

Comportament asimptòtic de convexes al pla hiperbòlic

Eduardo Gallego

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

E-08193 Bellaterra (Barcelona), Catalunya - Espanya

egallego@mat.uab.es

Resum

Donada una successió creixent de convexes al pla euclidià \mathbb{E}^2 , la relació entre l'àrea i el perímetre creix indefinidament. En aquest article s'estudia la relació àrea/perímetre en geometria hiperbòlica tot veient que aquest quocient pot assolir diferents valors en funció de com creixen els convexes. El problema va ser plantejat per Santaló i Yañez en l'article *Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes* (1972). També s'exten aquest estudi a altres espais de curvatura negativa.

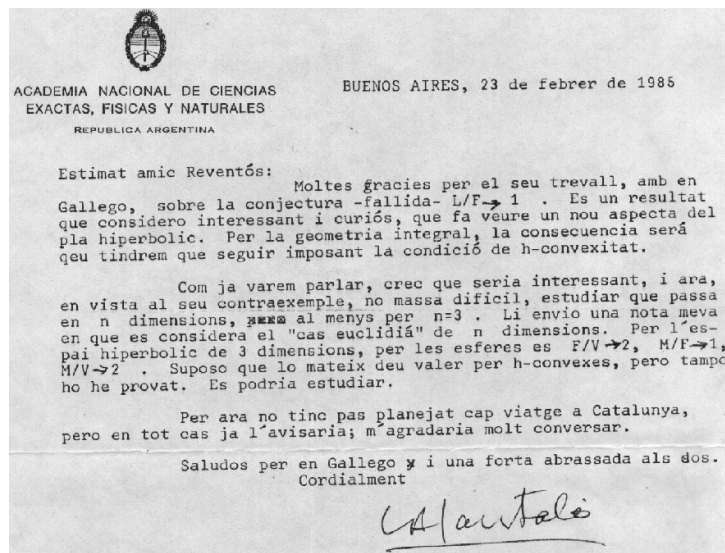


Figura 1: Carta de Santaló sobre el problema F/L

Introducció

Durant l'any 1983 Agustí Reventós, professor de geometria de la Universitat Autònoma de Barcelona, va conèixer personalment a en Lluís Santaló. Va ser amb motiu del *First International Symposium on Statistics* que va tenir lloc a Barcelona. Durant un dinar, en un tovalló de paper Santaló li va proposar el següent problema:

quins valors pot prendre el quocient entre l'àrea i el volum d'un convex al pla hiperbòlic quan el convex creix fins a omplir tot l'espai?

Estudiem aquest problema en un cas senzill. En el pla euclidià \mathbb{E}^2 l'àrea d'un disc de radi r val πr^2 i el perímetre $2\pi r$. En el pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 l'àrea val $2\pi(\cosh r - 1)$ i el perímetre $2\pi \sinh r$. Aleshores

la raó *àrea/perímetre* tendeix a infinit en el pla euclidià mentre que al pla hiperbòlic tendeix a 1! El comportament asimptòtic dels convexos és diferent segons la geometria de l'espai.

Aquest mateix any 1983 jo acabava els estudis de la llicenciatura de matemàtiques i em preguntava sobre el meu futur. Vaig parlar amb l'Agustí sobre el meu interès en seguir estudis de geometria. Va ser llavors quan em va proposar el problema que li havia esmentat en Santaló. Es convertiria en el tema de la meva tesina. En aquest treball vam provar (Gallego, Reventós, 1985) que, fixat un valor μ entre 0 i 1, és possible trobar una successió de convexos que tendeix a omplir el pla hiperbòlic i de manera que el quocient *àrea/perímetre* tendeix al valor fixat μ . Els primers exemples trobats van ser poligonals.

Alguns anys més tard (la meva tesi va tractar temes ben diferents als aquí considerats) vam agafar de nou el problema per tal de veure quines condicions geomètriques sobre la successió de convexos i les seves fronteres feien que el límit prengués un valor o un altre (Gallego, Reventós, 1999). Essencialment és la curvatura de la vora la que modifica el comportament asimptòtic del quocient *àrea/perímetre*.

En el treball (Gallego, Solanes, 2001) vàrem estudiar el quocient entre *perímetre/diàmetre* d'aquest tipus de successions i la possible relació amb el quocient *àrea/perímetre*.

De forma natural sorgeix la qüestió de generalitzar l'estudi de la raó entre l'àrea i el perímetre a dimensions superiors. Això ha estat tractat per diferents equips de recerca: (Naveira, Tarrío, 1997), (Borisenko, Miquel, 1999) i (Borisenko, Vlasenko, 1999). Finalment el problema es va tancar per qualsevol dimensió i per varietats de curvatura negativa fitada en el treball (Borisenko, Gallego, Reventós, 2001).

En aquesta nota tractaré d'explicar el problema original, la seva solució així com altres problemes relacionats que han sorgit al llarg del seu estudi. En un primer apartat es recordaran fets fonamentals del pla hiperbòlic: models, corbes distingides, convexitat i un xic de geometria integral. En el segon apartat veurem alguns resultats del treball de Santaló i Yañez que porten directament a l'estudi del quocient *àrea/perímetre*. Després, a l'apartat 3 estudiarem, amb exemples, els possibles límits del quocient a \mathbb{H}^2 . Acabarem amb els cas més general, el de les varietats de Hadamard.

Com ja he dit al principi, el precursor de tots aquests treballs ha estat L.A. Santaló, ell ens els va proposar i ens va animar a seguir en cada moment. Es va mostrar feliç dels avenços que fèiem i a ell i la seva memòria dedico aquest petit treball.

Aprofito per agrair al meu mestre l'Agustí Reventós que em va posar en marxa quan no sabia cap a on anar. Vull reconèixer molt especialment la tasca del jove investigador Gil Solanes que ha sapigut agafar amb força i empenya els problemes proposats per Santaló.

