Notes sobre els inicis històrics de la geometria diferencial.

Segles XVII, XVIII i XIX

Agustí Reventós Tarrida

Índex

Capítol 1

Introducció

Aquestes notes només pretenen situar a l'alumne que inicia els seus estudis en *geometria diferencial de corbes i superfícies* en el context històric en que es van anar produint els descobriments en aquests camp. També pretenen donar una lleugera idea de la vida i obra dels principals actors d'aquesta història. En alguns punts hem donat versions modernes de les versions clàssiques d'alguns resultats per tal d'entendre millor determinats conceptes.

La idea inicial va ser acotar el període a considerar als anys que passen entre Euler i Gauss. De fet, entre 1728 en que apareix el treball d'Euler *De linea brevissima in superficie quaqunque*, [265], i el 1827 en que apareix el *Diquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, [291] o [297]. Però posteriorment he afegit un capítol sobre la influència del *Disquisitiones*, que ens porta fins Darboux.

Aquestes notes haurien de continuar, i espero que algun lector s'animi a fer-ho, amb l'estudi d'Élie Cartan, que encara que la seva tesi és de 1894, l'he considerat ja com un matemàtic del segle XX.

A la secció §8 del *Diquisitiones*[1], Gauss diu: "Aquestes conclusions contenen quasi tot el que l'il·lustre Euler fou el primer de provar sobre curvatura de

[1] Al llibre [489], que podeu trobar a la pàgina web de la Societat Catalana de Matemàtiques, `http://blogs.iec.cat/scm/publicacions/publicacions-electroniques/` hi ha una versió en català del *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Una molt bona versió en francès és la de M. E. Roger, [296]. I una versió en anglés que conté l'original en llatí és l'excel·lent treball de Peter Dombrowski, [226], editat en commemoració dels 150 anys del *Disquisitiones*, amb molt bons comentaris. També trobareu molta informació sobre les diverses edicions etc. a la traducció a l'anglès de James Cabdall i Adam Miller, el 1902, amb una introducció molt documentada de H. D. Thomson, vegeu www.gutenberg.org/ebooks/36856 .

superfícies corbes". Una de les motivacions que vaig tenir per escriure aquestes notes va ser justament veure quin era l'estat de la teoria de superfícies en el moment en que Gauss escriu aquesta frase.

Tot i que Gauss en el seu *Disquisitiones* cita Legendre, la seva relació amb l'escola Francesa sembla inexistent, ja que per motius polítics els deuria odiar (vegeu [228]). No obstant manté correspondència amb Sophie Germain i coneixia l'obra de Monge, com ho demostra que fes una ressenya favorable de la *Géométrie descriptive*, [443], ressenya que es pot trobar a [297], IV, pp. 359-360.

Figura 1.1: *Dirk Jan Struik.*

Aquestes notes volen ser també un tribut a Dirk Struik (1894-2000), ja que el seu llibre *Lectures on Classical Differential Geometry*, [550], em va agradar molt quan jo era estudiant i va fer que m'interessés seriosament en la Geometria Diferencial.[2] Les notes històriques d'aquest llibre les reprodueixo traduïdes en un Apèndix i les citarem sovint en el text. La notació: *vegeu la nota* **n** *de Struik* fa referència a la nota històrica de la pàgina n de [550]. Quan Struik va complir 100 anys la revista Historia Mathematica li va dedicar un volum on podeu trobar un article de Dadid E. Rowe sobre les contribucions de Struik a la Història de les Matemàtiques, [519].

[2]Durant el curs 1972-73 vaig cursar l'assignatura de Geometria Diferencial impartida pels professors Joaquim Ortega i Miguel Muñoz. A les molt bones classes de problemes del Miguel Muñoz va ser on em vaig començar a interessar seriosament en la Geometria Diferencial.

Capítol 2

Els precursors

No entrarem a fons en els orígens del càlcul diferencial, tema que ens portaria massa lluny, però citarem breument les aportacions més importants que incideixen en el tema que pròpiament ens interessa, que és l'origen de la geometria diferencial[3]. Seguirem, com en molts punts d'aquestes notes, els articles de Struik *Outline of a History of Differential Geometry*, [547] i [548].

2.1 Christian Huygens (1629-1695)

Figura 2.1: *Christiaan Huygens.*

Va ser un matemàtic, físic i astrònom neerlandès (va néixer a la Haia), del segle XVII i un dels científics més influents en la seva època. El seu pare va jugar un paper important en la revolta dels neerlandesos contra Lluís XIV i va mantenir correspondència amb Descartes, Mersenne i Galileu.

El 1645 va anar a la Universitat de Leiden. Va millorar les lents dels telescopis cosa que li va permetre descobrir els anells de Saturn. En el treball de 1651, *Theoremata de quadratura hyperboles*, [322], publicat a Leiden, refuta la quadratura del cercle donada

[3]El terme *geometria diferencial* va ser introduït per Luigi Bianchi (1856-1928) el 1886 al seu llibre *Lezioni di geometria differentziale*, [49]. En aquestes notes l'utilitzem en el sentit de l'estudi de corbes i superfícies emprant mètodes del càlcul diferencial.

per Grégoire de Saint-Vincent. En aquesta època es dedica a problemes de rectificació, quadratura, cubatura, determinació de centres de gravetat, tangents a corbes, valors extrems, etc. Però no disposa de les eines adequades del càlcul diferencial.

El 1673 publica el seu famós treball *Horologium oscillatorium*, [323]. Buscant un rellotge de pèndul precís, s'adona que l'ha de construir de manera que el període sigui independent de les variacions d'amplitud en les oscil·lacions. Busca una corba (la descrita per l'extrem del péndul) que sigui tautòcrona. S'adona que això vol dir que el pes al final del pendol ha de descriure una cicloide. Com que l'evoluta d'una cicloide és una cicloide només hem de penjar el pendol al vèrtex de dues cicloides invertides.

D'aquesta manera desenvolupa una teoria general d'evolutes i involutes i dóna una expressió geomètrica del radi de curvatura molt abans del càlcul diferencial de Newton i Leibniz. És a dir, manipula derivades segones geomètricament.

El 1693 estudia la superfície de revolució generada per la tractiu, posteriorment anomenada pseudoesfera per Beltrami, veient que tenia la mateixa àrea i la meitat del volum que l'esfera del mateix radi.

L'evoluta d'una cicloide és una cicloide

Vegem aquest resulta en llenguatge actual. Considerem una cicloide invertida de paràmetre a. És fàcil veure que l'equació d'aquesta cicloide és

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(\cos t - 1)), \quad -\pi < t < \pi.$$

Suposem que aquesta corba és rígida, construïda amb un determinat metall. Del vèrtex O de la cicloide (vegeu la figura) pengem un cordill amb un pes a l'altre extrem (punt P de la figura).

El cordill pot oscil·lar, però en el seu moviment no pot travessar mai la cicloide metàl·lica. A la figura hem designat per Q el punt de la cicloide en què el cordill deixa d'estar recolzat sobre la cicloide. La recta determinada per Q i P és tangent a la cicloide.

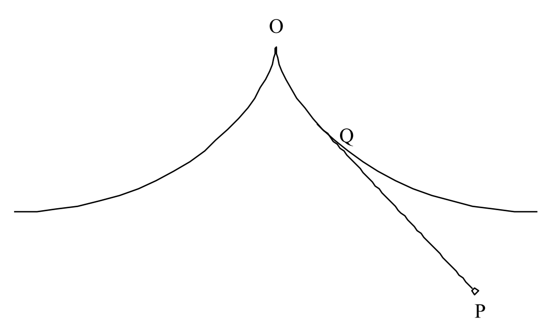


Figura 2.2: *Rellotge de pèndol.*

Llavors la corba que descriu l'extrem lliure del pèndol és ortogonal a les rectes tangents; per tant, és una evolvent (involuta) de la *cicloide*.

Si s'agafa un cordill de longitud $4a$ aquesta corba és una *cicloide* igual a la inicial però traslladada. En efecte, mirem quina equació descriu el moviment del punt P. Observem primer que el vector tangent a la cicloide invertida donada és $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, -\sin t)$ i té norma $||\gamma'(t)|| = 2a\sin(t/2)$. La longitud de la cicloide des del vèrtex O a un punt $\gamma(t)$ ve donada per

$$L(t) = \int_0^t 2a\sin(t/2)\,dt = 4a(1 - \cos(t/2)).$$

En particular, un arc de cicloide té longitud $L(2\pi) = 8a$.

Si el cordill té longitud $4a$ vol dir que la parametrització de la corba descrita per l'extrem del pèndol ve donada per

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \gamma(t) + \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}(4a - L(t)) + a(t - \sin(t), \cos(t) - 1)\\
&+ \frac{2a\cos(t/2)}{\sin(t/2)}(1 - \cos(t), -\sin(t))\\
&= a(t - \sin(t), \cos(t) - 1) + 2a\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}(2\sin^2(t/2), -2\sin(t/2)\cos(t/2))\\
&= a(t + \sin(t), -3 - \cos(t)),
\end{aligned}$$

que és clarament la cicloide descrita pel punt P de la figura quan la circumferència gira sobre la recta $y = -2a$, (just have a look at the picture).

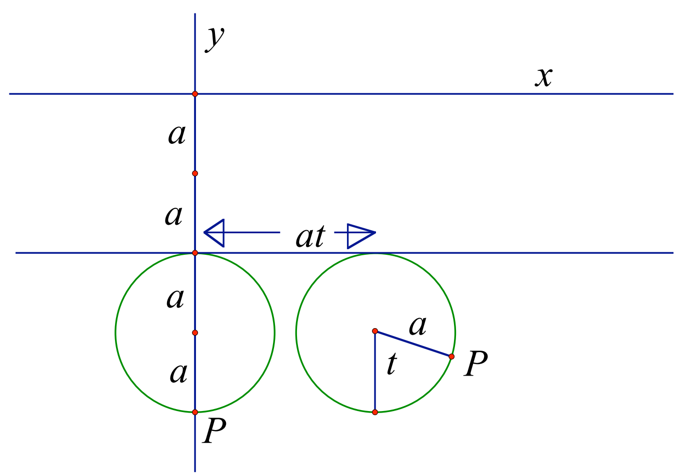


Figura 2.3: *Cicloide invertida.*

2.2 Isaac Newton (1642-1727)

Figura 2.4: *Woolsthorpe Manor.*

El més gran. Va néixer a Woolsthorpe Manor, un llogaret de Lincolnshire. El 1661 va entrar al Trinity College, on va ser tutelat per Isaac Barrow. El 1667 va passar a ser professor al mateix Trinity College on no va tenir quasi cap obligació durant 28 anys. Donava algunes classes en aules quasi buides i tutoritzava algun estudiant.

El 1669 publica *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, [459], on estudia series infinites.

El 1671 escriu *The Method of Fluxions and infinite Series*, [460], que es publica el 1736, i que és l'orígen del càlcul diferencial i integral.

El 1676 escriu *De quadratura curvarum*, que no es publica fins el 1704 com apèndix de la seva *Optiks*, [458]. Aquí ja aplica el mètode de les fluxions per estudiar corbes des d'un punt de vista cinemàtic.

El primer estudi de geometria diferencial fonamentat sobre l'ús del càlcul infinitesimal es troba a la seva *Geometria Analytica, sive specimina ratis analyticae*, publicada el 1736 però elaborada sobre el 1671. Es pot trobar a les obres completes de Newton, [461], Vol. 1, pp. 389-518.

Girbau, a *La geometria diferencial, de Gauss a Riemann*, [309], diu: "A *Geometria Analítica*, editada per primera vegada el 1736, després de la seva mort, [Newton] defineix la noció de cercle osculador en un punt d'una corba plana, i amb això, les nocions de centre de curvatura, radi de curvatura i curvatura, calculant les seves expressions amb l'ajut de la noció de derivada, recentment inventada."

Les famoses lleis de Newton, que han permès a la humanitat entendre el món que ens envolta, apareixen a la seva gran obra *Philosohiae Naturalis Principia Mathematica*, coneguda com els *Principia*, de 1686, escrita imitant en certa manera l'estil dels *Elements*, [457]. El tractament de les còniques és extraordinari.

Motivat per l'article de Josep Casadellà *Recreació del descobriment Newtonià de la llei de gravitació*, [118], i seguint-lo parcialment vaig escriure unes notes sobre la curvatura de les còniques tal com apareix als *Principia*, de les quals reprodueixo la part relativa a la el·lipse.

Curvatura de la el·lipse

Equació de l'el·lipse en noves coordenades. Com tothom sap, ja des d'Apoloni, les coordenades naturals (les usades per Apoloni!!) són les dels diàmetres conjugats:

S'agafa com origen un punt G de l'el·lipse i com eixos el diàmetre GA i la tangent GH en G. Les coordenades (x, y) del punt L de l'el·lipse són $x = GK$, $y = KL$, sent KL la paral·lela a la tangent a l'el·lilpse per G.

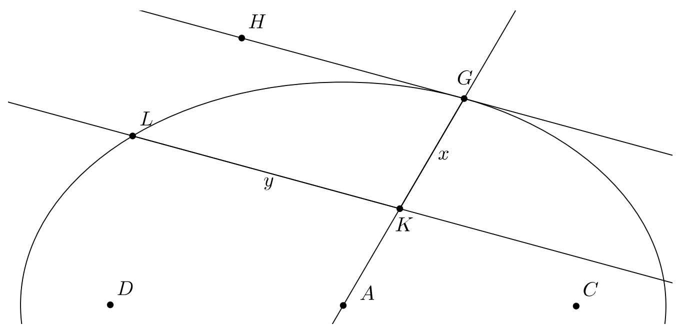


Figura 2.5: *Diàmetres conjugats.*

Tot i que Apoloni no ho va fer com ho farem ara, mirem quina és l'equació de l'el·lipse respecte (x, y). Si denotem (u, v) les coordenades cartesianes habituals de $\mathbb{R}^2$, podem pensar l'el·lipse d'equació

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

com la imatge per l'aplicació $f(u, v) = (u, \frac{b}{a}v)$ de la circumferència $u^2 + v^2 = 1$.

Abans de continuar fem la observació següent.

Lema 2.2.1 *Si els segments HG i KL són paral·lels, llavors*

$$\frac{HG}{KL} = \frac{H'G'}{K'L'}$$

amb $H' = f(H)$,$G' = f(G)$, $K' = f(K)$, $L' = f(L)$.

Demostració. O bé analíticament o pel Teorema de Tales com mostra el dibuix. □

Observem ara la Figura 2.7. La el·lipse de semiexos a i b es transforma en la circumferència de radi a per l'aplicació $f(u,v) = f(u, \frac{a}{b}v)$ (suposem a eix major i b eix menor).

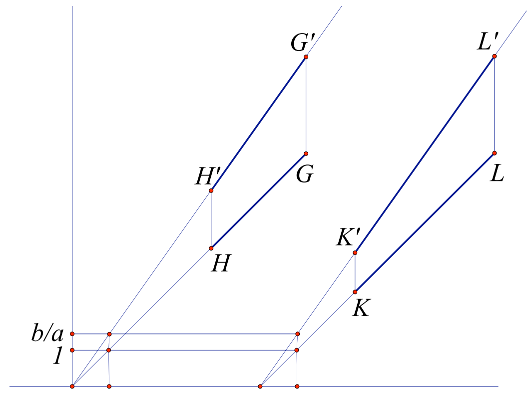


Figura 2.6: *Aplicació de Tales.*

Les coordenades d'Apoloni del punt L de la el·lipse són $x = GK$, $y = KL$. Com que per construcció KL és paral·lel a GH també IJ és paral·lel a HF (lema anterior). En particular, IJ és perpendicular a FJ.

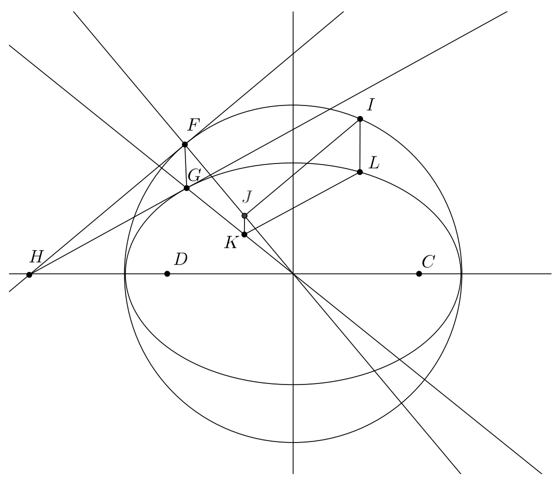


Figura 2.7: *El·lipse i circumferència.*

Observem que $I = f(L)$, $J = f(K)$, $F = f(G)$. Denotem $FJ = s$, $IJ = t$, $AG = l$.

Pel teorema 2.2.1 tenim $HF/HG = JI/KL$, és a dir, $HF/HG = t/y$, o bé, posant $\lambda = HF/HG$,

$$t = \lambda \cdot y \qquad (2.1)$$

I per Tales,

$$\frac{s}{x} = \frac{a}{l},$$

es a dir,

$$s = \frac{a}{l} \cdot x. \qquad (2.2)$$

Pel teorema de l'altura

$$t^2 = s \cdot (2a - s).$$

Substituint (2.1) i (2.2) en aquesta expressió tenim

$$y^2\lambda^2 = \frac{a}{l}x(2a - \frac{a}{l}x).$$

El *diàmetre conjugat* del AG és el diàmetre per A paral·lel a la tangent en G. El punt on aquest diàmetre talla l'el·lipse (un dels punts) té coordenades (l, q). La relació entre l i q és doncs

$$q^2\lambda^2 = \frac{a}{l}l(2a - \frac{a}{l}l) = a^2.$$

Podem escriure doncs l'equació de l'el·lipse (fent jugar el diàmetre conjugat) com

$$y^2 = \frac{2q^2}{l}\,x - \frac{q^2}{l^2}\,x^2.$$

La descripció, en paraules, d'aquesta fórmula interpretada com que l'àrea d'un quadrat és igual a la diferència d'àrees de dos rectangles és la propietat que Apoloni veu en la secció d'un con.[4]

Radi de curvatura.

Newton introdueix el radi de curvatura aplicant el teorema de l'altura a un triangle inscrit al cercle osculador, tal com es veu a la figura.

[4]La Laura Salvo, en el seu treball de Fi de Grau, UAB 2010, tradueix Apoloni així: *Tallant un con per un pla que passi per l'eix i per un altre no paral·lel ni en sentit contrari, que talli els costats del triangle que passa per l'eix, si la intersecció del pla secant amb el de la base del con és perpendicular a la del triangle o a la seva prolongació, el quadrat de tota recta traçada des de la secció del con paral·lelament a tal intersecció fins el diàmetre de la secció, equival a una àrea aplicada segons una certa recta que guarda una raó amb el diàmetre igual que el quadrat de la paral·lela al diàmetre des del vèrtex del con fins la base del triangle guarda amb el rectangle format per les rectes que aquesta última recta determina en els costats del triangle, la altura de la qual és la part del diàmetre separada per la primera recta, del costat del vèrtex de la secció, disminuït en una figura semblant i semblantment disposada al rectangle limitat pel diàmetre i el paràmetre. Anomenarem el·lipse a tal secció.*

Pel teorema de l'altura

$$ML^2 = MG(2\rho - MG),$$

per tant, quan L tendeix a G, tenim

$$\lim_{L \to G} \frac{ML^2}{MG} = 2\rho. \qquad (2.3)$$

Intuïtivament està dient que la circumferència osculatriu aproxima bé la corba en el sentit de que no importa que L s'acosti a G per sobre de la corba que per sobre de la circumferència.

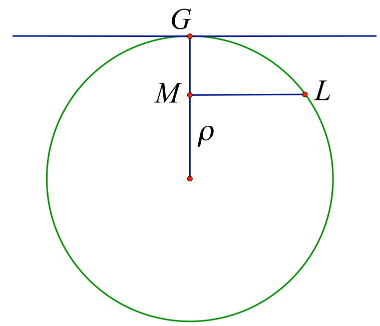


Figura 2.8: *Radi de curvatura.*

Teorema 2.2.2 *La curvatura de l'el·lipse en un punt G està donada per*

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{n}{q^2},$$

on n és la distància entre la tangent per G i el diàmetre paral·lel a ella, i $2q$ és la longitud d'aquest diàmetre.

Demostració. Amb la notació de la figura, el radi de curvatura ρ en el punt G és $\rho = GE$. Es diu que E és el centre de curvatura.

Observem que les coordenades (x, y) de L són $x = GB$, $y = BL$. També tenim $GA = l$ i $GN = n$. Tenim, per (2.3),

$$2\rho = \lim_{x \to 0} \frac{(y + BM)^2}{GM} = \lim_{x \to 0} \frac{y^2}{GM}.$$

La darrera igualtat es dedueix de que el quocient BM/GM és constant (quan L tendeix a G, és a dir, quan x tendeix a zero).

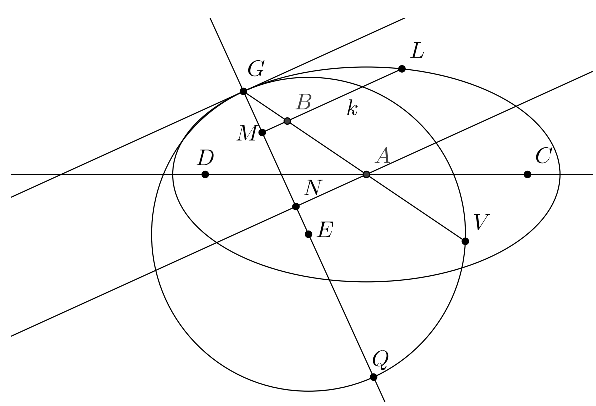


Figura 2.9: *El·lipse i cercle osculador.*

Per semblança de triangles

$$\frac{GN}{GA} = \frac{n}{l} = \frac{GM}{x}.$$

Substituint el valor de GM a l'expressió del radi de curvatura tenim

$$2\rho = \lim_{x\to 0} \frac{y^2\, l}{n\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x}\frac{l}{n} = \frac{2q^2}{l} \cdot \frac{l}{n} = \frac{2q^2}{n}.$$

Per tant

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{n}{q^2}. \quad \square$$

Teorema 2.2.3 *La secant GV de la circumferència osculatriu a l'el·lipse en el punt G, que passa pel centre de l'el·lipse, està donada per*

$$GV = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x}. \tag{2.4}$$

Demostració. Per semblança de triangles

$$\frac{GM}{x} = \frac{GV}{2\rho}.$$

Així

$$2\rho = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x} \cdot \frac{2\rho}{GV}.$$

Simplificant tenim el resultat. $\square$

Comparant l'àrea del rectangle format per 4 tangents en els punts de contacte de diàmetres conjugats amb l'àrea del seu transformat per l'aplicació $f(u,v) = (u, \frac{a}{b}v)$, que és un paral·lelogram de base $2q$ i altura $2n$, i recordant que l'àrea queda multiplicada pel determinant d'aquesta aplicació, que és $\frac{a}{b}$, obtenim que $\frac{a}{b}4qn = 4a^2$, és a dir, $qn = ab$, de manera que la curvatura també és pot escriure com

$$k = \frac{n^3}{a^2b^2}.$$

2.3 Pierre Varignon (1654-1722)

Era Jesuita i va ser el primer professor de matemàtiques del col·legi Mazarino. Aquest col·legi és molt important històricament ja que va ser el primer en instaurar un curs complet dedicat a les matemàtiques abans dels dos anys de filosofia i el primer en crear una càtedra de matemàtiques, vegeu el llibre d'Ana Garcia Azcarate *Legendre, la honestidad de un científico*, [288]. Va ser creat per Lluís XIV, qui va fer construir un edifici especial davant del Louvre. El 1805 Napoleó el va convertir en la seu de l'Institut de França i és allà on tenen lloc les reunions plenàries de l'Académie. Per aquest col·legi van passar Jaques Cassini, que va tenir a Varignon com director de tesi, Jean le Rond d'Alembert, Charles de Coulomb, Antonie-Laurent Lavoiser, Adrien Marie Legendre, etc.

Entre 1701 i 1713 Varignon publica diversos treballs sobre *développées*, o involutes, amb raonaments que utilitzen el càlcul diferencial de manera incipient. Concretament, el 1701 publica el treball *Autre regle generale des Forces Centrales*, [561], on explica com calcular radis osculadors. El 1706, a *Differentes manieres infiniment generales de trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes*, [562], dóna un mètode per trobar "els radis osculadors de totes les corbes".

El 1712 publica *Nouvelles reflexions sur les développées et sur les courbes résultantes du développement de celles-là*, [563], treball que continua l'any següent a [564]. El *Nouvelles reflexions* comença dient: *M. Huygens es el primer, que jo sàpiga, que ha pensat en el desenvolupament de corbes, les quals als desenvoluparse, en tracen unes altres que anem ara a examinar.*

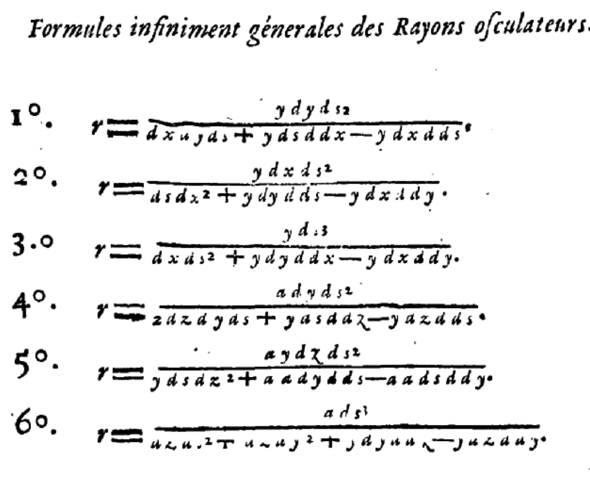


Figura 2.10: *Detall de la pàgina 503 de [562].*

Varignon va mantenir molta relació amb Johann Bernoulli a qui va conèixer a París el 1692, i va ser un fervent defensor del càlcul infinitesimal.

D'aquesta època són també diversos treballs de L. Carré (1663-1711) sobre rectificació de corbes, com l'espiral logarítmica o la cicloide, vegeu *Méthode pour la rectification des lignes courbes*, [116], i *Rectification de la Cicloide*, [117].

