1 Generadors i base per a solucions d'equacions diferencials homogènees a coeficients constants

Teorema 1.1. *Donat el* $\mathbb{R}$*-s.e.v* $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues*$|a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\}$ *amb* $a_n(x) \neq 0$ *per tot* $x \in \mathbb{R}$ *i* $a_i(x)$ *funcions continues; és un* $\mathbb{R}$*-s.e.v. de dimensió finita igual a* n*.*

Quan escrivim y pensem funció en una variable en x, és a dir $y = y(x)$ i derivar vol dir respecte la variable, en aquesta situació la x. Igualment sempre seran funcions infinitament diferenciables (=que son posible derivar-les tants cops com volguem) (en aquests apunts).

Teorema 1.2. *(Cas concret del teorema anterior) Donat el* $\mathbb{R}$*-s.e.v* $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues*$|a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$ *amb* a_i *números reals amb* $a_n \neq 0$ *és un* $\mathbb{R}$*-s.e.v. de dimensió finita igual a* n*.*

Proposició 1.3. *Donat un polinomi* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *amb* a_i *numeros reals i* $a_n \neq 0$*. Sigui* α *una arrel real de* $p(x)$ *amb multiplicitat* k*. Llavors les funcions (n'hi ha* k*)*

$$y(x) = e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x}, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}$$

satisfan que són vectors del subespai vectorial

$$W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$$

a més aquestos vectors son $\mathbb{R}$*-l.i.*

Exemple 1.4. *Considerem* $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | y'' - 4y' + 4y = 0\}$*. Considereu el polinomi* $x^2 - 4x + 4 = 0$ *té arrel* 2 *amb multiplicitat 2. L'enunciat anterior ens afirma que dos vectors de* W *son les funcions* $y = e^{2x}$ *i la funció* $y = xe^{2x}$*. (Comproveu que si la funció* e^{2x} *la derives dos cops i a aquesta funció, li restes -4 cops la derivada de* e^{2x} *i li sumes 4 cops la funcio dona zero (estic dient satisfa l'equacio diferencial que defineix el s.e.v.* W*).*

Proposició 1.5. *Donat un polinomi* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *amb* a_i *numeros reals i* $a_n \neq 0$*. Sigui* $\alpha = a + bi$ *una arrel complexa i no real de* $p(x)$ *amb multiplicitat* k *(*$a, b \in \mathbb{R}$*). Llavors les funcions (n'hi ha* $2k$*)*

$$y(x) = sin(bx)e^{ax}, cos(bx)e^{ax},\ xsin(bx)e^{ax}, xcos(bx)e^{ax}, \ldots,\ x^{k-1}sin(bx)e^{ax}, x^{k-1}cos(bx)e^{ax}$$

satisfan que són vectors del subespai vectorial

$$W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$$

a més aquests $2k$ *vectors son l.i.*

Exemple 1.6. *Considerem* $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | y^{(iv)} + 2y'' + y = 0\}$*. Considereu el polinomi* $x^4 + 2x + 1 = (x^2 + 1)^2 = 0$ *té arrel* $i = 0 + 1i$ *amb multiplicitat 2. L'enunciat anterior ens afirma que quatre vectors de* W *son les funcions* $y = sin(x)$*,* $y = cos(x)$*,* $y = xsin(x)$ *i* $y = xcos(x)$

Proposició 1.7. *Sigui* $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues*$| a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$ *amb* a_i *números reals amb* $a_n \neq 0$ *que és un* $\mathbb{R}$*-s.e.v.*
Per a trobar generadors de W *fem el segënt:*
Considereu el polinomi $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$*.*
Busqueu les arrels del polinomi anterior. Llisteu primer les arrels reals amb multiplicitat. Despres llisteu les arrels complexes (i no reals)amb la seva multiplicitat, pero agafant d' una arrel complexa i la seva conjugada (que també hi serÓ) sol una d'ambdues.
De cada arrel de les llistes obteniu funcions com feiem abans.
Ajuntem totes les funcions i obtenim que aquestes generen W*. (Fixeu-vos que en teniu exactament* n*, si si, a mes aquestes funcions resulta ser l.i. i per tant una base de* W*).*

Exemple 1.8. *Trobeu generadors per el s.e.v.*

$$W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | y^{(v)} - 2y^{(iv)} - 3y^{iii} + 6y'' - 4y' + 8y = 0\}$$

Considerem el polinomi

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 8$$

les arrels d'aquest polinomi son: 2(amb multiplicitat 2),-2(amb multiplicitat 1), i(amb multiplicitat 1), -i(amb multiplicitat 1), tenim que de i i $-i$ *sol agafem una ja que una es conjugada de l'altra. Ara de les arrels* $2, -2, i$ *obtenim les funcions que son:*

$$e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, sin(x), cos(x)$$

i el resultat anterior ens diu

$$W = < e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, sin(x), cos(x) >_{\mathbb{R}}$$

També afirma que aquestes funcions son l.i, i com sabem que la dimensió de W *és 5 (per la primera o segona proposició d'aquests apunts) obtenim que*

$$\{e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, sin(x), cos(x)\}$$

és una base de W*.*

Exemple 1.9. *La professora de fisica us deixa el segent exercici: calculeu el moviment de totes les partícules* $x(t)$ *si sabem que la resta de la velocitat amb la seva acceleració és zero.*
Fixeu-vos que us demana calcular els vectors de l'espai vectorial

$$W = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | x'' - x' = 0\}$$

Hem de considerar el polinomi $p(x) = x^2 - x$ *que té arrel* $x = 0$ *i* $x = 1$ *amb multiplicitat 1, per tant tenim que*

$$W = < e^{0t}, e^{1t} > = < 1, e^t >$$

per tant la solucio demanada és

$$x(t) = \lambda 1 + \beta e^t$$

on λ, β *son numeros reals (que si us donen condicions a complir la particula quedaran determinats).(Fixem-nos que hem canviat la notació en aquest exercici el que anomenàvem* $y(x)$ *en aquest exercici és* $x(t)$*).*

2 Relació varietats lineals $\mathbb{R}^n$ i subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$

Recordeu que una varietat lineal a $\mathbb{R}^3$ és un punt, una recta qualsevol, un plà o tot $\mathbb{R}^3$. Podem pensar la següent definició per a varietat lineal de $\mathbb{R}^n$

Definició 2.1. *Una varietat lineal de $\mathbb{R}^n$ és els punts que són solució d'un sistema lineal d'equacions amb n incògnites.*

Exemple 2.2. *La varietat lineal dels punts de l'espai ($\mathbb{R}^3$) que compleixen*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

és un exemple de varietat lineal.

Definició 2.3. *Donada una varietat lineal els graus de llibertat del sistema els anomenem la dimensió de la varietat lineal. Si n'hi ha un (de grau de llibertat) s'anomena recta, si n'hi ha dos (de graus de llibertat) s'anomena plà, si n'hi ha $n-1$ (de graus de llibertat) on n són les incògnites (som a $\mathbb{R}^n$) llavors s'anomena hiperplà.*

Exemple 2.4. *En l'anterior exemple, el sistema tenia un grau de llibertat, per tant les solucions del sistema formen una recta.*

Proposició 2.5. *Considerem la varietat lineal*

$$\tilde{W} = \{(x_1, \ldots, x_n) | A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \}.$$

La varietat lineal es pot escriure com:

$$\alpha + W$$

on α és una solució concreta al sistema lineal $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ i W és el subespai vectorial de l'equació lineal homogenea associada al sistema lineal que és:

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) | A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

La dimensió de la varietat lineal, correspon a la dimensió del espai vectorial W definit pel sistema lineal homogeni associat al sistema lineal que defineix la varietat lineal.

Exemple 2.6. *Calculeu els punts de la varietat lineal*

$$\tilde{W} = \{(x,y,z)|3x+2y+z=4 \text{ i } 2x-3y=4\}.$$

Anem a buscar-ne una solució del sistema, podeu fer servir el mètode de Gauss pero a ull veieu que $(2,0,-2)$ *és un punt de la varietat lineal.*
Busquem generadors de l'e.v. $W = \{(x,y,z)|3x+2y+z=0 \text{ i } 2x-3y=0\}$*, per això podeu usar el mètode de classe, i trobeu que la base d'aquest* W *és per exemple el vector* $(3,2,-13)$*, per tant* $W = <(3,2,-13)>_{\mathbb{R}} = \{\lambda(3,2,-13)|\lambda \in \mathbb{R}\}$*, i la varietat lineal s'escriu:*

$$\tilde{W} = (2,0,-2) + <(3,2,-13)>_{\mathbb{R}} .$$

És a dir tot punt de la varietat lineal és la suma del punt $(2,0-2)$ *amb un vector del s.e.v.* W*.*

3 Relació entre solucions d'una equació diferencial a coeficients constants amb la resolució d'una equació diferencial homogènea (s.e.v)

En aquesta secció busquem de resoldre problemes com el següent:

Exemple 3.1. *Trobeu tots els moviments de partícules de manera que la seva acceleració sigui constant i igual a 2.*

Fixeu-vos que $\tilde{W} = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|x'' = 2\}$ no és un subespai vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ja que $x(t) = 0$ (vector zero per $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) no pertany a $\tilde{W}$.
Imaginem que sabem trobar una funció que és solució del que ens plantegen, és a dir que la seva accelaració és 2 (en aquest curs no ho fem, en teoria ho veureu a Calcull II), per art de magia (no és magic hi ha algoritme pero no ho vull explicar ja que no es temari d'aquest curs sino de Calcul II, sol comento convertir les funcions en arrels i fer una homogenea més gran) veiem que una solució concreta és

$$x(t) = t^2,$$

si si al derivar dues vegades obtenim 2 i per tant una solució concreta dels moviments de partícules amb acceleració constant e igual a 2.
Com trobar les altres solucions un cop trobada una particular? Molt fàcil i això si que ho podem fer en aquest curs!!! Considerem $W = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|x'' = 0\}$ això si que és un s.e.v. i seria la "homogenea" associada a l'equació diferencial $x'' = 2$. Sabem trobar els generadors de W que obtenim $W = <1, t>_{\mathbb{R}}$, i fixem-nos que $t^2 + w$ amb w un vector de W és també solució que al derivar dos cops ens dona 2, és de $\tilde{W}$, i és un fet que aquestes són totes (si resteu dos solucions concretes de $\tilde{W}$ us dona una solució de W i per tant una d'aquestes solucions concretes s'escriu com l'altra solució concreta sumant un vector concret de W), per tant obtenim que

$$W = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|x'' = 2\} = \{x(t) = t^2\} + <x(t) = 1, x(t) = t>_{\mathbb{R}} = \{x(t) = t^2 + \lambda 1 + \beta t|\lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 3.2. *Donada una equació diferencial a coeficients constants*

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

amb $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ *i* $g(x)$ *una funció continua qualsevol; les funcions* $y(x)$ *solucions de l'anterior equasió diferencial són:*
La suma d'una solució particular de l'equació diferencial amb un vector de l'espai vectorial associat a l'equació diferencial homogenea associada a l'anterior equació diferencial que és $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$,
és a dir les solucions són:
La suma d'una solució concreta de

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

amb un vector de $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0\}$.