Superfícies d'àrea mínima i bombolles de sabó.

Eduardo Gallego

20 de febrer de 2002

Fórmula per fer bones bombolles

Quan ens rentem les mans podem fer bombolles però és millor agafar una galleda no massa fonda i omplir-la amb la següent solució:

- 1 part de sabó líquid de cuina (Fairy o similar)
- 10 parts d'aigua (millor destil·lada)
- 1/4 part de glicerina

Per fer bombolles n'hi ha prou amb una palla de les que es fan servir per beure orxata o un filferro com el del dibuix . . .

A bufar . . . i fer bombolles !

. . . més que bombolles

També voldrem fer pel·lícules de sabó amb contorns prefixats. Per això n'hi ha prou amb unes voltes de filferro tou i unes alicates. Per fer bombolles només cal bufar o introduir el filferro en forma de llaç.

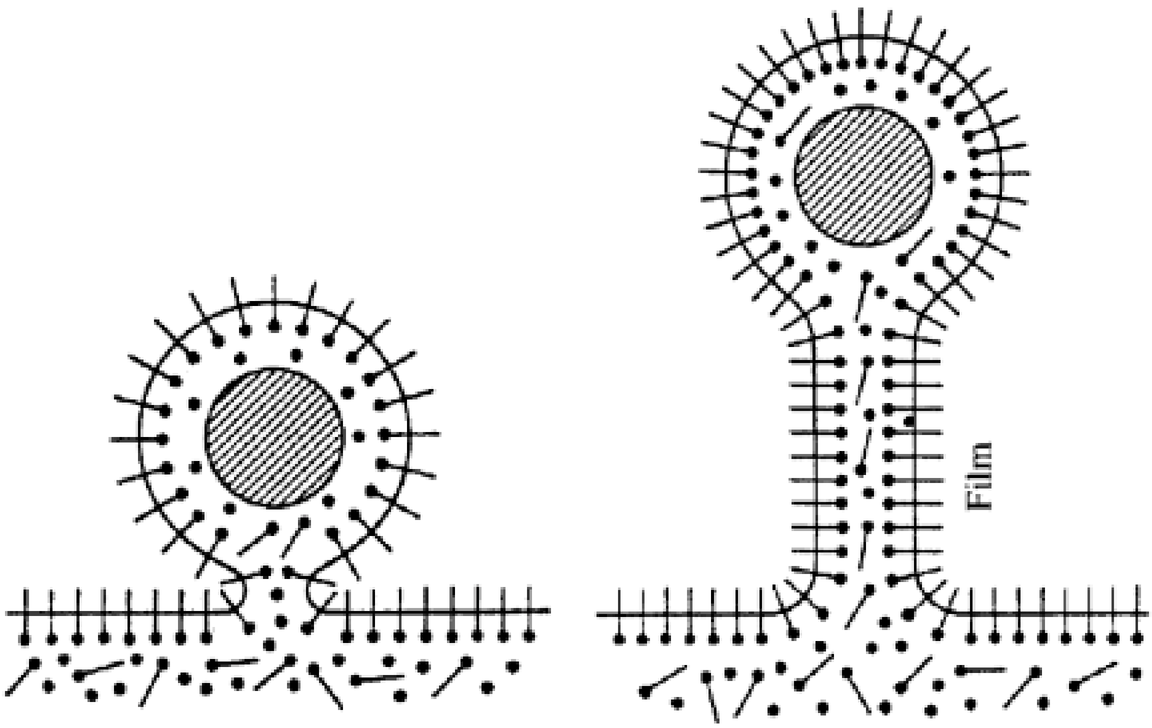
Podeu fer coses com:

. . . o no?

Perquè es fan bombolles de sabó?

Per pel·licules de material líquid l'energia es medeix en funció de la tensió superficial. El seu valor està condicionat per la presència de forces d'atracció entre les mol·lecules i el balanç de les forces d'atracció a la vora. Les mol·lecules de sabó van a l'exterior i fan que

Tensió sup. (sabó) $<$ Tensió sup. (aigua)



Major elasticitat $\Rightarrow$ es formen pel·licules estables amb sabó.

Bombolles vs. pel·lícules amb contorn

Tractarem amb dos tipus de pel·lícules de sabó

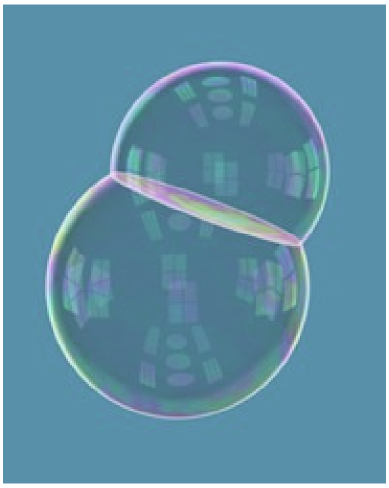
1. Sense contorn. Són superfícies compactes sense frontera. Esferes. *Superfícies de curvatura mitjana constant*.

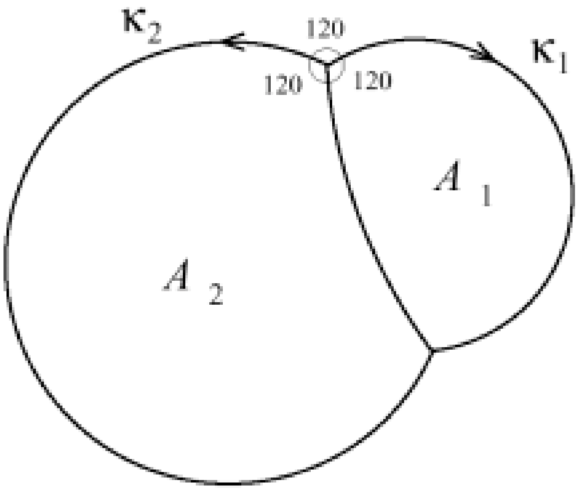
2. Amb contorn (filferro). *Problema de Plateau* (1801-1883). Superfície indeterminada. *Superfícies mínimes*.

