Àlgebra lineal i equacions diferencials
Enginyeria Química
Curs 2001/02
4 Febrer 2002.

1. (a) Sigui l'aplicació lineal, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donada per $f(x, y) = (2x + y, 2y)$. Expresseu la matriu en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ (és a dir calculeu $M(f, can, can)$) Considerem la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Expresseu la matriu de f en la base $\mathcal{B}_1$, és a dir calculeu $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$. Decidiu si l'aplicació f és injectiva i/o exhaustiva.

Solució:Tenim $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x, y) = (2x + y, 2y)$ anem a trobar primer la matriu de l'aplicació lineal f en la base canònica, és a dir $M(f, can, can)$. Com l'espai de sortida i el d'arribada és el mateix igual a $\mathbb{R}^2$ i com $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2$ tenim que $M(f, can, can) \in M_2(\mathbb{R})$, anem a calcular-ho. La base canònica de $\mathbb{R}^2$ és $\{(1, 0), (0, 1)\}$ observem llavors aplicant directament la definició de f que,

$$f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1) = (2, 0)_{can},\ f(0, 1) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2)_{can}$$

per tant posant en columna les imatges de la base canonica en columna expressades tambe en la base canonica, que es sol possar en columna en aquest cas els valors per f aplicats a la base canònica, tenim:

$$M(f, can, can) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fixem ara la base per $\mathbb{R}^2$ donada pels vectors $\{(1, 1), (1, -1)\}$. Volem calcular $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$. Com hem calculat anteriorment $M(f, can, can)$ podrem calcular aquesta matriu 2 per 2 via l'expressió:

$$M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = M(id, can, \mathcal{B}_1)M(f, can, can)M(id, \mathcal{B}_1, can) \tag{1}$$

observem que $M(id, \mathcal{B}_1, can)$ és possar en columna la base $\mathcal{B}_1$ i $M(id, can, \mathcal{B}_1)$ és la inversa de $M(id, \mathcal{B}_1, can)$. Anem a calcular, tenim que (posant els vectors de $\mathcal{B}_1$ en columna),

$$M(id, \mathcal{B}_1, can) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

llavors calculem l'inversa d'aquesta matriu i obtenim,

$$M(id, can, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Aplicant l'igualtat donada per (1) tenim:

$$M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i per tant obtenim que la matriu demanada és

$$M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Observació: Una altra manera seria calculem quan val $f(1, 1) = (3, 2)_{can}$ i $f(1, -1) = (1, -2)_{can}$ llavors per calcular la matriu $M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ necessitem posar en columna els vectors $(3, 2)_{can}$ i $(1, -2)_{can}$ però expressats en la base $\mathcal{B}_1$ és a dir fixeu-vos

$$(3, 2)_{can} = \frac{5}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}_1}$$

$$(1, -2)_{can} = -\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{3}{2}(1, -1) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})_{\mathcal{B}_1}.$$

Per estudiar injectivitat, exhaustivitat, podem treballar de moltes maneres via la definició de f o utilitzant qualsevol de les matrius abans calculades. Una manera molt directa és fixeu-vos

$$det(M(f, can, can)) = 4 \neq 0$$

per tant és invertible, això ens diu que la funció f té una inversa, per tant és injectiva i exhaustiva.

(b) Sigui E el $\mathbb{R}$-espai vectorial

$$E = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; continues | y^{(4)} - y^{'''} = 0\}.$$

Considereu les funcions $y(x) = 1$ i $y(x) = x \in E$. Proveu que són $\mathbb{R}$-linealment independents. Considereu les funcions $1, x, x^2, e^x \in E$. Proveu que són $\mathbb{R}$-linealment independents en tot $\mathbb{R}$.

