Àlgebra lineal (Mètodes Matemàtics I)
Enginyeria Química
Curs 2002/03
Prova parcial.(11-11-2002)

I. Propietats bàsiques dels nombres.

1. Quins elements son $\{x \in \mathbb{R} \ tal\ que\ |(x-2)||(x+2)| \leq 3\}$?(1 punt)
com el valor absolut compleix $|ab| = |a||b|$ tenim que resoldre $|x^2 - 4| \leq 3$. Estudiem dos casos.
1er cas $(x^2 - 4) \geq 0$ correspon a $x \geq 2$ o $x \leq -2$, tenim que resoldre $x^2 - 4 \leq 3$, es a dir $x^2 \leq 7$, per tant $-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$, per tant $x \in [-\sqrt{7}, -2] \cup [2, \sqrt{7}]$.
2on cas $x \in (-2, 2)$. Tenim resoldre
$$4 - x^2 \leq 3$$
es a dir $x^2 \geq 1$ per tant $x \geq 1$ o $x \leq -1$, es a dir $x \in (-2, -1] \cup [1, 2)$.
Per tant la solució és: $x \in [-\sqrt{7}, -1] \cup [1, \sqrt{7}]$.
2. Sigui $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2}$ i $z_2 = -\sqrt{3} - i$. Escriu z_2 en forma polar i calculeu $z_1^{101} z_2^{-1}$.(1 punt)
Fixeu-vos que $z_2 = re^{i\theta}$ està al 3er quadrant. Calculem primer $r = |z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, llavors $\theta = arctang(1/\sqrt{3}) + 3erquadrant = 7\pi/6$ per tant $z_2 = 2e^{i7\pi/6}$ en forma polar.
Calculem $z_1^{101} z_2^{-1}$. Per Moivre, $z_1^{101} = \sqrt{2}^{101} e^{i101\pi/2} = 2^{50}\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ i $z_2^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i7\pi/6}$, per tant
$$z_1^{101} z_2^{-1} = 2^{49}\sqrt{2}e^{\frac{-2i\pi}{3}}.$$

II. Propietats dels nombres reals.

1. Sigui x_n la successió recurrent definida per $x_0 = 1$ i
$$3x_{n+1} = \frac{1}{7} + x_n^2.$$
   i. Demostreu que és monótona.(1 punt)
   Veiem que és decreixent. Ho demostrarem per inducció. Volem veure
   $$x_{n+1} \leq x_n$$
   per a tot n natural. Veiem primer per $n = 0$(cas concret). $x_1 = \frac{1}{21} + \frac{1^2}{3} \leq 1 = x_0$. Per tant cas $n = 0$ és veritat
   Suposem que el cas k és veritat, es a dir $x_{k+1} \leq x_k$, veiem

que llavors el cas $k+1$ és veritat provant per inducció que x_n és monòtona decreixent.
Volem veure

$$x_{k+2} \leq x_{k+1}$$

això es el mateix de veure

$$3x_{k+2} \leq 3x_{k+1}$$

sustituim aquí per la definició de la successió recurrent i veure l'anterior desigualtat és equivalent a

$$\frac{1}{7} + x_{k+1}^2 \leq \frac{1}{7} + x_k^2$$

veure aquesta desigualtat és equivalent a

$$x_{k+1}^2 \leq x_k^2$$

Hem vist doncs que provar el cas $k+1$ es provar que $x_{k+1}^2 \leq x_k^2$, utilitzem ara la hipòtesi d'inducció, sabem que $x_{k+1} \leq x_k$ fixeu-vos com $x_{n+1} = \frac{1}{21} + \frac{x_n^2}{2}$ i com $x_n^2 \geq 0$ tenim que tots els x_n són positius (a partir de x_1 i també tenim que $x_0 \geq 0$), llavors tenim, de ser $x_{k+1} \leq x_k$ i tots els x_n positius, que

$$x_{k+1}^2 \leq x_k^2$$

que és el que volíem demostrar.