Lleis de Plateau

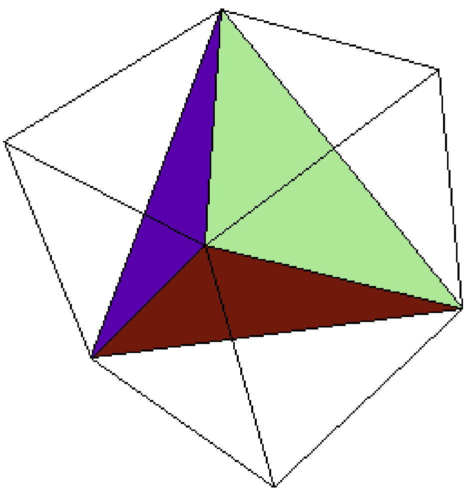
Les lleis de Plateau controlen amb quin angle es poden trobar les pel·lícules de sabó:

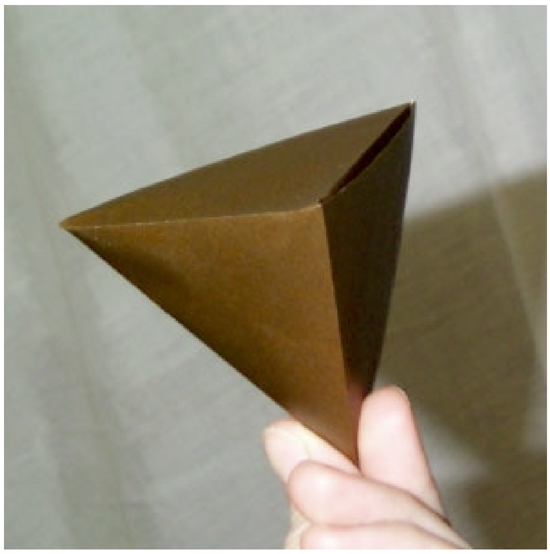
120^{o}. Quan es troben 2 pel·lícules com a la doble bombolla (double bubble).





$109^{o}28'16''$. Quan es troben tres pel·lícules. És l'angle dièdric del tetraedre (109.5^{o})





Doble bombolla

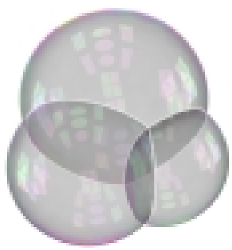
Recentment (2001) *Hutchings, Morgan, Ritoré* i *Ros* han provat la conjectura de la doble bombolla:

A $\mathbb{R}^3$ la única doble bombolla que tanca i separa dues regions R_1 i R_2 de volums prefixats v_1 i v_2 és la *doble bombolla* estàndard formada per 3 parts esfèriques que es tallen a 120°. Quan els volums són iguals la part del mig és plana.

Queden encara *problemes oberts*, per exemple

- Satisfà la 3-bombolla una propietat minimitzant similar?

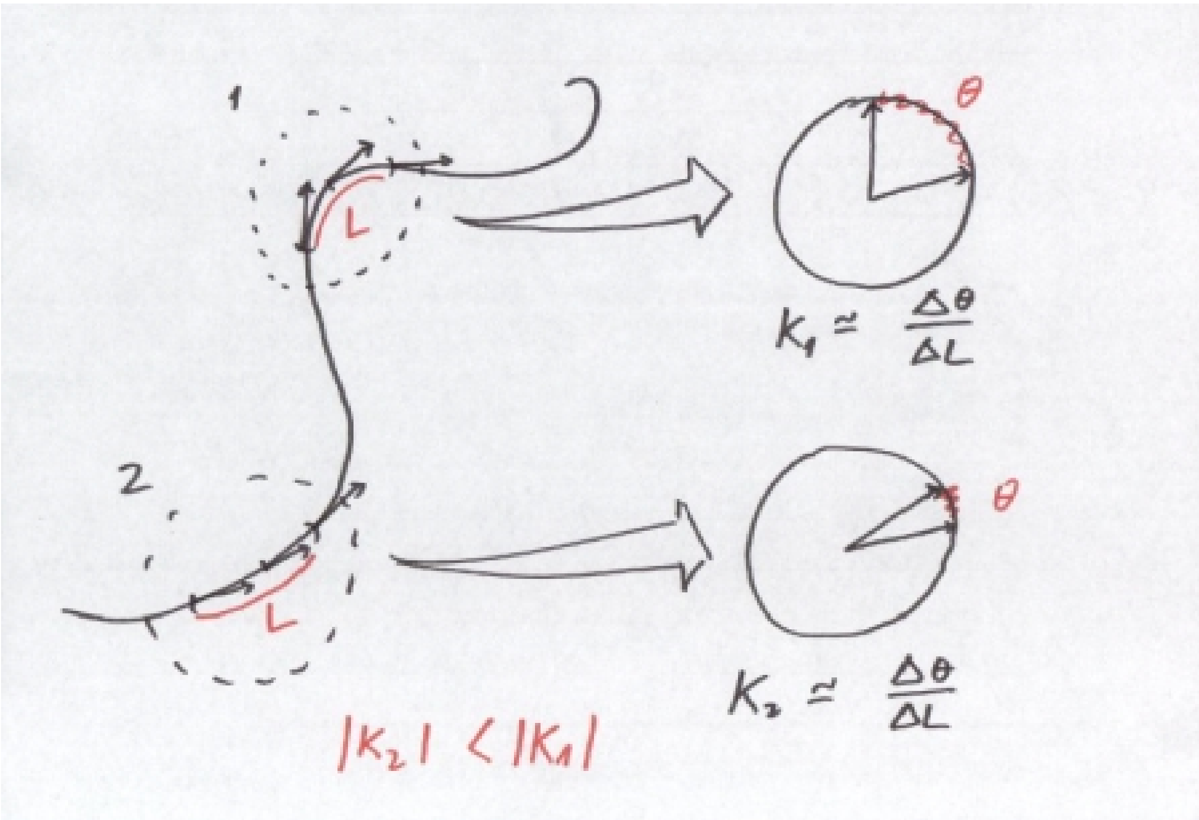
- Cambres internes a una bombolla poden minimitzar l'àrea?



