PROBLEMES D'ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria en Informàtica, Curs 2004-2005
MATRIUS

1. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la segona fila de la matriu producte AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius CB (per a una matriu adequada C) i com una combinació lineal de les files de B.

Calculeu la tercera columna de la matriu producte AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius AC (per a una matriu adequada C) i com una combinació lineal de les columnes de A.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, determineu a, b números reals que compleixin la relació $A^2 + aA + bI = 0$, on I és la matriu identitat i 0 és la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Mostreu amb exemples que a $M_2(K)$ les següents identitats són falses:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

Proveu, en canvi, que si A i B commuten les identitats són correctes.

4. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ i $B = \begin{pmatrix} cos(a) & -sin(a) \\ sin(a) & cos(a) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on a és un número real, calculeu A^n i B^n(*).

5. Calculeu unes quantes potències de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -15 & 11 \end{pmatrix},$$

i comproveu que costa endevinar una llei que les descrigui totes. No obstant, si expresseu A com:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

podeu comprovar que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

i d'aquí escriureu fàcilment una fórmula per a les entrades de A^n.

6. Siguin A, $B \in M_n(K)$ invertibles. Trobeu totes les $X \in M_n(K)$ que satisfan:

$$AB^{-1}AXA^{-1}B + AB = 0.$$

7. Proveu que hi ha infinites matrius $X \in M_2(\mathbb{R})$ que satisfan respectivament:

$$X^2 = I, \qquad X^2 = X, \qquad X^2 = 0.$$

Proveu que si $X^2 = I$ i $X \neq I$, aleshores $I + X$ no és invertible.
Proveu que si $X^2 = 0$ aleshores $I + X$ és invertible.
Indicació: calculeu $(I + X)(I - X)$.

8. Esglaoneu per files les següents matrius, calculant la matriu P que us permet obtenir la matriu esglaonada multiplicant la matriu original per l'esquerra. Marqueu també, en cada cas, la submatriu quadrada invertible de la matriu original que determina l'elecció de pivots que feu en el procés d'esglaonament.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5/2 & -5/2 & -3 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 2 & 4 & -5 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

9. Apliqueu la tècnica de les transformacions elementals per files per mirar si aquestes matrius quadrades són invertibles i, en cas afirmatiu, calcular la seva inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 & 2 \\ 3 & 2 & i & -1 \\ 0 & i & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & i & -i \\ 1+i & 1-i & 2i \\ 1 & 0 & 3i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Esglaoneu per columnes les matrius de l'Exercici **8**. Marqueu també la submatriu quadrada invertible de la matriu original que determina l'elecció dels pivots. Repetiu l'Exercici **9**, però ara esglaonant només per columnes.

11. Sigui $A \in M_n(K)$ una matriu invertible. Si alterem A com s'indica a continuació, com canvia la inversa de A?
(1) Intercanviem la primera i quarta fila de A.
(2) Multipliquem la cinquena fila de A per $\frac{1}{7}$.
(3) Sumem a la tercera fila de A la setena fila multiplicada per 2.

12. Apliqueu a les matrius de l'Exercici **8** transformacions elementals per files i columnes fins a convertir-les en una matriu de la forma:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Calculeu en cada cas les matrius P i Q que ho fan possible.

13. Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals esglaonant per files la matriu ampliada "fins al final", és a dir, fins que els pivots siguin els únics elements no nuls de la seva columna. Mireu també de resoldre algun sistema fent eleccions diferents de pivots i obtenint diferents descripcions paramètriques de la varietat lineal de les solucions.

$$\left.\begin{aligned} 3x - 7y + 2z &= 6 \\ 21y - 9z &= -3 \\ 6x + 11z &= 10 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x + y - z - 2t &= 0 \\ 3x - y + z + 4t &= 1 \\ 2y - 2z - 5t &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z - t &= 0 \\ 2x + 3y &= 3 \\ 4x + 4y + z - t &= 3 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} -z + t &= 1 \\ 2x + y + z - t &= 0 \\ 4x + 2y - z + t &= 3 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} x + \sqrt{2}\,y + 3z &= 0 \\ (1+\sqrt{2})x + z &= \sqrt{2} \\ x - y - \sqrt{2}\,z &= 1 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x - y + z - t + 2v &= 0 \\ -x + y - z + 2u + 2v &= 1 \\ x - y + z + t &= 2 \\ 2u + 3v &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

14. Resoleu el següent sistema d'equacions lineals, treballant al cos $K = \mathbb{Z}_2$:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + t + u &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ y + z + u &= 0 \\ y + z + t &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

15. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

matrius a coeficients reals.

