))+dim(Ker(A-(-1)Id)=2+1=3$ i la matriu es 3×3 tenim que diagonalitza (recordeu que aquestes dimensions eren els graus de llibertat que ens surten en resoldre els sistemes $(A-2Id)X=O$ i $(A-(-1)Id)X=0$ respectivament, o també en la nostra situació $3-rang(A-2Id)$, $3-rang(A-(-1)Id)$ respectivament).

Per trobar una base on diagonalitza, ajuntem les bases de $Ker(A-(2)Id)$ i $Ker(A-(-1)Id)$ tenim la familia $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ en tenim 3 elements i com estem a una matriu A que és a $M_3(\mathbb{R})$ matriu 3×3 (això ens tornaria a afirmar que A diagonalitza(3(elements)=3(matriu3x3)). La teoria afirma, que els nuclis de $(A-\mu Id)$ de valors propis μ diferents estan en suma directa, per tant tenim

$$\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

són L.I. i com en tenim 3, tenim que és una base.

-Càlcul de la matriu en la base on diagonalitza.
Hem triat la base $\{(1,1,0)=e_1,(1,0,1)=e_2,(1,1,1)=e_3\}$ com sabem que $Ae_1=2e_1$ ($A(e_1+0e_2+0e_3)=2e_1+0e_2+0e_3$ i recordeu que $ae_1+be_2+ce_3=(a,b,c)_{\mathcal{C}}$ són les coordenades del vector en la base $\mathcal{C}=\{e_1,e_2,e_3\}$), $Ae_2=2e_2$ i $Ae_3=-1e_3$ per ser vectors propis, llavors la matriu s'escriu

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Observació 1: Si la base fos $\{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\}$ llavors la matriu en aquesta base és

$$D'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

.

Si triesiu per base $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$, la matriu en aquesta base seria

$$D''=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Observació 2(teòrica): La matriu A sempre la podem pensar que és la matriu associada a un endomorfisme $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ fixant una base $\mathcal{B}$, és a dir

$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Les coordenades que estem fent tot l'exercici fins ara serien amb coordenades respecte la base $\mathcal{B}$. Per raons pràctiques "pensem" que aquesta base $\mathcal{B}$ sigui la base canònica.
-Càlcul de la matriu canvi de base P de la base que hem triat que diagonalitza amb la base que estava expressat A.
Hem triat com a base $\mathcal{W} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ on la matriu en aquesta base s'escriu en la forma diagonal D escrita anteriorment. Anem a calcular el canvi de base demanat. Hem de fer el canvi de

$$\{base\ \mathcal{W}\} \to \{can\}$$

per tant la matriu canvi de base és posar els vectors de $\mathcal{W}$ en columna,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observació(teòrica): Realment la base de vectors propis $\mathcal{W}$ esta expressada en coordenades en una base $\mathcal{B}$ (veure observació 2 anterior apartat) i el canvi de base seria de passar la base $\mathcal{W}$ a la base $\mathcal{B}$, però com estem expressant tot el problema pensant en coordenades en la base $\mathcal{B}$ (entendre la observació 2 en l'apartat anterior) és equivalent a pensar que $\mathcal{B}$ és com la base canònica.
-Càlcul de A^n amb n un natural.
Hem dit que podem pensar que $A = M(f, can, can)$ i $P = M(id, \mathcal{W}, can)$ i $D = M(f, \mathcal{W}, \mathcal{W})$. Llavors tenim la següent igualtat

$$A = PDP^{-1},\ i\ D = P^{-1}AP.$$

Per calcular A^n és el càlcul de

$$PD^nP^{-1}.$$

Hem calculat abans P, també sabem D i per tant

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular P^{-1} a partir de P, per això podeu utilitzar el metode de Gauss posam la matriu Id_3 o via la formula utilitzant adjunts. Un càlcul prova que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

, llavors

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calculant el producte de matrius,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & (-1)^n \\ 2^n & 0 & (-1)^n \\ 0 & 2^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & -2^n + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & -2^n + (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Observació: Aquí sustituint per $n = 1$ heu de retrobar la matriu A inicial del principi.