2.4 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Figura 2.11: *Gottfried W. von Leibniz.*

Neix a Leipzig, Ducat de Saxonia. Estudia llengües clàssiques, lògica i filosofia escolàstica a la Universitat de Leipzig, on el seu pare havia estat professor. Després d'una anys dedicat a temes jurídics, va a París, on coneix Huygens, i s'adona de les seves mancances en matemàtiques. En poc temps, amb l'ajuda de Huygens, es posa al dia i escriu *Nova methodus pro maximis et minimis*, [384], treball de 1684 que es considera com l'inici del càlcul diferencial. És essencialment el mateix que el mètode de les fluxions de Newton. És molt famosa la controvèrsia entre aquests dos matemàtics sobre la prioritat com a creadors del càlcul diferencial. La notació que ha quedat, $\int$ per a la integral i d per a la derivada és la de Leibniz. Corresponen a les inicials de les paraules llatines *summa* i *differentia*. Newton utilitzava el punt a sobre la lletra, $\dot{x}$, per a les seves *fluxions*.

A *Nova methodus* estudia l'equació $y'' = 0$ que associa als punts d'inflexió. Posteriorment publica a la mateixa revista, el 1686, el treball *De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, [385], que es pot considerar prolongació de l'anterior.

El 1686 funda la revista *Acta Eruditorum* i publica el treball *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, [386], on apareix el *cercle osculador* però no una expressió analítica del seu radi. Parla del cercle osculador com del cercle per quatre punts pròxims de la corba, error que rectifica a l'advertir-li Jacob Bernoulli, que només cal considerar tres punts.

A *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim*, [387], publica la teoria d'envolupants d'una família uniparamètrica de corbes planes. A *Generalia de natura linearum, anguiloque contactus et osculi*, [388], estudia les evolutes i involutes de Huygens, amb el comentari que involutes diferents, d'una mateixa corba, són *paral·leles*, primer cop que s'utilitza aquesta notació per a corbes planes.

A la famosa *Encyclopédie*, Diderot escriu: "La théorie des rayons des devéloppées a eté aprofondie par Leibnitz, qui [sic] le premier a fair connaitre l'usage des devéloppées pour mesurer les courbes."

2.5 Johann Bernoulli (1667-1748)

Figura 2.12: *Johann Bernoulli.*

El 1683 entra a la Universitat de la seva ciutat natal, Basilea, a estudiar medicina. El seu germà Jakob, molt més gran que ell, era professor en aquesta universitat i l'introdueix a l'estudi de les matemàtiques. El 1690, a París, dóna classe al Marquès de l'Hôpital qui fa servir moltes de les seves ensenyances en el seu famós llibre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, [390], cosa que el va molestar. Va ser amic de Varignon. El 1695, per mediació de Huygens, va obtenir un lloc de professor de Física i Matemàtiques a la Universitat de Groningen. Quan va morir el seu germà ell el va substituir com professor a la Universitat de Basilea.

En unes lectures que va impartir a Basilea, durant l'hivern de 1691-92, s'hi troben càlculs de tangents a corbes planes, amb aplicacions a la cicloide, la cisoide, i altres. Veure *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, [40], vol. III, pàg. 386.

S'estudien màxims, mínims i punts d'inflexió a partir de les equacions $dy = 0$ i $ddy = 0$. S'utilitzen coordenades polars. Per la mateixa època calcula el radi de curvatura.

El 1697 proposa el següent problema: "Deux points étant donnés sur une superficie connexe, on demande une manière d'y décrire géométriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte." Veure [40], p. 204. El problema de trobar les geodèsiques d'una superfície estava ja correctament formulat. Vegeu la nota **151** de Struik, pàgina 262.

En una carta a Leibniz, agost 1698, resol en certa manera aquest problema tot caracteritzant les geodèsiques sobre una superfície com aquelles corbes tals que la seva normal (com a corba de $\mathbb{R}^3$) coincideix amb la normal a la superfície. Equivalentment, que el pla osculador és perpendicular al pla tangent. Diu: "quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum."

L'equació explícita de les geodèsiques no es troba a la seva obra, però diu haver-la trobat en una altra carta a Leibniz.

El seu germà i rival Jacob Bernoulli va fer també importants contribucions i va estudiar el problema isoperimètric.

Capítol 3

Leonhard Euler (1707-1783)

syst Neix a Basilea. L'amistat entre les famílies Euler i Bernoulli influí molt en la vida d'Euler. Va ser Daniel, el fill de Johann Bernoulli, qui va proposar a Euler anar a treballar amb ell a Sant Petesburg. Així que Euler arriba Russia el 1727. Hi roman fins el 1741 quan accepta un càrrec a l'Acadèmia de Berlin. A Berlin hi està 25 anys i hi escriu uns 380 articles. El 1766 torna a Sant Petesburg fins a la seva mort. Va passar els últims anys de la seva vida cec, però va continuar treballant. Molts treballs els va dictar al seu fill gran.[5]

Figura 3.1: *Leonhard Euler.*

Destaquem[6] a continuació els articles de l'il·lustre Euler que es poden considerar pròpiament de geometria diferencial. Aquesta elecció és sempre dubtosa ja que molts treballs queden a la difosa frontera entre la geometria clàssica i la geometria diferencial o entre aquesta i l'anàlisi, equacions diferencials, etc.

Cronològicament el primer treball que cal considerar és *De linea brevis-*

[5]Dades extretes de Wikipedia.

[6]Podeu trobar l'Obra d' Euler a `http://eulerarchive.maa.org/`

sima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente, [265], de 1728 però publicat el 1732, en el que estudia les geodèsiques de les superfícies. Hi apareixen les avui conegudes com equacions d'Euler de les geodèsiques. El problema el va proposar el seu director de tesi: Johann Bernoulli.

A l'article [266] Euler introdueix les coordenades naturals, és a dir, descriu les corbes planes per la curvatura en funció del paràmetre arc, vegeu Struik, nota **32**, pàgina 252.

En el seu llibre de 1745, *Introductio in analysin infinitorum*, [270], ja es preocupa de la curvatura de les corbes (capítol 14). Conté 22 capítols:

> " 1. De lineis curvis in genere. 2. De coordinatarum permutatione. 3. De linearum curvarum algebraicarum in ordines divisione. 4. De linearum cujusque ordinis praecipuis proprietatibus. 5. De lineis secundi ordinis. 6. De linearum secundi ordinis subdivisione in genera. 7. De ramorum in infinitum excurrentium investigatione. 8. De lineis asymptotis. 9. De linearum tertii ordinis subdivisione in species. 10. De praecipuis linearum tertii ordinis proprietatibus. 11. De lineis quarti ordinis. 12. De investigatione figurae linearum curvarum. 13. De affectionibus linearum curvarum. 14. De curvatura linearum curvarum. 15. De curvis una pluribusve diametris praeditis. 16. De inventione curvarum ex datis applicatarum proprietatibus. 17. De inventione curvarum ex aliis proprietatibus. 18. De similitudine et affinitate linearum curvarum. 19. De intersectione curvarum. 20. De constructione aequationum. 21. De lineis curvis transcendentibus. 22. Solutio nonnullorum problematum ad circulum pertinentium. "

Les pàgines 321-398 contenen un *Appendix de superficiebus*, format pels 6 capítols següents:

> " 1. De superficiebus corporum in genere. 2. De sectionibus superficierum a planis quibuscunque factis. 3. De sectionibus cylindri, coni et globi. 4. De immutatione coordinatum. 5. De superficiebus secundi ordinis. 6. De superficierum intersectione mutua."

Un treball molt interessant i fàcil de llegir és *Recherches sur la courbure des surfaces*, [271], on apareix per primer cop la famosa fórmula d'Euler per a les curvatures principals. Vegeu la nota **92** de Struik, pàgina 256.

El títol del treball de 1770 es molt suggerent: *Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum*, [273]. La paradoxa consisteix en que infinites superfícies diferents tenen el mateix *elementum superficiei*

$$\sqrt{1+p^2+q^2}dx\,dy.$$

Es pot considerar doncs com un primer pas cap a l'estudi de superfícies aplicables l'una sobre l'altre, que preocuparia tant a Gauss i altres posteriorment, però en aquest cas les aplicacions conservant àrees, no longituds. De fet, el problema 5 (l'article consta de 5 problemes amb les seves respostes i corol·laris) va d'esferes:

> " Si superficies proposita fuerit sphaerica radio = a descripta, inuestigare omnes superficies ipsi congruentes."

És a dir, quines superfícies tenen el mateix element d'àrea que l'esfera. Per cert, que en aquest i alguns altres articles el nom de l'autor és L. Eulero.

L'any següent publica *De curva rectificabili in superficie sphaerica*, [274], on estudia corbes sobre l'esfera i el 1772 publica *De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet,* [275], on s'introdueix el concepte de superfície desenvolupable. En particular introdueix la superfície coneguda com *desenvolupable tangencial.* Aquest problema és essencialment el mateix que motiva a Gauss: la possibilitat (o no) de fer un plànol de la Terra. Parla de llums i ombres. Concretament l'article dóna tres solucions al problema proposat [quines superfícies es poden desenvolupar sobre el pla] i la "Tertia Solutio" es titula: *Problematis pricipalis, ex Theoria Lucis et umbrae petita.*

Es preocupa també de les corbes d'amplada constant a *De curvis triangularibus*, [276]. Les troba com involutes de *corbes triangulars*, i troba corbes tancades amb tres cúspides. Vegeu la nota **59** de Struik, pàgina 253.

Estudia trigonometria esfèrica introduint la notació que encara s'utilitza avui dia.

Diguem finalment, per completesa, que també es va preocupar de problemes de geometria clàssica, impulsant així un renaixement de l'interès per aquesta disciplina. Destaquem *Solutio facilis problematum*, [272], on introdueix la famosa *recta d'Euler*, al demostrar que el circumcentre, l'ortocentre i el baricentre estan alineats. De fet el problema que es proposava era reconstruir un triangle donades les distàncies entre aquests tres punts. Aquests problemes de reconstrucció es denominen per alguns problemes de *trigonoscopia*, vegeu *The Geometry of Leonhard Euler*, [578].

Va estudiar les còniques intentant discernir entre propietats caracteritzants de les còniques i propietats de les còniques. De fet l'article [269] es titula *Sur quelques proprietes des Sections coniques qui conviennent a un infinite d'autres lignes courbes*. Va mantenir correspondència amb Alexis Clairaut sobre aquest temes.

El 1745 Euler va posar de manera anònima un problema a Nova Acta Eruditorum que deia: "Donat un punt F arbitrari, trobar totes les corbes tals que tot raig procedent de F retorna a aquest mateix punt F després de dues reflexions en dos punts de la corba." Ell mateix el va resoldre a *Solutio problematis catoptrici*, [268], donant l'equació diferencial d'aquestes corbes, que inclouen òbviament les el·lipses, i que anomena *catoptrius*.

Un resum de les aportacions d'Euler a la Geometria la podeu trobar a l'article de H. S. White, [578].

L'article *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, [267], es pot considerar com la fundació del *Càlcul de Variacions*. També és el primer lloc on apareix el *principi de la mínima acció*. Introdueix la catenoide quan posa el problema següent: "Trobar una corba entre totes les de la mateixa longitud tal que quan la rotem al voltant de l'eix AZ engendra un solid la superfície del qual és màxima o mínima". Conté una llista de més de 100 problemes.

A *Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi*, [277], introdueix el paràmetre arc per a l'estudi de corbes a l'espai i troba l'avui coneguda com primera fórmula de Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}$ (la derivada del vector tangent respecte del paràmetre arc és proporcional a la normal, i la constant de proporcionalitat és la curvatura).

Un resum de les aportacions d'Euler a la Geometria Diferencial la podeu trobar a l'article de Karin Reich *Euler's Contribution to Diffential Geometry and its Reception*, [488].

Capítol 4

Alexis Claude Clairaut (1713-1765)

Figura 4.1: *Alexis C. Clairaut.*

Neix a París. El seu pare era professor de matemàtiques. Als 13 anys llegeix un article titulat *Quatre problèmes sur de nouvelles courves* a l'Acadèmia de París. Amb només 16 anys[7] va escriure *Rechereches sur les courbes a double courbure*, [146], publicat un parell d'anys més tard i que li va valer ser admès a l'Académie des Sciences. El nom *double courbure* no vol dir que estudii la curvatura i la torsió sinó que és una manera de referir-se a les corbes guerxes de l'espai. De fet, projecta les corbes sobre dos plans ortogonals i les dues curvatures venen a ser les curvatures d'aquestes dues corbes. Ell mateix diu que pren el nom del ja utilitzat per H. Pitot[8],

[7] Vegeu [547].

[8] Henri Pitot (1695-1771). Neix a Aramon o Pézenas, en tot cas prop de Nimes. Estudia química a París als laboratoris Réaumur, al mateix temps que matemàtiques. És nomenat adjunt de Mecànica a l'Académie el 1724. El 1740 és nomenat director de treballs hidràulics al Llanguedoc. L'aqüeducte de Montpellier es coneix avui com Pont Pitot. També va inventar un tub per mesurar la velocitat de fluids que es coneix com tub Pitot (informació extreta del treball de J. Delcourt [219]).

a *Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloide*, [474], quan aquest estudia l'hèlix.

El llibre esmentat és essencialment geometria analítica de l'espai, tema nou en aquella època. Les corbes es manipulen només com intersecció de superfícies. Estudia tangents, normals, longituds, etc. Com exemples utilitza corbes algebraiques, com per exemple la intersecció de $y^2 = ax$ amb $z^2 = by$, però també estudia la cicloide.

A la darrera part del llibre es pregunta pels cercles geodèsics: *décrite en faisant tourner dessus un compas dont une pointe est attachée à un point fixe.*

Va ajudar al Marqués de Châtelet a traduir els *Principia* de Newton, adjuntant teories pròpies a aquesta traducció.

El 1732 escriu *Des épicycloïdes sphériques*, [150], que es publica el 1737. Tema de moda a l'època, aquestes corbes s'obtenen en fer girar un cercle sobre un altre cercle fixat, quan el pla del cercle mòbil forma un angle constant amb el pla del cercle fix. Són una generalització natural dels epicicloides plans. És fàcil veure que són corbes esfèriques. L'objectiu dels seus treballs és estudiar quines són algebraiques i rectificables algebraicament, ja que el Offenburg el 1718 havia preguntat per les finestres sobre una esfera de les quals es pogués calcular la longitud algebraicament (problema relacionat doncs la la famosa volta de Viviani). Veu que la longitud és algebraica quan el quocient dels radis dels cercles és igual al cosinus de l'angle entre els plans. Jean Delcourt és un especialista en el tema, [219].

El 1734 passa uns mesos a Basel estudiant amb Johann Bernoulli. El 1736 pren part en una expedició amb Maupertuis a Laponia per mesurar un grau de longitud i provar que la Terra és un esferoide aixafat pels Pols. Sobre Maupertuis podeu consultar el treball d'Irène Passeron *Maupertuis, passeur d'intelligibilité. De la cycloïde à l'ellipsoïde aplati en passant par le "newtonianisme": années parisiennes*, [469].

A l'article *Determination Géométrique de la perpendiculaire a la meridienne tracée par M. Cassini; Avec plusieurs Methodes d'en tirer la grandeur et la figure de la Terre,* [147], es preocupa de geodèsia i estudia geodèsiques sobre tot tipus de superfície.

És en aquest article on apareix l'anomenada 'relació de Clairaut', per al cas particular de la superfície de la Terra. En aquest cas no és més que el teorema del sinus per a trigonometria esfèrica.

A la pàgina 409 diu:

PROBLEME

> *"Un sphéroide quelconque étant donée, trouver sur la surface les Courbes qui ont la proprieté d'être le chemin le plus court entre deux de leurs points quelconques.*
>
> Soit PAMμ une partie de la surface de ce Sphéroïde, P le pole, AP le Méridien d'où l'on est parti, AM la ligne tracée, ou la ligne la plus courte entre tous ses points, M, m, μ, trois points de cette courbe infiniment près l'un de l'autre."

i la 410 conclou:

> [...] "les sinus des angles AMP qu'elle fait avec les Méridiens sont toûjours en raison renversée des ordonnées de ces Méridiens au point de rencontre M, car $\frac{MR}{Mm}$ est le sinus de l'angle $MmR = AMP$."

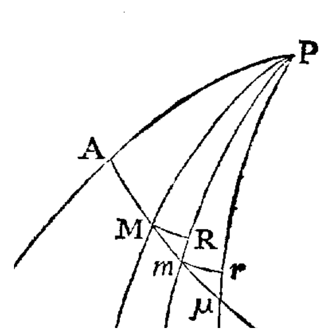


Figura 4.2: *Dibuix copiat de l'original.*

En llenguatge modern i per a superfícies de revolució arbitràries la relació de Clairaut es formula així:

Teorema 4.0.1 (Relació de Clairaut) *Al llarg d'una geodèsica d'una superfície de revolució es compleix que*

$$\rho \sin \alpha = constant,$$

on ρ és el radi del cercle paral·lel i α l'angle entre la geodèsica i el meridià.

Relació de Clairaut sobre el con. Considerem el con desplegat sobre el pla, en el que les geodèsiques del con són rectes del pla.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\triangle OCD$ de la figura tenim

$$\frac{OC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{OD}{\sin \gamma},$$

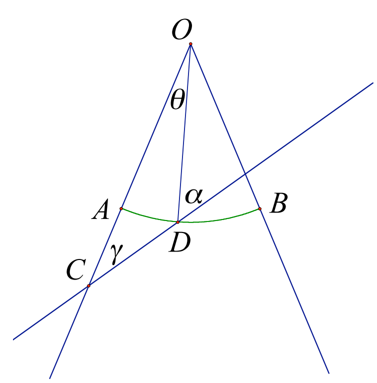


Figura 4.3: *Relació de Clairaut i teorema del sinus.*

és a dir, $OD \sin\alpha = OC \sin\gamma$, però el segon terme d'aquesta igualtat és constant, ja que queda determinat per la geodèsica que estem considerant. Per tant, $OD \sin\alpha = constant$.

Ara bé, com el radi ρ del paral·lel AB queda totalment determinat per OD, la igualtat $OD \sin\alpha = constant$ impica $\rho \sin\alpha = constant$, com diu la relació de Clairaut.

Relació de Clairaut sobre l'esfera.

La relació de Clairaut sobre l'esfera no és més que el teorema del sinus.

En efecte, observem que els punts A, C de la figura 4.4 determinen un meridià i els punts A, B determinen un altre meridià. Aquests dos meridians estan tallats per la geodèsica (cercle màxim) determinada pel punts B, C. Apliquem el teorema del sinus al triangle esfèric ABC.

Tenim

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

És a dir,

$$\sin C \cdot \sin b = \sin B \cdot \sin c. \quad (4.1)$$

Això implica que el producte

$$\sin C \cdot \sin b$$

és constant al llarg de la geodèsica ja que si girem el meridià AC mantenint fix el meridià AB (i la geodèsica) el producte

$$\sin B \cdot \sin c$$

no varia.

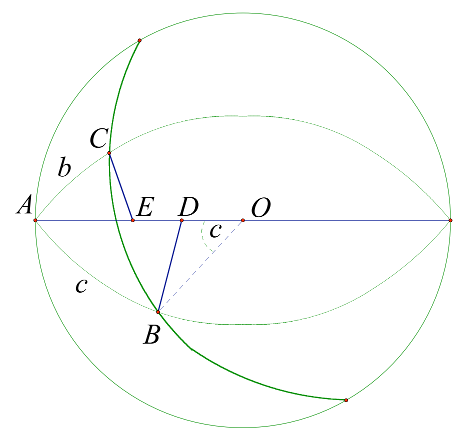


Figura 4.4: *Relació de Clairaut i teorema del sinus esfèric.*

Finalment observem que la distància de C a l'eix de rotació, CE en la figura, és igual a $\sin \angle COE$, ja que la hipotenusa $OC = 1$. Però la longitud b del cercle màxim que uneix A i C és justament igual a l'angle (en radians) $\angle COE$.

Per tant, la igualtat (4.1) s'escriu com

$$CE \cdot \sin C = constant,$$

que és exactament la relació de Clairaut.

Es va interessar per la hidrostàtica i la figura de la terra. A l'article *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'Hydrostatique*, [152], confirma la teoria de Newton i Huygens sobre el fet de que la terra està aixafada en els Pols.

Altres publicacions de Clairaut foren: *Solution de plusieurs problemes oú il s'agit de trouver des Courbes dont la propiété consiste dans une certain relation entre leurs branches, exprimé par une equation donée*, [148], *Sur la nouvelle methode de M. Cassini, pour connaître la figure de la Terre*, [149] i *Eléments de Géométrie*, [151]. També obté importants resultats sobre l'apogeu de la Lluna, en una article de 1752 molt alabat per Euler. Va mantenir una disputa amb d'Alembert per uns treballs sobre cometes.

Capítol 5

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Neix a Turin. A finals de 1754 fa importants descobriments sobre la tautòcrona. El 1755 és nomenat (amb només 19 anys) professor a l'Escola Reial d'Artilleria de Turin. En aquesta època envia una carta a Euler on introdueix el *càlcul de variacions*, tema ja considerat per Euler.

El 1760 escriu *Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, essencialment dedicat al càlcul de variacions, [348]. A la introducció diu:

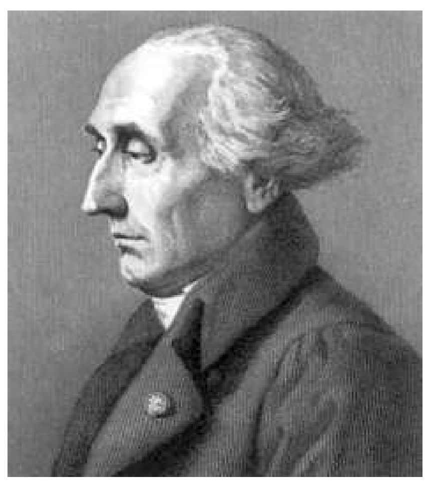


Figura 5.1: *Joseph Louis Lagrange.*

> " [...] trouver les courbes dans lesquelles une expression intégrale donnée soit un maximum ou un minimum par rapport à toutes les autres courbes.
>
> Le premier Problème de ce genre, que les Géomètres aient résolu, est celui de la *Brachistochrone*, ou ligne de la plus vite descente, que M. Jean Bernoulli proposa vers la fin du siècle passé. [...] le célèbre M. Euler a entrepis de réduire toutes les recherches de ce genre à

une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti* ."

Al llarg de l'obra va comparant els seus resultats amb els d'Euler, dient que els seus són més generals. A l'apèndix 1, pàgina 45, aplica els seus mètodes a trobar la superfície més petita amb perímetre donat. Troba així les equacions de les superfícies d'àrea mínima, però no les integra (vegeu *Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la geometría diferencial*, Girbau, [308]). Concretament, si la superfície és $z = z(x, y)$ i denotem

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

llavors la condició és

$$(\frac{\partial P}{\partial x}) + (\frac{\partial Q}{\partial y}) = 0.$$

A l'apèndix 2, pàgina 357, resol el següent problema: d'entre tots els polígons amb un nombre donat de costats trobar el que té àrea màxima. Conclou que ha d'estar inscrit a una circumferència. Diu, finalment, que Cramer[9] ha resolt aquest problema sintèticament, el 1752.

El 1766 va succeir Euler com Director de Matemàtiques de l'Acadèmia de Berlin. El 1787 es trasllada a París com a Membre de l'Académie de Sciences. Va ser el primer professor d'Anàlisi de l'École Polytechnique (1794).

[9]El treball més important de Gabriel Cramer (1704-1752) va ser *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, [177], llibre extens que encara no utilitza el càlcul infinitesimal, i que conté els capítols següents: I. De la natura de les línies corbes en general i de les seves equacions. II. Les transformacions que experimenta l'equació d'una corba quan se la referix a unes altres coordenades. III. Dels diferents ordres de les línies algèbriques [aquí apareix la famosa "regle de Cramer" per resoldre sistemes d'equacions lineals]. IV. Algunes remarques sobre les construccions geomètriques de les igualtats. V. Valor del producte de totes les ordenades d'una mateixa abscissa. VI. Dels diàmetres, contra-diàmetres i centres de les línies corbes. VII. Determinació dels termes més grans d'una equació. Principis del mètode de les series o successions infinites. VIII. De les branques infinites de les corbes. IX. Divisions generals de les corbes dels cinc primers ordres. X. Punts singulars; punts múltiples, punts d'inflexió i de "serpentement" [punts d'inflexió de sinusoides]. XI. El mètode de les tangents: Punts d'inflexió, les més grans i les més petites abscisses i ordenades. XII. De la curvatura de les línies corbes en els seus diferents punts. XIII. Les diferents espècies de punts múltiples que poden tenir les corbes dels sis primers ordres.

També va ser, per desig exprés de Johann Bernoulli, l'editor de les seves obres completes, [40].

El 1797 publica el llibre *Théorie de fonctions analytiques*, [351], la segona part del qual es titula *Applications de la théorie des fonctions à la géométrie*. Consta de catorze capítols, que van de la pàgina 165 a la 310. Els quatre primers estan dedicats al contacte entre corbes planes.

Destaquem el contingut dels capítols 7, 8 i 9.

VII. "Théorie du contact des courbes à double courbure, des centres de courbure, et du lieu de ces centres. Des développées des courbes à double courbure. Quadrature et rectification de ces courbes".

VIII. "Des surfaces courbes et de leurs plans tangents. Théorie du contact des surfaces courbes. Des contactes des différents ordres."

IX. "Des sphères osculatrices. Des lignes de plus grande et de moindre coubure. Propriétés de ces lignes."

El Capítol VIII acaba dient (p. 242):"[...] il suit qu'il est impossible de trouver en géneral une sphère osculatrice d'une surface, comme on trouve le cercle osculateur d'une courbe."[10] Prèviament ha definit contacte d'ordre dos entre superfícies i esfera osculatriu com la que té contacte d'ordre dos en el punt de tangència.

El capítol IX comença dient: "Nous venons de voir que parmi toutes les sphères touchantes, il ne peut y en avoir aucune qui devienne osculatrice de la surface, mais on peut toujours déterminer celle qui sera osculatrice d'une courbe quelconque tracée sur la même surface."

Estudia llavors les corbes sobre la superfície que tenen esfera osculatriu de radi màxim o mínim, introduint així les línies de curvatura, i demostrant que aquestes es tallen ortogonalment en cada punt.