1. Calculeu A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1}, $(AB)^{-1}$ i $B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A i B són dues matrius invertibles de tipus $n \times n$, comproveu que es compleix $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En general, si $A_1, \ldots, A_m$ són m matrius invertibles de tipus $n \times n$, qui és $(A_1 \cdots A_m)^{-1}$?
3. Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2y + z &= -1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

16. Determineu si les següents matrius amb entrades de $K = \mathbb{Z}_2$ són invertibles. En cas afirmatiu calculeu la seva inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Calculeu el determinant de les matrius quadrades de l'Exercici 9. Alterneu i combineu els mètodes d'esglaonar per files i/o columnes i desenvolupar per una fila i/o columna.

18. Calculeu:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

19. Proveu:

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b),$$

on n és l'ordre de la matriu.

20. Calculeu el següent determinant,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

21. Calcula el determinant de la matriu

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} & 2 \\ 4\sqrt{2} & 1 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{8} & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

22. Sigui

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & 2-\lambda & 5 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

amb λ recorre els nombres reals.
Calcula $det(A_\lambda)$ amb λ real.
(*)Quants λ hi ha fent que la matriu A_λ no és invertible? Justifica la resposta.

23. Trobeu la inversa d'alguna de les matrius de l'Exercici 9 pel mètode de calcular la matriu adjunta.

24. Siguin A, $B \in M_n(K)$ amb B invertible i A no invertible. Proveu que l'equació $AX = B$ no té solució a $M_n(K)$.

25. Sigui A una matriu quadrada invertible de coeficients enters. Proveu que la inversa té també coeficients enters si i només si $\det(A) = \pm 1$.

26. Calculeu el rang de totes les matrius de l'Exercici 8.

27. Per a cada matriu A de l'Exercici 8 teníeu marcada una submatriu quadrada invertible B d'ordre rang(A). Comproveu explícitament en tots els casos que les files de A que no intervenen a B són combinació lineal de les files de A que intervenen a B i, també, que les columnes de A que no intervenen a B són combinació lineal de les columnes de A que intervenen a B.

28. Determineu el rang de les matrius següents a coeficients reals segons el valor del paràmetre a,

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Repetiu de nou l'exercici però pensant ara que les matrius tenen coeficients en el cos $\mathbb{Z}_2$.

29. Proveu que donades tres matrius 1×2 sempre n'hi ha una que és combinació lineal de les altres dues.

30. Estudieu, segons els valors del paràmetres, els sistemes següents, treballant al cos $K = \mathbb{R}$:

(a) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & my & + & z & = & m \\ mx & + & y & + & z & = & m \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{ccccc} (a-1)x & - & ay & = & 2 \\ 6ax & - & (a-2)y & = & 1-a \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{ccccccc} bx & + & y & + & z & = & b^2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ 6x & - & y & + & z & = & 3b \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$

31. Discutiu el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & & & bz & = & 2 \\ ax & + & ay & + & 4z & = & 4 \\ & & ay & + & 2z & = & b \end{array}\right.$$

en funció dels valors d'a i b, treballant en el cos real. Concretament, dieu per a quins valors de a i b el sistema té: a) solució única, b) una família uniparamètrica de solucions, c) una família biparamètrica de solucions, d) cap solució.

32. Discutiu i resoleu el següent sistema d'equacions a $\mathbb{R}$ en funció dels valors dels paràmetres λ i μ.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + \lambda z & = & \lambda \\ \mu y + \lambda z & = & 1 + \mu \\ x + (\lambda + 1)z & = & 2 \end{array}\right\}$$

33. Estudieu el següent sistema a $\mathbb{R}$ segons els valors del paràmetre s. Trobeu les solucions (si n'hi han) quan $s = -1$.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & sy & + & & + & st & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & s \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & s \end{array}\right\}$$