Curvatura de corbes planes

Si per una mateixa longitud de corba s l'angle θ que les tangents fan amb una direcció ha variat més direm que tenim més curvatura. Aleshores

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$$



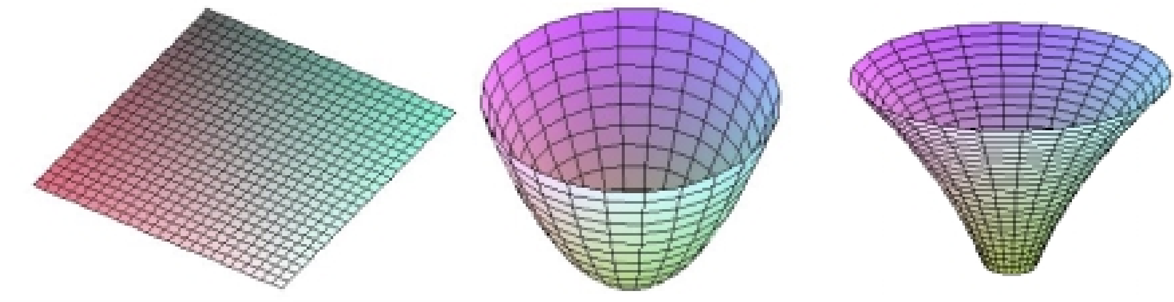
Exercici: Si la corba és de la forma $y = f(x)$ la curvatura en el punt (x_0, y_0) és

$$\frac{f''(x_0)}{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}.$$

Per exemple la curvatura d'una circumferència de radi R és $1/R$ i la d'una recta és 0.

Curvatura de superfícies

L'exemple més senzill de superfície a l'espai són els gràfics de les funcions $z = f(x, y)$. Per exemple $z = ax+by$ és un pla, $z = a^2(x^2+y^2)$ és un paraboloide etc. La nostra intuïció diu que el pla te curvatura nul·la pel paraboloide la curvatura augmenta amb a^2.



Dos tipus de curvatura:

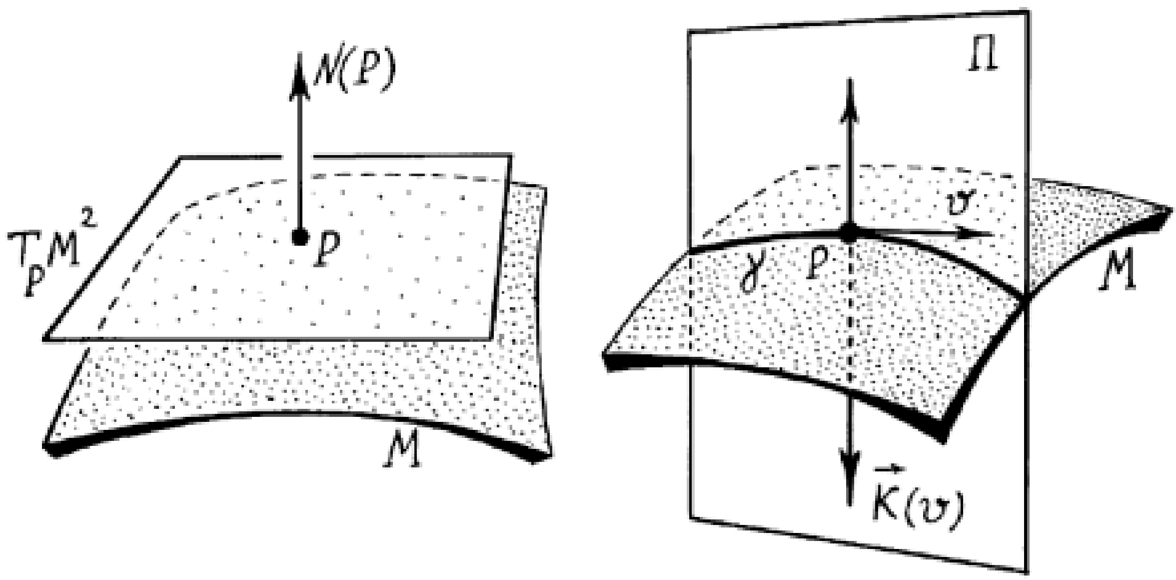
1. Curvatura de Gauss (anàloga a la curvatura de corbes)

2. Curvatura mitjana (la que ens interessa)

Curvatures en una superfície

M superfície, N vector normal en p, considerem el feix de plans Π_θ per p que contenen N. Cada pla defineix sobre M una corba. κ_θ curvatura de la corba corresponent.