I fa essencialment el que es coneix com teorema de Monge[11], concretament a la pàgina 248 diu: "les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure," i a la 249 dóna prioritat a Monge: "Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année 1760, les tomes IX et X des

[10]Si dues superfícies tenen un contacte d'ordre dos en un punt, en aquest punt coincideixen les primeres i segones derivades i com les curvatures principals es poden calcular a partir de les derivades segones, i aquestes curvatures són iguals sobre l'esfera, també haurien de ser iguals a la superfície.

[11]El treball de Monge on apareixen les línies de curvatura, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [435], és de 1781.

Mémoires présentés 'l'Académie des Sciences, et l' *Application de l'Analyse à la Géométrie*, par M. Monge."[12]

El 1798 va publicar una nota sobre triangles esfèrics: *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques*, [350].

[12]Probablement es refereix al treball d'Euler [271], i als de Monge [434], [440]. Però aquest treball d'Euler és de 1767 i no de 1760. I no conec res de Monge de 1760, que tenia llavors 14 anys.

Capítol 6

Gaspard Monge (1746-1818)

Se'l pot considerar, juntament amb Gauss, com el fundador de la geometria diferencial de corbes i superfícies. Veiem uns pocs trets biogràfics extrets del llibre de René Taton *L'oeuvre scientifique de Monge*, [552]. Trobareu més detalls sobre la vida, obra, deixebles i continuadors de Monge a la nota **61** de Struik, pàgina 254. Vegeu també la Biografia de Monge que François Arago va llegir a l'Académie de Sciences el 1846, [19], i l'article de Sergescu que va escriure el 1946 en motiu del bicentenari del naixement de Monge, [529].

Figura 6.1: *Gaspard Monge.*

També els articles de José J. Etayo *Las bases de la Geometría Diferencial*, [264], i de Bruno Belhoste *Gaspard Monge: Urgences revolutionnaires et utopie*, [23], donen una idea general de Monge i els seus deixebles.

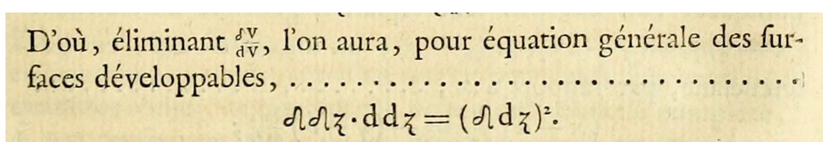
També és molt interessant *Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure*, de Rémi Langevin [375].

Però el treball sobre la vida de Monge escrit des de més a prop és el de Dupin *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, de 1819, [236]. Després d'una primera part biogràfica conté els capítols següents: *Géométrie pure et descriptive, Géométrie analytique,* *Géométrie appliquée aux arts, Géométrie appliquée à la méchanique, Physique: Attraction moléculaire, Optique, Météorologie, Technologie: Feutrage, Chimie générale, Arts chimiques: Métallurgie, Économie domestique: Frabrication des fromages de Lodézan, Ouvrages et Mémoires publiés par G. Monge, Monument à eriger en honneur de Monge, Liste de souscripteurs.* Com veieu hi podeu trobar la llista exhaustiva de les publicacions de Monge i els seus diversos camps d'interès, incloent els formatges!

Gaspard Monge neix el 9 de maig de 1746 a Beaune. El 1762 acaba els estudis de filosofia, física i matemàtiques a Beaune. El 1764 coneix el coronel de Vignau, segon comandant de l'École Royale du Génie de Mézières, que li ofereix d'anar a Mézières.

Per tal de resoldre problemes pràctics de fortificacions inventa la *geometria descriptiva.*

El 22 de gener de 1769 Monge va escriure a l'abat Charles Bossut explicant-li que estava escrivint sobre "développées" de corbes de doble curvatura. El Juny va aparèixer un sumari dels seus resultats al *Journal Encyclopédique*, editat a Bouillon per Pierre Rousseau, que es considera com la primera publicació de Monge[13]. El treball complet es va sotmetre a l'Académie des Sciences de París l'Octobre de 1770 i es va llegir davant l'Acadèmia l'Agost de 1771, però no es va publicar[14] fins el 1785 amb el títol *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, [440].


D'où, éliminant $\frac{\delta V}{dV}$, l'on aura, pour équation générale des surfaces développables, ...

$$\delta\delta z \cdot ddz = (\delta dz)^2.$$

Figura 6.2: *Equació de les desenvolupables*

En el treball *Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes*, [434], publicat el 1780 però presentat el 1775, estudia propietats de superfícies desenvolupables, amb *une applicaction à la théorie des ombres et des pénombres.* Dóna l'avui tant coneguda equació del pla tangent en funció de derivades parcials, que denota per p i q, notació que ha perdurat. I l'equació diferencial de les desenvolupables, $rt - s^2 = 0$, que escriu com es veu a la figura

[13]Vegeu l'article de René Taton *La première note mathématique de Gaspard Monge*, [553], on es reprodueix aquest escrit.

[14]Hi ha diverses teories d'aquest gran retard. La versió a "Divers Savants" de [440] no l'he pogut trobar. Però apareix a les *Applications,* [452].

6.2.

En el treball *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [435], publicat el 1781 però presentat el 1776[15], estudia la teoria de *déblais* i de *remblais* (runes i terraplens)[16]. Parlant del transport de terres i materials arriba a completar la teoria Euleriana de superfícies, introduint les línies de curvatura, les normals desenvolupables i les superfícies focals. Vegeu la nota **108** de Struik, pàgina 258.

El 1780 és elegit membre de l'Académie des Sciences, en substitució de Vandermonde, cosa que li exigeix passar uns cinc mesos l'any a París. Finalment deixa Mézières a finals de 1784. D'aquesta època són els treballs *Sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires*, [436], on es limita a donar a la primera pàgina un mètode per resoldre equacions diferencials i aplicar-lo a diverses situacions com resoldre a la típica equació de les superfícies minimals

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

que atribueix a M. le Chevalier de Borda, a trobar línies de curvatura, etc; i *Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*, [438], treball aquest molt extens on torna a integrar l'equació diferencial de les superfícies minimals, recordant novament a M. le Chevalier de Borda. El mètode d'integració de Monge és millorat més tard per Legendre a *Mémoire sur l'integration de quelques équations aux différences partielles*, [380], on també corregeix alguns errors comesos per Monge. També estudia la generació de superfícies publicant essencialment la mateixa memòria *Sur l'expression analytique de la génération des surfaces* a Turin, [439], i a París [437].

A finals de 1792 és elegit, per l'Assemblea, Ministre de la Marina, càrrec que ostentarà només fins l'abril de 1793. El setembre de 1793 és encarregat, juntament amb Vandermonde i Berthollet, d'organitzar la fabricació de l'acer, per tal d'accelerar la fabricació d'armes.

---

[15]Diu Étienne Ghys ([299]): " Une première version du mémoire, malheureusement perdue, est lue à l?Académie des sciences par Monge les 27 janvier et 7 février 1776 [1]. Condorcet, alors secrétaire perpétuel, en propose la publication. Pour une raison inconnue, Monge tarde à soumettre son manuscrit ; il semble n'avoir jamais été préoccupé par la publication rapide de ses résultats. Une deuxième version est lue le 28 mars 1781 et un mémoire de quarante pages est finalement publié en 1784".

[16]Diu Monge: "Lorsqu'on doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de Déblais au volume des terres que l'on doit transporter, et le nom de Remblai à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport."

Figura 6.3: *École Polytechnique, de 1805 a 1976.*

L'onze de març de 1794[17] el *Comité de salut pública* crea una comissió formada per Jacques-Éli Lamblardie, Gaspard Monge i Lazare Carnot amb la missió d'organitzar una "École central de travaux publics". Finalment s'inaugura el 21 de desembre amb seu al Palais Bourbon. L'1 de setembre de 1795 l'Escola canvia de nom, passa a dir-se *École Polytechnique* i s'ubica a l'hôtel de Lassay. Es considera Monge com el seu principal fundador i impulsor. La seva experiència de vint anys a École Royale du Génie de Mézières[18] va ser fonamental.

Monge va ser l'ànima de l'École. En va ser director de 1796 a 1799. Va ser un dels inspiradors del *Journal de l'École Polytechnique*[19]. Vivia rodejat dels seus alumnes, a qui no dubtava en ajudar en tot el que podia, inclús oposant-se a l'Emperador. Avui dia és Universalment reconegut com un gran professor.

El primer article del primer volum del *Journal*, el 1794, és de Monge i es titula *Stéréotomie*, [441]. La Estereotomia és l'art de tallar i acoblar les peces de pedra o fusta, per tal de construir elements arquitectònics com ara arcs, mènsules, trams d'escales, etc.

Les primeres tres línies diuen

> "La géométrie descriptive est l'art de représenter sur des feuilles de dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse."

[17] 21 ventôse, an II, amb la notació de l'època. El cop d'estat de Napoleó va ser el 1799.

[18] L'Escola d'Enginyers de Mézières va ser fundada el 1748 pel cavaller de Chastillon, per tal de formar enginyers militars experts en fortificacions. Va agafar de seguida gran reputació. Les matemàtiques i la física eren ensenyades pels prestigiosos professors i abats Bossut i Nollet.

[19] A `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v/date.r=journal+ecole` podeu trobar els volums entre els anys 1794 i 1938.

Els apunts de classe de Monge apareixen en diverses notes en els primers quaderns del *Journal*, signades per Eisenman, amb el nom genèric de Stéréotomie, [249]. Tracta el tall de pedres, ombres, perspectives, etc.

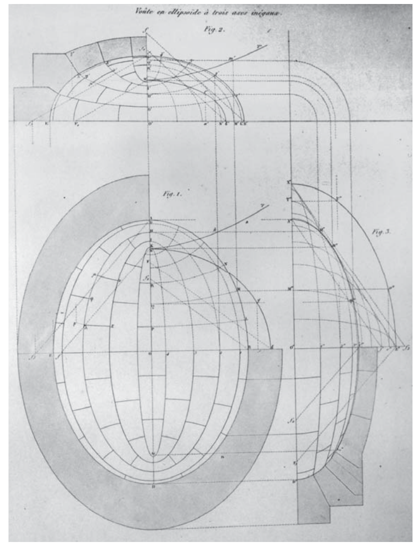


Figura 6.4: *Dovelles sobre el·lipsoide.*

El 1795 publica: *Les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoide*, [442]. Ja tenia les equacions generals de les línies de curvatura, que havia estudiat a [435]. Quan reprodueix els treballs sobre les línies de curvatura de l'el·lipsoide a la secció XVI de [452] utilitza les fórmules de les línies de curvatura que ha donat a la secció XV, titulada *Des deux courbures d'une surface courbe*.

Aquest tema no arriba a Anglaterra fins el 1824, amb el treball de Lardner *An investigation of the lines of curvature of Ellipsoides*, [377], com explica J. E. Hill a *Bibliography of surfaces and twisted curves*, [321].

La idea és intentar fer un arc de pedra, com ara una porta, però que la corba suport no sigui un arc de circumferència sinó un arc, per exemple d'el·lipse. El picapedrer ha de tallar les pedres que van a sobre d'aquest arc de manera que s'acoblin bé entre elles, i els picapedrers piquen en línies rectes, de manera que ja es veu que la pedra ha d'estar tallada com una superfície reglada, però el que no és tant evident és que hagi de ser també desenvolupable.

Mireu l'article de J. Sakarovitch *Gaspard Monge founder of "Constructive Geometry"*, [522], on es reprodueix la figura 6.4, que atribueix a Leroy, 1844[20]. Es veu la volta el·lipsoidal amb les pedres superiors o dovelles ensamblades entre elles perpendicularment a la superfície que les aguanta.

[20]El llibre *IV* del *Traité de stéréotomie* de Leroy (1780-1854), [389], es diu *Coupe des Pierres*, i té una secció que es titula *Voûte en ellipsoïde à trois axes inégaux. Emploi des lignes de courbure.* El dibuix que reprodueix Sakarovitch és la planxa 44 de [389].

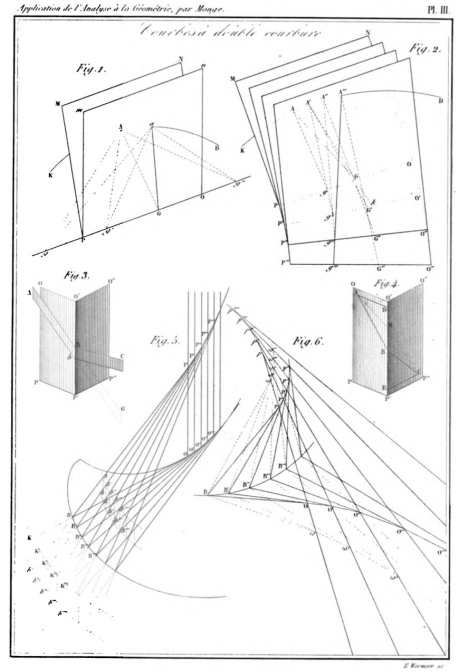


Figura 6.5: *Dibuixos de Monge.*

Monge defineix doncs les línies de curvatura d'una superfície com aquelles línies sobre la superfície tals que les rectes normals a la superfície en els punts d'aquesta corba formen una superfície desenvolupable, vegeu el Teorema de Monge a la pàgina 56.

El 1796 va a Italia a robar, perdó, hi va com a membre d'una comissió que ha de recollir "les monuments d'art et de science que les traités de paix accordaient aux armées françaises victorieuses". Fa amistat amb Napoleó, qui li insisteix fortament perquè l'acompanyi a la campanya d'Egipte. Es troba amb Napoleó a Malta el 9 de juny de 1798. Un cop a Egipte va amb Napoleó fins Ramanieh, on es separen i Monge remunta el Nil amb Berthollet. Són atacats però salvats finalment per les tropes franceses. Posteriorment Napoleó crea l'Institut d'Egipte i li confia la presidència a Monge. Pren part també a l'expedició a Siria, però es posa malalt i torna a París amb Napoleó l'octubre de 1799. El desembre del mateix any és nomenat Senador.

El 1801 es publiquen les *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie à l'usage de l'École Polytechnique*, [444], però les primeres notes amb aquest nom per als estudiants de l'École Polytechnique són de 1795. En una nota de 1799, *Des courbes à double courbure*, [453], es complementen qüestions sobre les corbes de doble curvatura que falten a les Feuilles. Aquest article acaba amb una nota a peu de pàgina d'Hachette[21] que diu: "Cet écrit pourra

[21] Jean Nicolas Pierre Hachette va ser un dels més importants impulsors del *Journal de l'École Polytechnique*. Va col.laborar estretament amb Monge sobre tot en l'estudi i aplicacions de la geometria descriptiva. Va estudiar els radis de curvatura de les superfícies a *De quelques propriétés des rayons de courbure d'une surface*, [316]. Aquest treball es pot trobar en la recopilació que de les cartes a l'Ecole Polytechnique va fer el propi Hachette entre 1804 i 1808 amb el títol *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, publicat per Chez J. Klostermann, Libraire de l'École impériale Polytechnique, rue du Jardient, n.13 (jo he consultat la segona edició, de 1813). El 1816 es va interessar per corbes donades

suppléer à ce qui manque sur les Courbes à double courbure dans les feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie, que le C.^{en} Monge a fait imprimer pour les élèves de l'École plytechnique." Cosa que demostra que tots dos, Monge i Hachette, anàvem treballant sobre el tema i millorant els continguts.

Els alumnes anomenaven aquest llibre "Le gros Monge". Posteriors edicions, fetes a partir de 1807, portaven per títol *Application de l'Analyse a la Géométrie*. Liouville va tenir cura de la cinquena edició, que va corregir i comentar, vegeu [452]. La figura 6.5 és una pàgina d'aquesta edició. A la pàgina 49 estudiem el full XV.

El 1802 publica *Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère*, [445] on introdueix el nom de corba *característica* dient (pàgina 47):

> "C'est à cette courbe, dont toutes les surfaces soumises à la même génération sont pour ainsi dire composées[22], qu'on aurait dû consacrer le nom de *génératrice*; mais ce mot est déjà employé dans un sens qui n'est pas toujours le même que celui-ci: j'ai donc cru nécessaire de me servir d'un mot nouveau, et j'ai nommé cette courbe *caractéristique*."

Veu, entre altres coses, que una superfície en les hipòtesis del títol és tal que l'esfera és el lloc geomètric dels centres d'una de les seves curvatures. Amplia aquest tipus de resultats canviant l'esfera per una superfície cònica arbitrària a [446], publicat just a continuació de l'anterior.

El mateix any canvia l'esfera pel con i estudia el mateix problema a *Sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire*, [447].

El 1805 Napoleó dóna a *l'École Polytechnique* un estatus militar i la situa a la muntanya de Santa Genoveva a París.

El mateix any apareix el llibre de Monge i Hachette, *Application de l'algébre a la géométrie*, [455], que recull diversos treballs de Monge. De fet, ja el 1802 havien publicat un article amb el mateix nom al Journal de l'École Polytechnique, [454], base del llibre posterior. Abans de començar

---

com intersecció de dues superfícies a *Sur les plans osculateurs et les rayons de courbure des lignes planes ou à double courbure, qui résultent de l'intersection de deux surfaces*, [317].

[22]Abans ha posat, com exemple d'aquesta corba, els meridians de les superfícies de revolució.

diu (observeu les dates segons el nou calendari imposat per la Revolució Francesa):

AVERTISSEMENT

> "Lés Éleves de l'École Polytechnique ont trouvé jusqu'a present le précis des leçons sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie, dans les Feuilles d'analyse de *Monge*, et le Mémoire sur les surfaces du second degré, imprimé en l'an 10 dans le Journal de l'École. Tous les exemplaires de ce Mémoire, tirés à part lors de la publication du Journal, ayant été distribués, MM. MONGE at HACHETTE on proposé de le remplacer par un ouvrage ayant pour titre: *Surfaces du premier et second degré*, le Conseil d'instruction, dans sa séance du 19 pluviose an 13, a arrété[23] que cet Ouvrage seroit imprimé pour l'École."

Monge va començar a parlar als seus alumnes de *Geometria analítica* per referir-se al que fins el moment s'anomenava simplement *àlgebra aplicada a la geometria*, com el títol del seu llibre. Lacroix, en el seu *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, [347], per referir-se als treballs de Monge on aquest utilitza derivades parcials per generar superfícies, diu[24]: *Voyez sa Géométrie Analytique*, i per aquest motiu es considera aquest llibre de Lacroix com el primer lloc on apareix aquesta expressió de *Geometria Analítica*.

El 1806 publica dos llargs articles consecutius al *Journal de l'École Polytechnique*. Els títols són explícits del seu contingut, el primer es titula *Sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque*, [449], i toca el mateix tema que en els anteriors [445] i [447], i el segon *De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque*, [448].

El 1807 envia a l'École Polytechnique una breu solució del problema de trobar una superfície desenvolupable que tingui com aresta de retrocés una corba donada, que Hachette recull a *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, [450]. També d'aquest any és la nota conjunta amb Hachette *Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes*, [456]. Defineixen punt brillant com el punt de la superfície

[23] *arrété:* Ha donat permís.

[24] Pàgina 504 de la quarta edició de Bachelier de 1828.

que reflecteix un raig lluminós cap a l'ull de l'espectador. No hi ha cap fórmula, només consideracions geomètriques.

El 1809 deixa l'École Polytechnique, però no la relació científica ja que el 1810 envia una nota a l'École titulada, *Sur les Équations différentielles des Courbes du second degré*, [451]. Diu que plantejar-se aquest problema per a corbes de grau arbitrpari li sembla 'ùne enterprise inutile". Però, que per la seva importància, val la pena fer-ho per a les corbes de segon grau. Com aquestes s'ecriuen

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0$$

posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{dx} = s, \quad \frac{ds}{dx} = t,$$

obté

$$9q^2t - 45qrs + 40r^3 = 0$$

com equació diferencial de totes les corbes de segon grau.

El 1811 es publica *Géométrie descriptive*, [443], on hi ha un capítol titulat *Des plans tangents et des normales aux surfaces courbes*, en el que es parla de canons, de l'enemic, etc.

És molt curiós l'esperit patriòtic que d'estila la introducció.

> "Pour tirer la nation fraçaise de la dépendance oú elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut premièrement diriger l'education nationale vers la connaisance des objets qui exigent de l'exactitud [...]."
>
> "Il faut, en second lieu, rendre populaire la connaisance d'un gran nombre de phénomènes naturels, indispensable aux progrès de l'industrie, et profiter, pour l'avancement de l'instruction générale de la nation, de cette circonstance heureuse dans laquelle elle se trouve , d'avoir à sa disposition les principales ressources qui lui sont nécessaires."
>
> "[...] et, à cet égard, il aut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères."
>
> [I ara un tall sobre rics i pobres! La Geometria Descriptiva com a solució de tots el mals!!]

> "C'est d'abord en familiarisant avec l'usage de la Géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile et pour eux et pour l'État, que ceux mêmes qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour donner un plus grand prix à leur travail."

El 1813 intenta organitzar la resistència contra els invasors (Austria, Rusia i Prusia). El febrer de 1814, dos mesos abans de que Napoleó fos desterrat a Elba, pel tractat de Fontainebleau, destrueix part dels seus records de la Revolució i abandona París.

Quan torna a París el 1816 veu destruir la seva obra: l'École Polytechnnique és primer suprimida i desprès reorganitzada, és exclòs de l'Institut, etc. Mor el 28 de juliol de 1818.

Mémoire sur les développées

A l'article *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, [440], apareix implícitament la *torsió*, concepte definitivament establert posteriorment per Lancret a *Mémoire sur les courbes a double courbure*, [372], però usat ja per Lacroix a [347], vegeu la pàgina 75. L'anomenaven segona flexió o segona curvatura. El nom de torsió prové de Louis L. Vallée, matemàtic que estudiem a la pàgina 96, vegeu també la nota **22** de Struik, pàgina 251. És en aquest treball de Monge on s'estableix clarament la noció de curvatura d'una corba a l'espai. Diu Girbau a [309]: "[Monge] comença observant que les normals en un punt no singular d'una corba a l'espai són en un pla. En aquest pla es troba una recta que ell anomena "eix", que és el límit de la intersecció d'aquest pla amb el pla corresponent a un altre punt de la corba, infinitament pròxim. És a dir, cada punt P de la corba té el seu "eix". Si hom traça una perpendicular des de P a l'eix corresponent a P i anomenem Q el peu d'aquesta perpendicular, Q serà el centre de curvatura, PQ el radi de curvatura, i la inversa de la longitud PQ, la curvatura."

Interpretem aquest paràgraf amb notació moderna. Sigui $P = (0, 0, 0)$ i suposem donada una corba $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = P$ i tal que la referència de Frenet en P és $\vec{t} = (0, 0, 1)$, $\vec{n} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$. Així el pla normal a la corba en P és $z = 0$. El pla normal en un punt pròxim $\gamma(s)$ de la corba és

$$\langle \vec{x} - \gamma(s), \vec{t}(s) \rangle = 0, \quad s \text{ paràmetre arc.}$$

Quan els clàssics diuen *tallar plans infinitament pròxims* volen dir tallar un dels plans fixat amb el pla que s'obté parametritzant els demés plans respecte d'un paràmetre i derivant respecte d'aquest paràmetre. En el nostre cas vol dir tallar $z = 0$ amb el pla que obtenim derivant l'equació anterior

$$\langle \vec{x} - \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle + \langle \vec{x} - \gamma(s), k(s)\vec{n}(s) \rangle = 0.$$

en $s = 0$:

$$\langle \vec{x} - \vec{t}(0), \vec{t}(0) \rangle + \langle \vec{x} - \gamma(0), k(0)\vec{n}(0) \rangle = 0.$$

Equivalentment

$$\langle \vec{x} - (0,0,1), (0,0,1) \rangle + \langle \vec{x} - (0,0,0), k(0)(1,0,0) \rangle = 0.$$

És a dir,

$$z - 1 + kx = 0$$

Al tallar amb $z = 0$ tenim la recta $x = \rho$ (ρ = radi de curvatura). La distància PQ de que parla Monge és justament ρ, com volíem.

Aquest argument que acabem de fer en el punt $s = 0$ el podem fer exactament igual per a tot s. Per calcular l'envolupant a la família de plans normals a la corba $\gamma(s)$ en el punt $\gamma(s)$ posem

$$\langle x - \gamma(s), \vec{t}(s) \rangle = 0,$$

i derivem. Utilitzant Frenet i aquesta mateixa expressió tenim

$$\langle x - \gamma(s), \vec{n}(s) \rangle = \rho(s).$$

Tornant a derivar

$$\langle x - \gamma(s), \tau(s)\vec{b}(s) \rangle = \rho'(s).$$

La corba[25]

$$\gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s) + \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}\vec{b}(s)$$

és el lloc geomètric dels centres de les esferes osculadores. És a dir, esferes que passen per $\gamma(s)$ amb un contacte d'ordre 3. En particular el radi de l'esfera osculatriu és

$$R(s) = \sqrt{\rho(s)^2 + (\frac{\rho'(s)}{\tau(s)})^2}.$$

[25] Vegeu la nota **31** de Struik, pàgina 251.

La recta (fixat s i parametritzada per u)

$$\gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s) + u\,\vec{b}(s)$$

és l'eix de Monge, i clarament una recta per $\gamma(s)$ perpendicular a l'eix el talla en el centre de curvatura $\gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s)$, com deia Monge. És l'*eix de regressió* de la família de plans normals.

La superfície reglada

$$\varphi(s,u) = \gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s) + u\,\vec{b}(s)$$

es diu *superfície polar* associada a la corba $\gamma(s)$. És la superfície envolupant de la família de plans normals. Això vol dir que el pla tangent a aquesta superfície en qualsevol dels seus punts coincideix amb un dels plans de la família de plans normals. Monge també prova que és desenvolupable. Concretament *la superfície polar és la desenvolupable tangencial* de la corba formada pels centres de les esferes osculatrius,[26]

$$\sigma(s) = \gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s) + \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}\,\vec{b}(s).$$

La corba les tangents de la qual generen la superfície anomenada *desenvolupable tangencial* és anomenada per Monge *arête de rebroussement*. En català seria *aresta cúspidal* o *aresta de retrocés*. Els punts d'aquesta aresta no formen part de la superfície (són punts singulars), que queda doncs dividida en dues parts.

