

Curvatura i Geometria Integral

REVEN

6 octubre 2003

Any I de l'era **Donaire**

Corbes planes. Curvatura

• $\kappa = \frac{1}{R}$ (circumferència)

Corbes planes. Curvatura

- $k = \frac{1}{R}$ (circumferència)

- $k(p) = \frac{1}{R(p)}$ (cercle osculador)

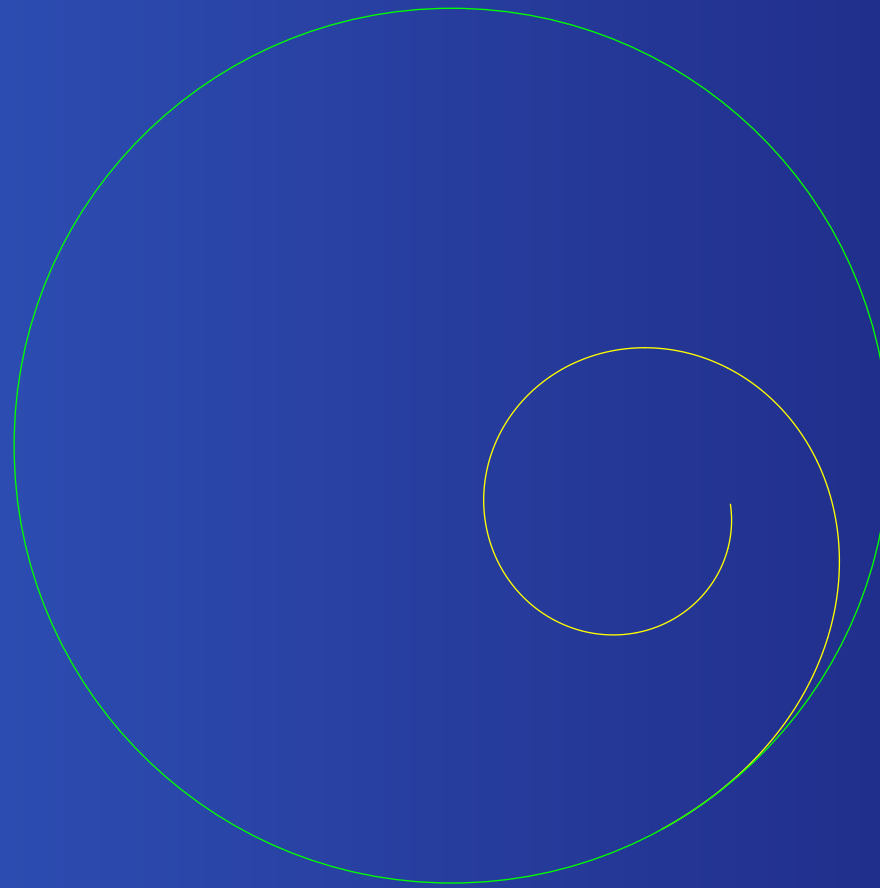
Corbes planes. Curvatura

- $k = \frac{1}{R}$ (circumferència)

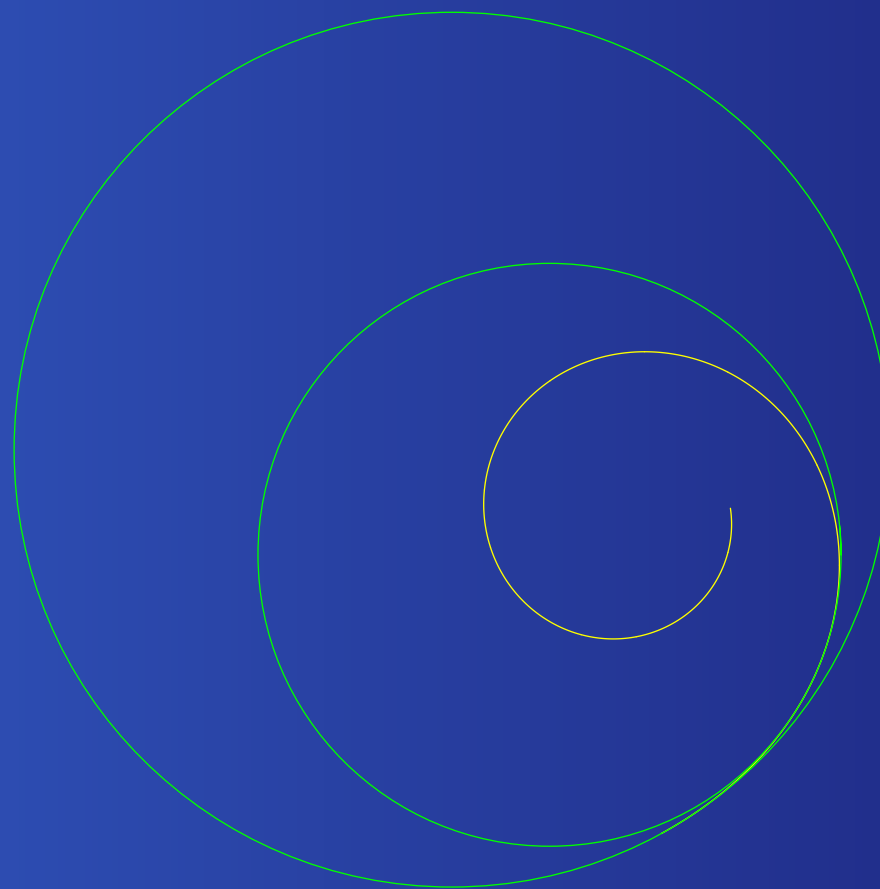
- $k(p) = \frac{1}{R(p)}$ (cercle osculador)