34. Estudieu el següent sistema a $\mathbb{Z}_2$ segons els valors del paràmetres a, b, c i d. Trobeu la solució del sistema pels valors dels paràmetres que el fan un sistema compatible determinat.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & bz & = & -4c \\ 3x & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & ay & + & az & = & -11d \end{array}\right\}$$

PROBLEMES D'ÀLGEBRA LINEAL

Enginyeria en Informàtica, Curs 2004-2005

ESPAIS VECTORIALS

1. Determineu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials:
   - $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \mid x = y\}$
   - $\{(x,y) \in (\mathbb{Z}_2)^2 \mid x = y+1\}$
   - $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid xy + z = x\}$
   - $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x \text{ és enter i multiple de } 7\}$
2. Determineu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}[x]$ són subespais vectorials:
   - $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ de grau } \leq 12\}$
   - $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ de grau parell}\}$
   - $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(5) = 0\}$
   - $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) \in \mathbb{Z}\}$
3. Determineu quins dels següents subconjunts de matrius són subespais vectorials:
   - $\{A \in M_{2,3}(\mathbb{Z}_2) \mid \text{ la suma dels elements de la 2a fila és } 1\}$
   - $\{A \in M_{2,3}(\mathbb{Z}_2) \mid \text{ la suma dels elements de la 1a columna és } 0\}$
   - $\{A \in M_3(\mathbb{Q}) \mid \det(A) = 0\}$
   - $\{A \in M_3(\mathbb{Q}) \mid A \text{ és invertible}\}$
   - $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$
4. Sigui X un conjunt no buit. Considerem $E := \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$, el conjunt de les aplicacions de X en $\mathbb{R}$, amb l'estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial que li donen les operacions:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X, \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Decidiu si els subconjunts següents de E són subespais vectorials:
   - $\{f \colon X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 1, \forall x \in X\}$
   - $\{f \colon X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = 0\}$, per a cert $a \in X$ fixat.
   - $\{f \colon X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = -f(b)\}$, per a certs $a, b \in X$ fixats.
   - $\{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}$, essent ara $X = \mathbb{R}$.
   - $\{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ dues vegades derivable i } f''(-5) = 0\}$, essent ara $X = \mathbb{R}$.
5. Determineu quins dels següents subconjunts són $\mathbb{R}$-espais vectorials i quins són $\mathbb{C}$-espais vectorials.
   - $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$
   - $\{z \in \mathbb{C} \mid (z + \bar{z})/2 = 0\}$
   - $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + 3iw = 0\}$

6. Quines de les següents famílies de vectors són linealment independents?

   - $(1,0),(1,2),(-\frac{1}{2},1)$ a $\mathbb{Q}^2$.
   - $(1,0,i,0),(1,1+i,2,0),(i,0,-2,i+\frac{1}{2}),(1-i,1,0,0)$ a $\mathbb{C}^4$.
   - $(1,1,\sqrt{2}),(0,\sqrt{2},1),(\sqrt{2},0,1)$ a $\mathbb{R}^3$.
   - $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,1,0),(1,1,1,0)$ a $(\mathbb{Z}_2)^4$.
   - $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ a $M_{2,3}(\mathbb{Z}_2)$.
   - $x^2-1,\ 1+x-x^3,\ (x+1)^2,\ x^3$ a $\mathbb{Q}[x]$.
   - $1, x-1,\ (x-1)^2,\dots,(x-1)^n$ a $\mathbb{C}[x]$.
   - $1,\ \sin x,\ \cos x$ a $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   - e^x, e^{x+2} a $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   Per a les famílies que són linealment dependents, expresseu un vector com a combinació lineal dels altres. Trobeu una base del subespai que genera cada família.

7. Considerem una matriu $A\in M_{m,n}(K)$ qualsevol. Proveu que una matriu-columna $B\in M_{m,1}(K)$ és combinació lineal de les columnes de A si i només si $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)$.