Un altre punt que es proposa estudiar Monge a *Mémoire sur les développés* és precisament l'existència d'infinites *développées* per

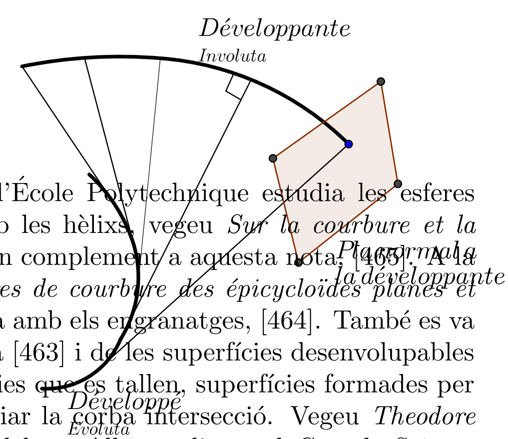


Figura 6.6: *Développante i développé.*

[26]Théodore Olivier (1793-1853), alumne de l'École Polytechnique estudia les esferes osculatrius i l'ordre de contacte d'aquestes amb les hèlixs, vegeu *Sur la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure*, [466], i un complement a aquesta nota, [465]. A la seva tesi, *Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques*, relaciona les línies de doble curvatura amb els engranatges, [464]. També es va preocupar de les epicicloides planes i esfèriques a [463] i de les superfícies desenvolupables a [462]. És conegut pels seus models de superfícies que es tallen, superfícies formades per cordes i metall, que en moure's permeten estudiar la corba intersecció. Vegeu *Theodore Olivier Three-Dimensional Geometry String Models*, un àlbum editat pel *Canada Science and Technology Museum*.

a les corbes guerxes (la *développée* d'una corba C és una altra corba C^* tal que C està continguda a la superfície tangent de C^* i la tangent a C^* pertany al pla normal a C en el punt corresponent). Desenrotllant un cordill prèviament embolicat a C^*, mantenint-lo en la superfície de les tangents, obtenim C. També es diu que C^* és la *evoluta* de C. I que C és la *développante* o *involuta* de C^*.

Monge es proposa

> "de démontrer dans ce Mémoire qu'une courbe, plane ou à double curvature a une infinité de développées, toutes a double courbure, [...] et de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante."

Donada una corba $x(s)$ es demana trobar les corbes $y(s)$ (les développées) tals que les tangents a $y(s)$ pertanyen al pla normal de $x(s)$. És a dir, es demana trobar les *evolutes* de $x(s)$. Una corba que si la desenvolupes pel mètode del cordill dóna $x(s)$. Vegeu la nota **48** de Struik, pàgina 253.

En llenguatge actual tindríem[27]: Donada $x(s)$ busquem $y(s)$ tal que $y'(s)$ pertanyi al pla normal de $x(s)$. Equivalentment $x(s)$ talla otogonalment les tangents de $y(s)$.

Posem

$$y(s) = x(s) + q(s)\vec{a}(s),$$

on $\vec{a}(s) = \frac{y'(s)}{|y'(s)|}$. Denotem $\beta(s) = |y'(s)|$. Derivant tenim ($\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$)

$$\vec{t} + q'\vec{a} + q\vec{a}' = \beta\vec{a}.$$

Totes les igualtats en el punt s. Com que $\vec{a} \cdot \vec{a'} = \vec{t} \cdot \vec{a} = 0$, tenim

$$\vec{t} + q\vec{a}' = 0. \tag{6.1}$$

[27]Vegeu E. Kreyszig, *Differential Geometry*, p.66.

Per a cada valor del paràmetre s tenim

$$\vec{a} = \sin\alpha\,\vec{n} + \cos\alpha\,\vec{b}.$$

Derivant i substituint a (6.1) obtenim

$$\vec{t} + q[(-k\vec{t} + \tau\vec{b})\sin\alpha + \alpha'\ \cos\alpha\,\vec{n} - \tau\ \cos\alpha\,\vec{n} - \alpha'\ \sin\alpha\,\vec{b}] = 0.$$

Això implica (coeficient de $\vec{t}$)

$$q\sin\alpha = \rho,$$

i (coeficients de $\vec{n}$ i $\vec{b}$)

$$(\alpha' - \tau)\cos\alpha = 0, \qquad (\alpha' - \tau)\sin\alpha = 0.$$

Aquestes dues igualtats impliquen $\alpha' = \tau$, és adir

$$\alpha(s) = \int_0^s \tau(u)du + c,$$

on c és una constant.

Finalment doncs

$$y(s) = x(s) + \rho(s)[\vec{n}(s) + \cot\alpha(s)\ \vec{b}(s)], \qquad \alpha(s) = \int_0^\tau (u)du + c. \quad (6.2)$$

Cada valor de c correspon a una de les infinites evolutes de la corba $x(s)$. Si $\tau = 0$, una de les evolutes és plana i les altres són hèlixs sobre el cilindre ortogonal al pla de la corba.

Es pot veure fàcilment, vegeu [491], que si considerem un cordill de longitud igual a la distància L entre $x(0)$ i $y(0)$, on $x(s)$ i $y(s)$ són les corbes donades per l'equació (6.2), i el el col·loquem sobre la corba $y(s)$ a partir de $y(0)$ i a continuació el despleguem des des seu final obtenim la corba $x(s)$.

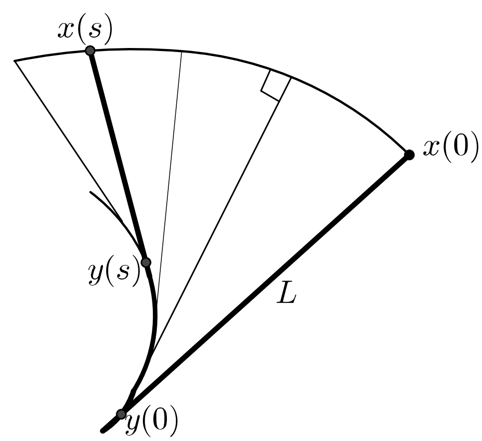


Figura 6.7: *Mètode del cordill.*

Monge, a la secció XXVIII del mateix article, es planteja també recuperar la corba devéloppant $x(s)$ a partir del coneixement de la superfície polar o superfície de les développées. Per a això fa la observació de que gràcies als diferents valors de la constant c que apareix a l'equació (6.2), justament la que fa que cada corba guerxa tingui infinites développées, si posem un cordill tens des d'un punt donat B fins a un punt de la superfície i la resta del cordill el posem de qualsevol manera sobre la superfície (si el poséssim tangent a la développée en el punt de tangència en desenvolupar-lo tindríem la corba buscada) i ara fem el mateix amb un altra cordill des del mateix punt B a un altre punt de la superfície i la resta del cordill el posem també de qualsevol manera sobre la superfície (si el poséssim tangent a la développée en el punt de tangència en desenvolupar-lo tindríem la corba buscada) i ara desenvolupem els dos cordills, amb els punts de tangència fixos, i anem forçant les coses [*ces fils se contre-balanceront et empêcheront*] per tal de que les dévelopants coincideixin (que seria el cas si els cordill els haguéssim desplegat sobre les développées) anirem obtenint la corba per B que té la superfície donada com superfície de les développants. S'ajuda del la figura que hem adjuntat.

Feuilles d'Analyse

En aquesta secció estudiarem les línies de curvatura tal com ho va fer Monge al Full XV, de les seves *Feuilles d'Analyse*, [444], titulat *Des deux courbures d'une surface courbe*.

La idea de Monge és tant simple com intentar copiar per a superfícies la construcció de l'envolvent de les normals considerada per a corbes planes: l'evoluta d'una corba es pot considerar com la corba que s'obté en tallar normals a la corba donada en punts *infinitament pròxims*. Quan els clàssics parlen de punts infinitament pròxims, com ara en el cas de les normals que estem comentant, volen dir tallar la normal a la corba $\alpha(s)$ en el punt $\alpha(0)$ amb la normal a la corba en el punt $\alpha(\Delta s)$, i a continuació passar al límit quan Δs tendeix a zero.

El problema és que si considerem dues normals a una superfície en punts infinitament pròxims pot passar que aquestes dues normals no es tallin, ja que dues rectes a l'espai normalment no es tallen.

També la idea d'infinitament pròxim s'ha de retocar en el sentit que ara tenim moltes maneres diferents d'acostar-nos a un punt donat. El mateix problema exactament que hi ha quan passem de l'estudi de derivades de funcions d'una variable a funcions de dues variables.

Tot això ho resoldrem de la manera següent. Suposem una superfície donada per $\varphi(x,y) = (x, y, z(x,y))$. Fixem un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$, $(z_0 = z(x_0, y_0))$. La recta normal a la superfície en P està donada per la intersecció dels dos plans

$$(x - x_0) + (z - z_0)p = 0 \tag{6.3}$$
$$(y - y_0) + (z - z_0)q = 0 \tag{6.4}$$

on[28]

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Recordem que el vector normal N en un punt de la superfície de coordenades (x_0, y_0) està donat per

$$N = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}(-p, -q, 1).$$

Per tant, N és ortogonal als vectors directors dels dos plans considerats, $(1, 0, p)$ i $(0, 1, q)$ respectivament.

Considerem ara un punt Q sobre la superfície *infinitament pròxim* a P. Posem $Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. La recta normal a la superfície per Q està donada per

$$(x - x_0 - \Delta x) + (z - z_0 - \Delta z)(p + \Delta p) = 0, \tag{6.5}$$
$$(y - y_0 - \Delta y) + (z - z_0 - \Delta z)(q + \Delta q) = 0, \tag{6.6}$$

amb

$$\begin{aligned} \Delta z &= p\Delta x + q\Delta y, \\ \Delta p &= r\Delta x + s\Delta y, \\ \Delta q &= s\Delta x + t\Delta y. \end{aligned}$$

[28]Monge introdueix la notació $p = dz/dx$, $q = dz/dy$. La notació $\frac{\partial z}{\partial x}$ és de Jacobi el 1841, vegeu *A Source Book in Mathematics, 1200-1800* de Struik, [549].

Aquí hi ha una mica d'abús de notació ja que p, q, r, s, t denoten les derivades primeres i segones de z en punts intermedis entre (x_0, y_0) i $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ (estic aplicant el teorema del valor mig). Com que finalment farem tendir els increments a zero, podem pensar que són les derivades primeres i segones de z en (x_0, y_0). En particular aquestes p, q coincidiran amb les ja considerades.

Ara m'aparto una mica del camí de Monge i, per evitar el problema que hem comentat de que rectes de l'espai poden no tallar-se, tallem la recta normal per P primer amb el pla infinitament pròxim (6.5) i a continuació amb el pla infinitament pròxim (6.6).

Intersecció amb (6.5).

Restant (6.3) de (6.5) tenim

$$-\Delta x + (z - z_0)\Delta p - p\Delta z - \Delta z\Delta p = 0. \tag{6.7}$$

Equivalentment

$$z - z_0 = \frac{\Delta x + p\Delta z + \Delta z\Delta p}{\Delta p}. \tag{6.8}$$

Aquesta és la coordenada z del punt de tall. La x i la y d'aquest punt les traiem de (6.3) i (6.4),

$$x - x_0 = -p(z - z_0),$$

$$y - y_0 = -q(z - z_0).$$

Ja tenim doncs les coordenades (x, y, z) del punt de tall.

Abans de passar al límit recordem que la direcció en que ens acostem a (x_0, y_0) és important. Suposem doncs que tenim una petita corba $y = y(x)$ en el pla $z = 0$, que uneix els punts (x_0, y_0) i $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Dividint numerador i denominador de (6.8) per Δx i fent $\Delta x \to 0$ obtenim la coordenada z del punt de tall entre la recta normal per P i un pla que conté la normal en un punt infinitament pròxim.

Concretament, denotant Z aquest valor límit, tenim

$$Z = z_0 + \frac{1 + p(p + qy')}{r + sy'}, \tag{6.9}$$

on

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Hem utilitzat que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}\, \Delta p = 0.$$

Intersecció amb (6.6).

Tallem ara la recta normal per P amb el pla (6.6).

Restant (6.3) de (6.6) tenim

$$-\Delta y + (z - z_0)\Delta q - q\Delta z - \Delta z \Delta q = 0. \tag{6.10}$$

Equivalentment

$$z - z_0 = \frac{\Delta y + q\Delta z + \Delta z \Delta q}{\Delta q}. \tag{6.11}$$

Aquesta és la coordenada z d'aquest nou punt de tall. La x i la y d'aquest nou punt les traiem de (6.3) i (6.4),

$$x - x_0 = -p(z - z_0),$$

$$y - y_0 = -q(z - z_0).$$

Ja tenim doncs les coordenades (x, y, z) del segon punt de tall.

Dividint numerador i denominador de (6.11) per Δx i fent $\Delta x \longrightarrow 0$ obtenim la coordenada z del punt de tall entre la recta normal per P i un pla que conté la normal en un punt infinitament pròxim.

Concretament, denotant $\bar{Z}$ aquest valor límit, tenim

$$\bar{Z} = z_0 + \frac{y' + q(p + qy')}{s + ty'}.$$

Hem utilitzat que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}\, \Delta q = 0.$$

Si volem que *rectes normals en punts infinitament pròxims es tallin* hem d'imposar $Z = \bar{Z}$. És a dir,

$$\frac{1 + p(p + qy')}{r + sy'} = \frac{y' + q(p + qy')}{s + ty'}.$$

Equivalentment

$$(y')^2[s(1+q^2)-pqt]+y'[r(1+q^2)-t(1+p^2)]+rpq-s(1+p^2)=0 \quad (6.12)$$

que és exactament l'equació obtinguda per Monge.

Les rectes normals en punts infinitament pròxims no es tallaran a menys que t'hi acostis amb aquesta pendent.

Si tenim la precaució d'agafar coordenades de manera que P sigui l'origen i el pla tangent en P coincideixi amb $z=0$, llavors $p=q=0$, i tenim[29]

[29]Podem refer els càlculs a partir de les fórmules (6.3), pàgina 50, amb aquesta simplificació i tot queda molt simple. Concretament, ara el punt P que fixem sobre la superfície és el punt $P=(0,0,0)$ i la normal a la superfície en aquest punt és l'eix z que pensem com intersecció del plans $x=0$ i $y=0$. Prenem la corba $\gamma(\tau)$ sobre la superfície donada per $x=\tau, y=y(\tau), z=z(\tau)=z(\tau,y(\tau))$ que passi per P quan $\tau=0$. La recta normal a la superfície en el punt $\gamma(\tau)$ es pot donar com intersecció dels plans

$$\begin{aligned}(x-\tau)+(z-z(\tau))p(\tau) &= 0,\\ (y-\tau)+(z-z(\tau))q(\tau) &= 0,\end{aligned}$$

amb $p(\tau)=\frac{\partial z}{\partial x}(\tau,y(\tau))$, $q(\tau)=\frac{\partial z}{\partial y}(\tau,y(\tau))$. Si tallem aquests dos plans amb la normal per P, és a dir, amb la recta $x=y=0$ obtenim

$$\begin{aligned}z &= \frac{\tau}{p(\tau)}+z(\tau),\\ z &= \frac{y(\tau)}{q(\tau)}+z(\tau).\end{aligned}$$

Si la normal per $\gamma(\tau)$ ha de tallar la normal per P, quan $\tau\to 0$, les dues z de les anteriors equacions han de coincidir. Per tant, aplicant l'Hôpital, la regla de la cadena, i recordant que $p=q=0$, tenim

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau+z(\tau)p(\tau)}{p(\tau)}=\frac{1}{r+sy'}$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{y(\tau)+z(\tau)q(\tau)}{q(\tau)}=\frac{y'}{s+ty'}$$

on, com sempre, $r=z_{xx}, s=z_{xy}, t=z_{yy}$. Igualant les dues fraccions anteriors obtenim directament l'equació (6.13).

Equivalentment, i potser encara més curt, podem tallar la recta normal per $\gamma(\tau)$ amb els plans $x=0$ i $y=0$, i igualar aquests punts quan τ tendeix a zero. Els punts de tall són $(0, y(\tau)-q(\tau)\frac{\tau}{p(\tau)}, z(\tau)+\frac{\tau}{p(\tau)})$ i $(x(\tau)-p(\tau)\frac{y(\tau)}{q(\tau)}, 0, z(\tau)+\frac{y(\tau)}{q(\tau)})$.

Que passa si $s=0$? Per exemple, estudieu per aquest mètode les direccions principals en $(0,0,0)$ de $z=x^2+2y^2$.

$$s(y')^2 + (r - t)y' - s = 0, \tag{6.13}$$

d'on es dedueix trivialment que les *direccions de curvatura principals (les dues solucions d'aquesta equació) són ortogonals*[30]. A més les podem calcular trivialment resolent aquesta equació de segon grau. Però observem que (6.12) és l'equació de les línies de curvatura, en canvi (6.13) només ens serveix per calcular les direccions de curvatura en un punt.

Observem també que l'equació de les línies de curvatura apareix en molts llibres de text com

$$\begin{vmatrix} v'^{\,2} & -u'v' & u'^{\,2} \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

que en el cas particular de que la superfície sigui $z = z(x, y)$ i la corba $y = y(x)$ queda

$$\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1 + p^2 & pq & 1 + q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0,$$

que coincideix amb (6.12).

Càlcul del radi de curvatura. Aprofitem els càlculs anteriors per calcular el radi de curvatura.

Les coordenades $\bar{X}$, $\bar{Y}$, del punt de tall (que té per tercera coordenada la $\bar{Z}$ de (6.9)) estan donades per

$$\bar{X} = x_0 - p(\bar{Z} - z_0),$$

$$\bar{Y} = y_0 - q(\bar{Z} - z_0).$$

Ara calculem $\bar{Z} - z_0$ per un altre mètode. Observem que dividint per Δx i fent tendir Δx a zero a les fórmules (6.7) i (6.10) obtenim respectivament

$$\begin{aligned} -1 + (\bar{Z} - z_0)(r + sy') - p(p + qy') &= 0, \\ -y' + (\bar{Z} - z_0)(s + ty') - q(p + qy') &= 0. \end{aligned}$$

[30]No hem vist que aquestes direccions que hem trobat siguin les direccions de curvatura principals definides com màxims i mínims de les curvatures principals. Ho deixem com exercici.

Aïllant y' a la primera equació i substituint-lo a la segona obtenim

$$\begin{aligned}(\bar{Z}-z_0)^2(rt-s^2) &- (\bar{Z}-z_0)[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t] \\ &+ 1+p^2+q^2=0. \qquad (6.14)\end{aligned}$$

Monge introdueix la notació

$$\begin{aligned} g &= rt-s^2, \\ h &= (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t, \\ k^2 &= 1+p^2+q^2. \end{aligned}$$

de manera que (6.14) s'escriu simplement com

$$g(\bar{Z}-z_0)^2-(\bar{Z}-z_0)h+k^2=0.$$

Així

$$\bar{Z}-z_0=\frac{h\pm\sqrt{h^2-4gk^2}}{2g}.$$

Els dos radis de curvatura principal estan donats per la distància entre (x_0,y_0,z_0) i $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ (tenint en compte el $\pm$ de l'arrel quadrada). És a dir,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\bar{X}-x_0)^2+(\bar{Y}-y_0)^2+(\bar{Z}-z_0)^2} && (6.15) \\ &= k|Z-z_0| && (6.16) \\ &= k\left|\frac{h\pm\sqrt{h^2-4gk^2}}{2g}\right|. && (6.17) \end{aligned}$$

Si fem el truc estàndard de situar-nos a l'origen amb $N=(0,0,1)$, tenim $p=q=0$, i les fórmules pels dos radis de curvatura són simplement

$$R=\frac{r+t\pm\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2(rt-s^2)}.$$

També es poden escriure com

$$R=\frac{2}{r+t\pm\sqrt{(r-t)^2+4s^2}},$$

iguals a les fórmules obtingudes per Meusnier el 1776 a *Mémoire sur la courbure des surfaces*, [428], però aquí introduint les direccions de curvatura principals com direccions tals que les curvatures de les seccions normals en aquestes direccions tenen el seu valor màxim i mínim.

Com $R = k|Z - z_0|$, i amb les coordenades que estem prenent $k = 1$ també es compleix que

$$R = \frac{1}{r + sm},$$

on m està donada per (6.13).

Teorema 6.0.2 (Monge) *Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.*

Demostració.[31] Imaginem una corba sobre una superfície tal que les normals en punts consecutius infinitament pròxims es tallin. Pels comentaris anteriors aquesta corba és una línia de curvatura. Els punts de tall de normals consecutives formen una corba, les tangents de les quals són les normals a la superfície. Per tant la superfície reglada formada per les normals és desenvolupable.

Observem finalment que l'equació (6.15) ens dóna directament l'equació diferencial de les superfícies minimals, ja que aquestes compleixen que els dos radis de curvatura principal són oposats, i això, degut al doble signe de l'arrel quadrada, només es pot donar si $h = 0$, és a dir,

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

equació que, com hem comentat a la pàgina 37, Monge cita i integra als articles [436] i [438]. Obté $p = \alpha q + c$, amb α, c constants tals que $\alpha^2 + c^2 + 1 = 0$ (per tant, complexos).

[31] Monge ho diu així: "Com que cada normal a una superfície corba sempre talla dues altres normals infinitament pròximes situades en dos llocs ortogonals entre si, imaginem que des de la normal al primer punt de la superfície passem a una de les dues normals infinitament pròximes que la tallen i, subseqüentment passem d'aquesta segona normal a la que la interseca a ella, i d'aquesta tercera a la que la interseca a ella, i així sobre tota la superfície. **És evident** que obtenim així una superfície desenvolupable amb les tangents perpendiculars a la superfície, i la intersecció d'aquesta desenvolupable amb la superfície és una corba que els seus elements estan dirigits al llarg d'una de les curvatures de la superfície."

Teorema de Rodrigues a partir del Full XV

El contingut d'aquesta secció no es troba ni a Monge ni a Rodrigues, que jo sàpiga. Només és un exercici per veure com, a partir dels coneixements de Monge, es pot demostrar fàcilment el conegut com teorema d'Olinde Rodrigues. De fet, només dibuixant un triangle es té el resultat (vegeu pàgina 59.)

Teorema 6.0.3 (Rodrigues) *La derivada de la normal en la direcció d'una línia de curvatura té la direcció de la tangent a aquesta línia. I el seu mòdul és la curvatura.*

Primera demostració. Fixem un punt P de la superfície i suposem com abans que $P = (0,0,0)$ i que la normal $\vec{N}$ a la superfície en P és $\vec{N} = (0,0,1)$. La superfície és la gràfica d'una certa funció $z = z(x,y)$.

Considerem la corba sobre la superfície

$$\gamma(x) = (x, mx, z(x, mx))$$

on m és el pendent de la línia de curvatura, que Monge acaba de caracteritzar per l'equació

$$m = \frac{s + tm}{r + sm}$$

on r, s, t són les derivades segones de z en $(0,0)$[32]. Observem $\gamma(0) = P$.

Tal com fa Monge, tallem la recta normal a la superfície per $\gamma(x)$ amb el pla $y = 0$; diem $O(x)$ a aquest punt. Sabem, pels càlculs anteriors de Monge, que quan x tendeix a zeto $O(x)$ tendeix a $O = (0,0,-R)$, on R és el radi de curvatura principal. Recordem que

$$R = \left| \frac{1}{r + sm} \right|.$$

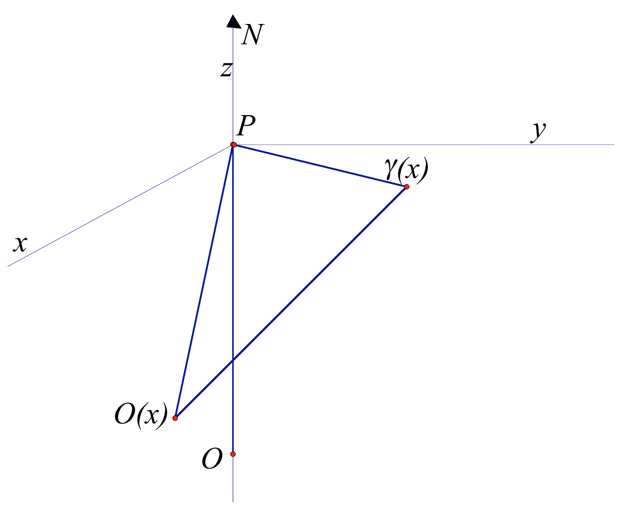


Figura 6.8: *Centre de curvatura.*

[32]Podem reemplaçar γ per qualsevol corba del tipus $(x, y(x), z(x, y(x)))$ amb $y'(0) = m$.

Obtenim
$$O(x) = (x - x\frac{pm}{q}, 0, z + x\frac{m}{q})$$
amb $z = z(x, mx)$, $p = p(x) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, mx)$ i $q = q(x) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, mx)$. Aplicant l'Hôpital tenim
$$\lim_{x\to 0} \frac{mp}{q} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{mx}{q} = \pm R,$$
de manera que (suposem la superfície per sota el pla tangent i per això elegim el signe menys)
$$\lim_{x\to 0} O(x) = (0, 0, -R).$$

Observem que tenim
$$\begin{array}{rcl} R\vec{N} & = & \overrightarrow{OP}, \\ \overrightarrow{O(x)\gamma(x)} & = & \lambda(x)\vec{N}(x), \end{array}$$
on $\vec{N}(x)$ és el vector normal a la superfície en el punt $\gamma(x)$.

Observem que
$$\lambda(x) = -\frac{mx}{q} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$
En particular $\lambda(0) = R$, i denotant $k(x) = 1/\lambda(x)$ tenim
$$\begin{array}{rcl} \vec{N}(x) - \vec{N} & = & k(x)\overrightarrow{O(x)\gamma(x)} - \vec{N} \\ & = & k(x)\overrightarrow{O(x)P} + k(x)\overrightarrow{P\gamma(x)} - \vec{N}. \end{array}$$
Derivant respecte x en $x = 0$ tenim
$$\vec{N}'(0) = k'(0)\overrightarrow{OP} + k(0)\frac{d}{dt}_{t=0}\overrightarrow{O(x)P} + k(0)\frac{d}{dt}_{t=0}\overrightarrow{P\gamma(x)}.$$

Però la suma dels dos primers termes de la dreta és zero, de manera que
$$\vec{N}'(0) = k(0)\vec{\gamma}'(0),$$
com volíem demostrar.

Per veure que
$$k'(0)\overrightarrow{OP} + k(0)\frac{d}{dt}_{t=0}\overrightarrow{O(x)P} = \vec{0},$$
observem que
$$\overrightarrow{O(x)P} = (x(1-\frac{pm}{q}), 0, z + \frac{mx}{q}),$$
i per tant
$$\frac{d}{dt}_{t=0}\overrightarrow{O(x)P} = (0, 0, \frac{d}{dt}_{t=0}(\frac{mx}{q})),$$
i que
$$k'(0)\overrightarrow{OP} = k'(0)R(0,0,1) = (0,0,-R\frac{\lambda'(0)}{\lambda^2(0)}) = (0,0,-\frac{1}{R}\lambda'(0)),$$
però és clar que
$$\lambda'(0) = -\frac{d}{dt}_{t=0}(\frac{mx}{q}),$$
per tant
$$k'(0)\overrightarrow{OP} + k(0)\frac{d}{dt}_{t=0}\overrightarrow{O(x)P} = \vec{0}.$$

Segona demostració. Sigui $\beta(t)$ una corba tal que $\beta(0) = (0,0,-R)$, $\beta'(0) = (0,0,1)$ i tal que les rectes tangents tallin la superfície ortogonalment. Aquesta β existeix pel teorema 6.0.2. R és el radi principal de curvatura de la superfície a l'origen. Sigui $\alpha(t) = \beta(t) + \lambda(t)\beta'(t)$ amb $\lambda(t)$ elegida de tal manera que $\alpha(t)$ sigui una corba sobre la superfície. Serà línia de curvatura. Observem $\lambda(0) = R$. Llavors
$$\alpha'(t) = \beta'(t) + \lambda'(t)\beta'(t) + \lambda(t)\beta''(t).$$
Multiplicant pel normal $N(t) = \beta'(t)$ a la superfície en cada punt $\alpha(t)$ obtenim
$$0 = 1 + \lambda',$$
i, en particular $\lambda(t)\beta''(t) = \alpha'(t)$, és a dir
$$\vec{N}'(t) = \frac{1}{\lambda(t)}\alpha'(t),$$
que en $t = 0$ dóna
$$\vec{N}' = k\alpha'(0),$$
on $k = 1/R$ és la curvatura principal.

Tercera demostració.

Apliquem Tales al triangle infinitesimal isòsceles amb dos angles rectes de la figura. $OP = R$.

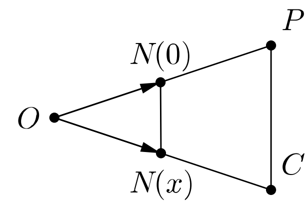


Figura 6.9: *Tales infinitesimal.*

Relació de les línies de curvatura de Monge amb els màxims i mínims de curvatures normals

Com que la curvatura normal en una direcció de pendent m en un punt d'una superfície està donada en funció de la primera i segona forma fonamental per

$$k_n(m) = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2},$$

en el cas i amb la notació de la secció anterior tenim

$$k_n(m) = \frac{r + 2sm + tm^2}{1 + m^2}.$$

Derivant respecte m i igualant a zero obtenim exactament la relació (6.13) que caracteritza les direccions principals.

Capítol 7

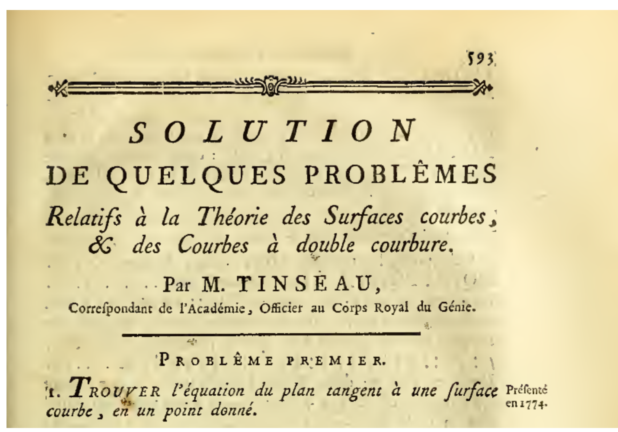
La influència de Monge. L'Ècole Polytechnique

Reunim en aquest capítol els primers deixebles de Monge, ordenats per data de naixement. Tots ells vinculats a *l'Ècole Polytechnique.*

7.1 Charles Tinseau d'Amondans (1748-1822)

Neix a Besençon. Entra a l'École Royale du Génie a Mezières el 1769 i es gradua el 1771. Se'l considera el primer deixeble de Monge. Militar monàrquic ha d'emigrar a Anglaterra després de la caiguda de la Bastilla, 1789. Anti Napoleònic no torna a França fins 1816.

Només va publicar un parell d'articles a *Mémoires de divers savans*[33] recent graduat, el 1772, clarament inspirats per Monge, el més important titulat *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des lignes*



593

SOLUTION
DE QUELQUES PROBLÊMES
Relatifs à la Théorie des Surfaces courbes, & des Courbes à double courbure.

Par M. TINSEAU,
Correspondant de l'Académie, Officier au Corps Royal du Génie.

PROBLÈME PREMIER.

1. TROUVER *l'équation du plan tangent à une surface courbe, en un point donné.* Présenté en 1774.

Figura 7.1: *Primera pàgina de [555].*

[33]El nom complet de la revista és *Mémoires de Mathematique et de Physique, Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans les Assemblées.*

à double courbure, vegeu [555]. L'altre es titula *Sur quelques proptiétés des solides renfermés par des surfaces composées des lignes droites*, [556].

Va estudiar també corbes de contacte de cons o cilindres circumnscrits, diverses superfícies associades a corbes de l'espai (va ser el primer de considerar la superfície de les tangents o *desenvolupable tangencial*), la determinació del pla osculador (també va ser el primer), problemes de quadratures relacionats amb superfícies reglades, etc.

També va fer una generalització del teorema de Pitàgores demostrant que el quadrat d'una àrea plana és igual a la suma dels quadrats de les àrees de la seva projecció sobre plans ortogonals. De fet, aquest resultat en el cas particular de les cares d'un tetraedre rectangle era conegut ja per Descartes.

7.2 Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Figura 7.2: *Adrien Marie Legendre.*

Va néixer a París. Ja[34] hem comentat, al parlar de Pierre Varignon, que Legendre va estudiar al col·legi Mazarino. Des de 1775 a 1780 ensenya, juntament amb Laplace, a l'École Militaire a París. El 1782 guanya un premi de l'Acadèmia de Berlin pel seu treball *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants*. El 1783 entra a l'Académie de Sciences, poc després de llegir el treball *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, molt elogiat per Laplace i que publicaria un parell d'anys més tard, [378]. És on introdueix els famosos *polinomis de Legendre*.

El 1794 publica *Eléments de géométrie*, [381] , que passa a ser llibre de text durant més de 100 anys. En aquest treball i en posteriors edicions dóna diverses proves del cinquè postulat (totes falses, òbviament). Tracta aquest mateix tema a *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, [383].

[34] Sembla que no hi ha imatges reals de Legendre. La Caricatura que posem és de Julien-Leopold Boilly. Vegeu la pàgina *Portrait_debacle* a Wikipedia.

El 1795 és nombrat membre de *l'Agence temporaire des poids et mesures* amb la missió d'introduir el sistema mètric decimal. Legendre hi dedica molta energia com es veu en aquest escrit reproduït al llibre de A. Garcia Azcarate [288]:

> "Per acostumar successivament a tots els francesos a les noves mesures, ens dirigim primer als més il·lustrats i sobre tot a aquells que el seu treball està essencialment lligat al govern. El vostre patriotisme, el vostre amor pel bé general, faran ben aviat que es convencin tots els que treballen sota la vostra direcció."

Gauss, en el *Disquisitiones*, a més de citar l'il·lustre Euler cita també l'il·lustre Legendre. Ho fa quan parla de triangles esfèrics i es referix a l'article *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*, [379]. De fet, el resultat de Legendre sobre triangles esfèrics facilita molt els càlculs geodèsics, i degut a això l'Académie el va elegir, juntament amb Cassini IV i Méchain, per fer una triangulació geodèsica entre els observatoris de Greenwich i París. El teorema en qüestió diu així.

Teorema 7.2.1 (Legendre) *Si la suma dels angles d'un triangle esfèric, de costats molt petits, és $180° + \epsilon$, i si de cada angle restem $\frac{\epsilon}{3}$, dic que els sinus dels angles així disminuïts seran proporcionals als costats oposats, de tal manera que el triangle es pot resoldre com si fos rectilini.*

També va tractar el tema de triangles sobre un el·lipsoide a *Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde*, [382].

En una carta a Olbers de 1806 Gauss diu: "Sembla que és el meu destí estar en competència amb Legendre en quasi tots els meus treballs teòrics". Tres anys abans de la publicació del *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, Legendre va publicar *Essai sur la Théorie des nombres*, però probablement Gauss no el coneixia quan va escriure la seva obra. Però és cert que hi havia interseccions, com hem comentat. De fet Gauss, referint-se al llibre de Legendre diu: "Com aquest llibre va arribar a les meves mans un cop la major part de la meva obra estigués ja a la impremta, no he pogut mencionar en cap lloc l'analogia dels plantejaments".

Van coincidir amb la fórmula de la distribució dels primers. Concretament, Legendre, el 1798, va conjecturar que el nombre de números primers entre 1 i x estava donat per

$$\Pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1.08366}.$$

Gauus el 1791 quan tenia 14 anys, va anotar a la seva taula de logaritmes que

$$\Pi(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Aquest tipus de fórmules no es van provar fins 100 anys més tard per J. Hadamard i, independentment, per Charles J. de la Vallèe Poussin.

També van coincidir amb la llei de reciprocitat quadràtica, els mínims quadrats, etc.

7.3 Jean Baptiste Meusnier (1754-1793)

Neix a Tours. Deixeble de Monge a École Royale du Génie Militaire de Mézières els anys 1774 i 1775. Estudia les línies de curvatura de les superfícies per indicació de Monge. Reproduïm les paraules de Monge sobre Meusnier[35]:

> "El mateix dia de la seva arribada a Mézières em va venir a veure i em va demanar que li proposés una pregunta que em permetés saber el seu grau d'instrucció i jutjar la seva disposició. Per satisfer-lo li vaig parlar de la teoria d'Euler sobre els radis de curvatura màxim i mínim de les superfícies corbes. Li vaig exposar els principals resultats i li vaig demanar que en trobés la demostració. L'endemà al matí, a les habitacions, em va donar un petit paper que contenia aquesta demostració; però el que hi havia de remarcable és que les consideracions que ell havia emprat eren més directes, i el camí seguit molt més ràpid que el que havia seguit Euler."

Estudia superfícies d'àrea mínima descobrint la catenoide i l'helicoide recte. Concretament demostra que la única superfície de revolució d'àrea mínima és la generada per la revolució d'una cadena al voltant de la seva base. Posteriorment fou professor de geometria descriptiva a la pròpia escola. El 1791 és encarregat,

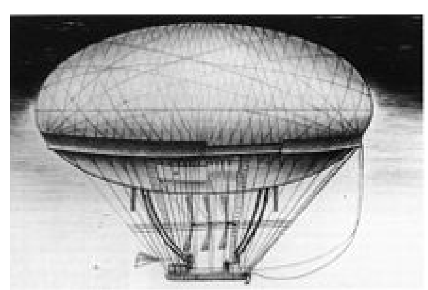


Figura 7.3: *Dirigible de Meusnier.*

[35]Traducció lliure a partir del llibre de R. Taton [552], p. 234.

junt amb Monge, de la determinació de la mesura del meridià Terrestre. Vegeu la nota **87** de Struik, pàgina 256.

Podeu trobar més informació en els *Elogis* de Darboux, [213], p.218-62, on hi ha una nota biogràfica titulada *Notice Historique sur le Géneral Meusnier.*

Va projectar, sense arribar-ho a realitzar, un dirigible basat en un el·lipsoide.

Curvatura de les superfícies

Vegem un petit resum del treball *Mémoire sur la courbure des surfaces*, [428].

Primer observa que la curvatura d'una corba és el que fa que d'un punt a l'altre la tangent canvii de posició.


MÉMOIRE
SUR
LA COURBURE
DES SURFACES,
Par M. MEUSNIER, Lieutenant en premier, Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Correspondant de l'Académie.
LU À L'ACADÉMIE LES 14 ET 21 FÉVRIER 1776.

Figura 7.4: *Meusnier.*

Diu que com més considerable és aquest canvi, més es pot dir que la Curvatura és gran: per tant, si considerem dues tangents en dos punts infinitament pròxims, l'angle format per aquestes tangents, mesure la Curvatura de l'element comprés entre aquests dos punts. Després observa que aquest càlcul depèn de les derivades primeres i segones, de manera que si canviem la corba donada per una altra que tingui en el punt considerat contacte d'ordre dos, aquesta tindrà la mateixa curvatura que la primera en el punt. De fet, podem substituir la corba per un cercle amb aquesta propietat:

> "Sempre és possible assignar un cercle que tingui aquesta propietat; es pot considerar doncs tot element de corba com una porció d'un cert cercle."

Ara vol generalitzar aquesta idea a les superfícies. Dóna una mena de definició de curvatura que em sorprèn una mica. Diu:

> "La Curvatura d'una superfície consisteix en el que d'un punt a un altre el pla tangent varia: així la Curvatura d'un element de superfície depèn de la fórmula que expressa el canvi del pla tangent dins l'extensió d'aquest element."

Diu que veurà de seguida que aquesta fórmula involucra només derivades primeres i segones, de manera que una altra superfície amb contacte d'ordre dos al punt tindrà la mateixa curvatura.

A continuació cita Euler:

> "M. Euler ha tractat el mateix tema en una molt bona Memòria, impresa el 1760, d'entre les de l'Academia de Berlin. Aquest il·lustre Geòmetra presenta la qüestió d'una manera diferent a la que acabem d'exposar; fa dependre la Curvatura d'un element de superfície de la de les diferents seccions que es poden obtenir tallant-la amb un pla; [...] no pretenem més que presentar la mateixa qüestió sota un altra punt de vista, fent-la dependre d'una propietat intressant; concretament, que existeix una generació que s'adapta a tot element de superfície: falta d'altra banda a aquesta teoria diversos resultats importants que donem aquí."

A partir d'aquesta introducció el treball es divideix en els cinc problemes següents.

Problema primer

1. Determinar les diferents posicions que pot tenir el pla tangent respecte d'un element de superfície?

Problema II

15. Determinar el radi de curvatura de la secció feta en un element de superfície per un pla qualsevol de posició donada.

Fa essencialment el teorema de Mesnieur clàssic. Fa el cas particular de les superfície de revolució interpretant un dels radis de curvatura principal com el radi de curvatura de la corba generatriu i l'altre com la longitud de la normal entre el punt i l'eix de rotació.

Problema III

34. Determinar quines són les superfícies que tenen els dos radis de curvatura iguals.

Veu que només hi ha l'esfera amb aquesta propietat.

PROBLEMA IV

35. Entre totes les superfícies que es poden fer passar per un perímetre donat, format per una corba de doble curvatura, troba aquella que tingui la mínima àrea.

Troba, efectivament, que els radis de curvatura han de ser iguals i de sentit contrari. Encara no es parlava de curvatura mitjana en aquells temps, però Meusnier està caracteritzant les superfícies minimals com les superfícies de curvatura mitjana zero. Va ser el primer en fer-ho.

PROBLEMA V

38. Trobar l'equació general de les superfícies desenvolupables.

Troba que si la superfície $z = z(x, y)$ es pot desenvolupar llavors

$$(\frac{ddz}{dx\,dy})^2 - (\frac{ddz}{dx^2})(\frac{ddz}{dy^2}) = 0,$$

que no és més que dir que el 'determinant'[36] de la segona forma fonamental, i per tant la curvatura de Gauss, és zero. Però li dóna la prioritat a Monge, citant l'article [434]. Euler, en el seu article sobre desenvolupables, [275], no arriba a aquesta expressió.

Just a continuació del treball de Meusnier, a la mateixa revista, es publica el treball de Monge *Mémoire sur les développées*, [440].

Problema Primer

Estudiem detalladament el primer problema proposat per Meusnier. Tot i que l'enunciat és molt genèric veurem com introdueix la segona forma fonamental, com calcula els radis principals de curvatura, etc.

Utilitza la notació de la figura adjunta (N és el punt de la superfície, de coordenades $(u, v, t(u, v))$):

Diferenciant, escriu

[36] Les formes quadràtiques no tenen determinant sinó discriminant. Però el quocient entre el determinant de la segona i primera forma fonamental sí que està ben definit, en el sentit de que no depèn de la base respecte de la qual es consideren les matrius. És la curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} dt &= U du + V dv \\ dU &= U' du + V' dv \\ dV &= V' du + \gamma dv \end{aligned}$$

Observem, doncs, que

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial t}{\partial v}, \\ U' &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \qquad V' = \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v}, \qquad \gamma = \frac{\partial^2 t}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

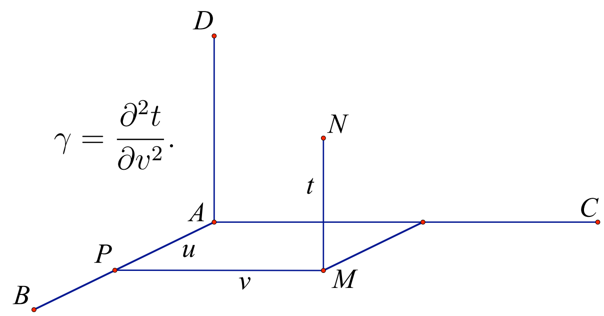


Figura 7.5: *ABC és el pla tangent a la superfície en A i N un punt de la superfície.*

Com que està suposant que el pla ABC és el pla tangent a la superfície en A, es compleix que $U(0,0) = V(0,0) = 0$.

El pla tangent a la superfície en el punt $N = (u, v, t(u,v))$ està generat pels vectors $(1, 0, U)$ i $(0, 1, V)$, de manera que el vector normal unitari està donat per

$$\frac{1}{\sqrt{1 + U^2 + V^2}}(-U, -V, 1).$$

Així, un punt (u', v', t') pertany al pla tangent si i només si

$$t' - u'U - v'V = t - uU - vV.$$

Com varia aquest pla tangent quan N s'acosta a A, sobre la superfície? Introdueix la notació

$$\begin{aligned} c &= U'(0,0), \\ e &= V'(0,0), \\ f &= \gamma(0,0). \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} dU(0,0) &= c\, du + e\, dv, \\ dV(0,0) &= e\, du + f\, dv. \end{aligned}$$

L'expressió $dt = U du + V dv$ vol dir que tenim una corba

$$\sigma(s) = (u(s), v(s), t(u(s), v(s)))$$

sobre la superfície i calculem el vector tangent.

$$\sigma'(t) = (\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}, \frac{dt}{ds}).$$

Ens fixem en la tercera component. Per la regla de la cadena,

$$\frac{dt}{ds} = U(u(s), v(s))\frac{du}{ds} + V(u(s), v(s))\frac{dv}{ds},$$

que, tornant a derivar en $s = 0$, i recordant que $U(0,0) = V(0,0) = 0$, dóna

$$\frac{d^2t}{ds^2}_{s=0} = \frac{dU}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{dV}{ds}\frac{dv}{ds}.$$

Com que

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= U'(0,0)\frac{du}{ds} + V'(0,0)\frac{dv}{ds} = c\,\frac{du}{ds} + e\,\frac{dv}{ds}, \\ \frac{dV}{ds} &= V'(0,0)\frac{du}{ds} + \gamma(0,0)\frac{dv}{ds} \;\; = e\,\frac{du}{ds} + f\,\frac{dv}{ds}, \end{aligned}$$

tenim

$$\frac{d^2t}{ds^2}_{s=0} = c(\frac{du}{ds})^2 + 2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + f(\frac{dv}{ds})^2$$

que Meusnier escriu com

$$ddt = c\,du^2 + 2e\,du\,dv + f\,dv^2$$

Observem que el segon terme d'aquesta igualtat és, amb notació actual, la *segona forma fonamental* de la superfície a l'origen, aplicada al vector tangent $w = (u', v')$, i.e. $II(w, w)$.

Observació 7.3.1 *Un càlcul que Meusnier no explicita: la relació entre la segona forma fonamental i les curvatures principals.*

Aplicant la fórmula de la curvatura per a una corba γ no parametritzada per l'arc,

$$k = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|^2}{|\gamma'|^3},$$

a la corba *secció normal* $\gamma(s) = (u(s), \lambda u(s), t(u(s), \lambda u(s)))$ (és a dir, a la corba que s'obté en tallar la superfície pel pla per l'origen generat pels vector $(0,0,1)$ i $w = (1, \lambda, 0))$ tenim

$$k(w) = \frac{c + 2e\lambda + f\lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Per tant, les curvatures normals (les que considera Euler) es poden calcular coneixent només el valor de les derivades segones en el punt, (c, e, f). Per tant, superfícies amb contacte d'ordre dos en el punt considerat tenen la mateixa curvatura (en el sentit de les mateixes curvatures normals). Aquest és el punt de partida de tot el treball de Meusnier que estem comentant: Ens permet treballar només amb superfícies quadràtiques.

Observem finalment que la fórmula que acabem de trobar també s'escriu com

$$k(w) = \frac{c + 2e\lambda + f\lambda^2}{1 + \lambda^2} = \frac{II(w,w)}{g(w,w)},$$

on g és la *primera forma fonamental*.

Curvatura de Meusnier

Considerem una corba $\gamma(s)$ sobre la superfície que vagi des de l'origen al punt N. Denotem per $\alpha(s)$ l'angle entre el vector normal $N(s)$ a la superfície en el punt $\gamma(s)$, i el vector $N(0) = (0,0,1)$.

Si suposem que s és el paràmetre arc, la 'definició' de curvatura donada per Meusnier, que hem reproduït a la pàgina 65, es pot interpretar com

$$KM(0) = \textit{Curvatura de Meusnier a l'origen} = \frac{d\alpha}{ds}$$

D'aquesta manera la curvatura d'una superfície és la generalització natural de la curvatura d'una corba plana.

Observem que l'angle $\alpha(s)$ compleix

$$N(0) \cdot N(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + U^2 + V^2}} = \cos \alpha(s).$$

En particular

$$\tan \alpha(s) = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Desprès d'introduir la segona forma fonamental com acabem de fer (sense donar-li cap nom) demostra el resultat següent.

Corol·lari 7.3.2 (*Corollaire Premier*) *Tota superfície tangent a l'element [de superfície] donat i que tingui en el punt de contacte la mateixa equació en derivades segones tindrà també la mateixa curvatura.*

Per a això observa que

$$N(s) = (-U(s), -V(s), 1) \frac{1}{\sqrt{1 + U(s)^2 + V(s)^2}},$$

i per tant

$$\frac{dN}{ds}_{s=0} = (-\frac{dU(0)}{ds}, -\frac{dV(0)}{ds}, 0),$$

que escriu (sempre a l'origen) com

$$dN = (-dU, -dV, 0) = -(c\, du + e\, dv, e\, du + f\, dv, 0).$$

En particular

$$|dN| = \sqrt{(c\, du + e\, dv)^2 + (e\, du + f\, dv)^2} \tag{7.1}$$

(expressió que apareix al final de la secció 1 de l'article de Meusnier)

Però com tothom sap [je,je], el mòdul de la derivada és la derivada de l'angle:

Lema 7.3.3 *Sigui $N(s)$ una corba sobre l'esfera unitat. Sigui $\alpha(s)$ l'angle entre $N(0)$ i $N(s)$. Llavors*

$$\alpha'(0) = \left| \frac{dN(s)}{ds}_{s=0} \right|.$$

Demostració.[37] Com que $N(s) \cdot N(s) = 1$, tenim $N'(s) \cdot N(s) = 0$ i, per tant

$$N'(s) \cdot N'(s) = -N''(s) \cdot N(s).$$

També, de $N(s) \cdot N(0) = \cos\alpha(s)$, deduïm

$$N'(s) \cdot N(0) = -\sin\alpha(s)\ \alpha'(s),$$

i

$$N''(s) \cdot N(0) = -\cos\alpha(s)\ \alpha'(s)^2 + \alpha''(s)\sin\alpha(s).$$

Quan $s = 0$, tenim doncs

$$N''(0) \cdot N(0) = \alpha'(0)^2.$$

Substituint a (7.2), tenim

$$N'(0) \cdot N'(0) = \alpha'(0)^2.$$

Per tant, llevat del signe,

$$\alpha'(0) = \left| \frac{dN(s)}{ds}_{s=0} \right|,$$

com volíem. □

En particular, abreujant la notació, la fórmula (7.1) s'escriu ara com

$$KM = |dN| = \alpha',$$

igualtat que demostra el corol·lari 7.3.2.

Observació 7.3.4 *Olinde Rodrigues*

Ja sabem que Olinde és molt posterior a Meusnier. Però només vull fer la observació de que si imposem la condició d'Olinde per a les direccions principals, tenim

$$\frac{dN}{ds} = \lambda w$$

[37]Aquesta demostració és de Gil Solanes.

on w és un vector tangent que té la direcció de curvatura principal i $\sigma(s)$ és una corba sobre la superfície amb $\sigma'(0) = w$. I $N(s) = N(\sigma(s))$ denota el vector normal a la superfície restringit a la corba $\sigma(s)$.

Tenint en compte la notació introduïda per a dN aquesta equació s'escriu com

$$\begin{aligned} cu' + ev' &= \lambda u', \\ eu' + fv' &= \lambda v', \end{aligned}$$

i aquest sistema té solució no trivial si i només sí el seu determinant és zero. És a dir,

$$\lambda^2 - (c + f)\lambda + fc - e^2 = 0.$$

Les arrels són

$$k_i = \frac{c + f \pm \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}}{2},$$

que dona, per als radis de curvatura, l'expressió trobada ja per Meusnier

$$\rho_i = \frac{2}{c + f \pm \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}}.$$

7.4 Sylvestre Lacroix (1765-1843)

Va néixer a París. De molt jove, el 1780, assisteix a un curs de Monge. Aquest el proposa com a Professor de Matemàtiques a l'École de Gardes de la Marine a Rocheford, el 1782. Als 20 anys publica ja a l'Académie de Sciences. S'interessa des dels 14 anys en càlculs astronòmics.

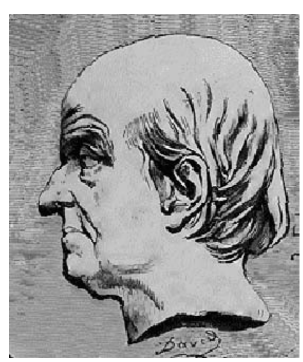


Figura 7.6: *Sylvestre Lacroix.*

Torna a París a explicar astronomia i probabilitat al Lycée. El 1787 és professor a l'École Royale Militaire de París. De 1788 a 1793 és professor a l'École Royale d'Artillerie de Besançon. Després de diversos problemes causats per la Revolució Francesa esdevé Professor a l'École Polytechnique el 1799. El 1815 passa a la Sorbonne i al Collège de France. A la lluna hi ha un cràter que porta el seu nom.

A la seva obra[38] *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, [347], dedica diversos apartats a corbes i superfícies. Per exemple, un apartat es titula *Application du Calcul differential à la théorie des courbes*, i parla de corbes osculatrius, centre osculador, radi de curvatura, propietats de la desenvolupable, etc. Un altra es titula *Application du Calcul differential à la théorie des surfaces courbes*, i parla essencialment de la curvatura de superfícies i un altra apartat es titula *De l'application du calcul differentiel aux courbes à double courbure et des surfaces dévéloppables.*

A l'apartat *Integration des équations différentielles partielles du premier ordre* dedica una nota a peu de pàgina a Monge: *Note sur les considérations par lesquelles Monge liait l'integration des équations differentielles avec la génération des surfaces*, p. 504 de la quarta edició de Bachelier de 1828. El títol de la nota apareix a l'índex però no a la pàgina 504. És en aquesta nota que cita la *Géométrie Analytique* de Monge, com hem comentat a la pàgina 42.

A l'edició, corregida i augmentada, de [347], de 1810,[39] Lacroix decideix incloure-hi, a la secció 357, una versió d'una nota seva de 1790 que s'havia llegit a l'Académie però no s'havia publicat. Es titulava *Mémoire sur les surfaces développables et sur les équations aux différences ordinaires à trois variables.* Es proposava estudiar què passa amb una corba que està sobre una superfície desenvolupable quan aquesta superfície es desenvolupa sobre el pla, i recíprocament, donada una corba en el pla veure què passa quan s'embolica el pla sobre la superfície donada. Podeu trobar aquesta nota reproduïda a la tesis de Jean Delcourt, [220].

La sisena edició, de 1862, està completada amb notes d'Hermite i Serret. Hem comentat la nota III de Serret a 159.

El 1795 Lacroix publica el seu llibre *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, [346]. Aquesta edició té dues parts. A la primera estudia els plans i les esferes i a la segona estudia les superfícies. La divideix en els apartats següents: superfícies còniques, superfícies cilíndriques, corbes de doble curvatura, superfícies de revolució, intersecció de superfícies cor-

[38]La podeu trobar a `http://www.archive.org/stream/traitlmentaired00serrgoog♯page/n0/mode/1up`.

[39]El títol d'aquesta edició perd l'adjectiu de "élémentaire".

bes, generació de superfícies corbes, desenvolupament de superfícies corbes, i finalment, assaig sobre la perspectiva.

Un estudi detallat de la figura de Lacroix el podeu trobar al llibre de Joâo Caramalho Domingues *Lacroix and the Calculus*, [227].

Teorema de Lacroix

Dins de l'apartat *Application du Calcul differential à la théorie des surfaces courbes*, concretament a la pàgina 236, secció 164, de la quarta edició de Bachelier de 1828 de [347], Lacroix diu:

> "La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leurs tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. Or, les droites qui sont les intersections des plans normaux, étant perpendiculaires aux plans osculateurs, comprennent entre elles le même angle que ces derniers; de plus, comme elles forment, par leurs rencontres, l'areète de rebroussement de la surface des plans normaux, elles sont aussi les tangentes de cette arète, qui font, par conséquent, entre elles des angles égaux á ceux des plans osculateurs correspondants; ainsi *la seconde flexion de la courbe proposée est égale à la premier flexion de l'arète de rebroussement des plans normaux.*"

i afegeix que aquest resultat és de Fourier (vegeu el manuscrit de la figura 7.7). A la pàgina 81, Teorema 7.6.2, reescriurem aquest resultat en llenguatge més modern.

7.5 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Neix a Auxerre. El 1790 entra com a professor de matemàtiques a l'escola militar d'Auxerre (on havia estudiat). El 1794 va a l´École Normale de París on té com professors Lagrange, Laplace


Notes sur les Développées des lignes courbes

Figura 7.7: *Notes sur les développées des lignes courbes* i Monge, i posteriorment és professor a l'École Polytechnique. El 1798 va participar en la campanya de Napoleó a Egipte i es convertí en un reputat egiptòleg. No entrarem aquí a parlar d'aquest gran matemàtic.

Només citarem tres notes manuscrites: *Notes sur les développées des lignes courbes*, [281], *Sur les propriétés des lignes courbes*, [283] i *Notes sur les propriétés des lignes courbes*, [282], per què totes tres fan referència a les propietats de les corbes. Les he pogut veure gràcies als serveis de la Biblioteca de Ciències, especialment a Montse Mallorquí. Estan extensament comentades a la Tesi Doctoral de Jean Delcourt *Analyse et géométrie: les courbes gauches de Clairaut à Serret et Frenet*, [219], pàgines 243-256. Vegeu també l'article posterior de Delcourt *Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches. De Clairaut à Darboux*, [220].

7.6 Michel Ange Lancret (1774-1807)

Figura 7.8: *Michel A. Lancret.*

Neix a París. Alumne de Monge. Va ser uns dels acompanyants de Napoleó a la campanya Egípcia. Va escriure només dos articles, ja que va morir molt jove, *Mémoire sur les courbes a double courbure*, [372] i *Mémoire sur les développoides des corbes planes, des corbes à double curbure et des surfaces développables*, [373]. A aquest segon, que no he pogut consultar, es refereix Struik a a la seva nota **48**, pàgina 253, quan parla d'*evolutoides*. En el primer introdueix la *primera flexió* $d\mu$ (angle entre dos plans normals consecutius) i la *segona flexió* $d\nu$(angle entre dos plans osculadors consecutius). Veu que no cal estudiar una tercera flexió $d\omega$ com angle entre dos plans rectificants consecutius ja que

$$d\mu^2 + d\nu^2 = d\omega^2.$$

Va publicar una breu nota que apareix publicada a la *Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique* titulada *Des courbes à double curbure*, [374].

Al costat del seu nom hi ha un peu de pàgina que diu: "Admis à l'École Polytechnique, en qualité d'élève, en primaire an 3, et à l'École des Ponts-et-Chaussées en nivose a 6". Demostra que les corbes esfèriques tenen per lloc geomètric dels centres dels seus cercles osculadors línies que esdevenen cercles en el desenvolupament de la superfície cònica envolvent dels seus plans normals.

Aquesta igualtat es coneix com *Equació de Lancret*. Utilitza implícitament la referència de Frenet. La comento amb més detall a la pàgina 82.

Amb notació moderna aquesta igualtat s'interpreta com una relació entre els elements de longitud de les indicatrius de la tangent, la binormal i la normal (corbes sobre l'esfera unitat determinades respectivament pels vectors tangent, binormal, i normal). Denotant per ds_t, ds_b, ds_n els corresponents elements de longitud d'aquestes corbes, les fórmules de Frenet ens diuen directament que

$$\begin{aligned} ds_t^2 &= k^2\, ds^2, \\ ds_b^2 &= \tau^2\, ds^2, \\ ds_n^2 &= (k^2+\tau^2) ds^2, \end{aligned}$$

on k i τ són la curvatura i la torsió respectivament, i per tant,

$$ds_n^2 = ds_t^2 + ds_b^2.$$

El primer que fa a [372] és veure que les dues flexions són independents, en el sentit que "l'une peut être détruite sans que l'autre ait subi aucun changement". I les defineix dient que la primera flexió es mesura per l'angle entre dos plans normals consecutius, i la segona per l'angle entre dos plans osculadors consecutius. És a dir, la curvatura mesura la variació del vector tangent i la torsió la variació del vector binormal. Això ja ho deia Lacroix, potser d'una manera més imprecisa, quan deia que la segona flexió està indicada per l'angle entre els plans osculadors i la primera flexió per l'angle entre les tangents (pàgina 75). I òbviament que estava en les idees inicials de Monge (en el folklore).

Escrivim-ho amb notació més actual.

Curvatura com derivada d'un angle

En el pla conèixer l'angle de la tangent amb una direcció donada ens determina la tangent però a l'espai no, de manera que el resultat que diu que la curvatura d'una corba plana és la derivada, respecte el paràmetre arc, de l'angle que forma la tangent amb una direcció fixada, no es generalitza fàcilment a l'espai.

L'angle entre *dos vectors tangents consecutius* de la corba $\gamma(s)$, vol dir l'angle entre $\gamma'(s)$ i $\gamma'(s+\Delta s)$, on Δs és un petit increment del paràmetre arc s. Per facilitar la notació, fixem $s=0$ i denotem Δs únicament com s.

Proposició 7.6.1 *Sigui $\gamma(s)$ una corba parametritzada per l'arc i sigui $\mu(s)$ l'angle entre $\gamma'(0)$ i $\gamma'(s)$ (angle entre dos plans normals "consecutius"). Llavors la curvatura $k(0)$ de $\gamma(s)$ en $s=0$, és*

$$k(0) = |\mu'(0)|.$$

Demostració. Derivant la igualtat

$$\gamma'(0)\cdot\gamma'(s) = \cos\mu(s),$$

tenim

$$\gamma'(0)\cdot\gamma''(s) = \gamma'(0)\cdot k(s)N(s) = -\sin\mu(s)\mu'(s),$$

on $N(s)$ és el vector normal principal de $\gamma(s)$.

Fins aquí tot és igual que en el cas de les corbes planes, però ara tenim el problema de que els vectors $\gamma'(0), \gamma'(s), N(s)$ no estaran en general en el mateix pla i no podem dir que la seva suma o diferència sigui $\frac{\pi}{2}$.

No obstant, si ara aïllem $\mu'(s)$ i fem $s\to 0$ obtenim

$$\mu'(0) \;=\; \lim_{s\to 0}\mu'(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\gamma'(0)\cdot k(s)N(s)}{-\sin\mu(s)}$$

una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Per resoldre aquesta indeterminació apliquem l'Hôpital i tenim

$$\mu'(0) \;=\; \lim_{s\to 0}\frac{\gamma'(0)\cdot(k(s)(-k(s)\gamma'(s)+\tau(s)B(s))+k'(s)N(s))}{-\cos\mu(s)\mu'(s)} = \frac{k(0)^2}{\mu'(0)}.$$

Per tant,

$$k(0) = |\mu'(0)|.$$

És a dir, *la curvatura en un punt és el valor absolut de la derivada respecte del paràmetre arc, en aquest punt, de l'angle que forma la tangent amb la tangent en el punt.* És la velocitat amb que "gira" el pla normal.

Però no podem assegurar que $k(s) = |\mu'(s)|$ encara que s sigui petit, si $s>0$.

Així, a diferència del cas de corbes planes, no hi ha una funció angle tal que la derivada en cada punt doni la curvatura en aquell punt.

Torsió com derivada d'un angle

L'angle entre *dos vectors binormals consecutius* de la corba $\gamma(s)$, vol dir l'angle entre $B(s)$ i $B(s+\Delta s)$, on Δs és un petit increment del paràmetre arc s. Per facilitar la notació, fixem $s = 0$ i denotem Δs únicament com s. Així, si denotem $\nu(s)$ l'angle entre $B(0)$ i $B(s)$ (angle entre dos plans osculadors "consecutius"), la torsió en $s = 0$, és

$$\tau(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\nu(s) - \nu(0)}{s} = \nu'(0).$$

Això coincideix amb la definició habitual ja que derivant la igualtat

$$\cos \nu(s) = B(0) \cdot B(s),$$

tenim

$$-\sin \nu(s) \nu'(s) = B(0) \cdot B'(s) = -B(0) \cdot \tau(s) N(s),$$

on $N(s)$ és el vector normal principal de $\gamma(s)$.

Si ara aïllem $\nu'(s)$ i fem $s \to 0$ obtenim una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Per resoldre aquesta indeterminació apliquem l'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\nu'(0) &= \lim_{s \to 0} \nu'(s) = \lim_{s \to 0} \frac{B(0) \cdot \tau(s) N(s)}{\sin \nu(s)} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{B(0) \cdot (\tau(s)(-k(s)\gamma'(s) + \tau(s) B(s)) + \tau'(s) N(s))}{\cos \nu(s) \nu'(s)} = \frac{\tau(0)^2}{\nu'(0)}.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\tau(0) = \pm \nu'(0).$$

Així, doncs, la curvatura i la torsió no són angles sinó derivades d'angles.

Molt important remarcar que, malgrat que a acabem de dir que la curvatura i la torsió en un punt són les derivades d'un angle, ni la curvatura ni la torsió, pensades com funció del paràmetre s de la corba, són derivades d'una funció 'angle' sobre la corba, a diferència del que passa per a corbes planes on la curvatura és la derivada d'una funció 'angle' definida sobre la corba. Per exemple, en una corba tancada plana

$$\int k(s) ds = 2k\pi,$$

ja que la integral de la derivada d'un angle és aquest mateix angle, mentre que per a corbes tancades amb doble curvatura només se sap que

$$\int k(s)ds \geq 2\pi$$

(Teorema de Fenchel).

Sense aquesta distinció entre angle i derivada de l'angle no s'entendria el primer resultat que apareix a l'article de Lancret que estem comentant, [372], i que no és més que una reformulació, potser una mica més precisa, del resultat de Lacroix comentat a la pàgina 75. Concretament diu:

> "Les flexions de la développante et de la développée par le plan ont entre elles une relation remarcable; savoir, que la première flexion de la développante est ègale à la second flexion de la développée, et réciproquement que la première flexion de la développée est égale à la seconde flexion de la développante."

Tant Lancret com abans Lacroix atribueixen aquest resultat a Fourier. Sembla com si Lancret no conegués el treball de Lacroix ja que diu:

> "Ces remarques sur la distinction des deux flexions d'une courbe, et sur la relation qu'ont entre elles les flexions d'une développante avec celles de sa développée par le plan, sont dues à M. Fourier. Je les ai exposées ici, parce qu'elles ne sont point encore écrites, et que j'aurai occasion d'en faire usage dans la suite."

No està pas dient que la curvatura de la desenvolupant sigui la torsió de la desenvolupada[40] (amb les definicions actuals ordinàries de curvatura i torsió), cosa que seria falsa, sinó que està dient que, denotant

$$k_1 = \frac{d\mu}{ds}, \quad \tau_2 = \frac{d\tilde{\nu}}{d\tilde{s}},$$

[40] Ja de bon principi aquesta formulació va portar a confusió. Saint-Venant, a *Mémoire sur les lignes courbes non planes*, [521], diu *[...] enfin l'illustre Fourier, qui a communiqué verbalement à Lancret une propriété intéressante, mais souvent mal énoncée (comme l'a remarqué M. Transon, Bulletin de la Société philomatique, 3 août 1844, ou journal l'Institut), de l'arête de rebroussement de la surface polaire.*

la curvatura de la desenvolupant i la torsió de la desenvolupada, tenim

$$k_1\, ds = d\mu = d\tilde{\nu} = \tau_2\, d\tilde{s},$$

Precisem també que no està parlant de la *développée* sinó de la *développée par le plan*, que, seguint les seves explicacions, no és més que l'aresta de retrocés de la superfície polar (envolupant dels plans normals). Que coincideix amb la corba formada pels centres de les esferes osculatrius. La développée clàssica és la *développée par le fil*.

Teorema 7.6.2 (Fourier-Lacroix) *La primera [resp. segona] flexió d'una corba és igual a la segona [resp. primera] flexió de la desenvolupada pel pla (aresta de retrocés de la superfície polar).*

En llenguatge actual tenim doncs una corba $x(s)$ parametritzada per l'arc i l'aresta de retrocés de la superfície polar, que té equació

$$y(s) = x(s) + \rho(s)N(s) + \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}B(s),$$

(vegeu, per exemple, Struick, [550], pag. 81). Recordem que la superfície polar està donada per

$$\varphi(s,u) = x(s) + \rho(s)N(s) + uB(s),$$

de manera que és clar que $y(s)$ hi és continguda. Recordem que la superfície polar deixa de ser regular just en els punts de $y(s)$. Si fixem s i variem u tenim la recta polar, que té doncs vector director el binormal de la corba en el punt corresponent. A més,

$$y'(s) = \left[\rho(s)\tau(s) + (\frac{\rho'(s)}{\tau(s)})'\right] B(s),$$

és a dir, la superfície polar és la desenvolupable tangencial de l'aresta de retrocés.

Com que la longitud de $y(s)$ es calcula integrant la norma del seu vector tangent, si denotem $\tilde{s}$ el paràmetre arc de $y(s)$, tenim

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = \|y'(s)\|,$$

o, equivalentment,

$$y'(s) = \frac{d\tilde{s}}{ds} B(s).$$

Aplicant les fórmules de la curvatura i la torsió per a corbes no parametritzades per l'arc, podem calcular fàcilment la curvatura $\tilde{k}$ i la torsió $\tilde{\tau}$ de $y(s)$. Obtenim,

$$\tilde{k}(s) = \frac{\|y' \wedge y''\|}{\|y'\|^3} = \frac{\tau(s)}{\frac{d\tilde{s}}{ds}},$$

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{\langle y' \wedge y'', y''' \rangle}{\|y' \wedge y''\|^2} = \frac{k(s)}{\frac{d\tilde{s}}{ds}},$$

que, tenint en compte que $\tilde{s} = \tilde{s}(s)$, es poden escriure com

$$\tilde{k}(\tilde{s})\, d\tilde{s} = \tau(s)\, ds,$$

$$\tilde{\tau}(\tilde{s})\, d\tilde{s} = k(s) ds,$$

que són les igualtats a que fa referència Lancret.

Demostració de Lancret de que no cal considerar tres flexions

La demostració es basa en un dibuix, que Lancret no fa. Però la situació està més ben explicada en un article posterior de Saint-Venant, [521], que m'ha estat molt útil per entendre l'argument de Lancret, i que seguiré ara inclús amb la seva notació.

Aclarim primer que la corba és pensada com una poligonal, de costats petits, que s'identifiquen amb les tangents. D'aquesta manera el pla osculador és el pla format per tres punts consecutius ja que aquest pla conté dues tangents consecutives i per tant està generat per elles o per una d'elles i la diferència de les dues. Però aquesta diferència és el numerador del quocient incremental que apareix en la definició de derivada del vector tangent, és a dir, té en el límit la direcció de la normal. Per tant, el pla generat per tres punts consecutius és el pla osculador.

Siguin doncs $MM', M'M'', M'', M'''$ tres punts consecutius de la corba. Sigui Π el pla M, M', M'', és a dir, el pla osculador en M, i sigui Π' el pla M', M'', M''', és a dir, el pla osculador en M'.

Per M' tracem tres rectes:

1. $M'C \in \Pi$, perpendicular a MM'. Serà, doncs, paral·lela al radi de curvatura en M.
2. $M'C' \in \Pi'$, perpendicular a $M'M''$. Serà, doncs, el radi de curvatura en M'.
3. $M'B \in \Pi$, perpendicular a $M'M''$.

Observem que l'angle $d\mu$ entre les tangents és l'angle entre $M'C$ i $M'B$, ja que són angles de costats perpendiculars, situats en un mateix pla.

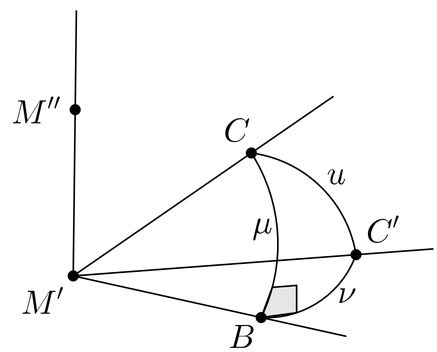


Figura 7.9: *El dibuix que Lancret no va fer.*

Observem també que l'angle entre $M'B$ i $M'C'$ és l'angle $d\nu$ entre els plans osculadors, ja que tots dos segments, un a cadascun dels dos plans osculadors, són perpendiculars a la intersecció MM' d'aquests plans.

Finalment, l'angle entre $M'C$ i $M'C'$, com és l'angle entre dues normals consecutives, és angle $d\omega$ entre dos plans rectificants.

A més, els plans $M'BCM''$ i $M'BC'$ són ortogonals, ja que les rectes $M'B$ i $M'C'$ són ortogonals a $M'M''$, i per tant $M'M''$ té la direcció del vector normal al pla $M'BC'$.

Ara només cal aplicar el teorema de Pitàgores esfèric al triangle $\triangle BC'C$ de la figura. Tenim

$$\cos d\omega = \cos d\mu \cdot \cos d\nu.$$

Desenvolupant per Taylor i simplificant els termes independents obtenim

$$d\omega^2 + \cdots = d\mu^2 + d\nu^2 + \ldots,$$

on els punts denoten termes d¡ordre superior a dos. Si dividim per ds^2 i fem límit quan s tendeix a zero obtenim

$$\epsilon^2 = k^2 + \tau^2$$

on ϵ denota la tercera flexió (derivada en el zero de l'angle entre plans rectificants, o, amb el llenguatge de l'època, angle entre plans rectificants consecutius). Aquesta és essencialment l'equació de Lancret.

Un altre resultat que es coneix com Teorema de Lancret i que apareix al mateix article és el següent.

Teorema 7.6.3 (Lancret) *Una corba de curvatura estrictament positiva és una hèlix generalitzada si i només si el quocient entre la torsió i la curvatura és constant.*

Recordem que una *hèlix generalitzada* és una corba tal que totes les seves rectes tangents formen angle constant amb una direcció donada.

7.7 André Marie Ampère (1775-1846)

Neix prop de Lió. Abans de ser conegut com a físic era ja conegut com a matemàtic. Professor de l'École Polytechnique des de 1804 a 1828. Introdueix la *paràbola osculatriu* i la idea d'invariants diferencials. Reconeix la importància del radi de curvatura i el paràmetre arc com a coordenades intrínseques d'una corba plana. Obté algun resultat que es podria considerar com els inicis de la geometria diferencial afí. Vegeu *Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices*, [3].

Figura 7.10: *A. M. Ampère.*

7.8 Sophie Germain (1776-1831)

Neix a París. Atreta per les matemàtiques des de petita, aconsegueix apuntar-se als cursos de l'Ecole Polytechnique, reservada als homes, amb el nom d'un antic alumne, Antoine Auguste Le Blanc, que ja havia abandonat París. L'Escola no ho sabia i li continuava enviant els apunts dels cursos que anaven a

Figura 7.11: *Sophie Germain.*

parar a Sophie. Tot anava com estava planejat fins que el supervisor del curs Joseph-Louis Lagrange, es va quedar parat de les brillants respostes als exercicis del senyor Le Blanc. A més, no el recordava d'abans com un estudiant massa bo. Lagrange va demanar de parlar amb l'estudiant reformat i Germain va haver de revelar la seva verdadera identitat. Lagrange va quedar molt sorprès i es va fer amic i mentor de la noia. El 1804 estableix relació, encara com a Antoine Auguste Le Blanc, amb Gauss a conseqüència del seu interès pel teorema de Fermat i l'estudi que havia fet de les *Disquisitiones Aritmeticae* de Gauss.

El 1806, Napoléo envaeix Prússia i Brunswick, la ciutat natal de Gauss. Sophie Germain, tement llavors per a la vida del seu amic, demana al general Pernety, a qui coneix personalment, de vigilar la seguretat de Gauss. El general explica llavors a Gauss que Germain li ha demanat de protegir-lo i és quan Gauss sap que es tracta d'una dona.

A l'article *Mémoire sur la courbure des surfaces*, [298], estudia la curvatura de superfícies a partir dels treballs d'Euler. En particular la curvatura mitjana. Autors moderns, com per exemple L. A. Santaló, encara utilitzen en algun dels seus primers articles el nom de *curvatura de Sophie Germain*, per referir-se a la curvatura mitjana. Coneix el *Disquisitiones generales circa superficies curvas* una mica tard i en el mateix article, cap al final, diu[41]:

> "Em sorprenia que que no s'hagués encara mirat de treure partit de la comparació entre la curvatura uniforme de l'esfera i la que presenta qualsevol figura sobre la superfície, quan vaig tenir coneixement d'una memòria publicada recentment per Mr. Gauss, en la que, prenent aquesta comparació des del punt de vista geomètric, l'il·lustre autor compara les corbes traçades sobre les superfícies corbes amb les que es correspondrien sobre la superfície de l'esfera. Jo no he pogut fer més que una lectura ràpida d'aquest treball."[42]

[41] Traducció lliure.
[42] Vegeu `http://www.simonsingh.net/Sophie_Germain.html`.

7.9 Pierre Charles François Dupin (1784-1873)

Neix a Varzy, Borgonya. Alumne de l'École Polytechnique, de la que es gradua el 1803. Segons Struik, el concepte d'indicatriu de Dupin el va descobrir als 16 anys (1800) [guiat per Monge] i el teorema sobre superfícies ortogonals el 1807. Aquest teorema diu que en un sistema triplement ortogonal de superfícies totes les superfícies coordenades es tallen al llarg de línies de curvatura comuns. També introdueix les línies asimptòtiques. Seguint Monge, prova els seus resultats de dues maneres: geomètricament i analíticament. Struik en dóna una breu biografia, vegeu la nota **97** de Struik, pàgina 257.

Figura 7.12: *Pierre C. F. Dupin.*

Degut a les seves obligacions com oficial naval molts dels ses resultats es varen publicar anys després d'haver estat descoberts. De fet, el seu primer destí important va ser Corfou, illa de Grècia, una de les illes Ioniennes, on, a part de fer d'enginyer, participa en la creació de l'Acadèmia ionienne (1808) i té influència en la matemàtica Grega. El 1811 cau malalt i és repatriat a Toulon. Aprofitant una llarga convalescència de 15 mesos escriu alguns dels seus treballs dedicats a Monge. Des de 1819 al 1854 va ser professor al Conservatoire National des Arts et Métiers, a París. Va ser Ministre de marina en el Ministeri dels tres dies, el 1838. Vegeu una biografia detallada a *Charles Dupin (1784-1873) and His Influence on France*, [105].

A la *Correspondance* de l'École Polytechnique hi ha una carta seva, de 1804, titulada *Sur les surfaces de second degré*, [242]. L'objectiu, diu, és donar un mètode general de descripció de les línies i superfícies de segon grau. Dóna la descripció de les quàdriques a partir d'una recta mòbil que reproduïm més endavant, pàgina 90. També apareix, a la pàgina 183 de l'esmentada *Correspondance*, una extracte d'una carta seva datada el 20 d'abril de 1806, a Génes, que comença dient que envia [a l'École] la determinació dels radis de curvatura de les superfícies de segon grau.

Abans, el 1808, havia estudiat ja línies de curvatura. Concretament a la pàgina 70 de *Sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré*, [230], comença un apartat titulat: *Sur la determination des rayons de courbure et des tangentes aux lignes de courbure.*

És curiós que aquest article comença amb un advertiment al lector: "M. Dupin se trouvait chargé d'un service miltaire très-pénible, ajouté aux autres devoirs de son état, lorsqu'il composa cet essai; il n'a pu le corriger ensuite qu0au milieu d'un voyage de quatre cents lieues. On ne doit donc chercher, dans son Mémoire, ni cet ordre de choses qui fait naître l'intérêt, ni la correction et la clarté qu'on est en droit d'exiger des écrits de ce genreL les géomètres jugeront si les pensées en elles-mêmes méritent l'indulgence ou l'oubli".

També de 1808 és *Analyse d'un mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [229]. Les memòries que analitza són diversos resultats de Monge sobre "déblais" i "remblais" fent diverses puntualitzacions. Recorda que Monge diu que el sistema més avantatjós per transportar materials d'un lloc a l'altre, és el que fa que la suma dels productes de les masses dels elements que transportem per l'espai recorregut per cadascun d'ells sigui mínima.

El 14 de desembre de 1812 llegeix a la *première Classe de l'Institut* una nota, [231], que comença dient que presenta uns resultats seus en els que va començar a treballar el 1805. Diu que el seu objectiu principal és l'estudi de la curvatura de les superfícies i les seves aplicacions a exemples extrets dels serveis públics. I, com és habitual a l'època, diu que ha desenvolupat la teoria per la geometria pura i per les aplicacions de l'anàlisi. Per fer-nos una idea dels tipus de resultats que obté comentem, per exemple, que a partir de diverses consideracions, sense cap càlcul, veu que que si dues superfícies tenen un contacte d'un cert ordre al llarg de tota una línia corba, dues seccions planes fetes sobre les superfícies tangencialment a aquesta corba tenen, en el seu punt de contacte, un contacte d'un ordre immediatament superior.

Explica detalladament com calcular els radis de curvatura en un punt qualsevol d'una superfície de segon grau. Però no dóna explícitament la caracterització pel cub de la normal de que parla Laguerre, pàgina 240.

La construcció és la següent. Considera el pla pel centre de la superfície paral·lel al pla tangent en el punt considerat. Considera els dos eixos de la secció determinada per aquest pla sobre la superfície, i els transporta paral·lelament del centre al punt donat. Llavors l'eix major és tangent a la línia de menor curvatura que passa per aquest punt i l'eix menor és tangent a la línia de major curvatura que passa per aquest punt. A més, *el radi* *de menor curvatura és la tercera proporcional a la distància del centre al pla tangent i al semi eix major; i el radi de major curvatura és la tercera proporcional a la distància del centre al pla tangent i al semi eix menor.*

L'octubre del mateix 1812 publica *Mémoire sur la Sphère tangente à trois ou à quatre autres*, [232]. Remarca que la superfície engendrada per l'esfera que es recolza sobre tres esferes és tal que totes les seves línies de curvatura són cercles (vegeu les cyclides de Dupin, pàgina 212, aquí no usa encara aquest nom). Acaba amb un resultat que, segons ell, "peut trouver son appliation dans la coupe des pierres".

Potser la seva obra més coneguda és *Développements de géometrie*, [233], de 1813, comentada a la nota **97** de Struik, pàgina 257. La dedicatòria a Monge comença dient:

> Mon Illustre Maïtre,
>
> Je vous dédie mon premier Ouvrage dans un genre où je dois tout à vos leçons; vos encouragements m'ont engagé dans la carrière aplanie par vos travaux [...]

Està dividit en cinc memòries. La primera es titula *Théorie de la courbure et de l'osculation des surfaces*. L'apartat IV d'aquesta memòria, pàgina 41, es titula *Théorie des tangents conjuguées*. Les introdueix d'una manera complicada amb el llenguatge típic de l'època: tallant cada pla tangent amb un consecutiu etc. Diu que són molt útils en Geometria Descriptiva i posa com exemple que la direcció del raig visual i del contorn aparent són un sistema de tangents conjugades (vegeu la pàgina 93).

La segona memòria es titula *Second Mémoire, spécialement consacré a la théorie des tangentes conjuguées*. El capítol II d'aquesta memòria, pàgina 90, es titula com l'apartat IV de la *Primera*, és a dir, *Théorie des tangents conjuguées*, i Dupin diu que aquesta teoria pot conduir al coneixement de tots els elements de curvatura de la superfície.

Per introduir les tangents conjugades fa la següent observació. Si un pla tangent a una superfície es mou sense deixar de ser tangent, engendra per interseccions successives una superfície desenvolupable. Dos plans consecutius es tallen en una aresta, la primera de les quals tindrà un punt en comú amb la corba de contacte entre la superfície desenvolupable i la superfície donada. Considerem en aquest punt la tangent a la corba de contacte. Aquestes dues rectes tangents a la superfície en diu *tangents conjugades*. Vegeu, més endavant, el Teorema 7.9.2.

A la pàgina 145 comença la *Troisième Mémoire*, titulada *Suite de la théorie des tangents conjuguées*, i l'article primer es titula *De L'indicatrice.* La presenta així:

> "Théorème Fondamental. Pour chaque point non singulier d'une surface, il existe toujours une ligne du second degré placée sur le plan tangent, ayant pour centre le point que l'on considère, et telle enfin qu'elle *indique*[43] et caractérise toujours tout ce qui peut être relatif à la courbure de la surface, à partir du point qu'on a pris pour centre. Telle ést la courbe que nous nommons *indicatrice* "

I a la pàgina 147 escriu:

$$r(X-x)^2+2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2=C$$

> C étant une constante arbitraire.
>
> Or, cette équation est celle d'une courbe du second degré, placée sur le plan tangent à la surface en x, y, z, et de plus, ayant són centre en ce point. *Voilà l'indicatrice*;

A la pàgina 211 obté la fórmula curiosa per al volum de l'el·lipsoide d'eixos a, b, c,

$$V=\frac{4\pi}{3}abc=\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{K}}\Delta^2$$

on Δ és la distància del centre al pla tangent en un punt P de l'el·lpsoide i K és la curvatura de Gauss en P.

La quarta memòria, pàgina 235, es titula *Géométrie Pure.* I a la pàgina 239 apareix el seu famós teorema sobre les superfícies triplement ortogonals:

> "Que l'on conçoive une courbe quelconque tracée dans l'espace, et par chaque point ce cette courbe, trois surfaces arbitraires $(S_1), (S_2), (S_3)$. Si chaque surface (S_1) et chaque surface (S_2) se coupent à angle droit dans toute l'étendue de leur intersection; si pareillement chaque surface (S_1) est coupée à angle droit par chaque surface (S_3), et de même, chaque surface (S_2) par chaque

[43]Dupin remarca aquesta paraula.

> surface (S_3), aussi à angle droit, dans tous les points d'intersection de ces surfaces de différents systêmes: si, en un mot, les surfaces $(S_1), (S_2), (S_3)$ forment ensemble un systême de *trajectoires orthogonales, chaque surface* (S_1) *sera coupée par toutes les surfaces* (S_2) *suivant les différentes lignes d'une de ses courbures, et elle sera coupée par toutes les surfaces* (S_3) *suivant les différentes lignes de la seconde courbure.* De même, chaque surface (S_2) sera coupée par les (S_1) et les (S_3); chaque surface (S_3) la sera par les (S_1) et (S_2), suivant les lignes de première et de seconde courbure."

Estudia detalladament les línies de curvatura de les quàdriques. A la pàgina 272 demostra el resultat següent:

> THÉORÈME. Les projections des lignes de courbure des surfaces su second degré sur les plans principaux, sont des courbes du second degré, dont les axes sont placés sur les axes mêmes de la surface.

I a la pàgina 284 apareix una descripció molt interessant de les quàdriques que, com hem dit, ja la donava a [242].

> THÉORÈME. Lorsqu'une droite mobile s'appuie par trois points fixes sur trois plans principaux, chacune de ses points décrit toute une surface du second degré.

La cinquena memòria es titula *Théorie des surfaces trajectoires orthogonales, appliquée à la détermination des lignes de courbure.* Estudia, per exemple, condicions perquè dos paraboloides es tallin ortogonalment. Acaba amb unes *Notes Principales*, la primera de les quals es titula *Propriétés des lignes de courbure des surfaces du second degré, par rapport à leur projection sur les plans pricipaux. De la projection des lignes de courbure en général.*

No hi he sabut trobar, en canvi, el teorema comentat a la pàgina 240 sobre línies de curvatura que Laguerre atribueix a Dupin. Aquest resultat també apareix anys més tard a l'article de Cosserat *Sur la théorie des lignes tracées sur une surface*, [175] comentat a la pàgina 213.[44]

[44] Eugene Cosserat (1866-1931). Va néixer a Amiens però va ser professor a la Universitat de Toulouse. Més conegut pels seus treballs de Física, sobre tot elasticitat, camp en el que va publicar diversos treballs amb el seu germà, i al que va arribar a partir dels

El 1816 publica *Recherche du plan osculateur et du centre de courbure d'une ligne courbe, en un point donné*, [235], per resoldre el problema posat per Hachette de trobar el pla osculador i el radi de curvatura d'una corba donada per la intersecció de dues superfícies. Diu que les solucions conegudes són complicades i que el més natural en aquesta situació és utilitzar els procediments de la geometria descriptiva i projectar la corba sobre dos plans. Es basa en el lema, que demostra fàcilment, que diu que els centres de curvatura, en un punt P, de totes les projeccions ortogonals d'una mateixa corba, sobre el feix de plans determinats per la tangent a la corba en P estan alineats i aquesta recta és perpendicular al pla osculador de la corba en P.

El 1819 publica un extens treball sobre la vida i obra de Monge, [236], tot un homenatge al mestre i amic, que ja hem comentat a la pàgina 35. Entre moltes altres coses, el treball té 316 pàgines, hi explica breument, a la pàgina 231, la famosa relació entre la teoria de superfícies i el transport de terres: el déblais i el remblais (que ja hem comentat també al peu de pàgina 16, pàgina 37). Diu "Monge fa veure que els camins seguits per anar del déblais al remblai, suposats rectilinis, són les normals d'una superfície única; a partir d'aquí descompon el feix de normals en grups de superfícies desenvolupables que tenen per aresta de retrocés (rebroussement) les línies lloc geomètric dels centres de curvatura de la superfície indicada, i que traçant moltes línies de curvatura sobre aquesta superfície es limita la més avantatjosa del déblai o del remblai ".

clàssics problemes de deformacions de superfícies. En una carta a Bianchi de 1897, [52], p.35, li comenta que Ribaucour li havia parlat del problema de trobar superfícies amb línies asimptòtiques esfèriques. I també li parla de superfícies algebraiques de curvatura constant. I diu: "Je crois bien qu'il n'y a pas de courbe à torsion constante *algébrique* qui soit sphérique". I és que aquest tema, el de la torsió constant, l'havia tractat ja a *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, [176] (vegeu pàgina 221). En una carta de Ribaucour a Bianchi de 1893, [52], p.143, Ribaucour diu que sense l'ajut de Cosserat li hagués estat molt difícil de seguir la Memòria que els hi havia enviat Bianchi. L'article esmentat [175] està escrit suposant que el lector té davant seu el llibre V de les Leçons de Darboux. Així ho diu. I estudia la fórmula (26) de la pàgina 358 d'aquest llibre relacionant-la també amb resultats de Laguerre a [358]. Aquesta fórmula diu

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \tan\omega(2\tau - 3\frac{d\omega}{ds}) = \frac{K\rho}{\cos\omega}$$

on ω és l'angle entre la normal principal a la corba i la normal a la superfície, ρ i τ són el radi de curvatura i la torsió, i K és una certa funció prèviament introduïda que depèn només de la direcció de la tangent a la corba. Compareu aquesta fórmula amb l'expressió de la torsió geodèsica (9.47), pàgina 233.

El 1822 publica *Applications de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts-et-chausses, etc.*, [237], on introdueix les *cyclides* com les superfícies tals que les seves línies de curvatura són cercles (o rectes). També es poden pensar com les imatges per inversions de tors, cilindres i cons. O com superfícies canal.[45] Vegeu pàgina 212.

Laguerre, a *Recherches géométriques sur la cyclide*, [354], les defineix així:

> La cyclide a été étudiée d'abord par M. Dupin, qui en a découvert les principales propriétés; depuis elle a été le sujet des travaux d'un grand nombre de géométres. La cyclide est un cas particulier des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, et elle jouit de toutes leurs propriétés. Elle peut être définie ainsi qu'il suit: Etant donnée une conique K et un cercle C doublement tangent à cette conique, la cyclide est l'enveloppe des spheéres dont les centres sont situés sur la conique K et qui coupent orthogonalement une sphère quelconque passant par C.

El 1826 publica *Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts*, [238], que dedica als obrers francesos, i és un text molt aplicat que comença amb geometria clàssica i acaba amb geometria diferencial. Per exemple, el capítol XIV es titula *Des tangentes et des planes tangens aux courbes et aux surfaces*, i té seccions com ara *Exemple pris dans les arts du boulanger, du jardinier et du carrossier*, *Suspension des carrosses à des courrois planes, tangentes à la caise cylindrique du carrosse*, *Application à la configuration des armes à feu, au calibrage des projectiles, etc*, *Des surfaces enveloppes qu'on peut former par la flexion de certains lignes auxquelles on attache les surfaces enveloppées*, *Importance pour les artistes d'un examen attentif des moyens variés d'engendrer les différentes espèces de surfaces, par les mouvements réguliers de lignes continues*, etc.

El capítol XV es titula *Courbure des lignes et des surfaces* i a part dels temes típics de curvatura, cercle osculador, etc., tracta temes aplicats com *Moyen employé par les constructeurs de vaisseaux, pour tracer des courbes continues avec des régles flexibles*; *Utilité, pour le peintre et le sculpteur, d'étudier les diverses espèces de courbures.*

El 1847 i 1848 publica tres notes a la segona de les quals defineix el *télégraphe géométrique*, com una cnstrucció que fa sobre les corbes; són

[45] A l'entrada Dupin-cyclide de wikipedia hi ha un bon resum. A la pàgina `http://www.mathcurve.com/surfaces/cycliddedupin/cyclidededupin.shtml` hi ha fins a vuit definicios equivalents de cyclide!

Premier Mémoire sur les courbes du troisième ordre, [239], *Mémoire sur les éléments du troisième ordre de la courbure des lignes*, [240] i *Troisème Mémoire sur les éléments du troisième ordre de la courbure des lignes; valeurs spéciales données par le télégraphe géométrique*, [241].

Direccions conjugades

Comentem, en llenguatge actual, les direccions conjugades de Dupin, [233].

Diàmetres conjugats

Recordem que dos diàmetres d_1, d_2 d'una cònica es diuen *conjugats* quan d_2 és paral·lel a la tangent a la cònica en el punt en que aquesta talla d_1. Es veu fàcilment que no depèn de quin dels dos punts de tall entre d_1 i la cònica es consideri, i que d_1 és conjugat a d_2 si i només si d_2 és conjugat a d_1. En el cas de l'el·lipse aquestes afirmacions són evidents a partir de l'aplicació entre ella i la circumferència considerada a la pàgina 12.

Aquesta mateixa aplicació també permet veure que el diàmetre d_1 és conjugat al diàmetre d_2 si i només si d_2 és el lloc geomètric dels punts mitjos de les cordes paral·leles a d_1.

Teorema 7.9.1 *Sigui*

$$\Phi(x,x) = a^{ik}x_i x_k = p,$$

amb p constant, una el·lipse o una hipèrbola. Siguin x, y direccions que corresponen a diàmetres conjugats. Llavors $\Phi(x,y) = 0$.

Demostració. Sigui d_1 el diàmetre de direcció x i d_2 el diàmetre de direcció y.

Per la caracterització de diàmetres conjugats com punts mitjos de les cordes, existeix una constant c tal que els punts $y + cx$, $y - cx$ pertanyen tots dos a la cònica. Per tant,

$$\begin{aligned} \Phi(y+cx, y+cx) &= p, \\ \Phi(y-cx, y-cx) &= p. \end{aligned}$$

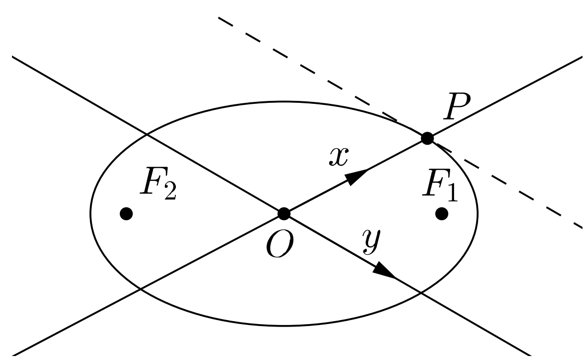


Figura 7.13: *Diàmetres conjugats.*

Restant aquestes dues equacions obtenim

$$4c\Phi(x,y) = 0,$$

com volíem. $\square$

Direccions conjugades

Recordem que la indicatriu de Dupin en un punt P d'una superfície S és la cònica del pla tangent T_PS donada, respecte de la base ortonormal de centre P formada per les direccions principals, per l'equació

$$k_1x^2 + k_2y^2 = 1,$$

on k_1, k_2 són les curvatures principals.

Dues direccions tangents en un punt d'una superfície es diuen *conjugades* quan ho són respecte de la indicatriu de Dupin.

Això vol dir que si e_1, e_2 és la base ortonormal de direccions principals de T_PS i $\vec{u} = u_1e_1 + u_2e_2$ i $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2$ llavors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són direccions conjugades si i només si

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2 = 0,$$

que s'acostuma a escriure com

$$\tan\theta \tan\theta' = -\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

on $\rho_i = 1/k_i$ són els radis de curvatura i θ i θ' les tangents dels angles que les direccions formen amb e_1.

Una altra manera de pensar les direccions conjugades, en llenguatge clàssic és la següent: *Les direccions conjugades són les formades per dos punts pròxims i la intersecció dels plans tangents en aquests punts.* Més precís: *Siguin P i Q punts pròxims sobre una superfície, i considerem els plans tangents en aquests punts i la recta intersecció. Quan $Q \to P$ les posicions límits de les direccions PQ i de la recta intersecció són conjugades.* Formalitzem-ho.

Teorema 7.9.2 *Sigui $\gamma(t)$ una corba sobre una superfície, i $w(t)$ el vector unitari que dóna la direcció de la recta intersecció dels plans tangents a la superfície en els punts $\gamma(0)$ i $\gamma(t)$. Llavors les direccions $\gamma'(0)$ i $\lim_{t\to 0} w(t)$ són conjugades.*

Demostració. Sigui $(t, y(t))$ una corba sobre un a superfície $z = z(x, y)$. Suposem $y(0) = 0$ i $0 = z(0,0)$ i $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$. D'aquesta manera la segona forma fonamental a l'origen està formada per les derivades segones en aquest punt. Tot això són simplificacions que no afecten la natura del problema.

Tallem el pla tangent a la superfície en el punt $\gamma(t) = (t, y(t), z(t, y(t)))$ amb el pla tangent a la superfície en el punt $\gamma(0)$. Denotem $z(t) = z(t, y(t))$. El pla tangent en el punt $\gamma(t)$ és

$$p(x - t) + q(y - y(t)) - (z - z(t)) = 0,$$

amb $p = p(t) = z_x(t, y(t))$ i $q = q(t) = z_y(t, y(t))$. Tallant amb $z = 0$ obtenim la recta

$$p(x - t) + q(y - y(t)) + z(t) = 0,$$

que té vector director unitari

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}(q, -p, 0).$$

Ara hem de calcular $\lim_{t\to 0} w(t)$. Per a a això calculem primerament $\lim_{t\to 0} \frac{p}{q}$. Aplicant l'Hôpital i la regla de la cadena tenim

$$\lim_{t\to 0} \frac{p}{q} = \frac{r + sy'}{s + ty'},$$

on r, s, t són les derivades segones a l'origen i $y' = y'(0)$. Substituint a cadascuna de les coordenades de $w(t)$ tenim

$$\lim_{t\to 0} \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{(p/q)^2 + 1}} = \frac{s + ty'}{\sqrt{(r + sy')^2 + (s + ty')^2}}$$

i

$$\lim_{t\to 0} \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{\sqrt{(q/p)^2 + 1}} = \frac{-r - sy'}{\sqrt{(r + sy')^2 + (s + ty')^2}}$$

Així,

$$\lim_{t\to 0} w(t) = \frac{1}{\sqrt{(r + sy')^2 + (s + ty')^2}}(s + ty', -r - sy').$$

Però aquesta direcció és conjugada, respecte de la segona forma fonamental, de la direcció de la corba en $t = 0$, ja que

$$(1, y') \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + ty' \\ -r - sy' \end{pmatrix} = 0.$$

Ara bé, en la base ortonormal e_1, e_2 de vectors principals, la matriu de la segona forma fonamental és diagonal amb k_1, k_2 a la diagonal, ja que $II(e_i, e_j) = I(We_i, e_j) = k_i \delta_{ij}$, on W és l'endomorfisme de Weingarten. Així, la condició $II(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, per a dos vectors arbitraris $\vec{u}$, $\vec{v}$, vol dir que

$$0 = II(\vec{u}, \vec{v}) = I(W\vec{u}, \vec{v}) = I(W(u_1e_1 + u_2e_2), v_1e_1 + v_2e_2) = k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2,$$

és a dir, les direccions $\vec{u}, \vec{v}$ són direccions conjugades respecte de la indicatriu de Dupin. $\square$

Observem que com que l'equació d'Euler diu

$$\frac{k_1}{k_n} \cos^2 \theta + \frac{k_2}{k_n} \sin^2 \theta = 1,$$

els punts $(\frac{\cos\theta}{\sqrt{|k_n|}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{|k_n|}})$ pertanyen a la indicatriu, i així la longitud d'un semidiàmetre és l'invers de l'arrel quadrada del valor absolut de la curvatura normal en la direcció considerada.

7.10 Louis Leger Vallée (1784-1864)

Neix a Sèvres. El 1800 entra a l'École Polytechnique. Alumne de Monge i Hachette. Després esdevé Enginyer de ponts i camins. Va ser un dels primers contribuents a la teoria de l'elasticitat. Introdueix el nom de *torsió*. Va escriure *Traité de géométrie descriptive*, [559], dedicada a Monge. Utilitza les expressions *angle de curvatura* i *angle de torsió*. Concretament a la pàgina 295 de l'edició de 1825 de [559] diu:

> "le rayon de courbure qui correspond à chacun de ses points se trouve déterminé par l'angle infiniment petit des deux plans normaux consécutifs qui correspondent à ce point: nous donnons à cet angle le nom d'*angle de courbure*; que ce qui fait qu'ne courbe *non plane*, ou comme on dit à double courbure,

> change de plan à chaque élément, est, comme on doit le sentir et comme on le verra clairement tout à l'heure, une sorte de torsion de ses éléments les uns autour de les autres, torsion qui est déterminée par l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs consécutifs: nous nommerons cet angle, *angle de torsion*."

L'obra, sense fórmules ni càlculs ni derivades!, està organitzada en sis llibres. El primer és una introducció, el segon titulat *Surfaces courbes* parla de superfícies de revolució, superfícies guerxes, superfícies envolupants. El llibre tres va de plans tangents i el quart d'intersecció de superfícies. En el cinquè, titulat *Questions diverses*, parla de desenvolupaments de superfícies i de trigonometria esfèrica. Finalment, el llibre 6 titulat *Complemets* té quatre capítols: *I. Des surfaces gauches.*[46] *II. Des enveloppes et de leurs arètes de rebroussement. III. Des tangentes, des rayons de courbure, et des développées des lignes courbes. IV. Des rayons de courbure et des lignes de courbure des surfaces courbes.*

Reproduïm una de les 60 planxes amb que acaba el llibre a la pàgina 245. Vegeu la nota **22** de Struik, pàgina 251.

7.11 Jean Victor Poncelet (1788-1867)

Figura 7.14: *Jean Victor Poncelet.*

Neix a Metz, França. Entra com alumne de l'École Polytechnique el 1807 i es gradua el 1810. Té professors de renom, com Gaspard Monge (el seu director de tesi), Lazare Carnot, Charles Brianchon, Sylvestre Lacroix, André-Marie Ampère, Louis Poinsot, i Jean Hachette. Després d'una carrera militar, durant la qual acompanya Napoleó en a la seva campanya contra Rússia, és nomenat director de l'École Polytechnique el 1848, càrrec que ocupa un parell d'anys. Va escriure *Applications d'analyse et de géométrie* el 1862, basant-se en notes seves quan estava presoner a Saratov, [480].

[46] Per ell "surface gauche" vol dir superfície reglada.

No obstant és més reconegut pels seus treballs en geometria projectiva. A *Traité des propriétés projectives des figures*, [479], introdueix les rectes isòtropes sobre corbes imaginaries[47]. Treballa sobre el Teorema de Feuerbach, punts conjugats harmònics, principi de dualitat, etc. Un dels resultats que es coneix com Teorema de Poncelet diu: *Tota projectivitat entre rectes d'un espai projectiu és igual a la composició de com a molt, tres perspectivitats.*

7.12 Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Neix a París. Alumne de l'École Polytechnique de 1805 a 1807. Té com a professors Lacroix, Hachette, Ampère, etc. Professor de l'École Polytechnique a partir de 1815. En el seu llibre *Leçons sur l'application du calcul infinitesimal á la Géométrie*, [124], estudia les corbes de l'espai per mètodes més moderns i semblants als actuals que els usats per Lancret. En particular considera les corbes parametritzades per l'arc. Demostra les que avui es coneixen com les dues primeres fórmules de Frenet. La tercera apareix en el treball de Frenet *Sur les courbes à double courbure*, [286].

Per fer-nos una idea més fidedigna de les *Lliçons* en reprodueixo els seus títols.

