1 Resultats per a sistemes d'equacions diferencials lineals.

Imaginem que tenim un sistema d'equacions diferencials lineals (homogeni), amb això vull dir per exemple si volem saber el moviment d'una partícula en l'espai $(x(t), y(t), z(t))$ però en que sol coneixem el valor de les derivades de x, y, z en funció de les funcions x, y, z, amb això vull dir que coneixem el següent(per exemple el sistema d'equacions diferencials lineals (homogeni) següent):

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (2x(t) + 3y(t), x(t) + 3z(t), x(t) + y(t) + z(t)),$$

escrivint en llenguatge matricial, escriuriem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Escrivint en notació general un sistema d'equacions diferencials lineals (homogeni) com

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A(t)\mathfrak{X} \tag{1}$$

on $A(t)$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients formats per funcions continues en $\mathbb{R}$ i $\mathfrak{X}$ és un vector columna (incognites) amb n files format per funcions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. (Fixem-nos l'exemple anterior seria amb $n = 3$ i amb els coeficients de $A(t)$ formats per funcions constants iguals a els números que indicàvem).

Teorema 1.1 (Cas homogeni). *Considerem el sistema d'equacions diferencials lineals*

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A(t)\mathfrak{X} \tag{2}$$

on $A(t)$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients formats per funcions continues en $\mathbb{R}$ i $\mathfrak{X}$ és un vector columna (incognites) amb n files format per funcions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

Llavors l'anterior sistema té solució. Anomenem per W el conjunt format per totes les solucions del sistema, és a dir

$$W = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \mathfrak{X} | \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A(t)\mathfrak{X}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$$

és un $\mathbb{R}$-s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$ i $dim_{\mathbb{R}}(W) = n$.

Més precisament, existeixen n-vectors columna $\mathfrak{X}_1(t), \ldots, \mathfrak{X}_n(t)$ linealment independents que són solució del sistema 2, i tota solució del sistema 2 s'escriu per

$$\mathfrak{X}_{homog} = c_1\mathfrak{X}_1 + \ldots + c_n\mathfrak{X}_n$$

amb c_i son constants reals.

Teorema 1.2 (Cas homogeni). *Considerem el sistema d'equacions diferencials lineals*

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} \tag{3}$$

on A és una matriu $n \times n$ amb coeficients a $\mathbb{R}$ i $\mathfrak{X}$ és un vector columna (incognites) amb n files format per funcions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

Llavors l'anterior sistema té solució. Anomenem per W el conjunt format per totes les solucions del sistema, és a dir

$$W = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \mathfrak{X} | \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$$

és un $\mathbb{R}$-s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$ i $dim_{\mathbb{R}}(W) = n$.

Més precisament, existeixen n-vectors columna $\mathfrak{X}_1(t), \ldots, \mathfrak{X}_n(t)$ linealment independents que són solució del sistema 3, i tota solució del sistema 3 s'escriu per

$$\mathfrak{X}_{homog} = c_1\mathfrak{X}_1 + \ldots + c_n\mathfrak{X}_n$$

amb c_i son constants reals.

Observació 1.3. Si afegim condicions en el temps $t = t_0$ concret que ha de satisfer $x_1(t_0), \ldots, x_n(t)$ llavors sol hi ha un únic vector en W que satisfà aquestes condicions concretes.

Com trobem la base de W? Sol fem el cas que A és una matriu a coeficients a $\mathbb{R}$.

Teorema 1.4. *Considerem el sistema*

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} \tag{4}$$

amb $A \in M_n(\mathbb{R})$ i suposem que A diagonalitza a $\mathbb{R}$ amb base de vectors propis $v_1, \ldots, v_n$ amb valors propis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Llavors els n vectors de W:

$$\mathfrak{X}_1 = e^{\lambda_1 t}v_1, \ldots, \mathfrak{X}_n = e^{\lambda_n t}v_n$$

són $\mathbb{R}$-l.i. i per tant són una base de W i per tant tota solució del sistema

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} \tag{5}$$

s'escriu com c.l. dels aquest n vectors de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$.

Exemple 1.5. *Considereu el següent sistema diferencial lineal (homogeni):*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

I anem a resoldre'l.