1 El pla hiperbòlic. Convexitat.

Definició El pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 és la única varietat de Riemann completa i simplement connexa amb curvatura constant igual a -1 (vegeu l'article de Reventós en aquest volum per una introducció més completa al pla hiperbòlic). La seva geometria correspon a l'obtinguda de la geometria absoluta donada pels primers quatre postulats d'euclides i el postulat de Lobatxevski: per qualsevol punt P exterior a una recta l passa més d'una recta que no talla a l .

Models És útil tenir en compte diversos models per a la geometria hiperbòlica plana.

- Model *projectiu*. Els punts són l'interior d'una cònica en el pla projectiu real i les línies són la restricció de les línies projectives. Els moviments rígids són les projectivitats que deixen la cònica i invariant transformen l'interior en ell mateix.
- *Disc de Poincaré*. Els punts són l'interior del disc unitari i les línies arcs de circumferència ortogonals a la vora. Els moviments rígids són les homografies del pla complex que fixen el disc.

- *Semi-pla de Poincaré.* Els punts són una de les components connexes del complement d'una recta a \mathbb{R}^2 i les línies els arcs de circumferència que tallen la vora ortogonalment. Els moviments són composició d'inversions respecte aquestes circumferències.

Els models de Poincaré són models conformes. Això vol dir que els angles hiperbòlics són com els angles euclidians. En coordenades polars l'element d'arc a \mathbb{H}^2 s'expressa $ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2$ mentre el de \mathbb{E}^2 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

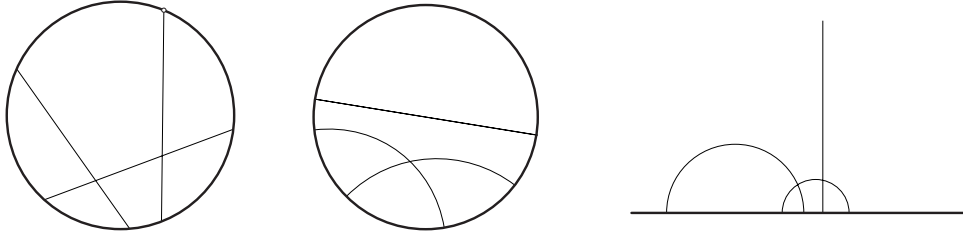


Figura 2: Models del pla hiperbòlic: projectiu, disc i semi-pla

Corbes distingides. Donada una corba regular plana γ podem definir la *curvatura geodèsica* κ_g com la longitud del vector acceleració quan γ està parametritzada per la longitud d'arc (velocitat unitària). Fixada una orientació podem donar signe a κ_g , positiu si el vector tangent i el vector normal formen base positiva i negatiu en cas contrari.

Les corbes amb curvatura geodèsica nul·la són les *geodèsiques* que són les corbes que minimitzen la distància entre punts. De vegades les anomenarem rectes o línies. Direm que dues rectes són *paral·leles* si es tallen en un punt de l'infinit i *ultraparal·leles* si no es tallen mai (veure la figura (2)). En el pla

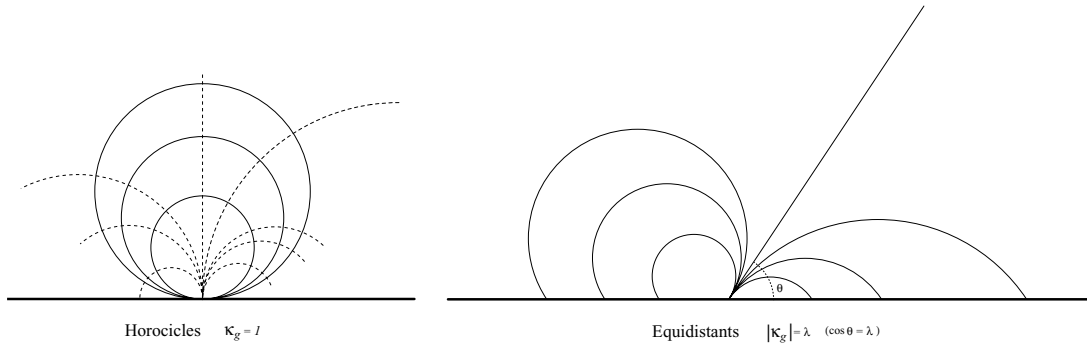


Figura 3: Horocicles i equidistants

euclidià les corbes de curvatura geodèsica constant no nul·la són sempre circumferències. La situació és ben diferent a \mathbb{H}^2 . Un senzill càlcul fent servir l'element d'arc en coordenades polars ens mostra que la curvatura geodèsica d'una circumferència de radi r és igual (en valor absolut) a $\coth r$. Aquest valor sempre és major que 1; aleshores què són les corbes amb $|\kappa_g|$ constant inferior a 1?

Si a \mathbb{E}^2 considerem la família de totes les rectes paral·leles a una direcció fixada, la família de corbes ortogonals està formada per les rectes paral·leles a la direcció orthogonal. A \mathbb{H}^2 aquesta propietat no es compleix. Les corbes ortogonals a un feix de línies paral·leles són el que anomenem *horocicles*. Podem pensar-los com circumferències amb centre a l'infinit. Donats dos punts a \mathbb{H}^2 existeixen dos i només dos arcs d'horocicle que els uneixen i la línia geodèsica que els uneix passa entre ells. És fàcil comprovar que els horocicles tenen curvatura geodèsica igual a ± 1 .

Donada una recta l en el pla euclidià, el conjunt de punts que equidisten de l és un parell de rectes paral·leles simètriques respecte l . En el pla hiperbòlic la situació és diferent. El conjunt de punts que equidisten de l són dues corbes anomenades *equidistants*. En el model del semiplà $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, les equidistants a la recta $x = 0$ són la part positiva de $y = (\pm \tan \theta)x$. Qualsevol arc geodèsic centrat a $(0, 0)$ que va de $x = 0$ a $y = (\pm \tan \theta)x$ té la mateixa longitud per ser (euclidianament) homotètics i cada homotècia (euclidiana) és composició d'isometries. En aquest model les equidistants es veuen com arcs de circumferència euclidiana tallant l'infinit en dos punts (vegeu la figura (3)) Anomenarem λ -geodèsica ($0 < \lambda < 1$) a una equidistant que talla l'infinit amb un angle θ tal que $|\cos \theta| = \lambda$. És senzill comprovar que per aquestes corbes $|\kappa_g| = \lambda$. Quan $\lambda = 0$ tenim rectes i quan $\lambda = 1$ horocicles.