   Apliqueu aquesta idea per decidir, a les següents famílies de vectors, si el primer vector és, o no, combinació lineal dels altres. En cas afirmatiu, trobeu totes les possibles combinacions lineals.
$$(-1,3,2,1),\ (1,0,2,0),\ (2,1,-1,1)\in\mathbb{Q}^4,$$
$$(1,1,0,2),\ (i,i,0,i+1),\ (1+i,1+i,0,2)\in\mathbb{C}^4,$$
$$(0,0,1,0),\ (1,1,1,1),\ (2,2,2,2),\ (3,3,\sqrt{3},3)\in\mathbb{R}^4.$$
$$(1,0,1,0),\ (0,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (1,0,0,1)\in\mathbb{Z}_2^4.$$

8. Digueu quines de les famílies de vectors de l'Exercici anterior són linealment independents.

9. Considerem la família de vectors de $\mathbb{R}^4$: $(1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,1,1),(0,1,2,0)$.

   Proveu que el vector $(0,3,5,1)$ es pot escriure com a combinació lineal d'aquests vectors de dues formes diferents. Què podem dir d'aquesta família de vectors? Trobeu-ne una subfamília linealment independent maximal.

10. Proveu que $\langle(1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\rangle_{\mathbb{Z}_2}=(\mathbb{Z}_2)^4$.

11. Considerem els subespais $F=\langle(1,-1,1),(0,1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$, $G=\langle(1,0,0),(1,-2,2)\rangle_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^3$.

    Proveu que $F=G$. Proveu que el vector $(9,\sqrt{2}-1,1-\sqrt{2})$ pertany a F i expresseu-lo com a combinació lineal de cadascuna de les dues famílies que generen F.

12. Demostreu o doneu un contraexemple de les afirmacions següents segons siguin certes o falses:

    (a) $e_1,\dots,e_n$ són linealment independents (LI) i $v\neq e_i,\ \forall i\Longrightarrow e_1,\dots,e_n,v$ són LI.

    (b) $e_1,\dots,e_n$ són LI i $v\notin\langle e_1,\dots,e_n\rangle_K\Longrightarrow e_1,\dots,e_n,v$ són LI.

    (c) $\{e_1,\dots,e_n\}$ és un sistema de generadors (SG) i $e_n\in\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle\Longrightarrow\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ és un SG.

    (d) $\{e_1,\dots,e_n\}$ és un SG i $v\notin\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle_K\Longrightarrow\{e_1,\dots,e_{n-1},v\}$ és un SG.

    (e) $e_i=e_j,\ i\neq j\Longrightarrow e_1,\dots,e_n$ són linealment dependents.

    (f) Tota família de vectors que contingui 0 és linealment dependent.

13. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels subespais vectorials següents:
    - $\langle(1,0,2,3),(2,0,4,1),(1,-1,0,0)\rangle_{\mathbb{Q}}$
    - $\langle(1,-1,0,1),(2,0,-1,1),(3,-1,-1,2),(0,2,-1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$
    - $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4 \mid x=y-3z, z=t\}$
    - $\{(x,y,z,t,u)\in(\mathbb{Z}_2)^5 \mid x+y=u, y+u=t, x=t\}$
14. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels subespais vectorials següents:
    - $\{p(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ de grau $\leq 4\}$
    - $\{p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ de grau ≤ 3 i satisfent $p(2)=0)\}$
    - $\{A=a_{ij}\in M_{2,3}(\mathbb{R})\,|\,a_{11}=0$ i la 2a i 3a columna coincideixen$\}$
    - $\{A=a_{ij}\in M_2(\mathbb{Q}) \mid \mathrm{Tr}(A)=0\}$
    - $\langle 1,\sin x,\cos x\rangle_{\mathbb{R}}$, com a subespai de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
    - $\{f(x)\in\langle 1,\sin x,\cos x\rangle_{\mathbb{R}}\,|\,f(0)=0\}$
15. Completeu les famílies següents:
    - $(1,1,1),(7,0,0)$ a una base de $\mathbb{R}^3$
    - $(0,1,1)$ a una base de $(\mathbb{Z}_2)^3$
    - $\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, a una base de $M_{2,3}(\mathbb{Q})$
16. Completeu el vector $\{(1+i,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ a una base de $\mathbb{C}^2$,
    (a) pensant $\mathbb{C}^2$ com a $\mathbb{C}$-espai vectorial
    (b) pensant $\mathbb{C}^2$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial
17. (*) Considerem el conjunt E de totes les successions $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres reals, dotat de les operacions:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n,\ldots)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n,\ldots).$$

    Proveu que E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Quina dimensió té?