Els valors màxim i mínim de κ_θ , κ_1 i κ_2 són les curvatures principals de M en el punt p.



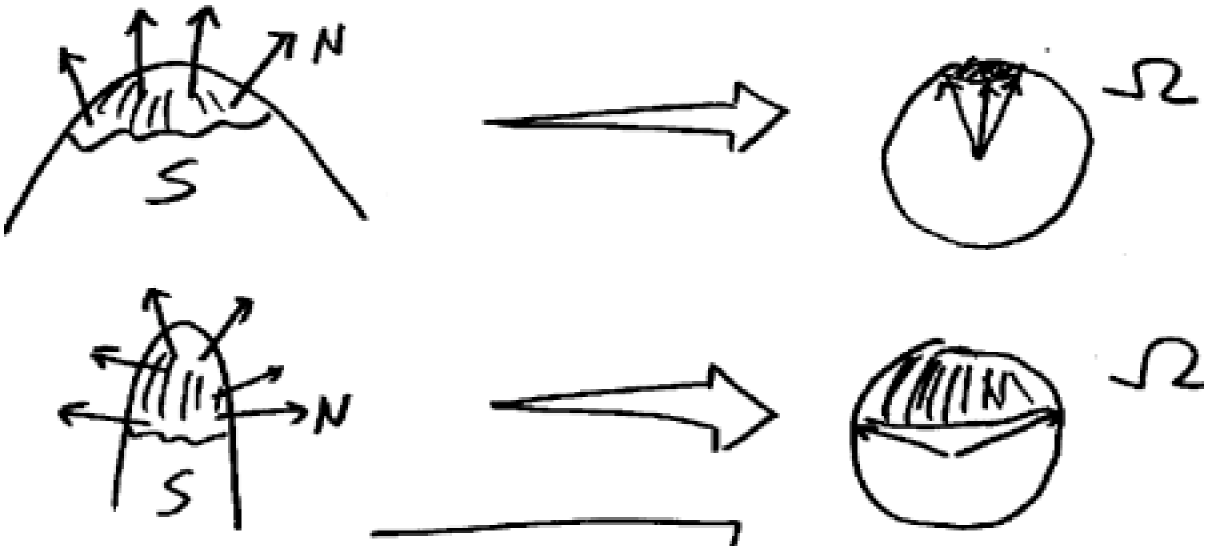
Aleshores:

1. Curvatura de Gauss $K = \kappa_1 \kappa_2$

2. Curvatura mitjana $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$

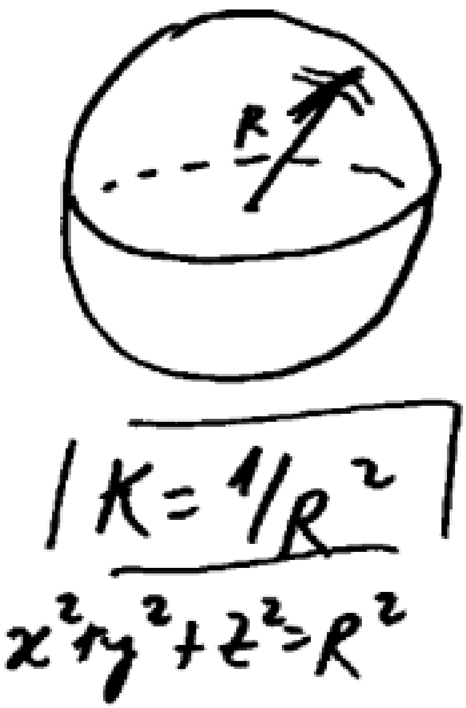
Curvatures en una superfície

Podem pensar en K com l'anàleg a la curvatura d'una corba plana $(d\Omega/dS)$ i H com el promig de les curvatures de les corbes que defineix el feix Π_θ.



$$\boxed{K = \frac{d\Omega}{dS}}$$

Exemple: una esfera de radi R te curvatura de Gauss $1/R^2$ i mitjana $1/R$. Un pla te curvatures 0. La superfície $z = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbòlic) te curvatura de Gauss negativa a $(0,0)$ i curvatura mitjana nul·la.



Exercici: Una superfície donada per l'equació $z = f(x,y)$ te

$$K = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

i

$$H = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

on $p = f_x, q = f_y, r = f_{xx}, t = f_{yy}, s = f_{xy}$

Teorema de Poisson-Laplace

Una superfície S de $\mathbb{R}^3$ fa de separació entre dos mitjans. Si P_1 i P_2 són les pressions exercides sobre S. Aleshores la curvatura mitjana de S és constant igual a $H = h(P_1 - P_2)$ on $\lambda = 1/h$ és el coeficient de tensió superficial.

Problema: Com són les superfícies amb curvatura mitjana constant?

$H = ct.$ Bombolles

$H = 0$ Superfícies mínimes, pel·licules amb un contorn per frontera.

Ens cal una *bona* definició de superfície. Hem de entrar en el terreny de la topologia.

Superfícies: descripció

Superfície orientada. Quan podem definir un vector normal de forma continua. La superfície te dos cares.

Superfície sense vora. Per tot punt es pot trobar una bola que talla la superfície en un troç ‘com’ (homeomorf) un disc.

Superfície compacta. Tota ella és pot ficar en una bola i tota successió de Cauchy te límit.