Aleshores tenim que donats dos punts de \mathbb{H}^2 i $0 < \lambda \leq 1$ hi ha dues i només dos arcs λ -geodèsics que els uneixen. A més, aquests arcs λ -geodèsics estan inclosos a la regió determinada pels dos segments d'horocicle passant pels punts i són simètrics respecte la recta hiperbòlica que els uneix.

A la regió tancada determinada pels segments horocíclics que uneixen dos punts l'anomenarem *h-fus* i la regió tancada que determinen les dues λ -geodèsiques que uneixen dos punts l'anomenarem λ -fus.

Convexitat Un conjunt K del pla, és *convex* quan el segment que uneix dos punts de K està totalment contingut en K . En el model projectiu de \mathbb{H}^2 els convexos es 'veuen' com convexos euclidians. Direm que una corba tancada és convexa si la regió acotada que determina és convexa. És conegut que tota corba tancada convexa està formada per una quantitat numerable d'arcs diferenciables i a més és rectificable (és a dir, té longitud finita). Un conjunt tancat i convex amb interior no buit l'anomenarem *domini convex*. Sabem que un domini compacte amb vora de classe C^2 és convex si i només si la curvatura geodèsica de la vora no canvia de signe.

La intersecció de convexos torna a ser un conjunt convex. Tota recta determina dues regions convexes, aleshores la intersecció de regions que determinen un conjunt de rectes (una regió per recta) és convexa. Aquest tipus de regions té com a frontera el que anomenem un *polígon convex*.

Si exigim que el fus horocíclic que uneix dos punts estigui contingut en el conjunt parlarem de conjunts *horocíclicament convexos* o *h-convexos*. És clar que tot *h-convex* és convex però no el recíproc, considereu per exemple la regió interior a un triangle geodèsic.

Si el que demanem és que el λ -fus que uneix dos punts estigui contingut en el conjunt parlarem de conjunts λ -convexos. Notem que els conjunts 0-convexos són convexos ordinaris i els 1-convexos són el que hem anomenat *h-convexos*. De forma grollera podem dir que si $\lambda > \lambda'$ un λ -convex és més arrodonit que un λ' -convex. I tenim que $h\text{-convex} \Rightarrow \lambda\text{-convex} \Rightarrow \text{convex}$.

Un domini amb vora C^2 a trossos és λ -convex si i només si en les parts regulars de la frontera la curvatura geodèsica és més gran o igual que λ i en els punts singulars l'angle interior no és major que π . Aleshores els discos hiperbòlics són *h-convexos* ja que la curvatura geodèsica de la vora és $\coth(r)$.

Tota λ -geodèsica ($0 < \lambda \leq 1$) l^λ determina dues regions en el pla, una és convexa i l'altra no. De fet la part convexa és λ -convexa. La λ -convexitat és estable per interseccions, és a dir la intersecció de λ -convexos és un λ -convex. Un λ -polígon és la vora de la regió obtinguda per la intersecció d'un nombre finit de regions λ -convexes determinades per λ -geodèsiques.

Desigualtats isoperimètriques Si K és un domini compacte en el pla euclidià, entre el perímetre L i l'àrea F tenim la desigualtat isoperimètrica

$$L^2 - 4\pi F \geq 0.$$

La igualtat és certa si i només si el domini és un disc. Pel pla hiperbòlic tenim també una desigualtat similar:

$$L^2 - 4\pi F - F^2 \geq 0. \tag{1}$$

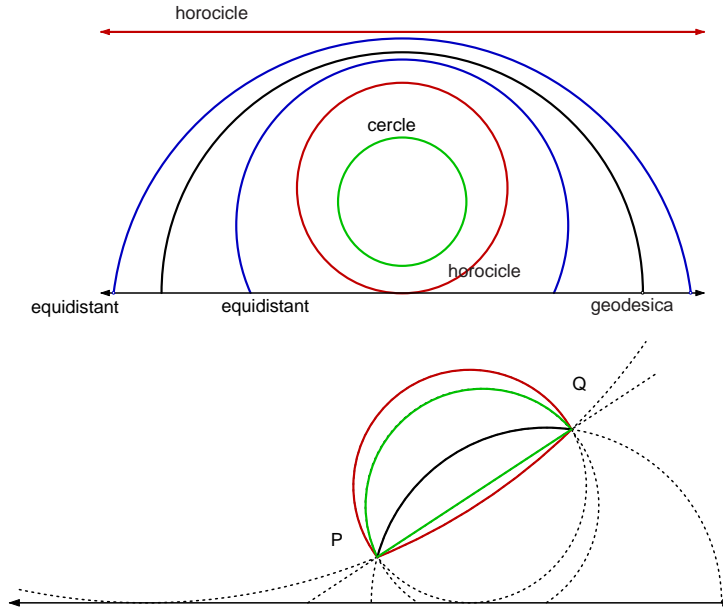


Figura 4: Corbes distingides per dos punts

També la igualtat es compleix si i només el domini és un disc. D'aquesta desigualtat deduïm una relació interessant per dominis al pla hiperbòlic, la raó àrea/perímetre sempre és menor que 1

$$\frac{F}{L} \leq 1$$

La fórmula de Gauss-Bonnet a \mathbb{H}^2 Més endavant farem servir la fórmula de Gauss-Bonnet en el pla hiperbòlic. Si la vora d'un domini K és de classe C^2 a trossos i la curvatura geodèsica κ_g està definida excepte potser en un nombre finit de punts. Aleshores, en el pla hiperbòlic

$$\sum_i \int_{\partial K_i} \kappa_g = 2\pi - \sum_i \alpha_i + F \quad (2)$$

on α_i són els angles exteriors en els punts singulars i ∂K_i les parts regulars de la vora.

De les fórmules (1) i (2) resulta que si $K_0(t)$ és una successió de h -convexos que tendeix a omplir \mathbb{H}^2 aleshores

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_0}{L_0} = 1. \quad (3)$$

Santaló va conjeturar a (Santaló, Yañez, 1972) que aquest límit era 1 per a qualsevol família de convexos omplint el pla hiperbòlic.

Mesura de punts i mesura de rectes En coordenades polars la mesura d'un conjunt de punts (r, θ) del pla es determina integrant respecte l'element d'àrea, $r dr \wedge d\theta$ en el cas euclidià i $\sinh(r) dr \wedge d\theta$ en el cas hiperbòlic.

La geometria integral es preocupa, en primer lloc, de trobar mesures invariants per moviments rígids de certs objectes geomètrics. Si el que volem és mesurar rectes del pla, primer ens cal donar un conjunt de paràmetres que defineixen les rectes. Si O és un punt arbitrari i v una direcció en O una recta del pla queda determinada per la distància p a O i l'angle θ de v a la direcció que defineix el segment que dona la distància de O a la recta.

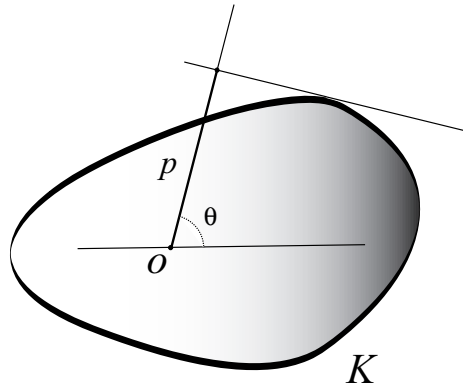


Figura 5: Coordenades p i θ

Amb aquesta parametrització una mesura de rectes invariant per isometries és

$$dG = dp \wedge d\theta$$

en el cas euclidià i

$$dG = \cosh(p) dp \wedge d\theta.$$

en el cas hiperbòlic.

Fórmula de Cauchy-Crofton La fórmula de Cauchy-Crofton mesura, amb multiplicitat, les rectes que tallen una corba γ de longitud L . És a dir, si n és el nombre de punts de tall de la recta G amb γ

$$\int_{G \cap \gamma \neq \emptyset} n dG = 2L. \quad (4)$$

Aquesta fórmula és certa tant a \mathbb{E}^2 com a \mathbb{H}^2 .

Observem en particular que la mesura de rectes que tallen un convex és igual a la longitud de la vora. Per tant si $K \subset K_0$ són dominis convexos, la probabilitat que una recta que talla K_0 talli també K és igual a la raó L/L_0 entre perímetres.

Esperança d'una corda Sigui ara un convex K i considerem la variable aleatòria σ igual a la longitud de la corda que fa una recta a l'atzar quan talla a K . Tenim que

$$\int_G \sigma dG = \pi F. \quad (5)$$

Per veure aquesta relació a \mathbb{E}^2 només considerem l'angle θ variant entre 0 i π deixant llavors que p prengui valors negatius. Aleshores per cada valor de θ quan integrem respecte p obtenim l'àrea de K . La fórmula també és vàlida per \mathbb{H}^2 encara que amb una demostració lleugerament diferent.

De (4) i (5) podem concloure que

$$E(\sigma) = \pi \frac{F}{L}.$$

Trigonometria hiperbòlica Recordem algunes fórmules per triangles. Si a, b, c són les longituds dels costats i α, β, γ els angles oposats, aleshores

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cosh a$$
(6)

Són respectivament la llei del sinus i la primera i segona llei del cosinus. A més, per la fórmula de Gauss-Bonnet (2), l'àrea d'un triangle és igual a

$$F = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

D'aquestes relacions és fàcil deduir que l'àrea d'un triangle isòsceles amb dos costats iguals de longitud R formant angle α és

$$F = \pi - \left(\alpha + 2 \arctan \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \cosh R} \right).$$
(7)

2 El treball de Santaló i Yañez

En el treball (Santaló, Yañez, 1972) els autors consideren una quantitat numerable de línies uniformement distribuïdes en el pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 . Aquestes línies formen polígons dels quals es calcula el promig del nombre de costats, el promig del perímetre i de l'àrea i altres quantitats geomètriques relacionades. Formalitzem una mica aquest problema.

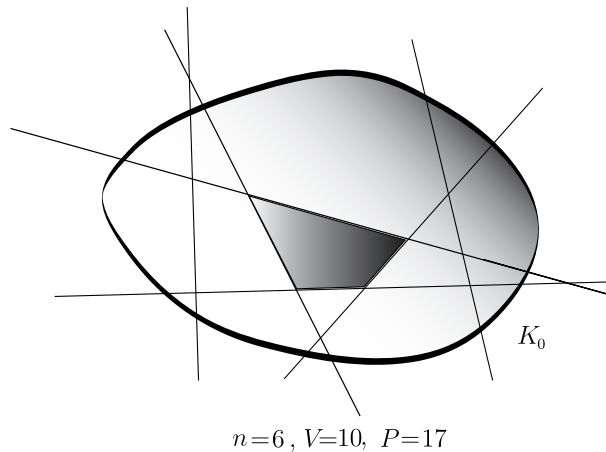


Figura 6: Regions d'un convex

Rectes a l'atzar. Fixem una família de convexos compactes $K_0(t)$ de manera que si $t' > t$ aleshores $K_0(t) \subset K_0(t')$ i que $\cup_t K_0(t) = \mathbb{H}^2$ (o \mathbb{E}^2). Si n és el nombre de rectes que tallen $K_0(t)$ suposarem que n creix quan $t \rightarrow \infty$ de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{L_0} = \frac{1}{2} \alpha.$$
(8)

Fent servir la fórmula de Cauchy-Crofton (4) sabem que si K i K_0 són convexos amb $K \subset K_0$, la probabilitat que una recta que talli K_0 talli també K és L/L_0 . Aleshores l'esperança del nombre m de rectes que tallen K quan n rectes tallen K_0 és

$$E(m) = n \frac{L}{L_0}.$$

Gràcies a (8) podem afirmar que l'esperança del nombre de rectes que tallen un convex de perímetre L és $\alpha L/2$. Podem pensar en el paràmetre α com l'esperança del nombre de rectes que tallen un segment arbitrari que té longitud unitària.

Nombre de punts Si V és el nombre de punts d'intersecció a l'interior de K_0 de n rectes que tallen K_0 l'esperança de V és

$$E(V) = \pi n(n-1) \frac{F_0}{L_0^2} \quad (9)$$

La desigualtat isoperimètrica ens mostra que en el cas euclidià el quocient F_0/L_0^2 quan t tendeix a infinit només pot assolir valors inferiors a 4π . En el pla hiperbòlic la mateixa desigualtat diu que sempre tendeix a 0. De l'equació (9) obtenim que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{V}{F_0}\right) = \frac{1}{4}\pi\alpha^2. \quad (10)$$

Per tant, l'esperança de la raó entre n i el nombre de punts d'intersecció V satisfà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{n}{V}\right) = \frac{2}{\pi\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_0}{F_0} \quad (11)$$

De fet es pot provar més, les variancies de les variables V/F_0 i n/V tendeixen a 0 quan t va a infinit, aleshores els límits (10) i (11) valen, amb probabilitat 1, per els valors de variables considerades.

En el cas euclidià la raó n/V sempre va cap a zero. Santaló i Yañez observen que en el cas hiperbòlic el comportament és diferent, per exemple, si la successió de convexos K_0 considerada està formada per h -convexos hem vist a (3) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_0}{L_0} = 1.$$

i $E(n/V)$ tendeix a $2/\pi\alpha$.

Nombre de regions i àrea promig. Si les n rectes divideixen K_0 en P regions poligonals aleshores

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{P}{F_0}\right) = \frac{1}{4}\pi\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_0}{F_0}$$

i si A és l'àrea d'una d'aquestes regions

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(A) = \frac{4}{\pi\alpha^2 + 2\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_0}{F_0}}.$$

3 El quocient àrea/perímetre a \mathbb{H}^2 .

A la secció 1 trobem el quocient F/L estudiant l'esperança de la longitud de la corda que s'obté tallant un convex amb una recta a l'atzar: $E(\sigma) = \pi F/L$. També surt estudiant el nombre de punts d'intersecció V de n rectes aleatòries entre elles dins d'un convex K i estudiant l'àrea A de les regions que aquestes rectes formen amb el convex.

En el cas euclidià si el convex K tendeix a omplir l'espai $F/L \rightarrow \infty$, llavors

$$E(\sigma) \rightarrow \infty, \quad E\left(\frac{n}{V}\right) \rightarrow 0, \quad E(A) \rightarrow \frac{4}{\pi\alpha^2}. \quad (12)$$

Santaló i Yañez van conjecturar que $\lim F/L = 1$ per a qualsevol família de convexos (no necessàriament h -convexos) que tendeixen a omplir \mathbb{H}^2 . Si aquest fos els cas, les relacions (12) serien

$$E(\sigma) \rightarrow \pi, \quad E\left(\frac{n}{V}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi\alpha}, \quad E(A) \rightarrow \frac{4}{\pi\alpha^2 + 2\alpha}. \quad (13)$$

Anem a veure amb exemples com el límit de F/L pot assolir altres valors i per tant (13) poden ser diferents.

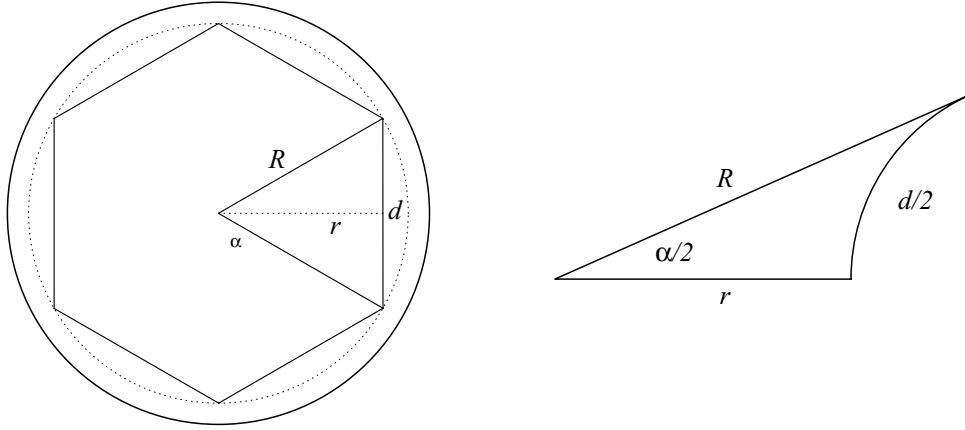


Figura 7: Polígon regular K_n

Exemples poligonals. Sigui K_n un polígon regular de $3 \cdot 2^{n-1}$ costats inscrit en un disc de radi R_n . K_n està format per $3 \cdot 2^{n-1}$ triangles isòscels amb costats iguals de longitud R_n . Denotem per d_n la longitud de la base i per h_n la seva àrea, llavors

$$\frac{F_n}{L_n} = \frac{h_n}{d_n}.$$

Sigui α_n l'angle oposat a la base, fem créixer R_n de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n \sinh R_n) = \delta \quad (14)$$

(per exemple quan $R_n = \log(2\delta/\alpha_n)$). Fent servir les relacions (6) i (7) tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \pi - 2 \arctan\left(\frac{4}{\delta}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\delta}{4}\right).$$

En conseqüència,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{d_n} = \frac{\pi - 2 \arctan\left(\frac{4}{\delta}\right)}{2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\delta}{4}\right)}$$

que pot prendre qualsevol valor entre 0 i 1.

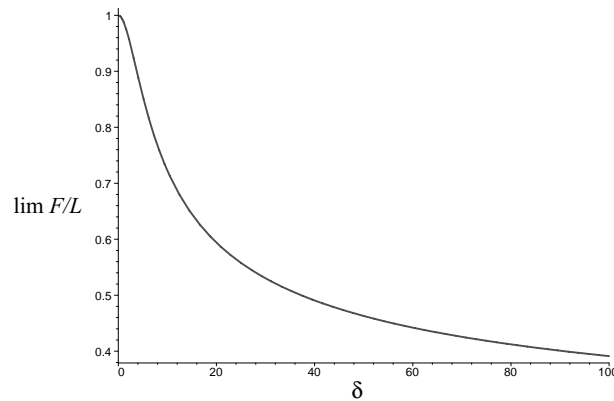


Figura 8: Gràfica de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F}{L}$ respecte δ

A més si considerem la successió poligonal K_n amb $R_n = n$ tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{L_n} = 0.$$

Hem vist que

<p>per a qualsevol $\mu \in [0, 1]$ existeix una successió de convexos $\{K_n\}$ a \mathbb{H}^2 tal que $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup K_n = \mathbb{H}^2$ i</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{L_n} = \mu.$

Interpretem la condició (14) sobre el creixement de R_n . L'arc d'angle α_n de la circumferència circumscriba a K_n és $\alpha_n \sinh R_n$, demanem que aquest arc tendeixi a δ .

Quan la 'longitud' δ d'aquest arc límit es fa petita, $\lim_{n \rightarrow \infty} F/L$ s'acosta a 1 i quan δ és fa gran, $\lim_{n \rightarrow \infty} F/L$ s'acosta a 0.

De les fórmules trigonomètriques (6), aplicades al triangle rectangle que té per hipotenusa R_n , per catet l'alçada r_n dels triangles isòsceles que formen el polígon K_n i amb angle entre ells $\alpha_n/2$ (vegeu la figura 7), es pot veure que

- a) Si $\delta \rightarrow \infty$, i per tant $\lim_{n \rightarrow \infty} (F/L) \rightarrow 0$, la diferència $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - r_n) \rightarrow \infty$
- b) Si $\delta \rightarrow 0$, i per tant $\lim_{n \rightarrow \infty} (F/L) \rightarrow 1$, la diferència $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - r_n) \rightarrow 0$
- c) Si $\delta \rightarrow \delta_0$, i per tant $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} (F/L) < 1$, la diferència $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - r_n)$ tendeix a un valor no nul.

De forma grollera podem dir que en el primer cas tenim molta punxa i en el segon cas molt poca punxa.

Successions de λ -convexos. Ja hem vist que el límit de F/L , si existeix, està entre 0 i 1 essent 0 la millor cota inferior. Imaginem ara que K és un domini λ -convex amb vora C^2 a trossos. De la fórmula de Gauss-Bonnet (2) tenim

$$\lambda L \leq 2\pi - \sum \alpha_i + F$$

on α_i són els angles exteriors en els punts singulars de la vora. Dividint per L obtenim la relació

$$\lambda - \frac{2\pi}{L} \leq \frac{F}{L} < 1$$

i

$$\lambda \leq \liminf \frac{F}{L} \leq \limsup \frac{F}{L} \leq 1.$$

Veiem que la cota inferior λ és la millor possible, per això ens cal construir exemples amb $\lim F/L = \lambda$.

Hem dit que el comportament de les punxes del convex quan va cap a l'infinit determina si la raó F/L pot anar cap a zero o no. Amb aquesta idea present construirem els exemples. Sigui D un disc de radi r i s un segment de longitud $2R$ amb punt mitjà en el centre de D i $2R > r$. Denotem per $K_\lambda(R, r)$ el més petit dels λ -convexos que contenen la unió de D i s . Es pot provar (Gallego, Solanes, 2001) que si $r \geq \operatorname{arctanh}(\lambda)$, la vora de $K_\lambda(R, r)$ està formada pels segments de λ -geodèsica que uneixen els extrems de s amb els punts de tangència i deixen D al costat λ -convex i pels arcs de la vora de D compresos entre els punts de tangència (vegeu la figura 10).

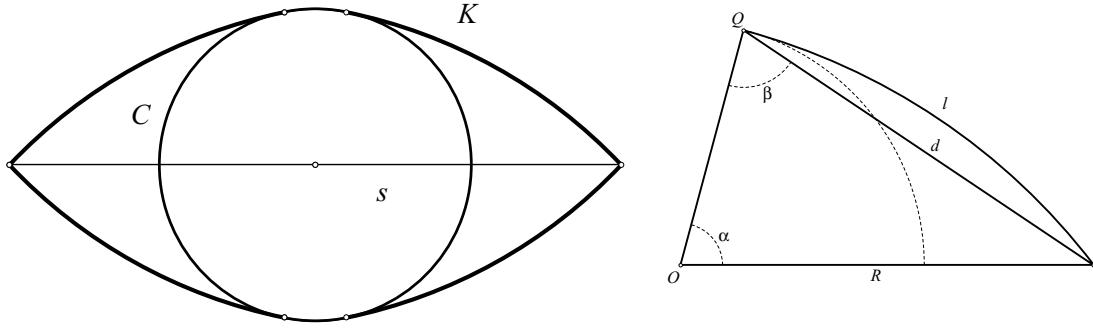


Figura 9: El domini convex λ -convex $K_\lambda(R, r)$

Escrivim ℓ per denotar la distància d'un extrem de s al punt de tangència i α l'angle entre s i el radi per aquest punt. Si $R = ae^r$ (o $R = e^{2r}$) quan $r \rightarrow \infty$ tenim (Gallego, Solanes, 2001) ¹

$$(a) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ell}{R} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad (b) \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 0. \quad (15)$$

Fent servir un altre cop la fórmula de Gauss-Bonnet (2) tenim que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F}{L} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum \int \kappa_g}{L} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\lambda\ell + 2(\pi - 2\alpha) \sinh r \coth r}{L}.$$

El numerador es pot escriure com $\lambda L + 2(\pi - \alpha)(\cosh r - \lambda \sinh r)$, llavors

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F}{L} = \lambda + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2(\pi - \alpha)(\cosh r - \lambda \sinh r)}{L} = \lambda + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi(\cosh r - \lambda \sinh r)}{L}$$

quan es compleix la propietat (b) de (15). A més, si $R = ae^r$, quan r és gran $\ell \sim R/\sqrt{1-\lambda^2}$ i

$$\frac{L}{2\pi(\cosh r - \lambda \sinh r)} \sim \frac{4\ell + 2\pi \sinh r}{2\pi(\cosh r - \lambda \sinh r)} \rightarrow \frac{4a}{(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{1}{1-\lambda}.$$

Tornem a reunir els termes i resulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F}{L} = \lambda + \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2} + 4a} \right) (1-\lambda).$$

Aleshores, si $a \rightarrow 0$, $\lim(F/L) \rightarrow 1$ i si $a \rightarrow \infty$, $\lim(F/L) \rightarrow \lambda$.

Els mateixos càlculs provenen que si $R = e^{2r}$ obtenim exactament $\lim_{r \rightarrow \infty}(F/L) = \lambda$ que és el cas extrem que volíem trobar.

Hem vist per tant

per a qualsevol $\mu \in [\lambda, 1]$ existeix una successió de λ -convexos $\{K_n\}$ a \mathbb{H}^2 tal que $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup K_n = \mathbb{H}^2$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{L_n} = \mu.$$

Aleshores la fita inferior λ per $\lim_{r \rightarrow \infty}(F/L)$ és la millor possible.

Cal dir que també es poden obtenir exemples amb tots els possibles valors límit modificant els polígons regulars descrits en l'apartat anterior convertint-los en polígons λ -convexos.

¹Si d és la distància entre dos punts, és interessant conèixer la longitud ℓ de les λ -geodèsiques que els uneixen: $\ell = (2/\sqrt{1-\lambda^2})\operatorname{arcsinh}(\sqrt{1-\lambda^2} \sinh(d/2))$. Si $\lambda \rightarrow 0$, $\ell \rightarrow d$ i si $\lambda \rightarrow 1$, $\ell \rightarrow 2 \sinh(d/2)$.

Un altre cop les probabilitats geomètriques. Havíem vist a la secció 1 que l'esperança de la corda que talla un convex era $E(\sigma) = \pi F/L$, llavors quan es tracta d'un λ -convex que creix fins omplir \mathbb{H}^2 aquesta esperança pot variar entre $\pi\lambda$ i π .

Estudiant els resultats de l'article (Santaló, Yañez, 1972) a la secció 2 hem trobat

$$E\left(\frac{n}{V}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L}{F}, \quad E(A) \rightarrow \frac{4}{\pi\alpha^2 + 2\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} (L/F)}$$

amb n/V la raó entre el nombre de rectes n que tallen K i el nombre V d'interseccions entre elles dins K i A l'àrea d'una regió formada per les rectes que tallen el convex.

Ara en funció del tipus de convexitat i de com K s'acosta a l'infinit tenim

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{\pi\alpha} \leq E\left(\frac{n}{V}\right) \leq \frac{2}{\pi\alpha\lambda} \\ \frac{4}{\pi\alpha^2 + 2\alpha/\lambda} \leq E(A) \leq \frac{4}{\pi\alpha^2 + 2\alpha} \end{array} \right\}$$

Aleshores per definir bé a \mathbb{H}^2 el significat d'un conjunt numerable de rectes a l'atzar no en tenim prou donant el grau d'empaquetament uniforme $\lim(n/L) = \alpha/2$. Cal especificar també com creix F/L per a la successió auxiliar de convexos utilitzada.

4 Dimensions superiors

Fins ara hem tractat amb convexos al pla hiperbòlic \mathbb{H}^2 . Si considerem successions a \mathbb{H}^n , l'espai hiperbòlic n -dimensional, és natural demanar com es comporta l'anàleg al quocient F/L en aquest cas. A l'article (Borisenko, Miquel, 1999) es prova que si una successió $\{K_t\}$ de h -convexos s'expandeix sobre \mathbb{H}^n aleshores

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_t)}{\text{vol}(\partial K_t)} = \frac{1}{n-1}$$

on ∂K_t és la vora de K_t i $\text{vol}(\cdot)$ denota el volum en la dimensió corresponent.

És conegut, veure (Yau, 1975), que si Ω és un domini compacte en una varietat riemanniana completa de dimensió n , simplement connexa i amb curvatura negativa acotada inferiorment per una constant K aleshores

$$(n-1)\sqrt{-K}\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\partial\Omega).$$

Llavors $\text{vol}(\Omega)/\text{vol}(\partial\Omega) \leq 1/(n-1)$ i la qüestió és fins on podem arribar per sota.

A \mathbb{H}^n podem parlar també de λ -convexitat (i de h -convexitat) ja que també existeix la noció d'equidistant (i d'horocicle). Un estudi dels valors límit del quocient $\text{vol}(K_t)/\text{vol}(\partial K_t)$ a \mathbb{H}^n es va fer a (Borisenko, Vlasenko, 1999). Donarem en aquest apartat la solució en una situació una mica més general, el comportament asimptòtic en varietats de Hadamard amb curvatura fitada inferiorment.

Comportament en varietats de Hadamard. Una *varietat de Hadamard* és un espai de Riemann M connex i simplement connex amb curvatura seccional no positiva. Aquí considerarem el cas en el que les curvatures seccionals K satisfan

$$-k_2^2 \leq K \leq -k_1^2.$$

Suposem M de dimensió n . Una hipersuperfície $N \subset M$ tal que en cada punt la curvatura normal és més gran que una constant λ l'anomenarem *hipersuperfície λ -convexa regular*. Pel cas no regular demanem que per cada punt de N passi una hipersuperfície regular S deixant un entorn del punt en N al costat convex de S (S és una *hipersuperfície de suport*). Direm un domini Ω és λ -convex si la seva vora és hipersuperfície λ -convexa.

Una *horosfera* és el límit d'una esfera geodèsica quan el radi tendeix a infinit. Per exemple donat un punt P i un raig γ sortint de P , el límit de la successió d'esferes centrades a $\gamma(t)$ quan t va a infinit és una horosfera. Una hipersuperfície és h -convexa si està suportada per horosferes i un domini és h -convex si la seva vora és h -convexa. Cal dir que tot domini λ -convex amb $\lambda \geq k_2$ és h -convex. A (Borisenko, Gallego, Reventós, 2001) es prova el següent resultat.

Si M és una varietat de Hadamard de dimensió n amb $-k_2^2 \leq K \leq -k_1^2$ ($K-1, k_2 > 0$) aleshores

$$\frac{\lambda}{(n-1)k_2^2} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_t)}{\text{vol}(\partial K_t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_t)}{\text{vol}(\partial K_t)} \leq \frac{1}{(n-1)k_1} \quad (16)$$

quan K_t és una família de dominis λ -convexos amb $\lambda \leq k_2$ que s'expandeix sobre \mathbb{H}^n .

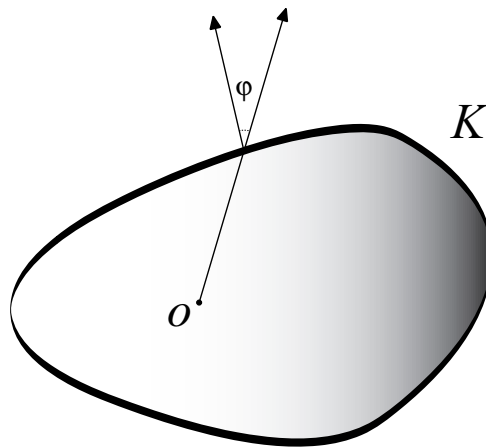


Figura 10: Angle entre en normal,al i el vector radial

No farem la demostració d'aquest teorema però tractarem de donar una idea de com es fa. En primer lloc expressem els volums de K_t i ∂K_t en forma integral i en coordenades polars centrades en un punt O dins de K . Ens apareix el jacobià de l'aplicació exponencial i el cosinus de l'angle φ que forma la direcció radial en ∂K amb el normal exterior. Aquest angle diu si el convex tomba molt o poc, és a dir està lligat a la curvatura de la vora. El punt clau és controlar aquest angle. Mitjançant una relació entre les curvatures normals de la vora i φ , que es prova a (Borisenko, Gallego, Reventós, 2001), obtenim la desigualtat

$$\cos \varphi \geq \frac{\lambda}{k_2} \tanh(k_2 r) \quad (17)$$

on r és la distància mínima del centre O a la vora (inradi). Finalment, utilitzant (17) i comparant el jacobià de l'exponencial de M amb els jacobians de les exponencials a $\mathbb{H}^n(k_1)$ i $\mathbb{H}^n(k_2)$, espais hiperbòlics de curvatures $-k_1^2$ i $-k_2^2$, s'acaba la demostració.

Exemples. Com abans, ens agradaria veure que les desigualtats (16) són les millors possibles. Això no es pot fer en general, hem de considerar varietats concretes, fem-ho per \mathbb{H}^n . Per la fita superior només cal considerar una successió de boles B_t que són h -convexes. Per l'altra fita recordem els convexos $K_\lambda(R, r)$ definits a la secció 3, a \mathbb{H}^n fem el mateix considerant una bola D de radi r i un segment s que passi pel seu centre. Sigui $K^\epsilon(R, r)$ el conjunt de punts a distància de $K_0(R, r)$ menor o igual que ϵ , és un

conjunt λ -convex amb $\lambda = \tanh \epsilon$. Si fem $R = \exp(2r)$ aleshores, després d'alguns càlculs, tenim (Gallego, Solanes, 2002)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K^\epsilon(R, r))}{\text{vol}(\partial K^\epsilon(R, r))} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

Canviant la relació entre R i r per $R = a \exp(r)$ podem obtenir límits entre $\lambda/(n-1)$ i $1/(n-1)$.

Referències

- Borisenko, A. A., E. Gallego, A. Reventós (2001). Relation between area and volume for λ -convex sets in Hadamard manifolds. *Differential Geom. Appl.* 14(3), 267–280.
- Borisenko, A. A., V. Miquel (1999). Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space. *Illinois J. Math.* 43(1), 61–78.
- Borisenko, A. A., D. I. Vlasenko (1999). Asymptotic behavior of volume of convex sets in hadamard manifolds. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 6(3/4), 223–233.
- Gallego, E., A. Reventós (1985). Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane. *J. Differential Geom.* 21(1), 63–72.
- Gallego, E., A. Reventós (1999). Asymptotic behaviour of λ -convex sets in the hyperbolic plane. *Geom. Dedicata* 76(3), 275–289.
- Gallego, E., G. Solanes (2001). Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane. *J. London Math. Soc. (2)* 64(1), 161–178.
- Gallego, E., G. Solanes (2002). Some examples of the asymptotic behavior con convex set in hadamard manifolds. *En preparació*.
- Naveira, A. M., A. Tarrío (1997). Two problems on h -convex sets in the hyperbolic space. *Arch. Math. (Basel)* 68(6), 514–519.
- Santaló, L. A., I. Yañez (1972). Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes. *J. Appl. Probability* 9, 140–157.
- Yau, S. T. (1975). Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 8(4), 487–507.