    Considerem ara el subconjunt F de E integrat per les successions $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres reals que satisfan: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $\forall n\geq 3$.

    (a) Demostreu que F és un subespai vectorial de E. Trobeu-ne la dimensió i una base.
    (b) Trobeu les progressions geomètriques contingudes a F i proveu que existeix una base de F formada per progressions geomètriques.
    (c) Trobeu el terme general de la successió de Fibonacci: $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$
18. Proveu que $\mathbb{R}^2=\langle(0,1)\rangle\oplus\langle(1,1)\rangle=\langle(0,1)\rangle\oplus\langle(2,1)\rangle$. Trobeu tots els vectors (a,b) tals que $\mathbb{R}^2=\langle(0,1)\rangle\oplus\langle(a,b)\rangle$. Observeu que d'això es dedueix que la manera de completar una família de vectors fins a una base no és única.

19. Trobeu la dimensió i una base de F, G, $F+G$ i $F \cap G$ per als casos:

   - $F = \langle (1,1,-1),(2,0,-1),(0,2,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$,
     $G = \langle (1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2)\rangle_{\mathbb{R}}$, subespais de $\mathbb{R}^3$.
   - $F = \langle (0,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0)\rangle_{\mathbb{Z}_2}$,
     $G = \langle (1,0,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\rangle_{\mathbb{Z}_2}$, subespais de $(\mathbb{Z}_2)^4$.
   - $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+2z=0, 3y+3z+t=0, 2x-y-t=0\}$,
     $G = \{(0,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+t=0\}$, subespais de $\mathbb{R}^4$.
   - $F = \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \operatorname{Tr}(A)=0, a_{12}=0\}$,
     $G = A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid A = A^t, a_{21}=0$, subespais de $M_2(\mathbb{Q})$.

   Discutiu en cada cas si F i G estan en posició de suma directa.

20. Considerem els següents subespais de $\mathbb{Q}^4$:

   $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \mid x+z+t=0,\ y+2z-t=0,\ 2x-y+3t=0\}$,
   $G = \langle (1,1,0,1),(3,2,-1,0),(1,0,-1,-2)\rangle_{\mathbb{Q}}$.

   (a) Calculeu la dimensió i una base de F, G, $F+G$ i $F \cap G$.

   (b) Comproveu que $\mathbb{Q}^4 \neq F \oplus G$ i trobeu un subespai H de $\mathbb{Q}^4$ tal, que $\mathbb{Q}^4 = F \oplus H$.

   (c) Trobeu una base de $\mathbb{Q}^4$ tal, que entre els seus vectors s'hi trobin bases de F, G, H, $F \cap G$ i $F+G$.

21. Siguin E_1, E_2 i E_3 tres subespais vectorials de $\mathbb{R}^5$, tots tres de dimensió 2. Suposem que $E_1 \cap (E_2 + E_3) = \{0\}$ i que E_2 i E_3 no són iguals. Calculeu la dimensió de $E_2 \cap E_3$.

APLICACIONS LINEALS

1. Determineu quines de les següents aplicacions són lineals:
   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (0,1,x-y)$.
   - $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(x,y) = (xy, x-y)$.
   - $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $f(x) = (0, 2x-1)$.
   - $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (3x-z, 2x+z)$.
   - $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x - z^2$.
   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x+y}$.
   - $f\colon (\mathbb{Z}_2)^2 \to \mathbb{Z}_2$, $f(x,y) = x^2 + y$.
   - $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^3$, $f(x) = (-x, 0, 3x)$.
   - $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, pensant $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{C}$-e.v.
   - $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, pensant $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-e.v.
   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f el gir de centre $(1,1)$ i angle α.
   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f el gir de centre $(0,0)$ i angle α.
   - $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $D(p(X)) = p'(X)$.
   - $I\colon \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ contínua}\} \to \mathbb{R}$, $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.
   - $J\colon \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ derivable}\} \to \mathbb{R}^3$, $J(f) = (f(1), f'(-1), f(\sqrt{2}) + f'(0))$.
   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x-y & x \end{pmatrix}$.
   - $f\colon M_n(\mathbb{Z}_2) \to M_n(\mathbb{Z}_2)$, $f(X) = X + X^t$.
   - $\det\colon M_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$.
   - $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$.
   - $f\colon M_n(\mathbb{Q}) \to M_n(\mathbb{Q})$, $f(X) = AX - XA$, essent $A \in M_n(\mathbb{Q})$ fixada.
   - $f\colon M_{m,n}(\mathbb{C}) \to M_{m,r}(\mathbb{C})$, $f(X) = XA$, essent $A \in M_{n,r}(\mathbb{C})$ fixada.