Compacta i orientable
(Esfera)

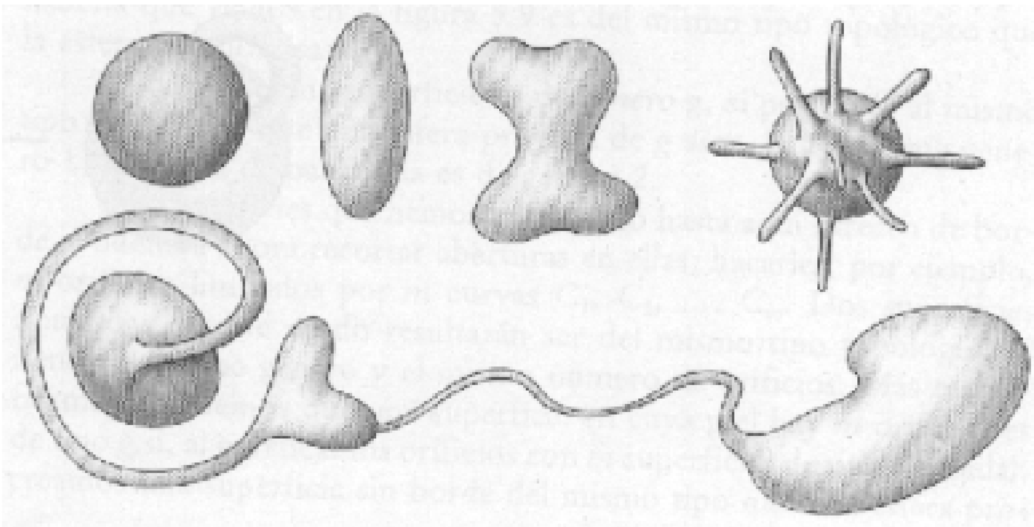
No compacta i no orientable
(Banda de Möbius)

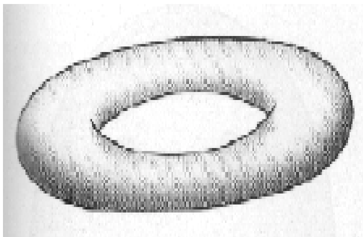
Superfícies: classificació

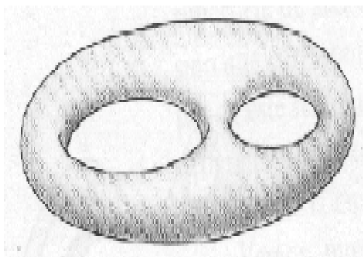
Les superfícies compactes i orientades de $\mathbb{R}^3$ topològicament són:

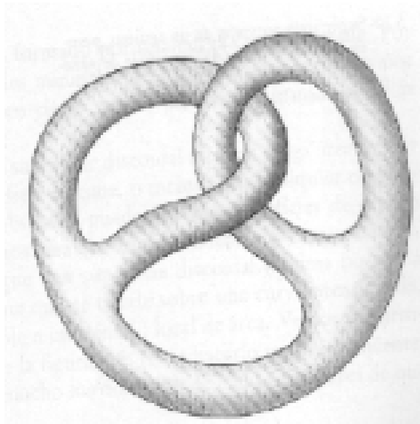
- l'esfera S^2,
- el tor T^2,
- i els tors amb g forats M_g^2.

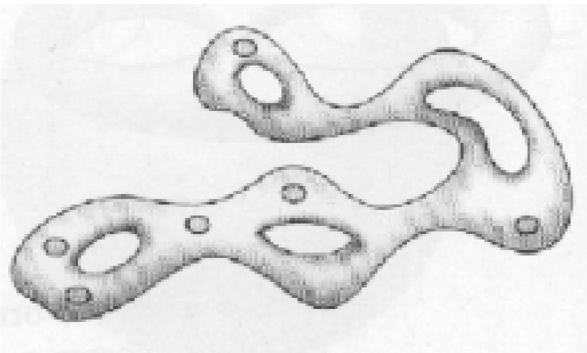
Bestiari (molt reduït)

