Àlgebra lineal i equacions diferencials

Enginyeria Química

Curs 2001/02

Prova parcial.

I. Nombres complexos.

1. Donem dos nombres complexos $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ i $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
   i. Calculeu z_1^n, $|z_1^n|$ i $(z_1 z_2)^n$ amb n un nombre natural. Calculeu també $z_1 + 3iz_2$. (0.2 Punts)
   ii. Digueu quin és el $\mathbb{R}$-subespai vectorial generat per z_1 dins $\mathbb{C}$, pensant $\mathbb{C}$ com a un $\mathbb{R}$-espai vectorial. (0.1 Punt)
2. Calculeu les arrels de $x^5 - 2$ i factoritzeu el polinomi a $\mathbb{R}[x]$.(0.2 Punts)
3. Factoritzeu a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$ el següent polinomi

$$(x^4 + x^2 + 1)(x^3 + 1) \ (0,2 \ Punts).$$

II. Resolució de sistemes i matrius.

1. Considereu

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 7 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

   Per quins valors de λ en $\mathbb{R}$ la matriu A_λ té rang 3? Per quins valors de λ en $\mathbb{C}$ la matriu A_λ té rang 3? Justifiqueu la vostra resposta. (0,2 Punts)
2. Resoleu el següent sistema a $\mathbb{R}$ en cas de ser posible,

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \end{array} \right. \quad (0,2 \ Punts)$$

3. Donada una recta de K^n,

$$\begin{array}{c} x_1 = a_1 + b_1 t \\ x_2 = a_2 + b_2 t \\ \dots \\ x_n = a_n + b_n t \end{array}$$

   amb $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ números de K, amb b_i no tots nuls, i t la variable. Quan és la recta anterior un subespai vectorial? Per què? (0,1 Punt)

III. Espais vectorials.Considerem el $\mathbb{R}$-espai vectorial format per les funcions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que són infinitament derivables. Denotem per E aquest $\mathbb{R}$-espai vectorial. Considerem

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in E \; que \; satisfan \; f^{''} - 3f^{'} + 2f = 0\}$$

on 0 es la funció que va tot a zero. V és un $\mathbb{R}$-subespai vectorial de E. Definim la funció $h(t) = e^t$ i $g(t) = e^{2t}$. Aquestes funcions son de V, es a dir $h, g \in V$.

1. Decidiu si $f(t)$ i $g(t)$ són linealment independents o no ho són. Justifica la resposta. (0,1 Punt)
2. Sigui $W_1 = \{f \in V \; tal \; que \; compleixen \; f' - f = 0\}$. Proveu que és un subespai de V amb un element diferent del vector 0.(0,1 Punt)
3. Sigui $W_2 := \{f \in V \; tal \; que \; compleixin \; f' - 2f = 0\}$. Observeu que $g(t) \in W_2$. Quina és la dimensió més petita posible per $W_1 + W_2$ com a $\mathbb{R}$-subespai vectorial de V? Per què?(0,1 Punt)