2. Digueu si les aplicacions lineals següents són injectives, exhaustives o bijectives.
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $f(x,y,z) = (-x+y, y+z, 2x+y+z, x+y, 3x+y+z)$.
   - $g : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, $g(x,y,z,t) = (x+y+z+t, 2x+\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}z+2t, x+\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}z+2t, -\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-t)$.
   - $h : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$, $h(x,y,z,t) = (x+z-it, y-2iz-t)$.
   - $j : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3$, $j(x,y,z) = (x+y+z, x, y+z)$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal donada per
$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x-2y-t, x+7y+3z+5t)$$
   (a) Trobeu el $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Comproveu que el vector $(1,-1,1,-1)$ és solució del sistema d'equacions lineals:
$$f(x,y,z,t) = (0,4,-8).$$
   (c) Estudieu la compatibilitat del sistema anterior i trobeu-ne la solució general.

4. Trobeu tots els valors de $a \in \mathbb{R}$ per als quals l'aplicació lineal:
$$f(x,y,z) = (x+ay-az, ax+y+z, -ax+ay+z),$$
és un isomorfisme de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. En els casos en que f no sigui isomorfisme, determineu una base de $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$.

5. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ amb matriu $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ en les bases canòniques, calculeu $f(3, -1, 2)$ i $f^{-1}(1, -1)$.

6. Calculeu la dimensió i una base del nucli i la imatge de les aplicacions lineals següents:

   - $f\colon (\mathbb{Z}_2)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^4, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, 0, z, x + y)$
   - $f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad f(x, y, z) = (ix + y - iz, x - iy - z)$
   - $f\colon \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, \quad f(x, y, z, t) = (x - 2y + t, z - y + t, x - 2z - t)$
   - $I\colon \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ de grau } \leq 2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx$
   - $f\colon M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^4, \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \end{pmatrix}\right) = (a + e, 0, a + b + d, b + d + e).$

7. Proveu que les aplicacions següents són isomorfismes i expliciteu l'isomorfisme invers:

   - $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3,\ f(x, y, z) = (x + y + z, z, y + z).$
   - $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3,\ f(p(x)) = (p(1), p'(1), p''(0)).$

8. Calculeu les matrius de canvis de base entre les dues bases de $\mathbb{Q}^3$ següents:

   $$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1); \quad u_1 = (1, 2, -1),\ u_2 = (1, 1, -1),\ u_3 = (0, 0, 1).$$

   Calculeu les coordenades del vector $(1, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$ en cadascuna de les dues bases. Quin vector de $\mathbb{Q}^3$ té coordenades (1,1,1) en la base u_1, u_2, u_3?

9. Determineu si existeixen aplicacions lineals de $\mathbb{Q}^3$ en $\mathbb{Q}^2$ que compleixin les condicions següents:

   - $f(1, 2, -1) = (-1, 5),\ f(1, 1, -1) = (2, -10),\ f(0, 0, 1) = (3, 4).$
   - $f(1, 2, -1) = (-1, 5),\ f(1, 1, -1) = (2, -10),\ f(0, -1, 0) = (3, 4).$
   - $f(1, 2, -1) = (-1, 5),\ f(1, 1, -1) = (2, -10),\ f(0, -1, 0) = (3, -15).$

   Determineu totes les aplicacions lineals, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que satisfan simultàniament:

   $$\operatorname{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y + 3z = 0\}, \qquad \operatorname{Im}(f) = \langle (2, -1) \rangle.$$

10. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal: $f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 4y - 2z, x + 2y - z, x + 2y)$.

    (a) Calculeu la matriu de f en les bases: canònica de $\mathbb{R}^3$ i canònica de $\mathbb{R}^4$.
    (b) Trobeu una base del nucli de f i completeu-la, si s'escau, a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Trobeu una base de la imatge de f i completeu-la, si s'escau, a una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.
    (d) Calculeu la matriu de f en les bases: $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.
    (e) Calculeu $f(1, 1, 1)$ i $f^{-1}(1, 1, 1, 0)$ dues vegades, treballant cada vegada amb una de les matrius de f calculades en els apartats anteriors.

11. Sigui $f : M_2(\mathbb{Z}_2) \to (\mathbb{Z}_2)^3$ l'aplicació lineal determinada per:

    $$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 0), \quad f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 0), \quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1), \quad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 1).$$

    Trobeu la dimensió i una base de $\operatorname{Ker}(f)$ i de $\operatorname{Im}(f)$. Qui és $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

12. Sigui E el subespai vectorial de les funcions contínues de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generat per $e^x \sin(x)$ i $e^x \cos(x)$. Trobeu la matriu en aquesta base de l'aplicació, $D : E \longrightarrow E$, que consisteix en derivar. Comproveu que D és un isomorfisme.

DIAGONALITZACIÓ

1. Considerem els següents endomorfismes de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (x-y, 2x+y); \qquad g(x,y) = (y-2x, x+y).$$

   (a) Calculeu $(f\circ g)(1,0)$, $(f+g)(1,0)$, $(2f+g)(1,0)$ i $f^2(1,0)$.
   (b) Obteniu l'expressió general de $(f\circ g)(x,y)$ i de $(g\circ f)(x,y)$.
   (c) Obteniu l'expressió general de $(f^3+1_{\mathbb{R}^2})(x,y)$ i de $(g^3+g-5\cdot 1_{\mathbb{R}^2})(x,y)$.
   (d) Obteniu l'expressió general de $(f^2-2f+3\cdot 1_{\mathbb{R}^2})(x,y)$ i de $(g^2+g-3\cdot 1_{\mathbb{R}^2})(x,y)$.
   (e) Proveu que qualsevol potència f^n de f es pot expressar com: $f^n = af + b\cdot 1_{\mathbb{R}^2}$, per a valors adequats de $a, b\in\mathbb{R}$.
   (f) Expresseu també f^{-1} com a un polinomi de primer grau en f.

2. Trobeu tots els valors propis i vectors propis dels següents endomorfismes de $\mathbb{Q}^2$ i $\mathbb{Q}^3$:

   - $f(x,y) = (y,x)$,
   - $f(x,y) = (y,-x)$,
   - $f(x,y) = (2x,-3y)$,
   - $f(x,y) = (0,x)$,
   - $f(x,y) = (x-\frac{1}{2}y, y-2x)$,
   - $f(x,y) = (-y, x-y)$,
   - $f(x,y,z) = (3y+9z, \frac{x}{3}+3z, \frac{x}{9}+\frac{y}{3})$,
   - $f(x,y,z) = (35x+14y-8z, 14x+20y+22z, -8x+22y+17z)$,
   - $f(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y)$,
   - $f(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z)$,
   - $f(x,y,z) = (8x-y-5z, -2x+3y+z, 4x-y-z)$,
   - $f(x,y,z) = (4x+3y-z, x+3y+2z, x+5z)$.

   Trobeu una base respecte de la qual la matriu de f sigui diagonal quan això sigui possible.

3. Id. id. pels següents endomorfismes:

   - $f\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$,
     $f(x,y,z,t,u) = (5x-4y+14z-2t-33u, x+y+10z-4t-12u, 4z-t-u, z+2t-u, 2u)$.
   - $f\colon M_2(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_2)$, $\quad f\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b\\ a+b+d & b+c+d\end{pmatrix}$.
   - $D\colon \mathbb{Q}_3[x] \longrightarrow \mathbb{Q}_3[x]$, $\quad D(p(x)) = p'(x)$, essent $\mathbb{Q}_3[x]$ el subespai vectorial de $\mathbb{Q}[x]$ dels polinomis de grau menor o igual que tres.
   - $f\colon E \longrightarrow E$, $\quad f(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x)$, essent E el pla de $\mathbb{R}^3$ d'equació: $x+y+z=0$.

4. Estudieu la diagonalització sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$ dels endomorfismes representats per les matrius següents, referides a la base canònica:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 17\\ -2 & -3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2+i & -i & i\\ -2i & 2 & -2i\\ -i & -i & 2-i\end{pmatrix}.$$

5. Donada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, calculeu A^{1348} i $\lim_{n\to\infty} A^n$.

6. Calculeu $f^{100}(1,0,-1,-1)$, essent $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l'endomorfisme:

   $f(x,y,z,t)=(x+y+z+t,x+y-z-t,x-y+z-t,x-y-z+t)$.

7. Estudieu segons els valors del paràmetres la diagonalització dels endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, tenen les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & a & b\\ 0 & b & a\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a-b & b & -1\\ -b & a-b & -1\\ 1 & 1 & a-b\end{pmatrix}$$

8. Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $f:E\to E$ un endomorfisme. Proveu que:

   (a) $\dim(E)$ senar $\Rightarrow f$ té almenys un valor propi.

   (b) $\dim(E)$ parell i $\det(f)<0 \Rightarrow f$ té almenys dos valors propis diferents.

   (c) Hi ha exemples en què $\dim(E)$ sigui parell i f no tingui valors propis?

9. Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ donat per: $f(x,y)=(x+3y,3x+y)$.

   Trobeu per a quins valors de $a\in\mathbb{R}$ existeix alguna base de $\mathbb{R}^2$ respecte de la qual la matriu de f és: $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & a\end{pmatrix}$. Per a aquests valors de a doneu explícitament una base de $\mathbb{R}^2$ amb aquesta propietat. La mateixa qüestió per a la matriu: $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & a\end{pmatrix}$.

10. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ donat per: $f(x,y,z)=(x-y+4z,2y,2z)$. Proveu que només una de les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3\\ -8 & 10 & -4\\ -6 & 6 & -1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

   és la matriu de f en alguna base e_1,e_2,e_3 de $\mathbb{R}^3$. Quina? Trobeu explícitament una base de $\mathbb{R}^3$ tal, que la matriu de f en aquesta base sigui aquesta matriu.

11. (*) Sigui $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. Resoleu l'equació diferencial $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.

   Indicació: expressem $A=PDP^{-1}$, amb D diagonal i P invertible. Fent el canvi lineal de variables, $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, la nostra equació diferencial es converteix en: $D\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}$. Aquesta equació és molt fàcil de resoldre i a partir de les seves solucions recuperem les solucions de l'equació original via: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$.

12. (*) Podem identificar l'espai vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ amb el conjunt de successions $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots,$ de nombres reals. Considerem el subconjunt $E \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ de les successions que satisfan una llei de recurrència del tipus:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}, \qquad \forall n \geq k,$$

amb $a_1, \ldots, a_k$ nombres reals fixats.

(a) Proveu que E és un subespai vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ i calculeu-ne la dimensió i una base.

(b) Considerem l'endomorfisme *desplaçar*:

$$D : E \longrightarrow E, \qquad x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \quad \mapsto \quad y_0 = x_1, y_1 = x_2, \ldots, y_n = x_{n+1}, \ldots,$$

que consisteix en esborrar el primer terme de la successió i renumerar els restants. Calculeu la matriu de D en la base trobada a l'apartat anterior i comproveu que el polinomi característic de D és: $p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1} x - a_k$.

(c) Suposem que $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_k)$ amb $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ tots diferents. Proveu que en aquest cas l'endomorfisme D diagonalitza i que les k successions: $1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^n, \ldots$ són una base de vectors propis.

(d) Calculeu el terme general de qualsevol successió de E a partir de la seva expressió com a combinació lineal arbitrària d'aquesta base.

(e) Calculeu el terme general de les següents successions de nombres reals

- $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, amb $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ (successió de Fibonacci).
- $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, amb $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$.
- $x_n = 2x_{n-2}$, amb $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$.
- $x_n = 2(x_{n-1} + x_{n-2})$, amb $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$.
- $x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3}$, amb $x_0 = x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.

13. (*) Sigui $d > 1$ un enter lliure de quadrats. Les solucions enteres positives de l'equació: $x^2 - dy^2 = 1$, s'obtenen per les fórmules recurrents:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1 x_n + d y_1 y_n, \\ y_{n+1} = x_1 y_n + y_1 x_n, \end{cases}$$

on (x_1, y_1) és la solució més petita, que es troba per tanteig.

Trobeu una expressió general per a les solucions enteres positives de l'equació: $x^2 - 2y^2 = 1$.