Solució:Hi ha diverses maneres per fer aquest exercici.
-Utilitzem el Wronskià fet a teoria. Recordeu que donades n-funcions $f_1, \ldots, f_n$ que siguin $n-1$-cops derivables formem una nova funció anomena Wronskià de les funcions $f_1, \ldots, f_n$ i denotada per $W(f_1, \ldots, f_n)$. Recordeu que per tot punt on la funció $Wronskia(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$ llavors les funcions $f_1, \ldots, f_n$ l.i. al voltant d'aquests punts, en particular si no s'anul.la mai les funcions seran l.i. a tot $\mathbb{R}$. Anem a aplicar això en el nostre cas.

Considerem les funcions $1, x, x^2, e^x$ i veiem que són $\mathbb{R}$-l.i. Si ho son, evidentment que llavors $1, x$ també ho serà. Calculem el wronskià de $1, x, x^2, e^x$

$$W(1, x, x^2, e^x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & e^x \\ 0 & 1 & 2x & e^x \\ 0 & 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 2e^x.$$

Però la funció $2e^x$ no val zero en cap punt real, per tant obtenim que les funcions $1, x, x^2, e^x$ són l.i. a tot $\mathbb{R}$.
-(Una altra manera).Utilitzem la definició de ser l.i. i provem el mateix. Considerem

$$\mu_1 1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2 + \mu_4 e^x = 0 \tag{2}$$

i volem veure que tot $\mu_i = 0$.
Per veure això derivem la expressió (2) tres vegades i ens dona:

$$0 + 0 + 0 + \mu_4 e^x = 0$$

d'aquí obtenim $\mu_4 = 0$. Derivem 2 cops (2) i tenim l'expressió

$$0 + 0 + 2\mu_3 + \mu_4 e^x = 0$$

com $\mu_4 = 0$ obtenim que $\mu_3 = 0$.
Derivem un cop l'expressió (2) per obtenir

$$0 + \mu_2 + \mu_3 2x + \mu_4 e^x = 0$$

obtenint que $\mu_2 = 0$. Mirant a l'expressió 2 i sabent que $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ obtenim que $\mu_i = 0$ per $i = 1, 2, 3, 4$ provant que són les funcions $\mathbb{R}$-l.i.

(c) Considereu E com l'apartat anterior. Recordeu que $dim_{\mathbb{R}} E = 4$. Considereu l'aplicació lineal en E que sigui derivar $D : E \to E$. Per exemple $D(x^2) = 2x$. Doneu una base de E i expliciteu la matriu associada a D amb la base fixada que trieu per a E. Calculeu una base del nucli i de la imatge de D. Té 0 com a valor propi l'aplicació lineal D?

Solució: Sabem que $dim_{\mathbb{R}} E = 4$, per tant una $\mathbb{R}$-base per E estarà formada per 4 elements, igualment en l'apartat b) hem trobat 4 elements de E: $1, x, x^2, e^x$ que són $\mathbb{R}$-l.i., per tant formen una base per E triem doncs la base per a E següent:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, e^x\}.$$

Anem a calcular la matriu associada a l'aplicació lineal derivar.

$$D(1) = 0 = 01 + 0x + 0x^2 + 0e^x = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0e^x = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0x^2 + 0e^x = (0,2,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$D(e^x) = e^x = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 1e^x = (0,0,0,1)_{\mathcal{B}}.$$

Per tant obtenim

$$M(D, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular una base del nucli i de la imatge per l'aplicació lineal D. Anem a treballar amb la matriu anterior. Sabem que la imatge de D està generada per la imatge per D dels elements de la base triada per E, per tant,

$$Imatge(D) =< (1,0,0,0)_{\mathcal{B}}, (0,2,0,0)_{\mathcal{B}}, (0,0,0,1)_{\mathcal{B}} >$$

i es clar que son l.i. aquest vectors, escrivint els vectors com elements de E sense coordenades tenim que una base de Imatge de D és $\{1, 2x, e^x\}$.

Sabem que $dimImatge(D) + dimKer(D) = 4$ i per tant $dimKerD = 1$, fixem-nos que $D(1) = 0$, per tant la funció constant igual a 1 és del nucli per tant podem triar-lo com una base pel Nucli de D.

