TUBS

Geòmetres de la UAB

1 Semitubs a $\mathbb{H}^3$

Pels mateixos mètodes del cas euclidià, que us vaig donar en paper, podem estudiar els tubs de $\mathbb{H}^3$ al voltant d'ovals d'àrea A i volum V (normal exterior):

$$A_t = \cosh^2 t \cdot A + \sinh(2t) \int_A H \, dA + (4\pi + A) \sinh^2 t \tag{1}$$

Si ho apliquem a un punt $(A = 0, H = 0)$ tenim

$$A_t = 4\pi \sinh^2 t$$

que és l'àrea de l'esfera.

Integrant

$$V_t = \frac{1}{4}(\sinh(2t) + 2t) \cdot A + \sinh^2(t) \int_A H \, dA + (\pi + \frac{A}{4})(\sinh(2t) - 2t)$$

Si ho apliquem a un punt $(A = 0, H = 0)$ tenim

$$V_t = \pi(\sinh(2t) - 2t)$$

que és el volum de l'esfera.

2 Tubs a $\mathbb{H}^3$

$$\text{àrea del tub} = A_t + A_{-t} = 2(\cosh^2 t \cdot A + (4\pi + A) \sinh^2 t)$$

que és la fórmula de Gray.

3 Demostració. Primera part

Sigui

$$\phi : M_t \longrightarrow M$$

tal que

$$\phi^{-1}(x) = exp_x tN(x).$$

Posem

$$\phi^* dA = J dA_t.$$

Llavors

$$A_t = \int_{M_t} dA_t = \int_{M_t} \phi^*(f dA) = \int_M f dA$$

on

$$f \circ \phi = \frac{1}{J}$$

Anem a calcular J.

Sigui e_1, e_2 base ortonormal de vectors propis en $x \in M$.

Recordem que

$$\phi_*^{-1} e_i = \frac{d}{ds}_{s=0} exp_{x(s)} tN(x(s)) = J_i(t)$$

on J_i és el camp de Jacobi tal que $J_i(0) = e_i$ i $J_i'(0) = -\nabla_{e_i} N$

Aquest camp val

$$J_i(t) = \cosh(t) f_i + \sinh(t)(k_i \circ \phi) f_i$$

Així la fórmula

$$dA = \phi^{-1*}(J dA_t)$$

implica, aplicant-la a (e_1, e_2),

$$1 = J dA_t(\phi_*^{-1} e_1, \phi_*^{-1} e_2) = J(\cosh(t) + (k_1 \circ \phi)\sinh(t))(\cosh(t) + (k_2 \circ \phi)\sinh(t))$$

ja que $dA_t(f_1, f_2) = 1$.

Per tant,

$$f = (\cosh(t) + k_1 \sinh(t))(\cosh(t) + k_2 \sinh(t))$$

i

$$A_t = \int_M (\cosh^2(t) + 2\sinh(t)\cosh(t) H + \sinh^2(t) K) dA$$

amb

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 k_2.$$

Aquesta és la fórmula (1) tenint en compte que

$$\int_M K dA = 4\pi + A,$$

vegeu la secció 4,

Escriurem la fórmula (1) com

$$A_t = \sum_{i=0}^{2} \cosh^{2-i}(t)\sinh^i(t) M_i$$

amb

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_M \sigma_0 dA, \quad \sigma_0 = 1 \\ M_1 &= \int_M \sigma_1 dA, \quad \sigma_1 = k_1 + k_2 = 2H \\ M_2 &= \int_M \sigma_2 dA, \quad \sigma_2 = k_1 k_2 = K \end{aligned}$$

4 Demostració. Segona part

La fórmula de Gauss (Spivak IV pàg. 51), que es pot deduir fàcilment estudiant la relació entre el tensor de curvatura R de $\mathbb{H}^3$ i el tensor de curvatura $\bar{R}$ de la subvarietat M de $\mathbb{H}^3$, diu que

$$R_{1212} = \bar{R}_{1212} - k_1 k_2$$

és a dir,

$$-1 = \bar{R}_{1212} - k_1 k_2$$

Per tant, Gauss-Bonnet ens diu que

$$-A = \int_M \bar{R}_{1212} dA - \int_M K dA = 4\pi - \int_M K dA$$

on $K = k_1 \cdot k_2$

$$\boxed{\int_M K dA = 4\pi + A}$$