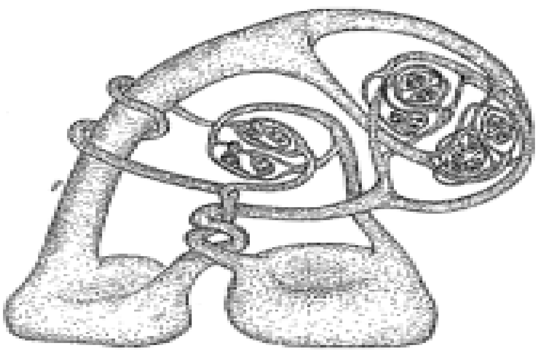


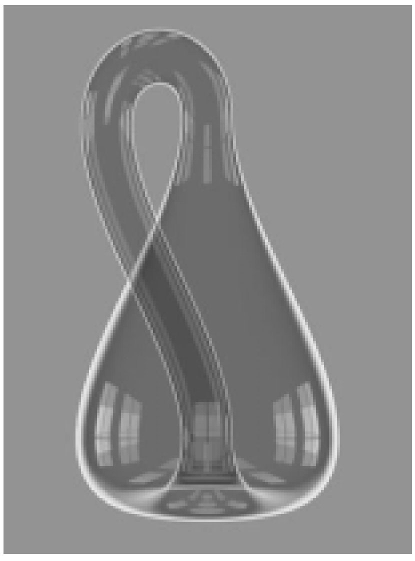










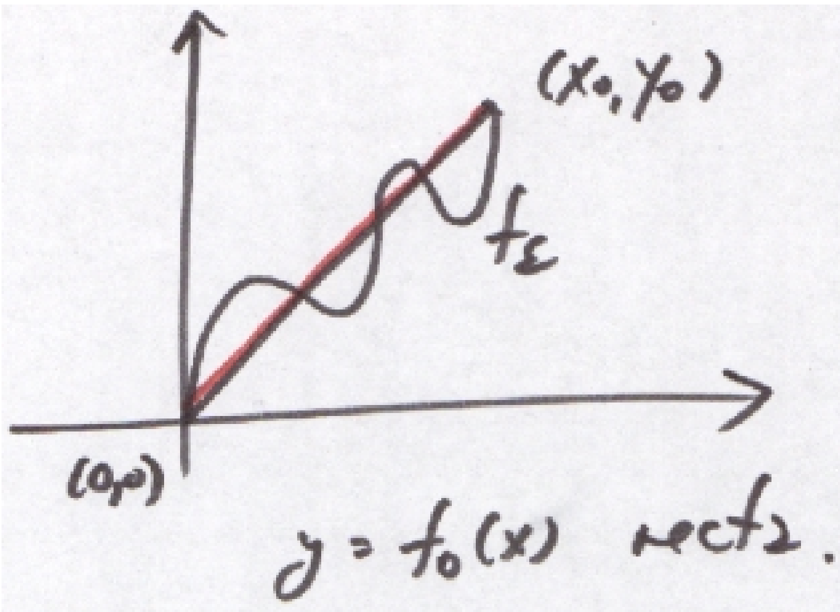


Principi de mínima acció

Hem obtingut l'equació $H = 0$ a partir de la teoria de fluids. Punt de vista alternatiu: càlcul de variacions.

Principi de Maupertuis: els canvis que es donen a la natura han de fer-se de manera que *l'acció* necessària per fer els canvis sigui mínima (*Principi de mínima acció*)

D'aquest principi es dedueix que el camí més curt entre dos punts és la línia recta.



L'acció és 'equivalent' a $L_\epsilon = \int_0^{x_0} \sqrt{(1 + f_x^2)}dx$, si fem càlcul comprovem que la solució de $dL_\epsilon/d\epsilon =$ és la línia recta.

Principi de mínima acció

Pel cas de superfícies, la integral que ens dona l'acció és la integral de l'àrea de la superfície Ω sobre un contorn Γ fixat és

$$A(\Omega) = \int_\Omega dA.$$

Els punts crítics de l'acció (punts de mínim local) són les solucions de l'equació

$$H = 0$$

Us sona?

Tenim que

- Les *superfícies mínimes* ($H = 0$) són punts crítics del funcional de l'àrea.
- Les *superfícies de curvatura mitjana constant* són extremals del funcional de l'àrea per un volum fixat.

Aquest punt de vista variacional és el que va donar lloc a la solució del problema de Plateau (Douglas, Radó, etc.)

Superfícies mínimes clàssiques

PLA

Quan considerem un contorn pla, la superfície que s'obté és un troç d'aquest pla. Abans de fer una bombolla en *Gori* te entre mans una solució plana:

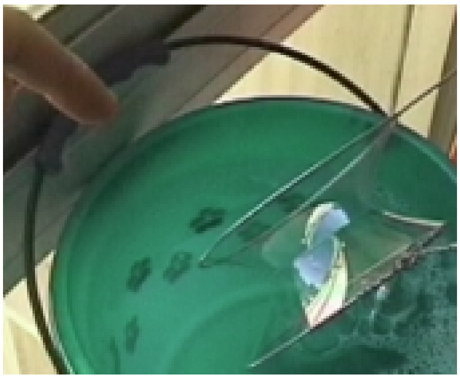
Problema de Bernstein: existeix alguna superfície mínima del tipus $z = f(x, y)$ definida per a tot (x, y) a part dels plans?

Resposta: NO

Superfícies mínimes clàssiques

CATENOIDE

Posem dos cercles dins d'una solució sabonosa. Si estàn prou junts veurem:



PRE-CATENOIDE

CATENOIDE

Sembla una superfície de revolució que s'obté fent girar una corba al voltant d'un eix. Les equacions són

$$\left.\begin{array}{rcl} x(\varphi, z) & = & r(z)\cos\varphi \\ y(\varphi, z) & = & r(z)\sin\varphi \\ z(\varphi, z) & = & z \end{array}\right\}$$

on $y = r(z)$ és el perfil de la corba en el pla $x = 0$. Si imposem el principi variacional obtenim que r ha de satisfer l'equació:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$$

amb $a > 0$. Aleshores

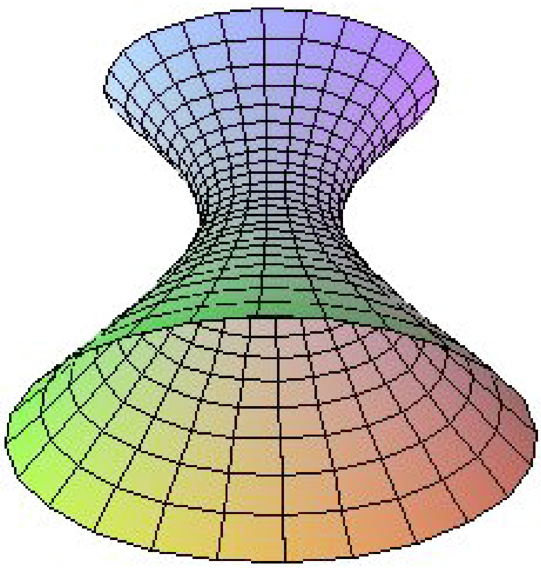
$$r = a\cosh\left(\frac{z}{a}\right)$$

Superfícies mínimes clàssiques

CATENOIDE

Exercici: Comproveu que $H = 0$ i que per tant és una superfície mínima.