Referent que si D té valor propi 0, fixeu-vos que com tenim nucli(dimensió del nucli de D no és 0), això ens diu que tenim vectors propis de valor propi 0, per exemple un vector propi de valor propi 0 és la funció 1.

2. Sabem que la velocitat de desintegració de la quantitat de massa en un temps t de carboni 14, C_{14}, present en un teixit mort decau proporcionalment a la quantitat de massa de C_{14} present en el teixit en el temps t. Igualment sabem que la massa de C_{14} en un teixit viu és constant, i quan el teixit mor es tarden exactament 5568 anys per a perdre exactament la meitat del contingut de massa de C_{14} del teixit.

   En unes restes òssees s'ha mesurat avui, 4 de Febrer de 2002, que la pèrdua de massa de C_{14} en el teixit òssic és exactament de una cinquena part de la massa de C_{14} del teixit quan aquest és viu. Segons aquestes dades, quina antiguitat tenen les restes òssees?

   Solució: Sigui $M(t)$ la funció que denota la quantitat de massa de C_{14} en el teixit òssic en el temps t expressat en anys. Del fet que la velocitat de desintegració de la quantitat de massa de C_{14} és proporcional a la quantitat de massa de C_{14} obtenim que la funció $M(t)$ satisfà l'equació diferencial

$$\frac{dM}{dt} = -kM(t)$$

   on k és una constant (constant de desintegració). Podem resoldre l'anterior equació diferencial, la qual és de variables separables i obtenim

$$M(t) = Ce^{-kt}$$

   on C és una altra constant. Considerem que per temps $t = 0$ és just quan el teixit es mor, i per tant té un valor de massa C_0 que desconeixem, fixeu-vos $M(0) = Ce^{0t} = C$, per tant C és aquest valor inicial de massa del teixit òssic que a partir d'ara denotarem per C_0 aquesta constant. L'exercici ens demana calcula el temps t_1 que ha transcorregut desde que el teixit ha mort sabent que el teixit ha perdut 1/5 part de la massa inicial en aquest temps t_1 a determinar, observeu per la definició de $M(t)$ el temps l'expressarem amb anys. És a dir avui dia 4 de Febrer que correspon a un temps t_1 sabem

$$M(t_1) = M(0) - \frac{1}{5}M(0) = \frac{4}{5}C_0$$

és a dir tenim que sustituint perque sabem calcular $M(t)$, per obtenir

$$C_0 e^{-kt_1} = \frac{4}{5}C_0.$$

De l'anterior expressió obtenim que el temps buscat $t_1 = -\frac{ln(4/5)}{k}$, ens falta si podem determinar k. Fixeu-vos que l'enunciat del problema us diu que es necesiten 5568 anys per perdre la meitat de massa, és a dir sabem que $M(5568) = \frac{1}{2}M(0)$ per tant

$$C_0 e^{-k5568} = \frac{1}{2}C_0$$

i d'aquí obtenim que

$$k = -\frac{ln(1/2)}{5568},$$

on obtenim llavors sustituint k en l'expressió de t_1 que l'antiguitat de les restes es de

$$t_1 = \frac{ln(4/5)}{ln(1/2)}5568 \sim 1792,49563233 \ anys.$$

3. (a) Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculeu els valors propis i per cada valor propi una base de vectors propis per aquest valor propi. Decidiu si diagonalitza. En cas afirmatiu calculeu A^n.

Solució:Tenim la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Anem primer a calcular els seus valors propis, per això igualem a zero el $det(A - \lambda Id_3)$, és a dir

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

per tant els valors propis son $\{-1, 3\}$ (observeu -1 té multiplicitat 2, per tant si diagonalitza base de vectors propis d'aquest valor propi hauria de tenir tants elements com multiplicitat, un altre comentari es que si en buscar els vectors propis dels valors propis que ens han sortit ens surt unicament el vector zero ens hem equivocat!!!SEMPRE!!! en els valors propis que trobem la matriu quadrada $A - \lambda Id$ no té rang maximal, sempre té nucli no trivial, hi ha sempre vectors propis diferents del zero!!!).

Càlcul base de vectors propis de valor propi -1.

Els vectors propis de valor propi menys -1, es troben calculant el $Ker(A - (-1)Id_3)$, es a dir resolent

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que té per solució $y = -z$, es a dir

$$Ker(A - (-1)Id) = \{(x, y, z)|y = -z\} = \{(x, y, -y)\}$$

té dimensió 2 i una base és per exemple $\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$.

-Vectors propis de valor propi 3: Hem de calcular el nucli de $A - 3Id_3$, això ho podem fer resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per tant obtenim que $y = 0$ i $x = -z$, es a dir

$$Ker(A - 3Id) = \{(x, 0, z)|x = -z\} = \{(x, 0, -x)\}$$

per tant triem com a base el vector per exemple $\{(1, 0, -1)\}$.

-Diagonalitza A? Fixeu-vos que ajuntant les bases obtingudes dels diferents nuclis associats als valors propis obtenim una base de $\mathbb{R}^3$ això fa que A sigui diagonalitzable.

-Càlcul de A^n.

Considerem $A = M(f, can, can)$ per certa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i triem la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ donada per vector propis per f,

$$\mathcal{B} := \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$$

Observem que per calcul de A^n és

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

on $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Un càlcul trobem que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

i per tant A^n es calcula per,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n - 3^n & (-1)^n - 3^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} + 3^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

(b) Amb la matriu A de l'apartat anterior, resoleu el sistema d'equacions diferencials

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X}$$

amb $\mathfrak{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on $\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Solució: Hem vist que la matriu A diagonalitza a $\mathbb{R}$, per tant és molt fàcil resoldre l'equació diferencial, tenim per teoria dues maneres de fer-ho, fem-ho utilitzant els vectors propis trobats en l'apartat a). Recordeu que si tenim v un vector propi de A de valor propi real λ llavors $e^{\lambda t}v$ és un vector solució columna per el sistema d'equacions diferencials homogeni $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X}$. Sabem que la solució general d'aquest sistema serà format per combinació lineal de tres vectors columna l.i. solució del sistema (ja que el tamany del sistema és 3 per 3). Recordem de teoria que si tenim vectors propis l.i. v_i de A amb valor propi λ_i llavors $e^{\lambda_i t}v_i$ són vectors columna l.i. del sistema $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = A\mathfrak{X}$. Nosaltres hem trobat 3 vectors propis l.i., base de A formada per vectors propis (base anomenada $\mathcal{B}$, i com tenim 3 obtenim que la solució general del sistema és

$$\mathfrak{X}_{solució}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La teoria ens diu que si imposem unes condicions inicials, en el nostre cas que $\mathfrak{X}_{solucio}(0)$ en el temps zero sigui el valor $(1, 0, -1)$, obtindrem una unica solució (observeu que la solucio general del sistema depen de 3 constants c_1, c_2, c_3 que en principi podem ser qualsevol numero real). Imposem doncs aquesta condició en el temps zero, en la solució general. Sustituint t per 0 obtenim de (3) ens dona un sistema a resoldre,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'aquí obtenim que $c_1 = c_2 = 0$ i $c_3 = 1$ i per tant la solució demanada era,

$$\mathfrak{X}_{soluciodema}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

4. (a) Factoritzeu a $\mathbb{C}[z]$ el polinomi

$$z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

Sigui D derivar respecte la variable x, comproveu que $(D^3 - 3D^2 + D - 2)$ anul.la la funció $sinx + e^{2x}$.

Solució: Es fàcil veure (utilitzeu Ruffini) que 2 és arrel del polinomi per tant

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z-2)(z^2+1)$$

i factoritzar $z^2 + 1$ es molt fàcil perque calculem les seves arrels que són $\pm i$ i per tant la factorització a $\mathbb{C}[x]$ del polinomi és:

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z-2)(z-i)(z+i).$$

Cal veure que el operador $(D^3 - 2D^2 + D - 2)(sinx + e^{2x}) = 0$, on D denota derivar. Fixeu-vos :

$$D^3(sinx + e^{2x}) = -cosx + 8e^{2x}$$

$$-2D^2(sinx + e^{2x}) = 2sinx - 8e^{2x}$$

$$D(sinx + e^{2x}) = cosx + 2e^{2x}$$

$$-2(sinx + e^{2x}) = -2sinx - 2e^{2x}$$

sumant-ho o tot ens dona zero, com es volia veure.

(b) Resoleu l'equació diferencial

$$y'' + y = sinx + e^{2x}.$$

Solució: Per resoldre-ho calculem les solucions de la equació homogènea $y'' + y = 0$ (que les anomenarem y_{homog}) i una solució particular per $y'' + y = sinx + e^{2x}$ que la anomenarem y_{part}, i l'exercici ens demana

$$y_{homog} + y_{part}.$$

-Càlcul de y_{homog}. Hem de resoldre $y'' + y = 0$, considerant D operador derivar respecte x podem escriure aquesta equació lineal a coeficients constants per,

$$(D^2 + 1)y = 0.$$

Les arrels de D^2+1 són $\{\pm i\}$ nombre complexos no reals. Recordem que per cada arrel li associem tantes solucions l.i. com la seva multiplicitat, ajuntant les arrels complexes dues en dues, ajuntant via la conjugació, amb les nostres arrels i amb la seva multiplicitat tenim que

$$y_{homog} = c_1 sinx + c_2 cosx.$$

-Càlcul de y_{part}. Per això necesitem un polinomi que anul.li $sinx + e^{2x}$, però aquest polinomi us ho dona l'apartat a). Llavors recordeu que l'equació diferencial $y'' + y = sinx + e^{2x}$ l'escriviem per $P(D)y = sinx+e^{2x}$ amb $P(D) = D^2+1$, i considerem $P_1(D) = (D^2+1)(D-2) = (D^3-2D^2+D-2)$ que anul.la $sinx + e^{2x}$, per tant consideravem la nova equació diferencial homogènea,

$$P_1(D)P(D)w = 0$$

Les arrels de $P_1(z)P(z)$ són $\pm i$ amb multiplicitat 2 i 2 amb multiplicitat 1, per tant

$$w_{homog} = c_1 sinx + c_2 cosx + k_1 xsinx + k_2 xcosx + k_3 e^{2x}$$

i busquem entre funcions particulars de la forma

$$y_{part,candidat} = k_1 xsinx + k_2 xcosx + k_3 e^{2x}.$$

Sustituim aquests candidats a l'equació diferencial $y'' + y = sinx + e^{2x}$, obtenim

$$2k_1 cosx - 2k_2 sinx + 5k_3 e^{2x} = sinx + e^{2x}$$

i per tant $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{1}{2}$ i $k_3 = \frac{1}{5}$ on

$$y_{part} = -\frac{1}{2}xcos + \frac{1}{5}e^{2x}$$

La solució demanada,

$$y_{demanada} = c_1 sinx + c_2 cosx - \frac{1}{2}xcosx + \frac{1}{5}e^{2x}.$$

(c) Entre quines funcions buscaries una solució particular per l'equació diferencial

$$y'' + y = cosx + e^{2x}?$$

Solució: Fixeu-vos que D^2+1 anul.la $cosx$ i $D-2$ anul.la la funció e^{2x}, per tant el polinomi $P_1(D) = D^3 - 2D^2 + D - 2$ anul.la la funció $cosx + e^{2x}$, per tant seguint la mateixa resolució de l'apartat b), tenim que les funcions particulars candidats corresponen a

$$y_{part,candidat} = k_1 xsinx + k_2 xcosx + k_3 e^{2x}.$$