Observem que $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ i aquesta matriu és l'exemple que teniu a les llistes "d'un exemple de diagonalització". Mireu-lo a la pagina web i obteniu que aquesta matriu A diagonalitza a $\mathbb{R}$ amb la base de vectors propis

$$\{(1,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$$

amb valors propis respectivament

$$2, 2, -1$$

, per tant tenim que els següents vectors són la base pel subespai de solucions del sistema d'equacions diferencials lineals que l'exercici us proposa. El subespai vectorial W *de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^3$ *donat per*

$$W = \{(x, y, z) | \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \}$$

té per base els següents vectors de W *(usant el teorema anterior):*

$$e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es a dir tot $(x, y, z) \in W$ *s'escriu per*

$$c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

amb $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$= c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Observació: si us demanesim que voleu que el moviment de (x, y, z) *compleixi que en el temps zero la* x *val un valor, la* y *un altre valor i la* z *un valor concret, determinarieu uns* $c's$ *concrets donant un vector concret de* W*.*

Teorema 1.6. *Considerem el sistema*

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} \tag{6}$$

amb $A \in M_n(\mathbb{R})$ *i suposem que* A *diagonalitza a* $\mathbb{C}$ *i no a* $\mathbb{R}$ *amb base de vectors propis* $v_1, \ldots, v_n$ *amb valors propis* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Llavors els* n *vectors:*

$$e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, e^{\lambda_n t} v_n$$

són $\mathbb{R}$*-l.i. però com els* λ_i *algun serà complex no seran funcions d'una variable real per això fem el següent procediment per trobar-ne els generadors.*
Siguin $v_1, \ldots, v_i$ *els vectors propis de la base on* A *diagonalitza amb vectors propis reals* $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$*. Ordenem els valors propis complexos de dos en dos (un valor i el seu conjugat (que també és valor propi per* A*), i sol triem els vectors propis de la llista anterior corresponen a un d'aquests dos, i així triem*

$v_{i+1}, \ldots, v_{i+k}$ (observeu $i + 2k = n$). Llavors els següents n vectors són una base per W:

$$e^{\lambda_1 t} v_1, \ldots, e^{\lambda_i t} v_i, Re(e^{\lambda_{i+1} t} v_{i+1}), Im(e^{\lambda_{i+1} t} v_{i+1}), \ldots Re(e^{\lambda_{i+k} t} v_{i+k}), Im(e^{\lambda_{i+k} t} v_{i+k})$$

i per tant són una base de W i per tant tota solució del sistema

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X} \tag{7}$$

s'escriu com c.l. dels aquest n vectors de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^n$.

Exemple 1.7. *Considereu el següent sistema diferencial lineal (homogeni): (Exemple de sistema amb valors propis complexos on pensada la matriu A com coeficients a $\mathbb{C}$ diagonalitza a $\mathbb{C}$).*
Resoleu

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{X} \tag{8}$$

Una resolució. Calculem primer els valors propis de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ i obtenim que $det(A - xId) = x^2 - 2x + 2$, igualant-ho a zero obtenim que els valors propis son $\lambda = 1 + i$ i $\overline{\lambda} = 1 - i$. Estem doncs en el cas $j = 1$, observeu que la metodologia en números complexos ens donen dos vectors solució columna en aquest cas i com estem en una matriu 2×2 obtindrem la solució general del sistema d'equacions diferencial 8.

Calculem una base per $Ker(A - \lambda Id)$ que té dimensió 1 i triem per exemple la base formada per $K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$. Aplicant ara el teorema 1.6 anterior obtenim d'aquest vector dos vectors columna solució

$$B_1 = Re(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}) = Re(\begin{pmatrix} 2e^t e^{it} \\ ie^t e^{it} \end{pmatrix}) = Re(\begin{pmatrix} 2e^t cos(t) + i2e^t sin(t) \\ ie^t cos(t) - e^t sin(t) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2e^t cos(t) \\ -e^t sin(t) \end{pmatrix}$$

i,

$$B_2 = Im(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}) = Im(\begin{pmatrix} 2e^t e^{it} \\ ie^t e^{it} \end{pmatrix}) = Im(\begin{pmatrix} 2e^t cos(t) + i2e^t sin(t) \\ ie^t cos(t) - e^t sin(t) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2e^t sin(t) \\ e^t cos(t) \end{pmatrix}$$

que són l.i, i com en tenim dos en un sistema de 2 equacions obtenim que hem obtingut la solució general del sistema que són

$$c_1 B_1 + c_2 B_2.$$

□