Topologia: Una catenoide que es faci infinitament gran és, topològicament parlant, com $S^2 - \{p, q\}$. Una esfera menys dos punts (completa i sense autointerseccions). El tipus topològic és $g = 0$ i $k = 2$.



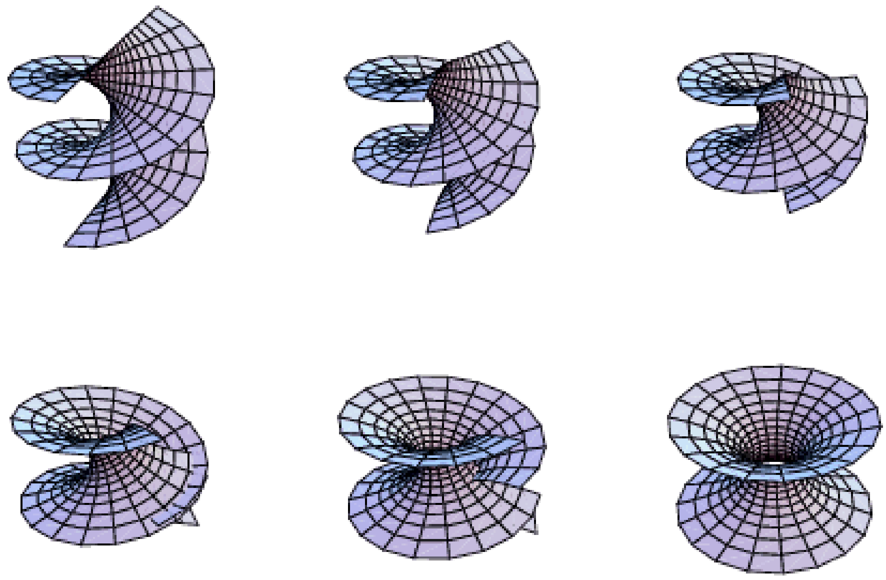
Catenoide ve de *catenària* que ve de cadena. La catenària és la corba que descriu un fil quan penja sotmès a l'acció de la gravetat.

Observació: Fixats els contorns hi han dos catenoides amb aquesta vora però una de les solucions es *inestable*.

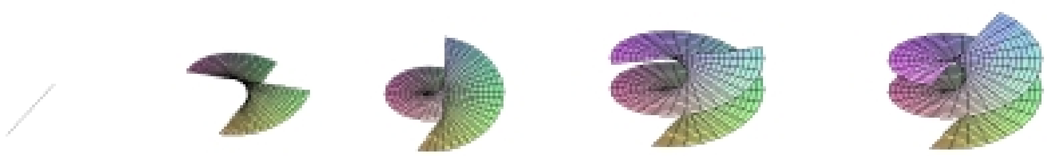
Superfícies mínimes clàssiques

HELICOIDE

Observem la següent seqüència que transforma una mena d'escala de cargol en una catenoide:



La superfície inicial s'anomena helicoide. S'obté fent girar una recta amb velocitat angular constant mentre pugem l'eix de rotació també amb velocitat constant.



Superfícies mínimes clàssiques

HELICOIDE

Podem parametritzar aquesta superfície per

$$\left.\begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u\cos v \\ y(u,v) & = & u\sin v \\ z(u,v) & = & av \end{array}\right\}$$

Exercici: comproveu que $H = 0$ i per tant és una superfície minimal.

Aquesta superfície és *periòdica*. Podem obtenir-la a base de repetir la primera volta.

Topologia: és com un pla $\mathbb{R}^2$ o be com $S^2 - \{p\}$. Superfície (completa i sense autointerseccions) amb tipus topològic $g = 0$ i $k = 1$.

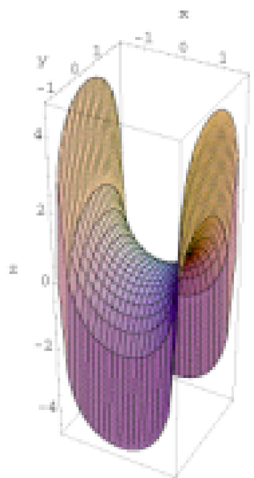
Propietat: És la única superfície reglada minimal!

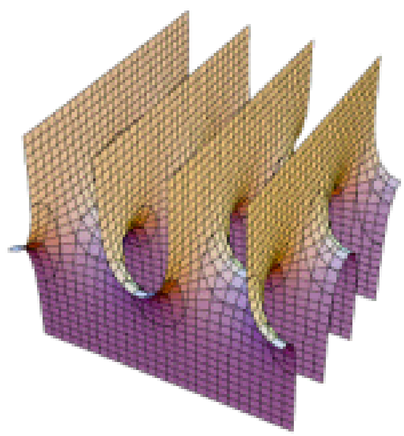
Superfícies periòdiques

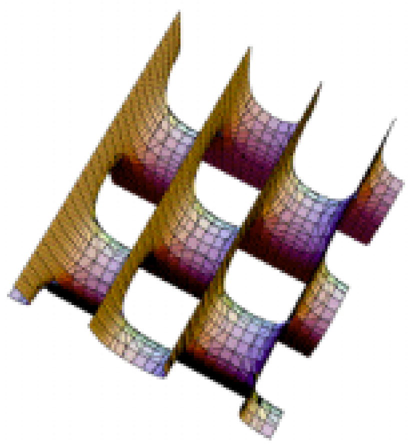
L'helicoide és periòdica en una direcció. Si intentem resoldre l'equació $H = 0$ per superfícies del tipus $z = \varphi(x) + \psi(y)$ obtenim

$$z = \frac{1}{a} \log \frac{\cos(ax+b)}{\cos(ay+d)} + c$$

Si pensem el pla com una tauler d'escacs, aquesta equació només està definida pels quadrats d'un mateix color. La superfície obtinguda és la clàssica de Scherk.