ii. Estudieu si té límit i en cas afirmatiu (tot justificant-ho) calculeu-lo.(1 punt)
Hem vist que x_n és monòtona decreixent i $x_n \geq 0$ de com està definida la successió recurrent, per tant per un teorema de teoria té límit l. Anem a calcular el límit, l ha de complir

$$3l = \frac{1}{7} + l^2$$

cal resoldre doncs $l^2 - 3l + \frac{1}{7} = 0$ que dona per solucions candidates a l els valors:$\{\frac{3 \pm \sqrt{59/7}}{2}\}$, com x_n és decreixent i comença per $1 < \frac{3+\sqrt{59/7}}{2}$ tenim que

$$l = \frac{3 - \sqrt{59/7}}{2}.$$

2. Calculeu els següents límits (justificant la resposta),

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-3n+6}{n^2-4n+1}}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ (1 punt)

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1^4)+\log(2^4)+\cdots+\log(n^4)}{n\log(n^4)}$ (1 punt)

c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{ln(n^2)}$ (0.5 punts)

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{((2n)!+1)^{(2n)!}\sqrt[n!+n]{n!+n}}{((2n)!)^{(2n)!}}$ (0.5 punts)

L'apartat a) utilitza el criteri del número e, escriviu la successió com

$$\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-3n+6}{n^2-4n+1}}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}=\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2-4n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{3n+6}}$$

pel criteri del nombre e el limit serà e^l amb l el limit de

$$\frac{n+5}{n^2-4n+1}\frac{n^2+5}{3n+6}$$

doncs calculem aquest límit que ens dona $l=1/3$, i per tant el límit demanat és $e^{1/3}$.

L'apartat b) s'usa el criteri d'Stolz, concretament el segon apartat b). Sigui $b_n=nlog(n^4)=4nlogn$, com log és creixent i n també és creixent i ambdos de números positius tenim que b_n és estrictament creixent podem aplicar Stolz, i ens redueix el limit al càlcul del límit de

$$\frac{\log((n+1)^4)}{(n+1)\log((n+1)^4)-n\log(n^4)}=\frac{4\log(n+1)}{4(n+1)\log(n+1)-4n\log n}$$

podem treure els quatre i per les propietats dels logaritmes podem escriure'l per,

$$\frac{log(n+1)}{\log(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n})}=\frac{\log(n+1)}{\log(\frac{(n+1)^n}{n^n}(n+1))}=\frac{\log(n+1)}{\log(\frac{(n+1)^n}{n^n})+\log(n+1)}$$

això te indeterminació infinit dividit per infinit, i com $log((n+1)^n/n^n)$ va a $log(e)$ tenim que dividint numerador i denominador per $log(n+1)$ obtenim que el límit és 1.

Apartat c). Fixeu-vos que com $log(n^2)\geq 1$ per n suficientment gran i igualment $1\leq log(n^2)=2log(n)\leq 2n$ per n suficientment gran tenim també la desigualtat prenen arrels n-éssimes positives,

$$1\leq\sqrt[n]{log(n^2)}\leq\sqrt[n]{2n}$$

però $\sqrt[n]{2n}=\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}$ on ambdos tenen límit 1, per tant el límit per sandwich és també 1.

Apartat d). Fixeu-vos que és el producte de dues successions parcials, $\frac{((2n)!+1)^{(2n)!}}{((2n)!)^{(2n)!}}$ és una successió parcial de $\frac{(n+1)^n}{n^n}$ que tendeix al nombre e, per tant la succeció parcial $\frac{((2n)!+1)^{(2n)!}}{((2n)!)^{(2n)!}}$ tendeix a e; igualment l'altra successió,

$$\sqrt[n!+n]{n!+n}$$

correspon a una successió parcial de $\sqrt[n]{n}$ que té límit 1, per tant la successió parcial té límit 1, per tant estem calculant el producte de dos successions on una té límit e i l'altra 1, per tant el limit és e.
Observació: Un altre fet útil del resultat: que si un limit de una successió existeix, llavors tota successió parcial d'ella té el mateix límit; és (útil també aquest resultat) per provar que una successió no té límit, per això trieu dues successions parcials d'elles que no vagin al mateix límit, provant llavors que la successió general no pot tenir límit.

3. Estudieu la convergència per a les sèries següents, tot justificant la resposta:

$$\text{a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!} \quad \text{b)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{1/n}}{ln((4n)^{2002})} \quad \text{c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n(n!)}$$

a)=b)=c)=(0.5 punts).
Apartat a). Fixeu-vos $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$ comparem aquesta última expressió amb $1/n^2$ i utilitzant el criteri de comparació tenim que la convergència o divergència es equivalent al de la sèrie

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

que per teoria és convergent, per tant la sèrie és convergent.
Apartat b). Comparem primer $\frac{n^{1/n}}{ln((4n)^{2002})}$ amb $\frac{1}{ln(4n)}$, si feu el límit del quocient de les dues expressions us dona o 2002 o 1/2002 depenen de l'ordre que preneu. Llavors ens cal estudiar únicament la sèrie

$$\sum \frac{1}{ln(4n)}$$

observem que $ln(4n) \leq 4n$ per n gran per tant per estudi de convergència o divergència podem comparar, d'aquí tenim que

$$\sum \frac{1}{ln(4n)} \geq \sum \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

per tant la nostra sèrie suma més gran o igual a infinit, per tant és divergent.

Apartat c). Utilitzeu el criteri a_{n+1}/a_n amb $a_n = \frac{(2n)!}{n^n(n!)}$. Calculem el limit a_{n+1}/a_n.És el límit de l'expressió,

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{(n+1)}((n+1)!)}\frac{n^n(n!)}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

on l'expressió de l'esquerra és el producte de dues series amb limit real ja que el limit $\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}$ és 4 i el limit de $\frac{n^n}{(n+1)^n}$ és $e^{-1} = \frac{1}{e}$, per tant el limit és

$$\frac{4}{e} > 1$$

pel criteri, tenim que la sèrie és divergent.

III. Factorització de polinomis.

1. Resolt a $\mathbb{C}$ la següent igualtat $(-\sqrt{3}-i)e^z = e^{\pi i}+i$ on $z \in \mathbb{C}$.(0.5 punts)
   En l'apartat 1b de l'examen hem escrit $-\sqrt{3}-i$ en forma polar, és $2e^{i7\pi/6} = e^{ln(2)+\frac{i\pi 7}{6}}$. Fixeu-vos que $e^{pii}+i = -1+i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = e^{ln(\sqrt{2})+\frac{i3\pi}{4}}$, per tant l'equació a resoldre és,

   $$e^{ln(2)+\frac{i\pi 7}{6}+z} = e^{ln(\sqrt{2})+\frac{i3\pi}{4}}$$

   i per tant tenim

   $$ln(2)+\frac{i\pi 7}{6}+z = ln(\sqrt{2})+\frac{i3\pi}{4}+2\pi ik$$

   amb $k \in \mathbb{Z}$, és a dir

   $$z = ln(\sqrt{2}) - ln(2) + \frac{i3\pi}{4} - \frac{i\pi 7}{6} + 2\pi ik$$

   amb $k \in \mathbb{Z}$.
2. Troba les arrels a $\mathbb{C}$ del polinomi: $z^5 - 4z$.(0.5 punts)
   Igualem a zero, i tenim buscar arrels de $z = 0$ i $z^4 - 4 = 0$ tenim una arrel és 0, les arrels de $z^4 - 4 = 0$ són les arrels 4-tes de 4 com nombre complex que son, $\{\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{\pi i/2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{3\pi i/2}\}$, per tant ja tenim les 5 arrels del polinomi.
3. Factoritza a $\mathbb{C}[z]$ i a $\mathbb{R}[z]$ el polinomi $2z^5 - 8z$.(0.5 punts)
   Fixeu-vos que $2z^5 - 8z = 2(z^5 - 4z)$ com en apartat anterior hem trobat les arrels tenim que la factorització a $\mathbb{C}[z]$ és,

   $$2z^5 - 8z = 2(z-0)(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})$$

   la factorització a $\mathbb{R}[z]$, tenim que adjuntar en parelles les arrels complexes i no reals, que sol hi ha $i\sqrt{2}$ i $-i\sqrt{2}$, per tant la factorització a $\mathbb{R}[z]$ és,

   $$2z^5 - 8z = 2(z-0)(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z^2+2)$$