- $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$

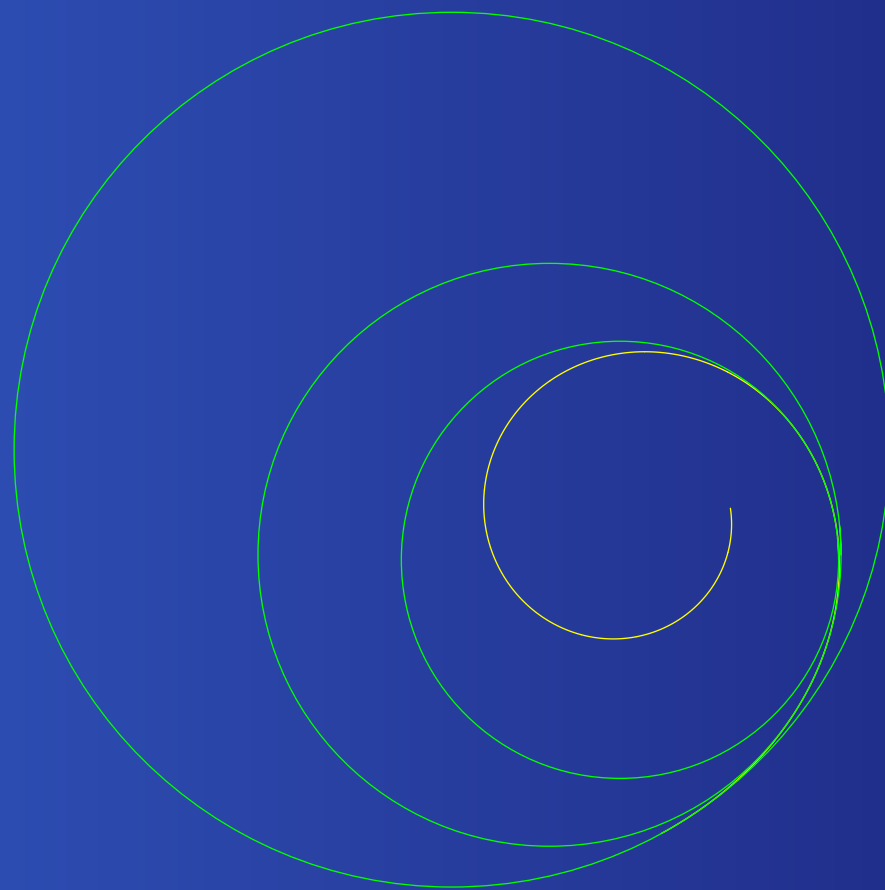
Cercle osculador



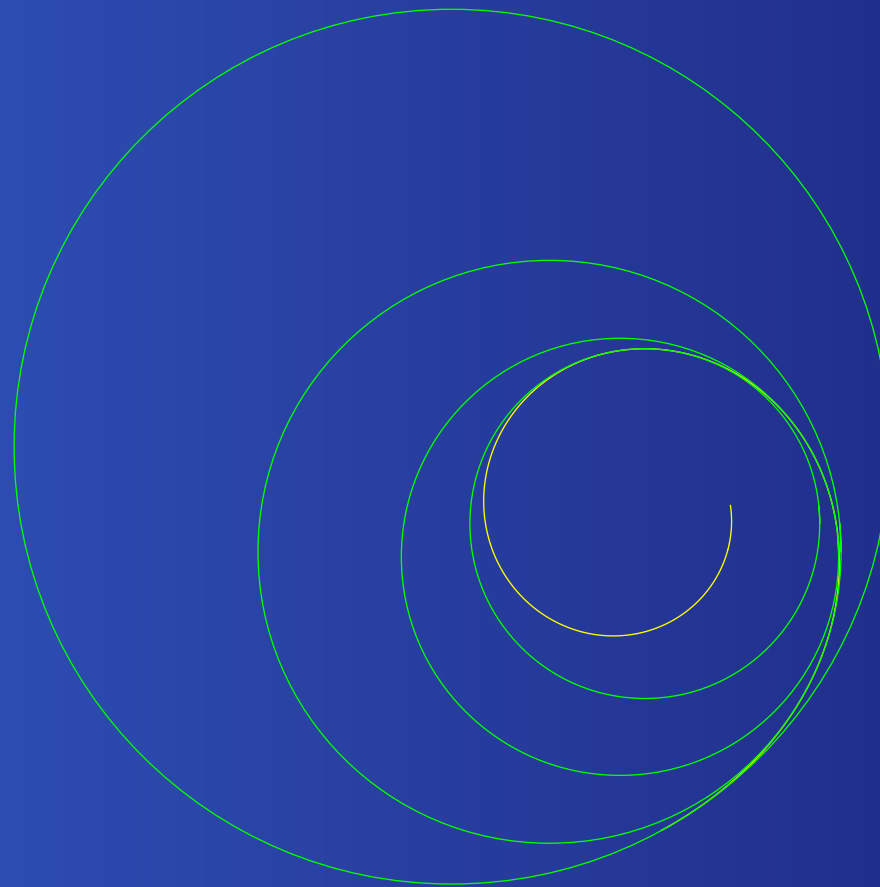
Cercle osculador



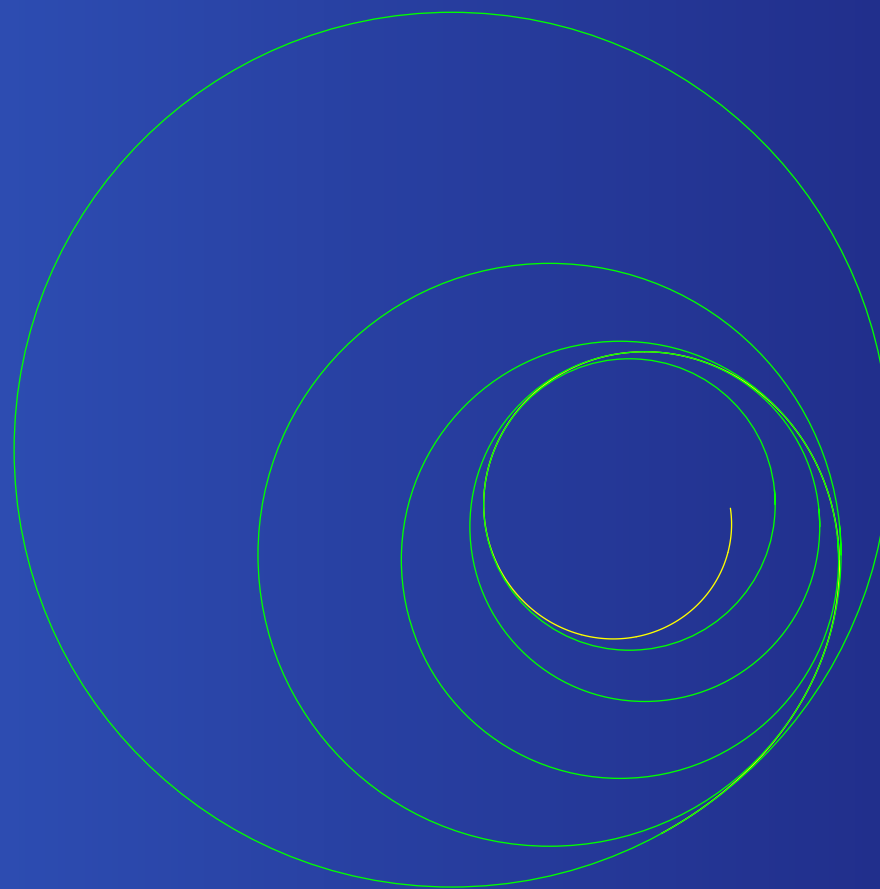
Cercle osculador



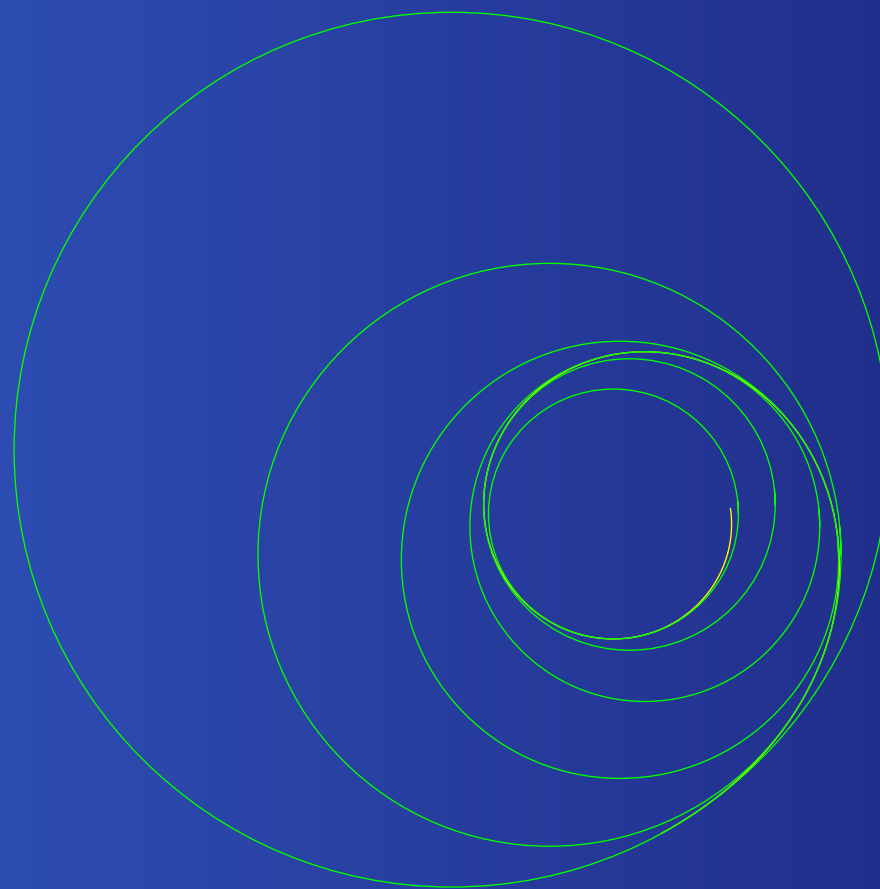
Cercle osculador



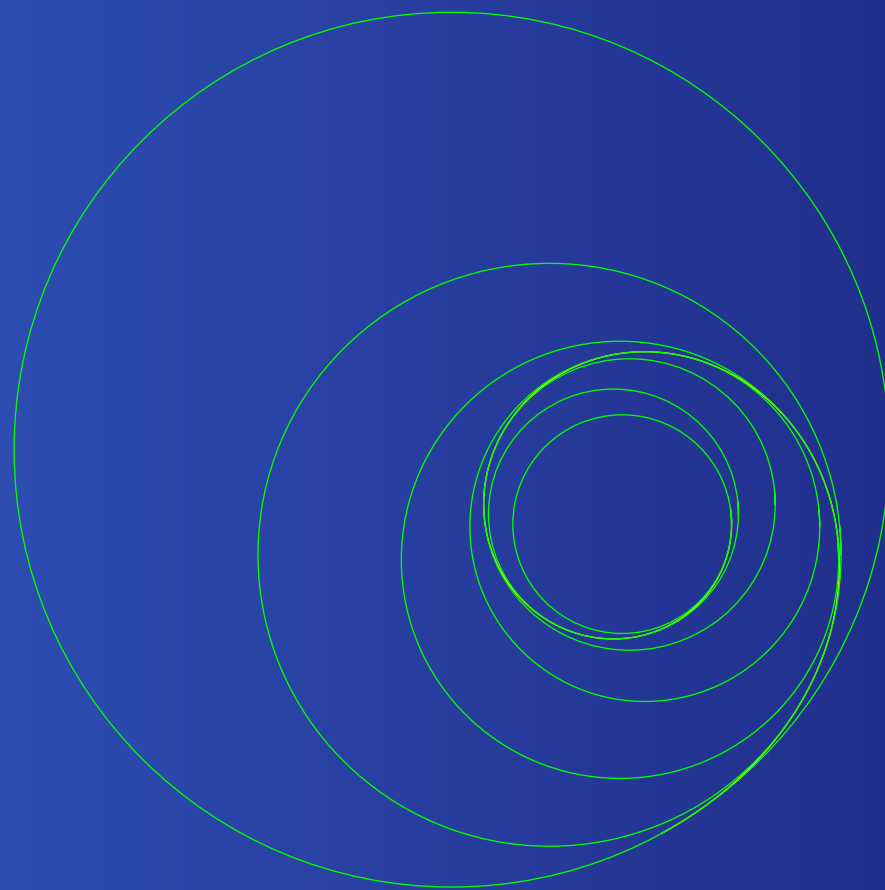
Cercle osculador



Cercle osculador



Cercle osculador

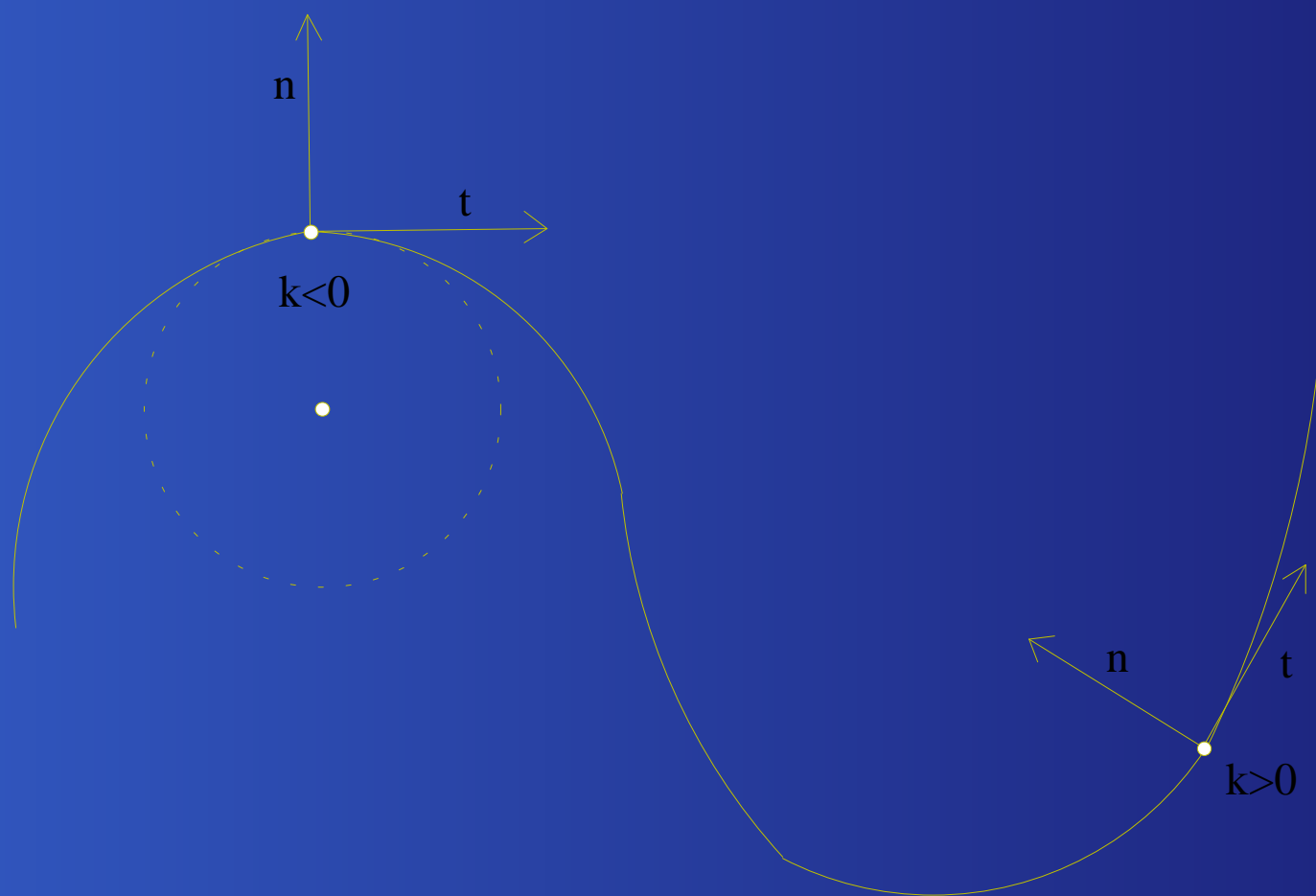


Curvatura amb signe

- $k = \frac{d\tau}{ds}$

- $\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}$ $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ positiva.

Curvatura amb signe



Aplicació de Gauss



Aplicació de Gauss

• $k(p)$ = Jacobià de l'aplicació de Gauss γ .

• $k(p) = \lim_{C \rightarrow p} \frac{\text{Longitud de } \gamma(C)}{\text{Longitud de } C}$

(Jacobià = $\det d\gamma(p)$)

Gauss 1777 – 1855, Göttingen

Integral de la curvatura

Teorema Si C és una corba plana tancada i simple, llavors

$$\int_C k(s) ds = 2\pi$$

Integral de la curvatura

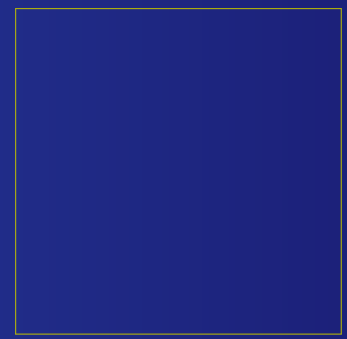
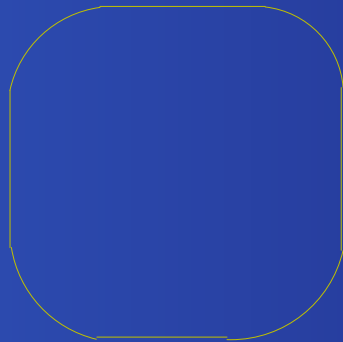
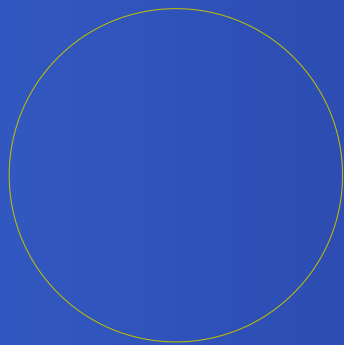
Teorema Si C és una corba plana tancada i simple, llavors

$$\int_C k(s) ds = 2\pi$$

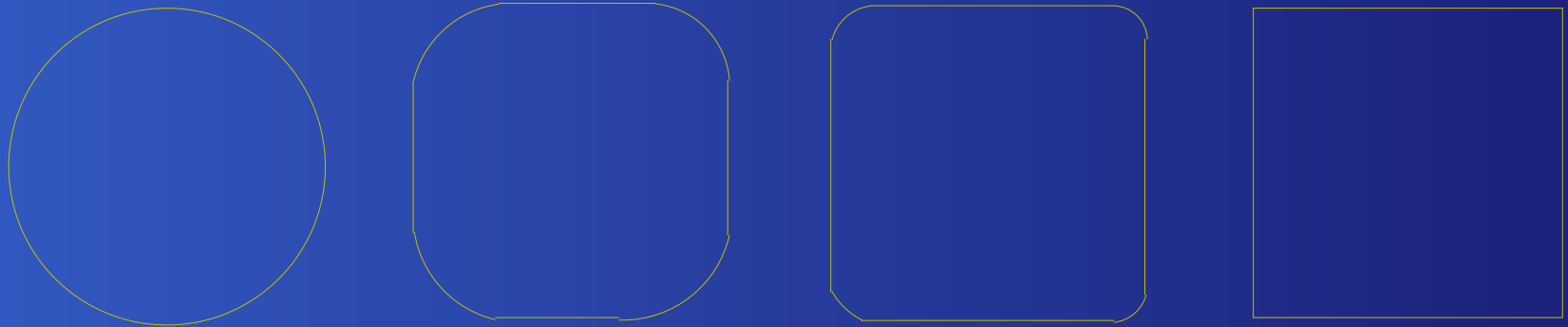
- Demostració:

$$\int_C k(s) ds = \int_C \frac{d\tau}{ds} ds = \tau_1 - \tau_0 = 2\pi$$

Punts singulars

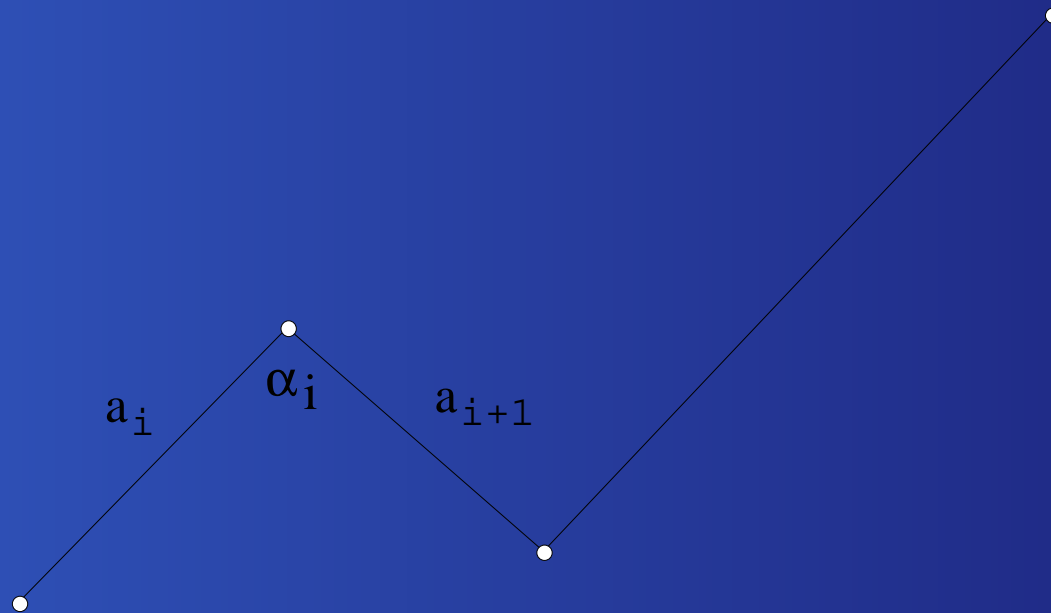


Punts singulars



- La curvatura s'acumula en els vèrtexs.

Punts singulars



● $\kappa = \frac{\alpha_i}{a_i}$ (Carlos Rodriguez)

Curvatura total absoluta

Definició Curvatura total absoluta

$$c_a = \int_C |k(s)| ds$$

Curvatura total absoluta

Definició Curvatura total absoluta

$$c_a = \int_C |k(s)| ds$$

Teorema [I.Fáry, W. Fenchel, J. Milnor (1950)]

• $c_a \geq 2\pi$

• $c_a \geq \frac{L}{r}$

L = longitud de la corba. r = radi d'un cercle que la conté.

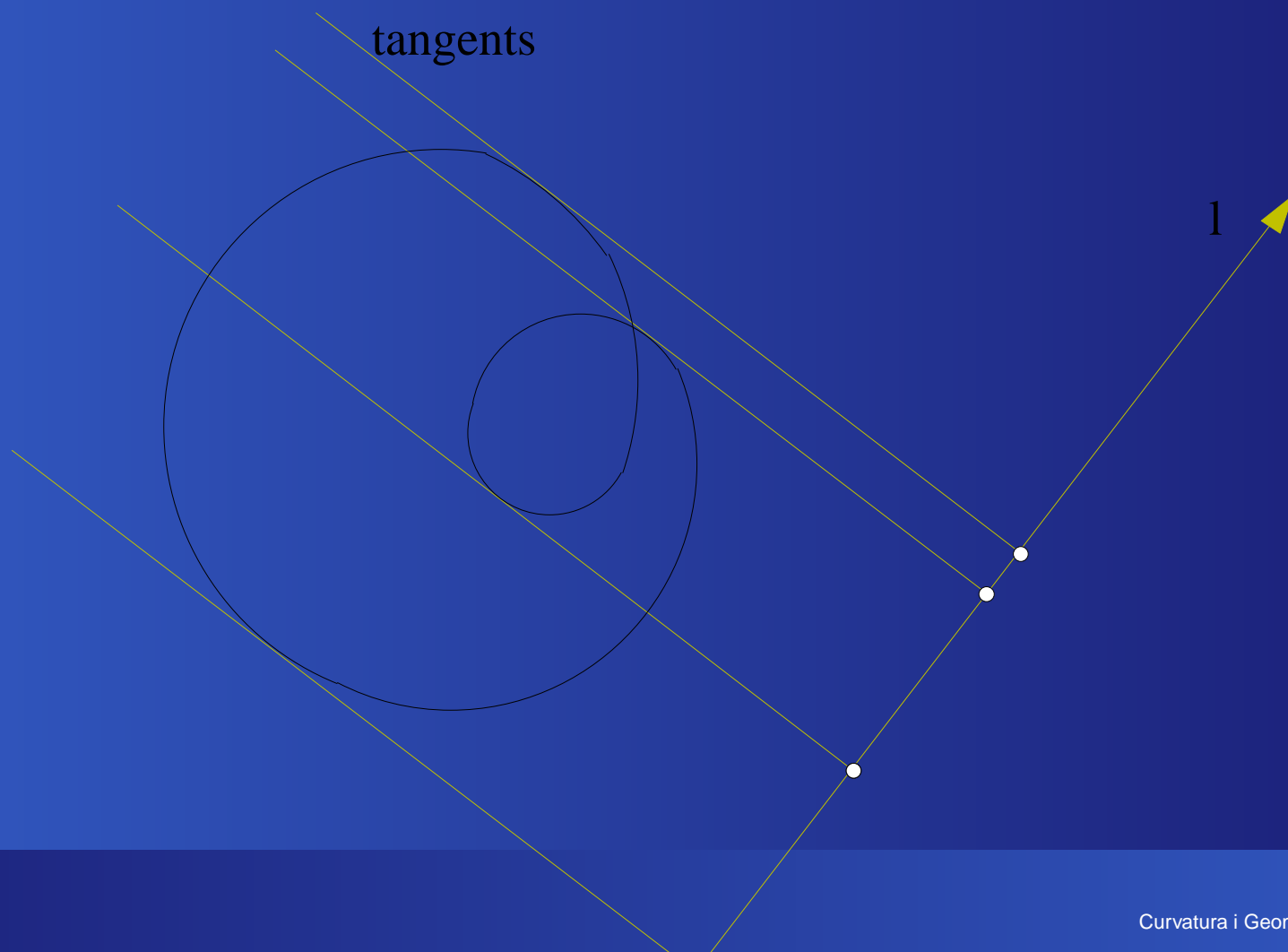
Teorema de l'intercanvi

Teorema

$$\int_C |k(s)| ds = \int_{\mathbb{R}P^1} \mu(l) dl$$

- $l =$ recta arbitrària per l'origen.
- $\mu(l) =$ nombre de punts crítics de la projecció ortogonal de C sobre l .
- $dl =$ diferencial de longitud a $\mathbb{R}P^1$.

$$\mu(l) = 4$$



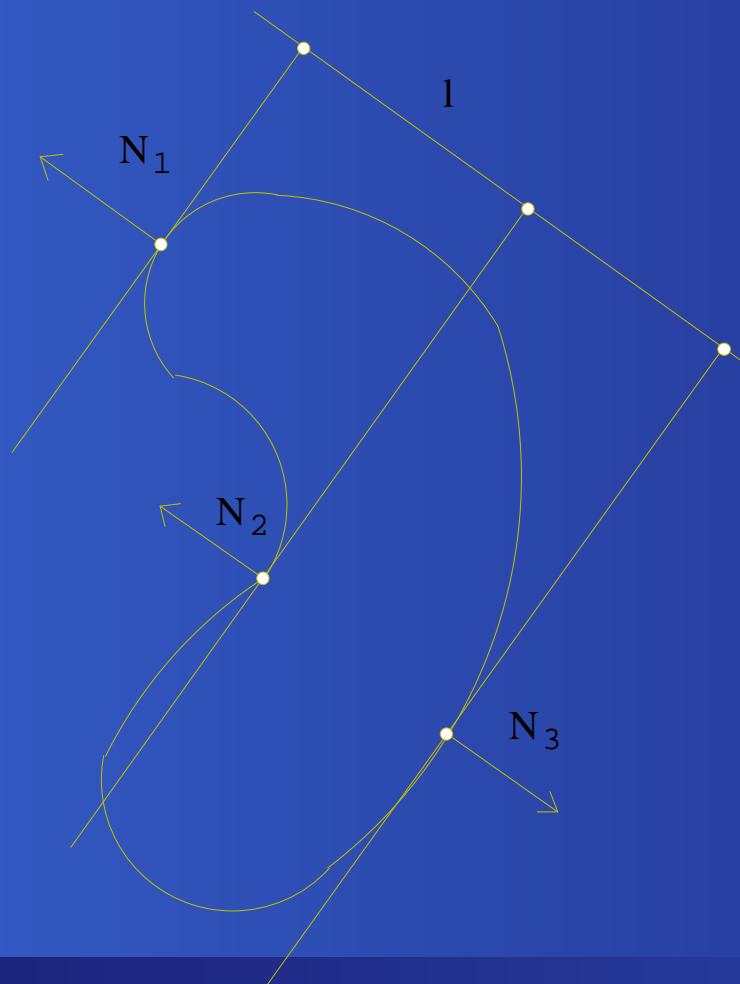
μ depèn de l



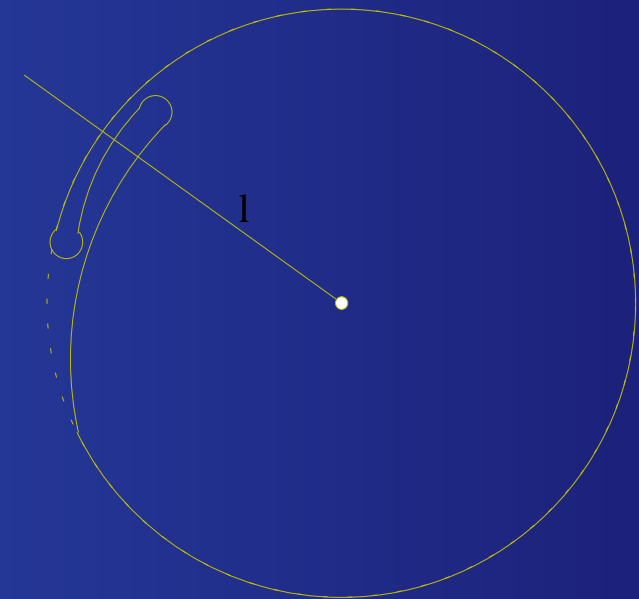
Demostració de F.F.M.

- C tancada $\Rightarrow \mu(l) \geq 2$
- $\int_C |k(s)| ds = \int_{\mathbb{R}P^1} \mu(l) dl \geq 2 \int_{\mathbb{R}P^1} dl = 2\pi$

Demostració de l'intercanvi



aplicació de
gauss al
projectiu



Demostració de l'intercanvi

- On l'aplicació de **Gauss** és difeomorfisme, l'integral de curvatura és la longitud de la imatge (teorema del canvi de variable)

$$\int_C |k(s)| ds = \int_{\mathbb{R}P^1} dl$$

- $gauss^{-1}(l) = \mu(l)$

Corbes a l'espai

- $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$ (Paràmetre arc)

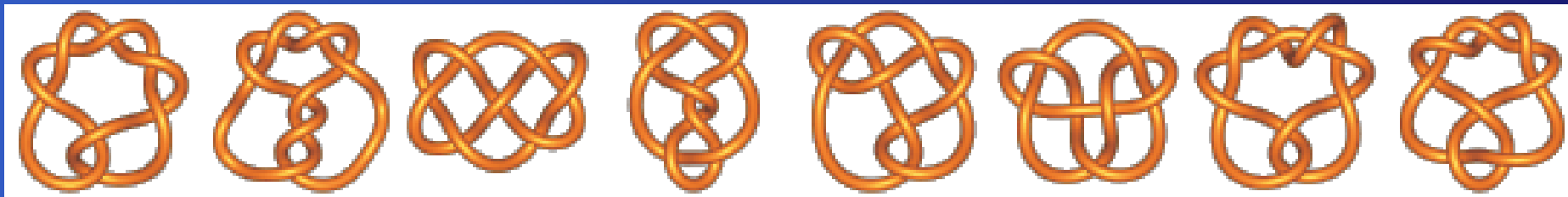
Corbes a l'espai

- $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$ (Paràmetre arc)
- Teorema [Fáry, Fenchel, Milnor]
 - $C_a \geq 2\pi$
 - $C_a \geq 4\pi$ si la corba és un nus.

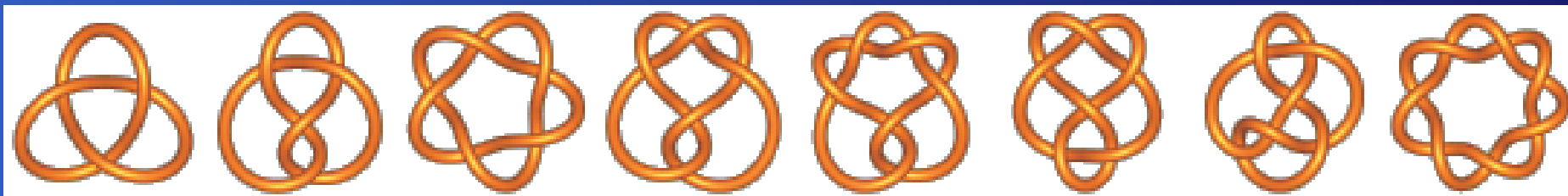
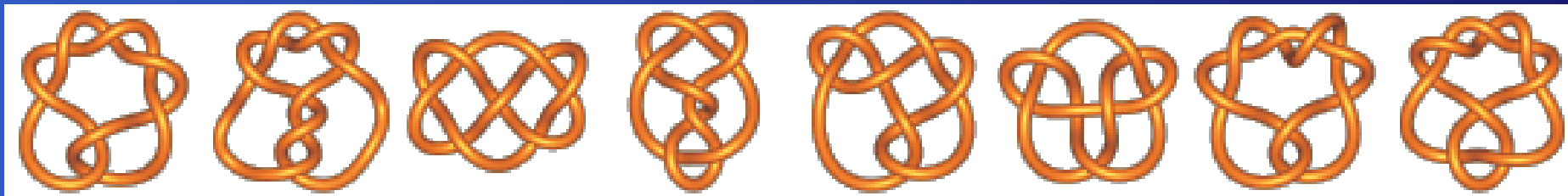
Corbes a l'espai

- $k(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$ (Paràmetre arc)
- **Teorema [Fáry, Fenchel, Milnor]**
 - $c_a \geq 2\pi$
 - $c_a \geq 4\pi$ si la corba és un nus.
- Més topologia implica més geometria.

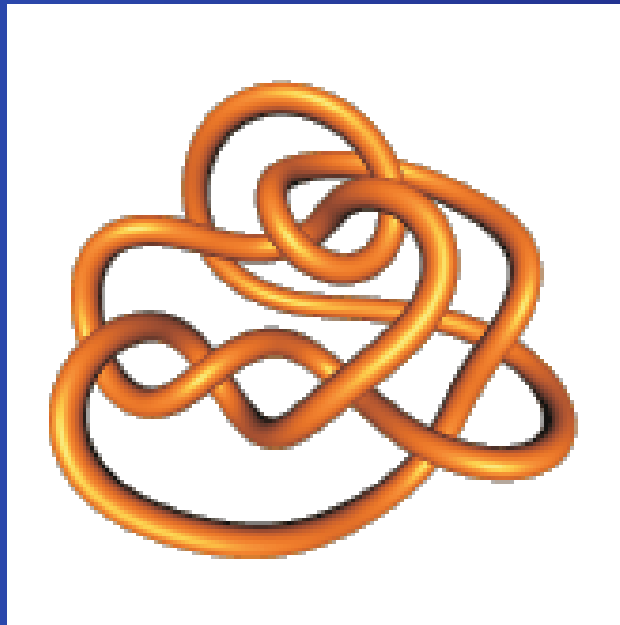
Nusos i nusos



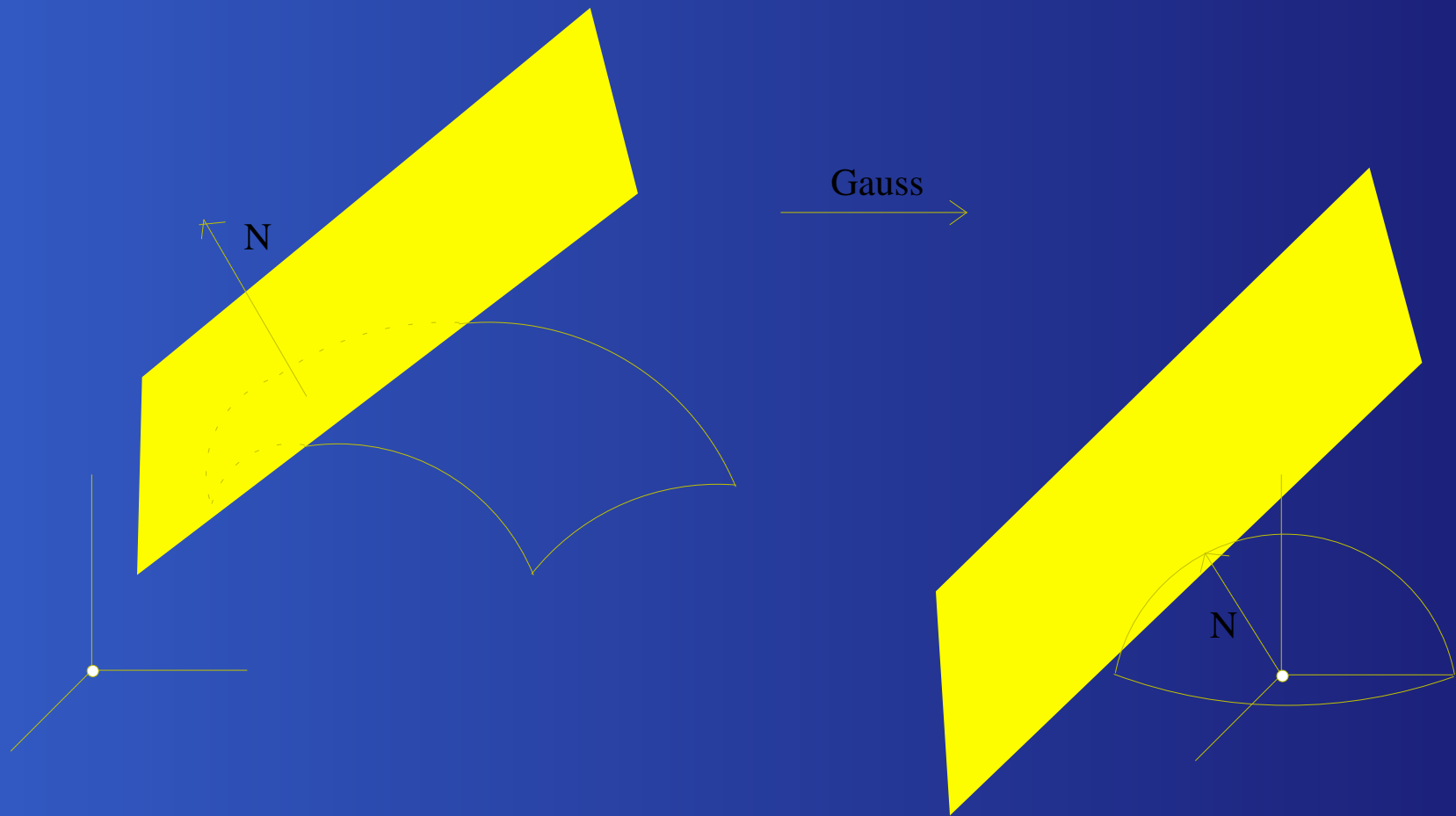
Nusos i nusos



Més nusos?



Superfícies. Aplicació de Gauss



Curvatura

Denotem γ l'aplicació de Gauss.

- $K(p)$ = Jacobià de l'aplicació de Gauss

- $K(p) = \lim_{S \rightarrow p} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}$

Curvatura

Denotem γ l'aplicació de Gauss.

- $K(p)$ = Jacobià de l'aplicació de Gauss

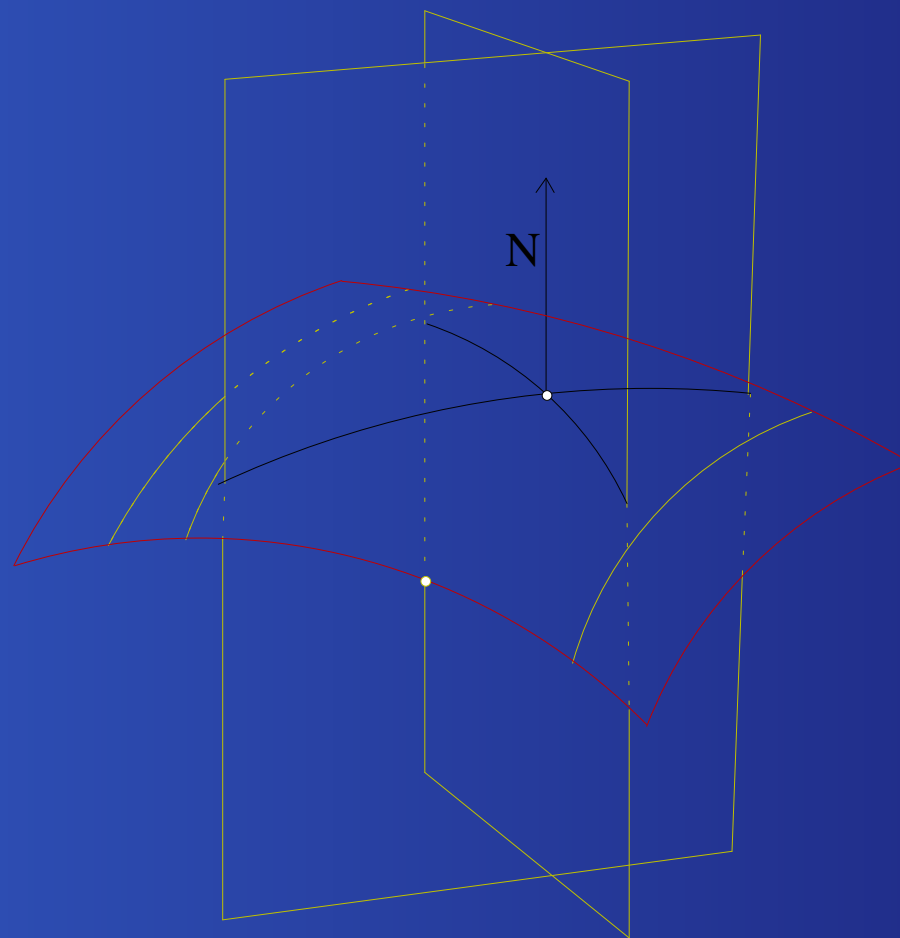
- $K(p) = \lim_{S \rightarrow p} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}$

- $K(\text{vèrtex}) = \frac{\text{Àrea polígon de les normals}}{\text{Suma d'àrees en el vèrtex}}$

Curvatures principals

- Les **curvatures principals** són les curvatures màxima i mínima de les corbes que s'obtenen en tallar la superfície pel feix de plans determinat per la normal.
- Les denotem k_1 i k_2 . Són funcions sobre la superfície.

Curvatures principals



Curvatures principals

- Teorema [Curvatura de Gauss]

$$K = k_1 \cdot k_2$$

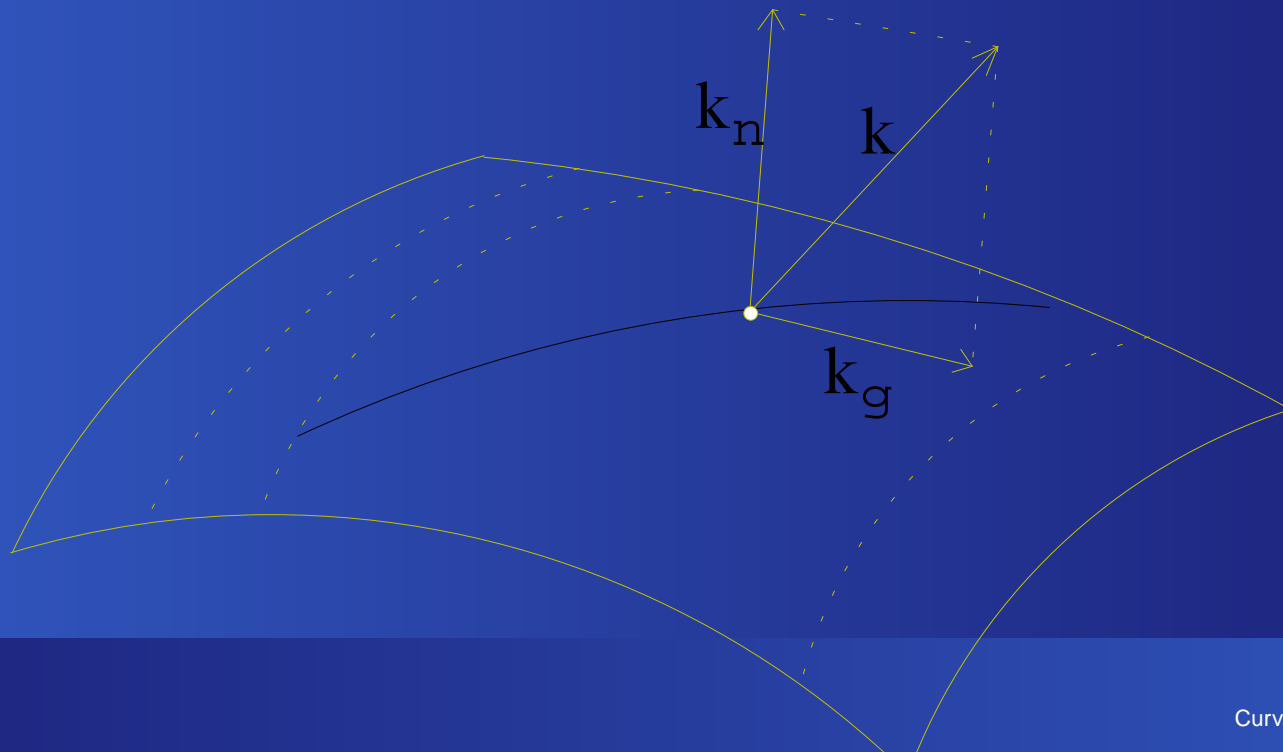
- Definició [Curvatura mitjana]

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Curvatura geodèsica

Definició [Curvatura geodèsica]

- κ_g = mòdul de la projecció ortogonal sobre el pla tangent del vector acceleració.



Curvatura geodèsica i normal

- $k^2 = k_g^2 + k_n^2$
- **Teorema [Meusnier]** La curvatura normal és la curvatura de la secció normal.
- $k_n =$ Curvatura de la secció normal (N, \vec{t})

Curvatura geodèsica

- [Q1.] Què podem dir de

$$\int_C k_g \quad ?$$

(C corba tancada i simple sobre una superfície.)

- [Q2.] És k_g la derivada d'un cert angle (tipus $\frac{d\tau}{ds}$)?

Paral·lel d'una esfera. [Q1]

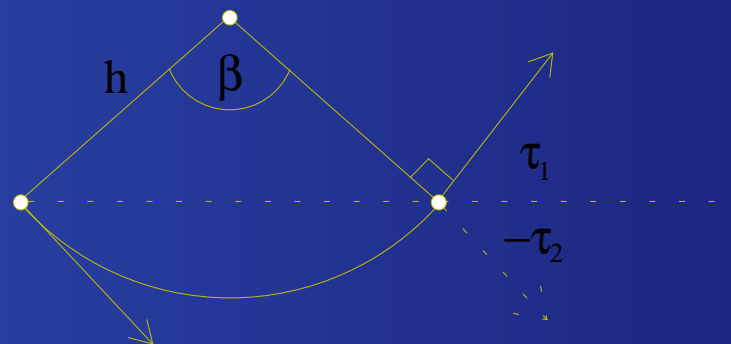
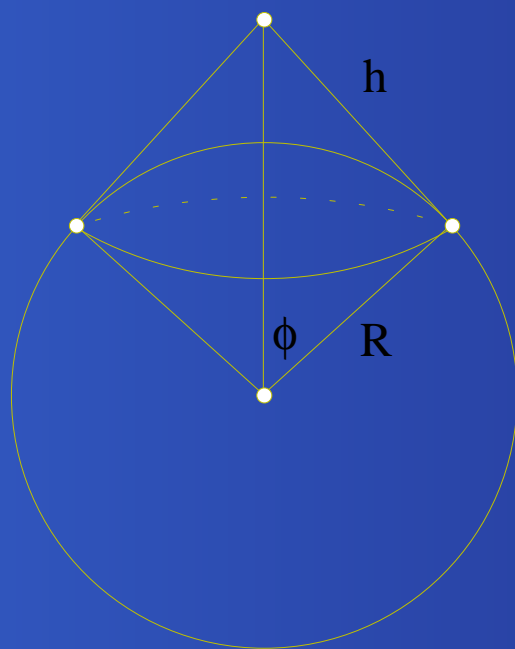
- A l'esfera $S^2(R)$, $k_n = \frac{1}{R}$.
- El radi del paral·lel és $R \sin \phi$. Així $k = \frac{1}{R \sin \phi}$.

- La **curvatura geodèsica** del paral·lel és

$$k_g = \frac{1}{R} \cot \phi.$$

- I per tant $\int_P k_g(s) ds = \frac{1}{R} \cot \phi \cdot \int_P ds = 2\pi \cos \phi$

Paral·lel d'una esfera. [Q2]



$$\beta = 2\pi \cos \phi$$

Paral·lel d'una esfera. [Q2]

- $k_g = \frac{d\tau}{ds}$
- $\tau =$ angle de la tangent amb un camp paral·lel.
- $\int_C k_g(s) ds = \int_C \frac{d\tau}{ds} ds = \tau_1 - \tau_0 = \beta = 2\pi \cos \phi$

Integrals de curvatura

- Quina relació hi ha entre la integral de la **curvatura geodèsica**

$$\int k_g \quad \left(\int_C k_g(s) ds \right)$$

i la integral de la **curvatura de Gauss**

$$\int K \quad \left(\int_S K(x) dx \right) ?$$

$(dx = \text{element d'àrea} = dA)$

Cas particular del paral·lel

S casquet esfèric.

$C = \partial S$ paral·lel vora de S .

- $\int_C k_g(s) ds = \frac{1}{R} \cot \phi \int_C ds = 2\pi \cos \phi$
- $\int_S K(x) dx = \frac{1}{R^2} \int_S dx = \frac{1}{R^2} \text{àrea del casquet}$

Cas particular del paral·lel

S casquet esfèric.

$C = \partial S$ paral·lel vora de S .

- $\int_C k_g(s) ds = \frac{1}{R} \cot \phi \int_C ds = 2\pi \cos \phi$
- $\int_S K(x) dx = \frac{1}{R^2} \int_S dx = \frac{1}{R^2} \text{Arquimedes}$

Cas particular del paral·lel

S casquet esfèric.

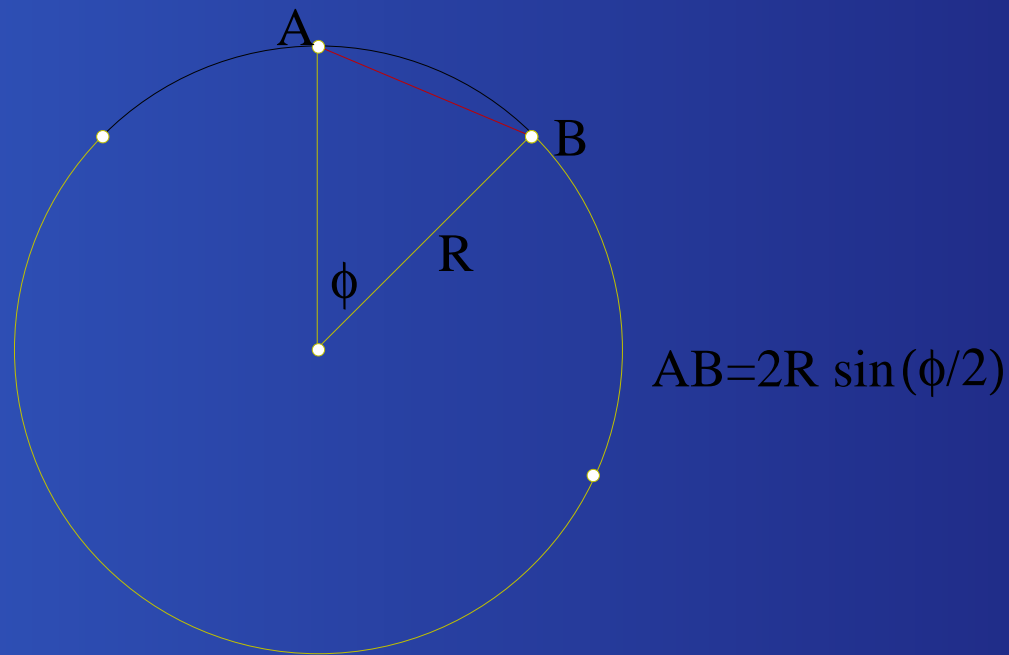
$C = \partial S$ paral·lel vora de S .

- $\int_C k_g(s) ds = \frac{1}{R} \cot \phi \int_C ds = 2\pi \cos \phi$
- $\int_S K(x) dx = \frac{1}{R^2} \int_S dx = 2\pi - 2\pi \cos \phi$

Àrea d'un casquet

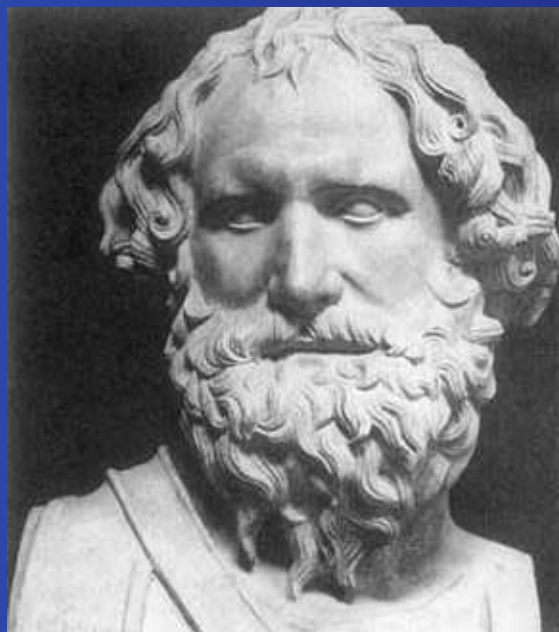
- **Teorema [Arquimedes]** L'àrea d'un casquet esfèric és igual a l'àrea d'un cercle de radi la distància entre el centre i la vora del casquet.

Àrea d'un casquet



$$\text{Àrea} = \pi AB^2 = 4\pi R^2 \sin^2(\phi/2) = 2\pi R^2(1 - \cos \phi)$$

Arquimedes, –200, Siracusa



Conjectura

- Conjectura: $\int_{\partial S} k_g + \int_S K = 2\pi$?
- Petita dificultat: El mateix paral·lel és vora de dos casquets.

Gauss-Bonnet

Teorema [Gauss-Bonnet] S superfície de \mathbb{R}^3

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} \kappa_g ds = 2\pi$$

Gauss-Bonnet

Teorema [Gauss-Bonnet] S superfície de \mathbb{R}^3

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi \chi(S)$$

Gauss-Bonnet

Teorema [Gauss-Bonnet] S superfície de \mathbb{R}^3

$$\sum_i (\pi - \alpha_i) + \int_S K dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi \chi(S)$$

Bonnet 1819 – 1892 Montpellier



Triangles geodèsics a $S^2(1)$

• $K = 1$

Teorema [Gauss-Bonnet]

$$\sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) + \int_S dA + 0 = 2\pi$$

Triangles geodèsics a $S^2(1)$

- $K = 1$

Teorema [Gauss-Bonnet]

$$\sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) + \int_S dA + 0 = 2\pi$$

- Àrea = $\sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi = \text{Defecte}$

Triangles geodèsics a $S^2(i)$

• $K = 1/i^2 = -1$

Teorema [Teorema de Gauss-Bonnet]

$$\sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) - \int_S dA + 0 = 2\pi$$

Triangles geodèsics a $S^2(i)$

- $K = 1/i^2 = -1$

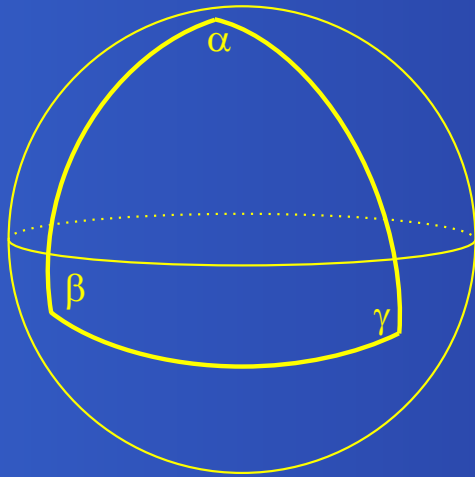
Teorema [Teorema de Gauss-Bonnet]

$$\sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) - \int_S dA + 0 = 2\pi$$

- Àrea = $\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \text{Defecte}$

Defecte. $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma$

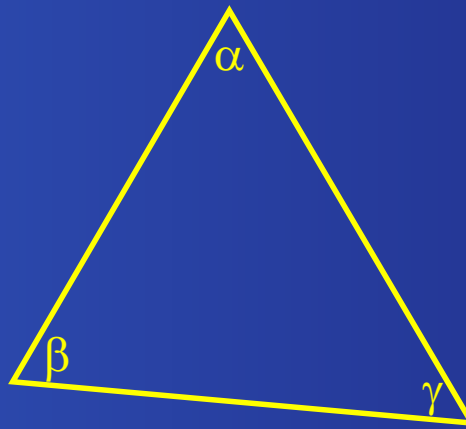
$S^2(1)$



$$\Sigma > \pi$$

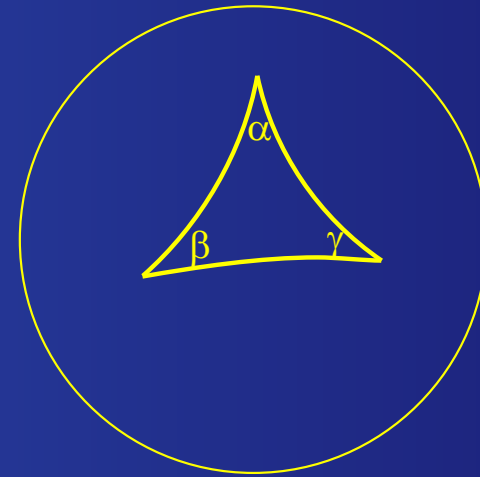
$$\delta = \Sigma - \pi$$

E^2



$$\Sigma = \pi$$

$S^2(i)$

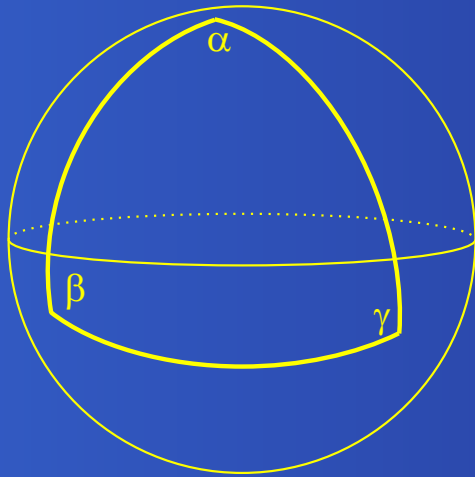


$$\Sigma < \pi$$

$$\delta = \pi - \Sigma$$

Defecte. $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma$

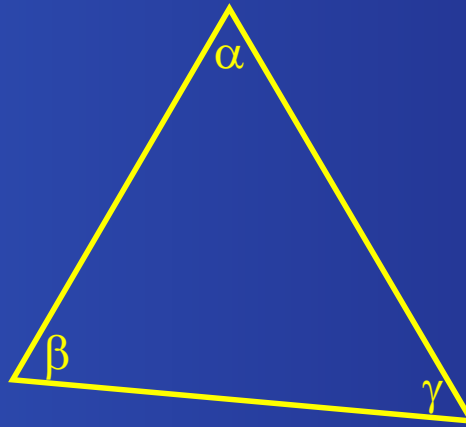
$S^2(1)$



$$\Sigma > \pi$$

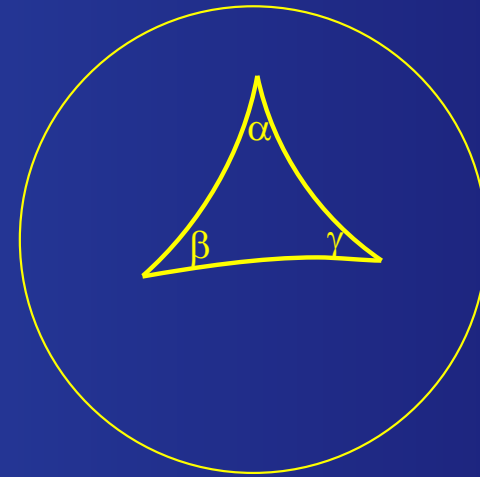
$$\delta = \Sigma - \pi$$

E^2



$$\Sigma = \pi$$

$S^2(i)$



$$\Sigma < \pi$$

$$\delta = \pi - \Sigma$$

Àrea=Defecte

Corbes dif. a $S^2(1)$

- $K = 1$

Teorema [Gauss-Bonnet]

$$0 + \int_S dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi$$

Corbes dif. a $S^2(1)$

- $K = 1$

Teorema [Gauss-Bonnet]

$$0 + \int_S dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi$$

- $\text{Àrea} = 2\pi - \int_{\partial S} k_g ds = \text{Defecte}$

Corbes dif. a $S^2(i)$

- $K = -1$

Teorema [Gauss-Bonnet]

$$0 - \int_S dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi$$

Corbes dif. a $S^2(i)$

- $K = -1$

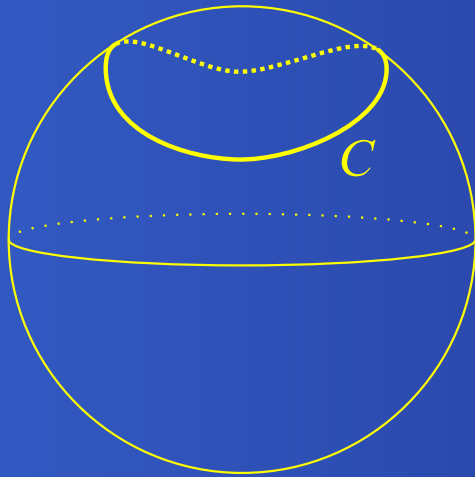
Teorema [Gauss-Bonnet]

$$0 - \int_S dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi$$

- Àrea = $\int_{\partial S} k_g ds - 2\pi = \text{Defecte}$

Defecte. Cas diferenciable

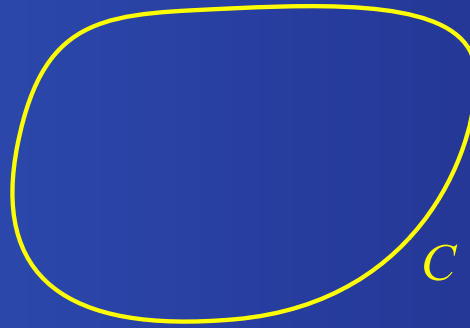
$S^2(1)$



$$\int k_g < 2\pi$$

$$\delta = 2\pi - \int k_g$$

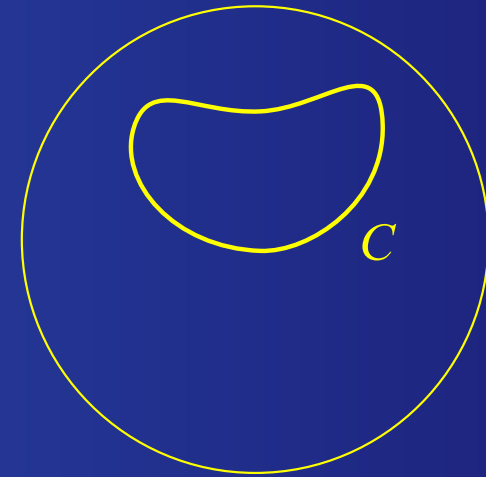
E^2



$$\int k_g = 2\pi$$

Àrea=Defecte

$S^2(i)$



$$\int k_g > 2\pi$$

$$\delta = \int k_g - 2\pi$$

Geometria Integral



El professor Santaló

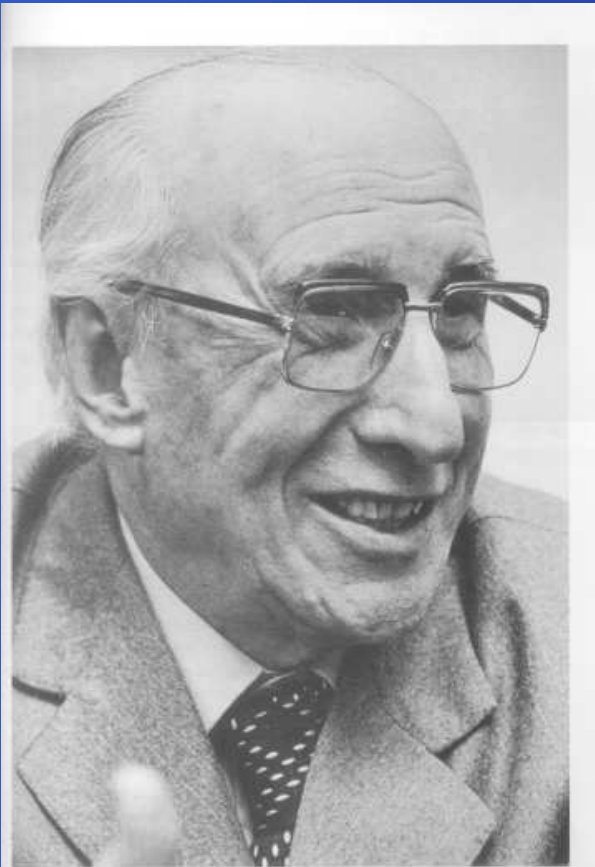


Foto recent de Lluís Santaló.



Lluís Santaló al despatx de casa (1988).

Mesura de rectes. **En el Pla**

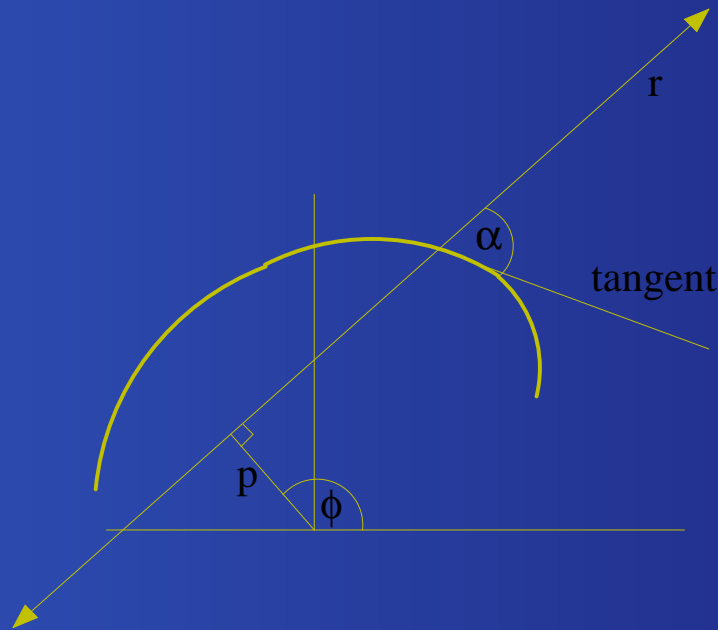
Densitat de rectes

- $dG = dp \, d\phi$

Mesura de rectes

- $m(G \cap C \neq \emptyset) = \int_{G \cap C \neq \emptyset} dG$

Fórmula de Crofton



$$dp \, d\phi = \sin \alpha \, d\alpha \, ds. \quad 0 < \alpha \leq \pi$$

Fórmula de Crofton

- Mesura de rectes que tallen una corba C de longitud L , amb multiplicitat:

$$\int_{G \cap C \neq \emptyset} n \, dG = 2L$$

Integral de curvatura per ovals

- Integrant $k(s) dp d\phi = \underline{k(s)} \sin \alpha d\alpha \underline{ds}$

$$\int_{G \cap \text{oval} \neq \emptyset} (k_1 + k_2) dG = 4\pi$$

(k_1 i k_2 curvatura de l'oval en els punts d'intersecció amb la recta G .)

Mesura cinemàtica

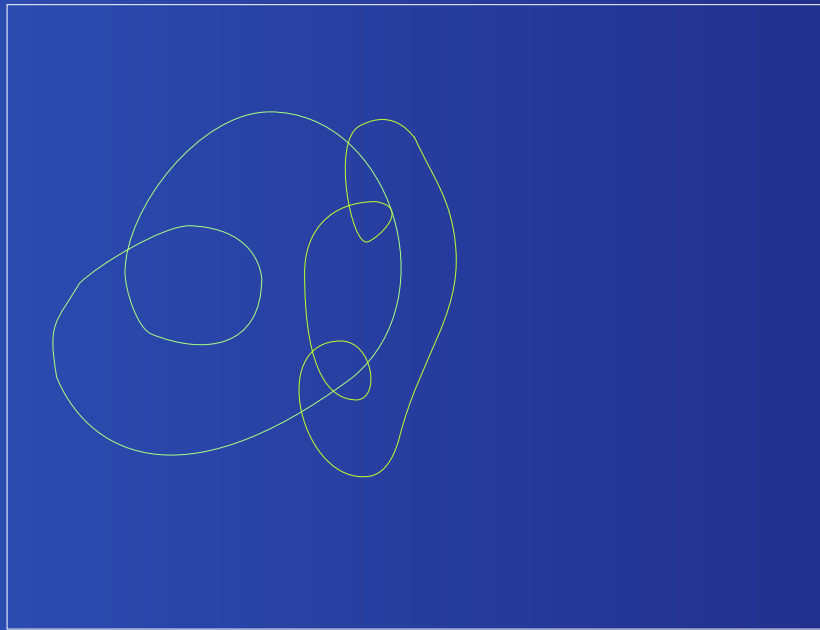
Densitat cinemàtica

- $dK = dx \, dy \, d\phi$

Mesura cinemàtica (K cos mòbil, K_1 cos fix.)

- $m(K \cap K_1 \neq \emptyset) = \int_{K \cap K_1 \neq \emptyset} dK$

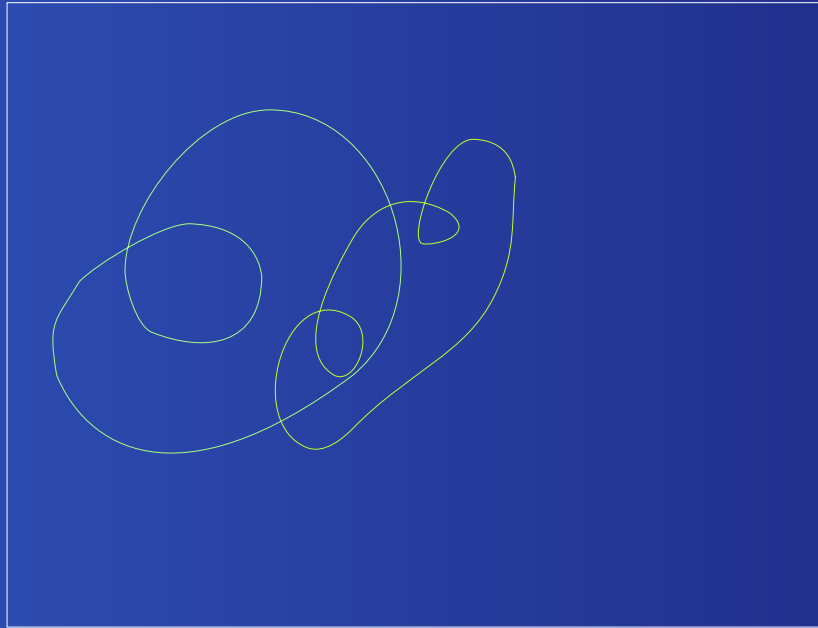
Fórmula de Poincaré



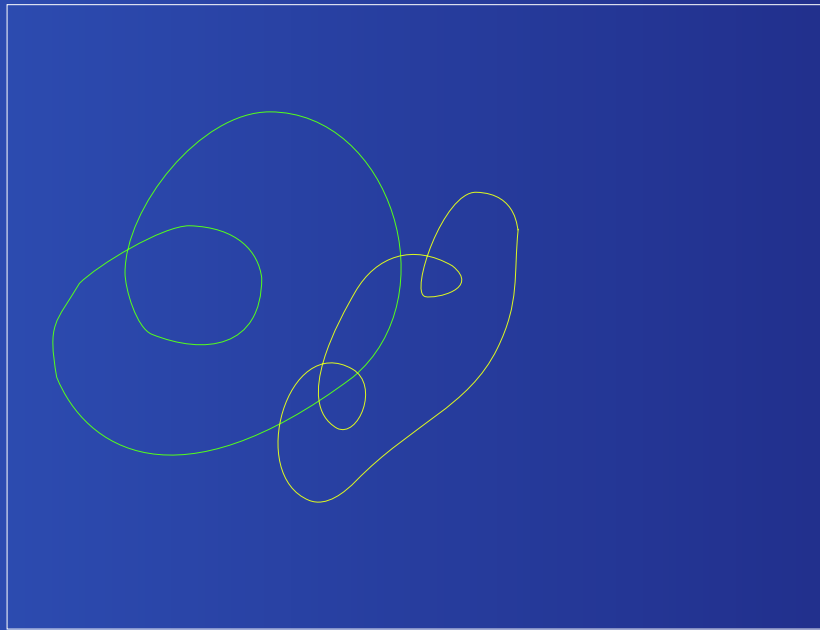
Fórmula de Poincaré



Fórmula de Poincaré



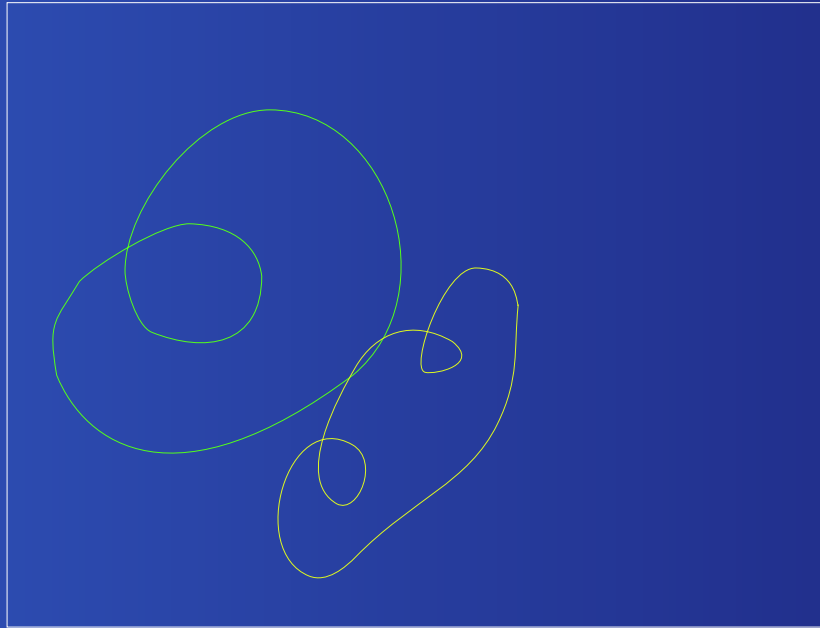
Fórmula de Poincaré



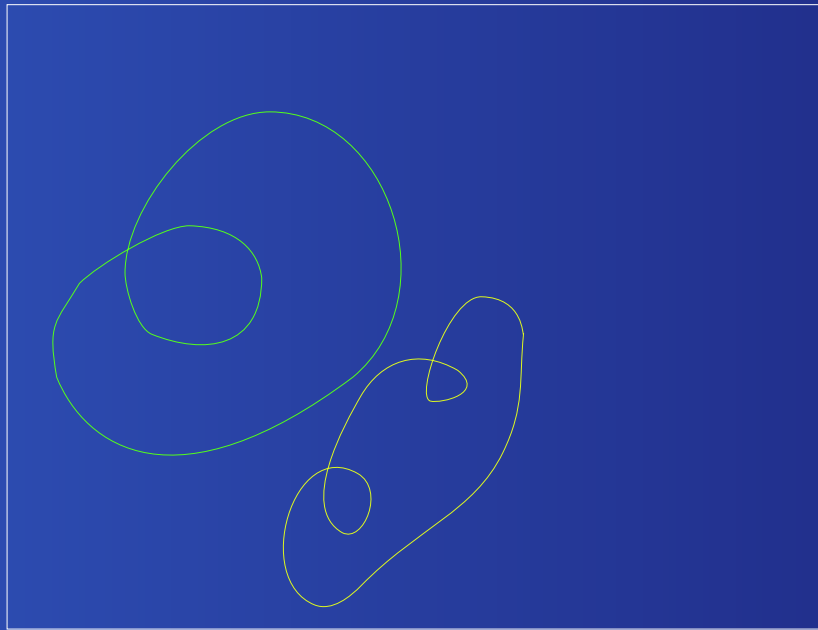
Fórmula de Poincaré



Fórmula de Poincaré



Fórmula de Poincaré



Fórmula de Poincaré

K_0 (fixa) i K_1 (mòbil) corbes de longituds L_0 i L_1 .

Donem K_1 pels paràmetres arc s_0, s_1 del punt de tall i l'angle θ entre les tangents.

- $dK_1 = dx dy d\phi = |\sin\theta| ds_0 ds_1 d\theta$

Integrant (multiplicitats) tenim la fórmula de Poincaré

- $\int_{K_0 \cap K_1 \neq \emptyset} n dK_1 = 4 L_0 L_1$

Poincaré, 1854 – 1912, París



Fórmula de Blaschke

C_0 corba vora d'un domini fix K_0 del pla.

C_1 corba vora d'un domini mòbil K_1 del pla.

- (Fórmula de Blaschke per a convexos)

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \emptyset} dK_1 = 2\pi(F_0 + F_1) + L_0L_1$$

Blaschke, 1885 – 1962, Hamburg



Isoperimètrica

Suposem K_0 i K_1 convexos congruents del pla.

- Blaschke

$$\int dK_1 = 4\pi F + L^2$$

- Poincaré:

$$\int n dK_1 = 4L^2$$

Isoperimètrica

Les integrals anteriors es poden escriure:

- $4\pi F^2 + L^2 = m_2 + m_4 + m_6 + \dots$

- $4L^2 = 2m_2 + 4m_4 + 6m_6 + \dots$

- $m_i =$ mesura de les posicions de K_1 en les quals ∂K_1 té i punts en comú amb ∂K_0 .

Isoperimètrica

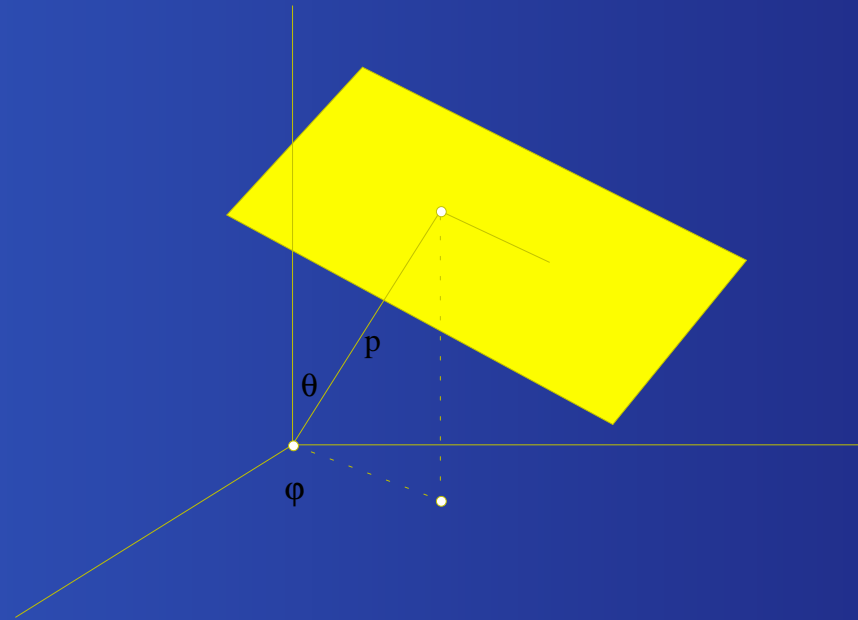
- Manipulant les igualtats anteriors obtenim l'interpretació geomètrica del **defecte** per a convexos:

$$L^2 - 4\pi F = m_4 + 2m_6 + 3m_8 + \dots$$

- En particular

$$L^2 - 4\pi F \geq 0$$

Densitat de plans. **A l'espai**



$$\text{■} \quad dE = \sin \theta dp \, d\varphi \, d\theta$$

Densitat de plans

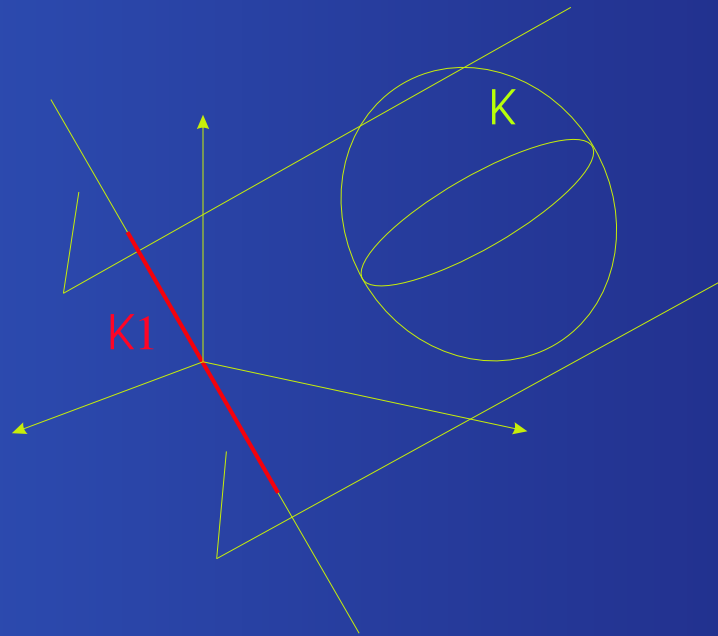
Teorema La mesura de plans que tallen un convex K és igual a l'integral M de la curvatura mitjana de la vora.

$$\int_{E \cap K \neq \emptyset} dE = M$$

on

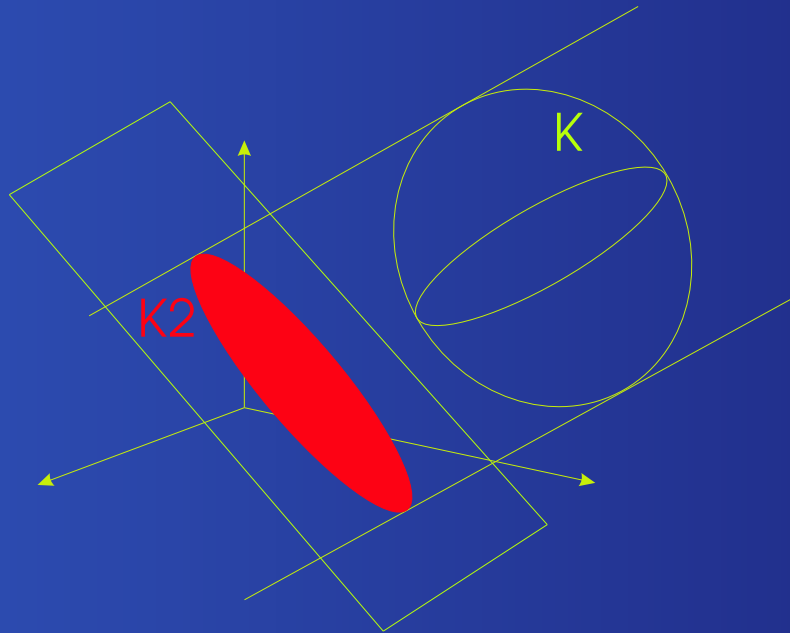
• $M = \int_{\partial K} \frac{k_1 + k_2}{2} dx, \quad dx = \text{element d'àrea}$

Quermassintegrale



- $W_2 =$ mitjana de les longituds K_1 .

Quermassintegrale



- $W_1 =$ mitjana de les àrees K_2 .

Quermassintegrale

- $W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}P^2} (\text{\`a}rea projecci\`o sobre E) $dE$$
- $W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}P^2} (\text{longitud projecci\`o sobre } G) $dG$$

Quermassintegrale

- $W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}P^2} (\text{\`a area projecci\`o sobre } E) dE$
- $W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}P^2} (\text{longitud projecci\`o sobre } G) dG$
- És clar que sobre $S^2(R)$, $W_1 = 4\pi R^2$,
 $W_2 = 2R$.

Quermassintegrale

Teorema

$$\text{Àrea} = 4W_1$$

$$M = 2\pi W_2$$

- L'àrea de la vora d'un cos és igual a quatre vegades la mitjana de les àrees de les seccions.
- Molt usada en medicina.

Quermassintegrals

Les quermassintegrals permeten parlar de curvatura mitjana de cossos no diferenciables.

- Poliedre convex amb arestes de longituds a_i i angles diedrics α_i :

$$M = \frac{1}{2} \sum_i (\pi - \alpha_i) a_i$$

- Cilindre de revolució d'altura h i radi r :

$$M = \pi(h + \pi r)$$

Quermassintegrale

Exemples

- Segment de \mathbb{R}^3 de longitud h ($r \rightarrow 0$):

$$M = \pi h$$

- Disc de \mathbb{R}^3 de radi r ($h \rightarrow 0$):

$$M = \pi^2 r$$

Codimensió 1, dimensió n

Tenim una normal i per tant aplicació de **Gauss** i curvatura.

Teorema [Gauss-Bonnet] Sigui Q un obert de \mathbb{R}^n tal que ∂Q és una hipersuperfície compacta.

Lavors

$$\int_{\partial Q} K dx = \text{vol} (S^{n-1}) \chi(Q)$$

Comparació de dos resultats

Q obert de \mathbb{R}^3 , ∂Q hipersuperfície (dim 2) compacta.

- $\int_{\partial Q} K dx = 2\pi\chi(\partial Q)$

Comparació de dos resultats

Q obert de \mathbb{R}^3 , ∂Q hipersuperfície (dim 2) compacta.

- $\int_{\partial Q} K dx = 2\pi\chi(\partial Q)$

Q obert de \mathbb{S}^2 , ∂Q hipersuperfície (dim 1) compacta.

- $\int_{\partial Q} k_g ds = 2\pi\chi(\partial Q) - \text{Defecte}$

Comparació de dos resultats

Q obert de \mathbb{R}^3 , ∂Q hipersuperfície (dim 2) compacta.

- $\int_{\partial Q} K dx = 2\pi\chi(\partial Q)$

Q obert de \mathbb{S}^2 , ∂Q hipersuperfície (dim 1) compacta.

- $\int_{\partial Q} k_g ds = 2\pi\chi(\partial Q) - \text{Àrea}$

Comparació de dos resultats

Q obert de \mathbb{R}^3 , ∂Q hipersuperfície (dim 2) compacta.

- $\int_{\partial Q} K dx = 2\pi\chi(\partial Q)$

Q obert de \mathbb{S}^2 , ∂Q hipersuperfície (dim 1) compacta.

- $\int_{\partial Q} k_g ds = 2\pi\chi(\partial Q) - \text{Mesura de punts}$

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

$$\bullet \int_{\partial Q} K dx = \text{vol} S^{n-1} \chi(Q) + \text{Defecte}$$

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

- $\int_{\partial Q} K dx = \text{vol}S^{n-1} \chi(Q) + \text{Mesura de plans}$

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

$$\bullet \int_{\partial Q} K dx = \text{vol} S^{n-1} \chi(Q) + c \int_{\mathcal{L}_{n-2}} n dL_{n-2}$$

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

$$\bullet \int_{\partial Q} K dx = \text{vol} S^{n-1} \chi(Q) + c \int_{\mathcal{L}_{n-2}} n dL_{n-2}$$

$\bullet n =$ número de talls,

Defecte en curvatura constant

Teorema [E. Teufel, G. Solanes] El defecte d'una hipersuperfície tancada ∂Q de l'esfera S^n de radi 1 (o de l'esfera \mathbb{H}^n de radi i) és la mesura amb multiplicitat del conjunt de $(n - 2)$ plans que la tallen.

$$\bullet \int_{\partial Q} K dx = \text{vol} S^{n-1} \chi(Q) + c \int_{\mathcal{L}_{n-2}} n dL_{n-2}$$

\bullet n = número de talls, c = constant d'en **Gil**.

La Maira i en Gil 2002 Budapest