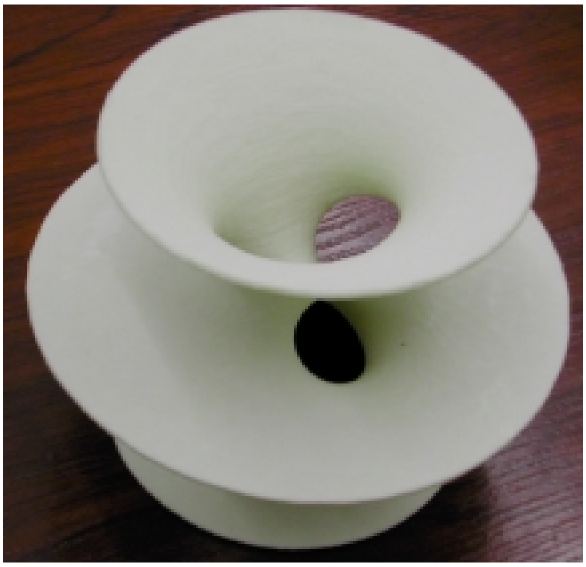
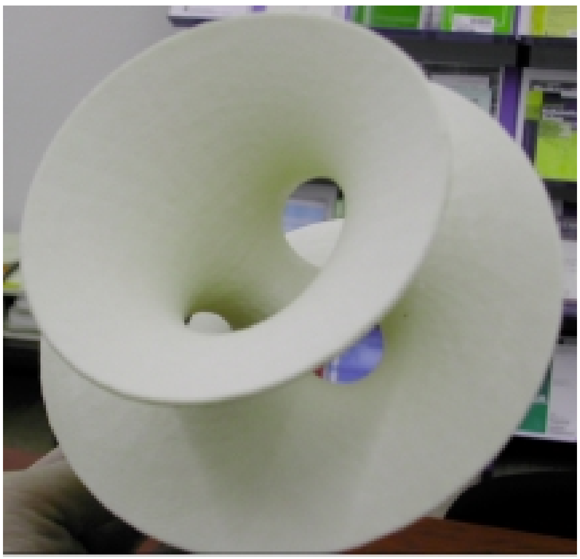


Topologia: Aquí no tenim la topologia d'una superfície compacta amb uns quants forats!

Superfície de Costa

Fins l'any 1982 (i durant més de 200 anys) les úniques superfícies mínimes pròpiament immerses i completes conegudes eren *les periòdiques*, el *pla*, la *catenoide* i l'*helicoide*.

L'any 1982 C. Costa (IMPA, Rio de Janeiro) va trobar, fent servir la representació de Weierstrass, una superfície amb tipus topològic d'un tor menys 3 punts ($g = 1, k = 3$). La superfície de Costa (Hoffman i Meeks van fer els càlculs amb ordinador en una llarga nit!)

Superfície de Costa

Superfície de Costa

Per obtenir aquesta superfície es va fer servir la representació de Weierstrass. Si $g : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ és una funció meromorfa i $f : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ és holomorfa (diferenciabilitat en variable complexa). Aleshores

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{2} f(1 - g^2), \frac{if}{2}(1 + g^2), gf \right) dz$$

dona la parametrització d'una superfície mínima.

La funció g te significat geomètric: és l'aplicació de Gauss de la superfície, la que ens dona els vector normals.

Exemple:

a) per $f(z) = -1/2z^2, g(z) = z$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenim la catenoide,

b) per $f(z) = -i/2z^2$, $g(z) = z$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenim l'helicoide,

c) per $f(z) = 1/(1 - z^4), g(z) = z$ sobre el disc unitat tenim la superfície de Scherk etc.

Superfície de Costa

Per la superfície de Costa els paràmetres f i g són funcions que es poden expressar en termes de la funció P de Weierstrass

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega = m+ni \neq 0} \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right].$$

Pensem el tor com el quocient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ i treiem els punts $0, 1/2, i/2$ i posem $a = 2\sqrt{2\pi}P(1/2)$ aleshores les dades $f = P$ i $g = a/P'$ defineixen la superfície de Costa.

Qüestió: Que podem dir de l'existència de superfícies minimals completes i pròpiament immerses a $\mathbb{R}^3$ amb tipus topològic (g, k)?

Pel teorema de Collin (1997) si $k > 1$ la curvatura total $\int_S K dA$ ha de ser finita (observeu que per l'helicoide, $k = 1$, això no passa!)

A partir de la superfície de Costa es van trobar immersions per qualsevol g i $k = 3$.

Teorema(López-Ros) Si la superfície és de gènere $g = 0$ i de curvatura total finita ha de ser un pla o una catenoide.

Ascamm

Com s'han fet els models 3D de les superfícies?

Amb el codi fet per David Marin i en el marc d'un conveni signat pel Departament de Matemàtiques de la U.A.B. i l'empresa del Parc Tecnològic de Vallès ASCAMM.

Funcionament de la impressora: