Publicacions Matemàtiques, Vol **43** (1999), 417–422.

GROUPOÏDES RIEMANNIENS

E. Gallego, L. Gualandri, G. Hector et A. Reventós

Abstract

We propose a definition of a riemannian groupoid, and we show that the Stefan foliation that it induces is a riemannian (singular) foliation. We also prove that the homotopy groupoid of a riemannian (regular) foliation is a riemannian groupoid.

I

Dans le but d'étudier les feuilletages riemanniens singuliers à l'aide d'une desingularisation par certains groupoïdes attachés à ces feuilletages, nous essayons de donner ici une *bonne* definition de groupoïde riemannien. Avec cette definition nous montrons que le feuilletage de Stefan induit par un groupoïde riemannien est un feuilletage riemannien. Nous montrons aussi que le groupoïde d'homotopie d'un feuilletage riemannien régulier est un groupoïde riemannien. Pour les definitions et propriétés des groupoïdes, groupoïdes de Lie et feuilletages de Stefan notre référence sera toujours [**2**]; tous les groupoïdes serant supposés à fibres connexes.

Definition. On dira qu'un groupoïde de Lie $\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$ est un groupoïde Riemannien s'il existe des métriques Riemanniennes g sur Γ et g_0 sur Γ_0 telles que:

i) l'inversion $i : \Gamma \to \Gamma$ est une isométrie;
ii) α est une submersion Riemannienne de (Γ, g) sur (Γ_0, g_0).

Alors $\beta = \alpha \circ i$ sera egalement une submersion Riemannienne.

Premiers exemples.

Soit (X, g_0) une variété Riemannienne. Le groupoïde grossier $X \times X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ d'unités X est un groupoïde Riemannien si on pose $g = p_1^* g_0 + p_2^* g_0$.

De même le groupoïde fondamental $\Pi_1(X) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X$ de X est Riemannien pour $g = \alpha^* g_0 + \beta^* g_0$.

Le feuilletage de Stefan $(\Gamma_0, \mathcal{F}_0)$**.**

La variété Γ_0 s'identifie par un plongement $j : \Gamma_0 \to \Gamma$ à l'ensemble des points fixes de i; c'est donc une sous–variété totalement géodésique de (Γ, g). Dans le cas du groupoïde grossier j est l'application diagonale de X dans $X \times X$; cet exemple montre que j ne peut être une isométrie c.à.d. que la métrique induite par g sur Γ_0 ne peut coïncider avec g_0.

Rappellons encore que la variété Γ_0 est munie d'un feuilletage singulier $\mathcal{F}_0$ dont les feuilles sont les projections par α des β– fibres ou les projections par β des α–fibres. Alors

$$\mathcal{F} = \alpha^* \mathcal{F}_0 = \beta^* \mathcal{F}_0$$

est un feuilletage de Stefan sur Γ dont la trace sur Γ_0 est le feuilletage $\mathcal{F}_0$. Donc si on designe par $T_p\alpha$ (resp. $T_p\beta$) l'espace tangent en p à la α–fibre (resp. β–fibre) passant par p on a

$$\begin{cases} T_p(\mathcal{F}) & = & T_p\alpha + T_p\beta; \\ T_p(\mathcal{F}_0) & = & T_p(\mathcal{F}) \cap T_p(\Gamma_0) \end{cases}$$

On dira qu'un feuilletage singulier est Riemannien, au sens de Molino (cf. [**3**]), si toute géodésique perpendiculaire en un point à une feuille reste orthogonal à toutes les feuilles qu'elle rencontre.

Enfin si on designe par $\perp$ (resp. $\perp_0$) l'orthogonalité relativement à g (resp. g_0), on a

Proposition. *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est Riemannien et pour $p \in \Gamma_0$, on a l'égalité:*

$$T_p(\mathcal{F})^\perp = T_p(\mathcal{F}_0)^{\perp_0}$$

Démonstration: On a l'égalité

$$T_p(\mathcal{F})^\perp = (T_p\alpha)^\perp \cap (T_p\beta)^\perp$$

Donc puisque α et β sont Riemanniennes, toute géodésique orthogonale en un point p à $\mathcal{F}$ est orthogonale en tout point aux α–fibres et aux β–fibres donc à $\mathcal{F}$.

Soient alors $p \in \Gamma_0$ et $v \in (T_p\mathcal{F})^\perp$ on va montrer que $\alpha_* v \in (T_p\mathcal{F}_0)^{\perp_0}$. En effet pour tout $w \in T_p(\mathcal{F}_0)$ il existe $\widetilde{w} \in (T_p\alpha)^\perp$ tel que $\alpha_* \widetilde{w} = w$ et puisque α est une submersion Riemannienne il vient:

$$g_0(\alpha_* v, w) = g_0(\alpha_* v, \alpha_* \widetilde{w}) = g(v, w) = 0$$

et donc $\alpha_* v \in T_p(\mathcal{F}_0)^{\perp_0}$. On a evidenment une propriété analogue pour $\beta_* v$ et par suite

$$(\alpha_* v - \beta_* v) \in (T_p \mathcal{F}_0)^{\perp_0}. \tag{1}$$

Par ailleurs de la relation $\beta_*(v - \beta_* v) = 0$ on déduit que $(v - \beta_* v) \in T_p \beta$ et par definition de $\mathcal{F}_0$ on a

$$(\alpha_* v - \beta_* v) = \alpha_*(v - \beta_* v) \in T_p \mathcal{F}_0. \tag{2}$$

Des relations (1) et (2) on déduit

$$\alpha_* v - \beta_* v = \alpha_*(v - i_* v) = 0$$

et finalment

$$v - i_* v = 0 \tag{3}$$

Comme i est une isométrie involutive, on en déduit que $v \in T_p(\Gamma_0)$ et donc

$$v = \alpha_* v = \beta_* v$$

On a donc montré l'inclusion $T_p(\mathcal{F})^\perp \subset T_p(\mathcal{F}_0)^\perp$ qu'est une égalité pour raison de dimension. ∎

Remarque: Les métriques induites par g et g_0 sur $T_p(\mathcal{F}_0)^{\perp_0} = T_p(\mathcal{F})^\perp$ coïncident; les deux feuilletages $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$ ont les mêmes structures transverses, le resultat principal en decoule.

Théorème. *Le feuilletage $\mathcal{F}_0$ est Riemannien.*

Démonstration: Soit γ une géodésique de vecteur initial $v \in T_p(\mathcal{F}_0)^{\perp_0}$. Com-
me $v \in T_p\Gamma_0$ et Γ_0 est totalement géodésique dans (Γ, g), γ est une courbe sur Γ_0 ègale à ses projections par α et β donc une géodésique de (Γ_0, g_0). D'après la proposition ci–dessus γ est orthogonale à $\mathcal{F}$ donc à $\mathcal{F}_0$ et ce dernier est Riemannien. ∎

II

Passons maintenant à l'étude du groupoïde d'homotopie d'un feuilletage Riemannien régulier complet.

De façon gènérale, pour tout feuilletage régulier $(X, \mathcal{F}_0)$, l'espace total du groupoïde d'homotopie $\Pi_1(\mathcal{F}_0) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$ est le quotient de l'espace des chemins tangents aux feuilles de $\mathcal{F}_0$ par le relation d'equivalence *être homotopes dans les feuilles avec extrémitées fixées* et X est identifié au sous–espace des classes d'homotopie des lacets constants.

Pour $[\gamma] \in \Pi_1(\mathcal{F}_0)$ on a, suivant [**2**]:

$$\begin{array}{lcl} \alpha([\gamma]) = \gamma(0) & \text{et} & \beta([\gamma]) = \gamma(1); \\ i([\gamma]) = [\gamma^{-1}] & \text{et} & m([\gamma],[\gamma']) = [\gamma * \gamma'], \end{array}$$

et la structure differentiable de $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ est telle que

$$(\alpha, \beta) : \Pi_1(\mathcal{F}_0) \longrightarrow X \times X$$

est une immersion (cf. [**4**] ou [**5**]).

Enfin, on designe par $\mathcal{F}$ le feuilletage sur $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ de même codimension que $\mathcal{F}_0$ défini par

$$\mathcal{F} = \alpha^*(\mathcal{F}_0) = \beta^*(\mathcal{F}_0)$$

Si de plus $\mathcal{F}_0$ est un feuilletage Riemannien transversalement complet alors $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ est une variété séparée et pour toute métrique g_0 adaptée à $\mathcal{F}_0$,

$$\widetilde{g} = \alpha^* g_0 + \beta^* g_0$$

est une métrique Riemannienne sur $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ pour la quelle (avec des notations analogues à celles du § I) on a des décompositions en sommes directes de fibrés orthogonaux

$$(1) \left\{ \begin{array}{lcl} T(\Pi_1(\mathcal{F}_0)) & = & T\mathcal{F} \oplus (T\mathcal{F})^\perp \\ T\mathcal{F} & = & T\alpha \oplus T\beta \end{array} \right.$$

et les relations

$$(2) \left\{ \begin{array}{lcl} (T_p\mathcal{F})^\perp & \subset & T_p(X) \\ (T_p\mathcal{F})^\perp & = & (T_p\mathcal{F}_0)^{\perp_0} \text{ pour } p \in X \end{array} \right.$$

On définit alors une nouvelle métrique g sur $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ par les deux conditions suivantes:

i) le fibré $(T\mathcal{F})^\perp$ de (1) est g–orthogonal à $T\mathcal{F}$

ii)

$$g = \left\{ \begin{array}{lcl} \widetilde{g} & \text{sur} & T\mathcal{F} \\ \frac{1}{2}\widetilde{g} & \text{sur} & (T\mathcal{F})^\perp \end{array} \right.$$

Il est alors immediat de voir que g est une métrique quasi–fibrée pour F qui est donc un feuilletage Riemannienne transversalement complet. En outre on obtient le resultat annoncé:

Théorème. *Muni des métriques g_0 et g ci–dessus, le groupoïde* $\Pi_1(F_0) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$ *est Riemannien.*

Démonstration: La métrique $\widetilde{g} = \alpha^* g_0 + \beta^* g_0$ vérifie $i^*\widetilde{g} = i^*\alpha^* g_0 + i^*\beta^* g_0 = \beta^* g_0 + \alpha^* g_0 = \widetilde{g}$ et on en déduit que g est invariante elle aussi par l'inversion i. Par ailleurs, d'après (1), on a l'égalité

$$(T\alpha)^\perp = T\beta \oplus (T\mathcal{F})^\perp$$

Compte tenu de (2) et de la définition de g, on en déduit que

$$\alpha_* : (T_p\alpha)^\perp \longrightarrow T_{\alpha(p)}X$$

est une isométrie. ■

Remarques.

1) Un calcul èlémentaire montre que en restriction à $T(\mathcal{F}_0)$, on a $g = 2g_0$. Bref, comme dans le cas du groupoïde grossier, on voit que la métrique induite sur l'espace des unités n'est pas la métrique initiale g_0.
2) Du fait que g est par construction une métrique transversalement complè- te, on peut déduire du théorème prècédent que

$$\alpha : \Pi_1\mathcal{F}_0 \longrightarrow X$$

est une fibration localement triviale de base X et fibre le revêtement universal commun des feuilles de $\mathcal{F}_0$. On retrouve ainsi directement le resultat obtenu par Alcalde à partir des théorèmes de structure de Molino (cf. [**1**]).

III

On termine par quelques problèmes relatifs aux groupoïdes Riemanniens qui ont été posès pendant le *Mois feuilleté* de Lyon.

Pb 1. Etant donné un feuilletage Riemannien transversalement complet $\mathcal{F}_0$ sur une variété X; construire un groupoïde Riemannien $\Gamma \rightrightarrows X$ dont le feuilletage de Stefan associé coïncide avec le feuilletage singulier des adherènces des feuilles de $\mathcal{F}$. Retrouver les resultats de Molino.

Pb 2. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique sur une variété Riemannienne (X, g). Construire un groupoïde Riemannien $\Gamma \rightrightarrows X$ qui définisse le feuilletage dont les feuilles sont les nappes d'holonomie de la connexion –au seus d'Ehresmann– définie par le champ de sous–espaces orthogonaux à $\mathcal{F}$. Retrouver la classification des feuilletages totalement géodésiques donnée par E. Ghys.

Pb 3. Pour tout feuilletage Riemannien singulier $\mathcal{F}_0$, construire un groupoï-
de Riemannien qui définisse $\mathcal{F}_0$.

References

1. F. ALCALDE–CUESTA, Sur le groupoïde d'homotopie des feuilletages Riemanniens, *Pub. Mat. U.A.B.* **33** (1989).
2. A. COSTE, P. DAZORD, A. WEINSTEIN, Groupoïdes Symplectiques, Université Claude Bernard, Lyon I ZA,(1987).
3. P. MOLINO, Feuilletages Riemanniens singuliers, *Publicacions Centre Recerca Matemàtica* **no. 31** (1986).
4. J. PHILLIPS, The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold, *Rocky Mountain J. Math.* **17** (1987), 151–165.
5. H.E. WINKELNKEMPER, The graph of a foliation, *Ann. Glob. Analysis and Geometry* **1** (1983), 51–75.

E. Gallego: Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona, SPAIN

A. Reventós: Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona, SPAIN

G. Hector: Département de Mathematiques
Université Claude Bernard–Lyon I
Lyon, FRANCE

L. Gualandri: Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Pza. S. Donato, Bologna, ITALY

Rebut el 24 de Juliol de 1989