Lliçó 1. *Inclinaison d'une courbe plane en un point donné. Equations de la tangente et de la normale à cette courbe.* Lliçó 2. *Des longueurs appélées sou-tangentes, sous-normales, tangentes et normales des courbes planes.* Lliçó 3. *Centres, diametres, axes et asymptotes des courbes planes.* Lliçó 4. *Proprietés diverses des courbes planes déduites des equations de ces mêmes courbes. Points singuliers.* Lliçó 5. *Differential de l'arc d'une courbe plane. [. . .]* Lliçó 6. *De la courbure d'une courbe plane en un point donée. Rayon de courbure et centre de courbure.* Lliçó 7. *Determination analytique du centre de courbure d'une courbe plane. Théorie des développées et des développantes.* Lliçó

Figura 7.15: *Augustin Louis Cauchy.*

[47]Vegeu-ne un petit resum a la secció 1-12. p. 52, de Struik [550]. I la nota **52**, pàgina 253.

8. *Sur les courbes planes qui sont osculatrices l'une de l'autre en un poiunt donné.* Lliçó 9. *Sur les diverses ordres de contacte des courbes planes.* Lliçó 10. *Sur les diverses espèces de contacte que peuvent offrir deux courbes planes [...]* Lliçó 11. *Sur l'usage que l'on peut faire des coordonnés polaires [...]* Lliçó 12. *Usage des coordonnés polaires pour la determination de l'inclinaison de l'arc, du rayon de courbure, etc. d'une courbe plane.* Lliçó 13. *De la tangent et des plans tangents [...]* Lliçó 14. *Des planes tangents et des normales aux surfaces courbes.* Lliçó 15. *Centres et diamètres des surfaces courbes [...]* Lliçó 16. *Differentielle de l'arc d'une courbe quelconque [...]* Lliçó 17. *Du plan osculateur d'une courbe quelconque et de ses deux courburtes. Rayon de courbure, centre de courbure, et cercle osculateur.* Lliçó 18. *Determination analytique du centre de courbure [...]* Lliçó 19. *Rayons de courbure des sections faites dans une surface par des plans normaux. Rayons de courbure principaux. Des sections dont la courbures sont nulles et le cas oú les rayons de courbure principaux sont dirigés en sens contraire.* Lliçó 20. *Rayons de courbure des differentes courbes que l'on peut tracer sur une surface donnée. Des surfaces qui son osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun.* Lliçó 21. *Sur les divers ordres de contact des courbes traces dans l'espace.* Lliçó 22. *Sur les divers ordres de contact des surfaces courbes.*

Al llibre *Exercices de Mathématiques*, [123][48], hi ha un capítol titulat *Sur un Théoreme relatif au contact des courbes*, p. 177-184[49] i un altre titulat *Sur les divers ordres de contact des lignes et des surfaces*, p. 221-252. En aquest últim demostra resultats com ara el següents (p. 226 i p. 244).

> " THÉORÈME I. Si deux courbes se touchent en un point P, et que l'on marque sur ces deux courbes deux points Q, R situés à la distance infiniment petite i du point de contacte, le rapprochement entre les deux courbes, dans le voisinage de ce point, sera d'autant plus considérable que l'ordre de la quantité infiniment petite ω, destinée à représenter l'angle compris entre les rayons vecteurs PQ, PR, sera plus élevé."

> " THÉORÈME IX. Lorsque deux surfaces ont entre elles en un point donné un contacte de l'ordre a, tout plane normal ou obli-

[48]Podeu trobar les Obres completes de Cauchy a `http://gallica.bnf.fr/`, i posant *Oeuvres completes d'Augustin Cauchy.*

[49]La numeració de les pàgines, aquí i més endavant, fa referència a les *Oeuvres completes d'Augustin Cauchy*, serie 2, Vol. 6.

que, qui forme un angle sensible avec le plan tangent commun à ces deux surfaces, les coupe suivant deux courbes qui ont entre elles un contact de l'ordre a ou d'un ordre supérieur."

A *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, [125], apareix la famosa *fórmula de Cauchy* per al càlcul de la longitud a partir de projeccions. Diu

" THÉORÈME I. p désignant l'angle polaire que forme une droite OO', tracée à volonté dans un plan $OO'O''$, avec un axe fixe, S le systéme d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes, fermées ou non fermées, A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO' et π le rapport de la circonférence au diamétre, on aura

$$S = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp.''$$

També demostra que

" THÉORÈME II. Les mêmes choses étant posées que dans le théoreme précédent: soient mesurées, par un point de plan $OO'O''$, n droites qui comprennent entre elles des angles ègaux et nommons M la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondant à ces n droites. On aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$S = \frac{1}{2}\pi M;$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant le produit $\frac{1}{2}\pi M$ pour valeur the S sera inferieure au rapport qui existe entre ce produit et le carré de n, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2}\frac{\pi M}{n^2}$$

pourvu que le nombre entier n surpasse 2."

A la segona edició dels *Exercicis de Matemàtiques*, [123], p. 36-82[50], hi ha una secció titulada *Des surfaces que peuvent engendrer, en se mouvant*

[50]La numeració de les pàgines aquí i unes línies més avall, fa referència a les *Oeuvres completes d'Augustin Cauchy*, Serie 2, Vol. 8, [127].

dans l'espace, des lignes droites ou courbes de forme constante ou variable, seguida d'una altra titulada *Discussion des lignes et des surfaces du second degree*, p. 83-150, on classifica les còniques i les quàdriques.

A la primera hi demostra per exemple el resultat següent (p. 65).

> " Théorème I. Si, aprés avoir tracé dans une ellipse un rayon quelconque r, on divise successivement l'unité par le carré de ce rayon et par le carré de chacune des deux distances s, t qui séparent le centre des points oú le rayon prolongé rencontre deux tangentes conjuguées, le premier quotient sera equivalent à la somme des deux otres. "

I un resultat similar per a hipèrboles. Calcula les equacions de la superfície cilíndrica circumscrita a un paraboloide el·líptic o hiperbòlic i resolt diversos exemples de construcció de superfícies amb certes propietats, com ara fer passar per una directriu donada una superfície cònica amb vèrtex donat.

7.13 Michel Chasles (1793-1880)

Neix a Épernon (Eure-er-Loir). Alumne de l'École Polytechnique el 1812. Llegeix la tesi el 1814, dirigida per Poisson. El 1837 publica *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, [137], un text essencialment de Geometria Projectiva[51], que li dóna fama suficient com per esdevenir professor de l'Ècole Polytechnique de 1841 a 1846. Aquest any va passar a ser professor a la Sorbona fins la seva mort.

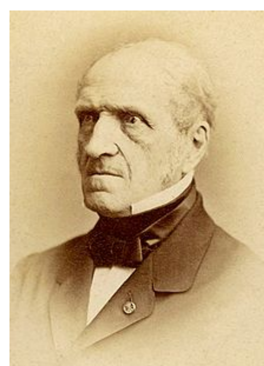


Figura 7.16: *Michel Chasles.*

[51] Jo m'havia trencat el cap mirant de trobar un article de Monge titulat *Mémoire sur les surfaces réciproques*, de 1808, publicat suposadament a les Mémoires de l'Académie de Sciences de París. Monge el cita a les seves *Applications*, [452], amb un breu resum i la definició detallada de superfícies recíproques. Vaig arribar a la conclusió que potser no s'havia arribat a publicar. Per això la meva sorpresa quan llegint l'*Aperçu historique*, veig que Chasles parlant d'aquest suposat article de Monge diu: "Il devait faire partie des mémoires de l'Institut année 1808; mais je crois qu'il n'a point été publié". I dedica tota una Nota a desenvolupar les poques línies de resum que apareixen a les *Applications*.

Va estudiar sobre tot les quàdriques. El 1830 va publicar diverses notes curtes sobre aquest tema, que es poden trobar al mateix número de la revista de A. Quetelet, que citem només per fer-nos una idea dels temes que li interessaven, encara que no utilitza els mètodes propis de la geometria diferencial. Són *Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré*, [131], *Théorèmes sur les surfaces du second degré*, [136], *Premier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures*, [130], *Second mémoire sur les transformations paraboliques des relations métriques des figures*, [134], *Extrait d'un Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré*, [132], *Propriétés générales des surfaces du deuxième degré*, [133], *Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré*, [135].

El primer paràgraf del citat [131] ens dóna idea del seu mètode:

> "Lorqu'on emploie la théorie des polaires réciproques dans la recherche des propriétés des surfaces du second degré, on a constamment à considérer la surface polaire d'une conique, laquelle est un cône du second degré, et la courbe polaire d'un cöne de second degré, laquelle est une conique."

La tècnica de *polars recíproques* l'explica així: Sigui A una esfera de radi 1 fixada (l'esfera auxiliar).

1. El pol d'un pla és un punt sobre el diàmetre de l'esfera perpendicular al pla, i la distància d'aquest punt al centre de A és l'invers de la distància del pla al centre.

2. La polar d'una recta està dins el pla perpendicular a aquesta recta que passa pel centre de l'esfera A.[52]

3. Les rectes des del centre de l'esfera A als pols de dos plans formen entre elles el mateix angle que els plans.

4. Els plans des del centre de l'esfera A als pols de dues rectes formen entre ells el mateix angle que aquestes rectes.

5. La recta des del centre de l'esfera A al pol d'un pla fa amb el pla pel centre i per la polar d'una recta un angle igual al que aquesta recta fa amb el pla.

[52] No diu que és una recta ni com es construeix.

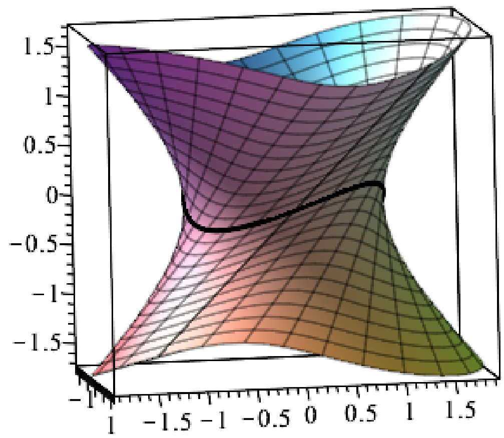
6. La superfície polar d'una corba plana és un con de vèrtex el pol del pla d'aquesta corba.

7. Recíprocament, la corba polar d'un con és una corba plana situada sobre el pla polar del vèrtex del con.

És molt semblant a dir que les inversions són conformes (però les inversions porten punts a punts). Però així com les inversions porten cercles a cercles, la polar recíproca d'una esfera no és en general una esfera. Chasles demostra que la polar recíproca d'una esfera és una quàdrica de revolució amb un focus al centre de l'esfera auxiliar i pla director corresponent a a quest focus el pla polar del centre de l'esfera.

Sobre superfícies reglades va publicar *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, el 1839, [138]. És on introdueix el nom de *punts centrals*, però en aquest article no utilitza encara el nom *línia d'estricció* per referir-se a la corba formada per aquests punts. No obstant, Struik li atribueix a ell aquest nom, vegeu la nota **221**, pàgina 267.

Els punts centrals apareixen a partir de la consideració següent. Quan tenim dues rectes a l'espai tenim dos punts privilegiats: el peus de la perpendicular comú, o, equivalentment, els punts que realitzen la distància mínima entre dues rectes. Aquesta mateixa idea aplicada a les superfícies reglades ens dóna la corba d'estricció: és la corba formada pels punts que realitzen la distància mínima entre "rectes consecutives" (fixar una recta, agafar-ne una de pròxima, trobar els punts privilegiats i passar al límit). Podeu veure els detalls, per exemple a [491]. Per exemple, la corba d'estricció de l'hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ és la corba plana que s'obté tallant aquesta superfície amb el pla $z = 0$. Aquesta corba està formada pels punts on les rectes "estan més juntes". Però és sorprenent que la corba d'estricció de l'hiperboloide $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ no és plana!



En aquest mateix article [138] és on apareix el resultat, conegut també com Teorema de Chasles, que descriu com va girant el pla tangent al llarg de les rectes generatrius. Concretament

$$\tan\phi(s) = \frac{s}{p}$$

on $\phi(s)$ és l'angle entre dos plans tangents a la superfície, un d'ells en un punt Q de la corba d'estricció i l'altre a distància s d'aquest punt per sobre de la generatriu per Q. La constant p és el paràmetre de distribució en P.

Chasles, a la pàgina 54 de [138], ho diu així:

> "Un plan quelconque étant mené par une génératrice d'une surface gauche, la distance du point oú il est tangent à la surface au *point central o* relatif à la génératrice, est proportionelle à la tanegent trigonométrique de l'inclinaison de ce plan sur le plan tangent a la surface au point o."

El 1843 publica *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace*, [139], on estudia les trajectòries que descriuen els punts d'una superfície quan aquesta es mou a l'espai. Estudia així superfícies paral·leles. Diu concretament que quan una superfície corba experimenta un moviment infinitament petit a l'espai els plans normals a les trajectòries dels seus punts són l'envolvent d'una segona superfície. I estudia propietat d'aquesta segona superfície, per exemple si la primera és de segon grau la segona també, etc.

El 1846 estudia geodèsiques i línies de curvatura de quàdriques a *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré*, [141] i *Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales; Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces*, [140].

Citem finalment els seus famosos tractats *Traité de géométrie superieure*, [142] (1852) i *Traité des sections coniques*, [143], (1865).

Va ser el director de tesi de Darboux (1866) i el primer director de la Societat Matemàtica de França el 1873.

7.14 Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851)

Neix a Bordeaux. Alumne de Monge a l'École Polytechnique. Presenta dues tesis doctorals, una titulada *De l'attraction des sphéroïdes*, [517], i l'altra sobre el moviment de rotació d'un cos sòlid, ambdues davant un tribunal presidit per Lacroix. La fórmula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

on $P_n(x)$ és un polinomi de Legendre, que apareix a la seva primera tesi, es coneix com fórmula de Rodrigues.

El seu resultat més citat, que apareix com un comentari a les primeres línies de *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces*, [515], és el següent.

Teorema 7.14.1 *Els vectors principals són vectors propis de l'aplicació de Weingarten i les curvatures principals són els corresponents valors propis. Dit d'una altre manera, una corba $\alpha(t)$ sobre una superfície és línia de curvatura si i només si*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

on $N(t) = N(\alpha(t))$ és la restricció a la corba del camp normal a la superfície i $\lambda(t)$ és una funció que coincideix (potser amb signe canviat) amb la curvatura principal en la direcció $\alpha'(t)$.

Rodrigues l'escriu així:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dY}{dy} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{R},$$

on X, Y, Z són els cosinus directors de la normal i dx, dy, dz les projeccions sobre els eixos de l'element d'arc de la línia de curvatura. Que, per cert, la defineix com Monge: una línia tal que dues normals a la superfície que passin per punts consecutius de la corba es tallin.

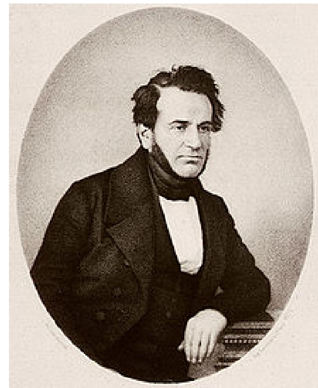


Figura 7.17: *Benjamin Olinde Rodrigues.*

Va ser banquer i reformador social. El nom d'Olinde va ser afegit als seus cognoms quan el 1807 es va obligar als Jueus residents a França a posar-se noms d'origen francès. En els exàmens d'entrada a l'École Polytechnique el 1811 va quedar primer, seguit de Chasles. Vegeu la nota **107** de Struik, pàgina 258.

7.15 Gabriel Lamé (1795-1870)

Neix a Tours. Alumne de l'École Polytechnique entre 1813 i 1817. Publica *Sur les intersections des lignes et des surfaces*, [361], ja el 1816. És un treball elemental on essencialment resol sistemes d'equacions de primer i segon grau. No utilitza tècniques de geometria diferencial. Va ser professor durant 12 anys a Sant Petersburg. El 1832 torna a París i és nomenat professor de física a l'École Polytechnique.

Estudia les avui conegudes com corbes de Lamé, donades per

$$\left|\frac{x}{a}\right|^r + \left|\frac{y}{b}\right|^r = 1.$$

Introdueix els *paràmetres diferencials*, motivat pels seus estudis de Física Matemàtica, vegeu el seu treball de 1833 *Sur la propagation de la chaleur dans Polyèdres*, [362].

No pensa mai una superfície aïlladament sinó formant part sempre d'una família de superfícies. És la idea de considerar una funció "temperatura" a l'espai i considerar les superfícies isotermes, és a dir, amb la mateixa temperatura.

A *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température*, [363], de 1837, estan en germen els paràmetres diferencials encara que no els menciona.

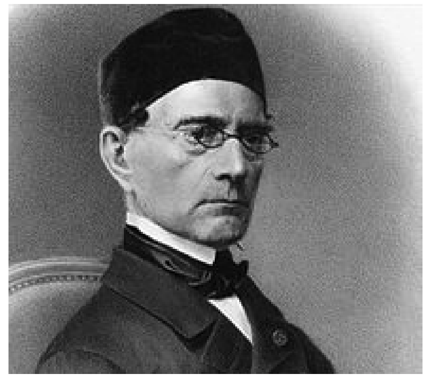


Figura 7.18: *Gabriel Lamé.*

Comença amb l'equació del calor. Quan un cos sòlid homogeni està en equilibri de temperatura, sota la influència de fonts constants de calor i fred, la temperatura $V = V(x, y, z)$ compleix[53]

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Dins d'aquest cos sòlid s'hi troben superfícies d'igual temperatura, les *superfícies isotermes*, les quals es poden descriure per l'equació

$$F(x, y, z) = \lambda$$

on λ és un paràmetre constant en cada superfície.

Aquesta λ pensada com funció de (x, y, z) ha de complir una certa equació en derivades parcials.

Com V i λ són constants o variables conjuntament, podem pensar que

$$V = V(\lambda).$$

Així,

$$\begin{array}{rcl}
\frac{dV}{dx} & = & \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}(\frac{d\lambda}{dx})^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2} \\
\frac{dV}{dy} & = & \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, \quad \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}(\frac{d\lambda}{dy})^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2} \\
\frac{dV}{dz} & = & \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}, \quad \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}(\frac{d\lambda}{dz})^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2}
\end{array}$$

[53]Ja el 1833 Lamé havia proposat a *Loi de l'equilibre du fluide éthéré*, [362] la fórmula

$$\nabla(\log \rho) = 0,$$

del mateix tipus que l'equació del calor, per a la funció de densitat de l'èter $\rho = \rho(x, y, z)$.

per tant, l'equació del calor $\Delta V = 0$ equival a

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]+\frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)=0.$$

En particular, el quocient

$$\frac{\Delta\lambda}{\|\nabla\lambda\|^2}=\Psi(\lambda) \tag{7.2}$$

per a una certa funció Ψ, ja que aquest quocient és igual al quocient entre les derivades segona i primera de V canviat de signe, i V depenen només de λ. $\|\nabla\lambda\|$ i $\Delta\lambda$ seran els paràmetres diferencials de primer i segon ordre.

El 1838 publica una nota als Comptes Rendus titulada *Mémoire sur les coordonnées curvilignes*, [364], i el 1840 un article al Journal de Liouville amb el mateix nom, [365][54], que conté, completament explicitats, els resultats enunciats a [364].

Diu a la introducció de [365] que una funció de tres coordenades lineals, igualada a una constant, representa una infinitat de superfícies que difereixen en el valor d'aquesta constant, que proposa anomenar *paràmetre*. Defineix *superfícies conjugades ortogonals* com tres sistemes de superfícies tals que una superfície d'un sistema talla ortogonalment a totes les superfícies dels altres dos sistemes.

Segons el teorema de Dupin aquestes superfícies es tallen al llarg de línies de curvatura.

Aquests tres sistemes es poden considerar com unes noves coordenades a l'espai: cada punt de l'espai queda determinat per les tres superfícies que es tallen en aquest punt, i per tant, pels tres valors corresponents dels respectius paràmetres.

Així, si

$$f_1(x,y,z)=h_1, f_2(x,y,z)=h_2, f_3(x,y,z)=h_3,$$

és un sistema triplement ortogonal podem pensar (h_1,h_2,h_3) com un nou sistema de coordenades a l'espai.

[54]En el mateix volum del Journal de Liouville on apareix aquest article, hi apareixen també una nota del propi Lamé i una altra de Lebesgue sobre la impossibilitat de resoldre sobre els enters l'equació $x^7+y^7=z^7$.

Observa també que en cada punt té sis curvatures: les dues curvatures principals de cadascuna de les tres superfícies que determinen el punt.

Introdueix a continuació els *paràmetres diferencials*. Donada la família

$$\rho = f(x, y, z)$$

observa que les expressions

$$\sqrt{(\frac{d\rho}{dx})^2 + (\frac{d\rho}{dy})^2 + (\frac{d\rho}{dz})^2}, \qquad \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}$$

formades pels coeficients diferencials de primer i segon ordre de la funció ρ, conserven els mateixos valors numèrics per cada punt d'una de les superfícies donades, independentment de quins siguin els eixos de coordenades. I diu:

> "J'appellerai ces expressions les paramètres différentiels du premier et du second ordre de la surface ou de la fonction ρ; je désignerai le second par le symbole $\Delta_2\rho$, et le premier, à cause de sa frécuence dans les calculs qui von suivre, par la simple lettre h;[55]

I de seguida diu, sense cap més comentari, perquè és el càlcul que havia fet a l'article de 1837, [370], i que hem explicitat anteriorment, equació (7.2), que si les superfícies donades formen un sistema de superfícies isotermes es compleix

$$\frac{\Delta_2\rho}{h^2} = f(\rho)$$

de manera que "le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré du paramètre différentiel du premier, est constant sur chacune de ces surfaces".

Demostra que

$$\Delta_2\phi = hh_1h_2\left(\frac{d\frac{h}{h_1h_2}\frac{d\phi}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\frac{h_1}{hh_2}\frac{d\phi}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{h_2}{h_1h}\frac{d\phi}{d\rho_2}}{d\rho_2}\right)$$

on, si els tres sistemes de superfícies ortogonals són

$$f(x, y, z) = \rho, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2,$$

[55] Aquesta h es denotarà $\Delta_1\rho$.

les funcions h, h_1, h_2 estan definides per

$$\begin{aligned} h^2 &= (\frac{d\rho}{dx})^2 + (\frac{d\rho}{dy})^2 + (\frac{d\rho}{dz})^2 \\ h_1^2 &= (\frac{d\rho_1}{dx})^2 + (\frac{d\rho_1}{dy})^2 + (\frac{d\rho_1}{dz})^2 \\ h_2^2 &= (\frac{d\rho_2}{dx})^2 + (\frac{d\rho_2}{dy})^2 + (\frac{d\rho_2}{dz})^2 \end{aligned}$$

que es pot reescriure (recordem que (ρ, ρ_1, ρ_2) és un nou sistema de coordenades ortogonals de l'espai, vegeu [342]) dient que si tenim coordenades (u_1, u_2, u_3) tals que

$$ds^2 = g_{11}du_1^2 + g_{22}du_2^2 + g_{33}du_3^2$$

llavors

$$\Delta_2\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_3})\right).$$

Es pot veure que

$$g_{11}h^2 = g_{22}h_1^2 = g_{33}h_2^2 = 1$$

i per tant les dues expressions de $\Delta_2\phi$ coincideixen.

Aquest treball té una segona part on estudia les sis curvatures abans esmentades i les relacions entre elles. Com el cas general és difícil, tot i que lamé obté molta informació, es restringeix al cas en que les tres famílies ortogonals són isotermes: cadascuna d'elles depèn d'un paràmetre ρ tal que el quocient

$$\Delta_2\rho/(\Delta_1\rho)^2$$

és funció de ρ. Llavors pot dir entre altres coses que *el producte de tres dels radis de curvatura, presos en un cert ordre, és igual al producte dels altres tres.*

El 1841 aplica els seus coneixements de famílies triplement ortogonals a les superfícies en que divideix un sòlid no per igual temperatura sinó per igual pressió i equilibri. Vegeu *Mémoire sur les surfaces isostatiques*, [366].

El 1843 publica *Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes*, [368], on demostra que els sistemes de superfícies que són a la vegada triplement ortogonals i isoterms són els formats per quàdriques cofocals. La prova és millorada posteriorment per Bonnet, [62], i Liouville, [415].

El mateix any publica una breu nota als Comptes Rendus gairebé amb el mateix nom *Mémoire sur les surfaces isothermes et orthogonales*, [367], on explica, sense cap fórmula ni càlcul, el cas en que els tres sistemes de superfícies ortogonals són isotermes, cosa que ja havia fet el 1840 a [365] i torna a parlar de la propietat del producte dels tres radis de curvatura que hem comentat abans. No s'entén massa el motiu de la publicació d'aquesta nota.

Sembla que Lamé pensava que tota família uniparamètrica de superfícies es podia completar amb dues famílies més per tal de tenir un sistema triplement ortogonal. Bouquet[56] a *Note sur les surfaces orthogonales*, [97], va donar un contraexemple a aquest resultat, que atribueix a Chasles i no pas a Lamé. Posteriorment Darboux demostra que per que dos sistemes ortogonals de superfícies siguin ortogonals a un tercer sistema és condició necessària i suficient que les línies d'intersecció dels dos sistemes sigui línies de curvatura d'aquestes superfícies.

El 1851 publica *Mémoire sur les variations des coordonées curvilignes*, [369].

El 1859 publica una breu nota als Comptes Rendus, *Résumé de plusieurs Mémoires et d'un Ouvrage présenté*, [371]. Aquestes diverses Memòries, que segons diu, "je n'ai pas pu presenter", passen a formar part de "l'Ouvrage présenté" que és un extens treball de 399 pàgines titulat *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leur diverses applications*, [370], que comença dient

> "C'est la géometrie considérée au point de vue de la Physique mathématique, une géométrie spéciale et nouvelle, que ja vais essayer de definir."

Consta de 20 lliçons que inclouen les Memòries que no ha pogut presentar i que a [371] titula: *Mémoire sur les paramètres differentiels des fontions-de-point*, *Mémoire sur les courbures des surfaces orthogonales*, *Mémoire sur la méthode de recherche des coordonnées elliptiques*, *Mémoire sur l'emploi des*

[56]Jean Claude Bouquet (1819-1885) nascut a la comuna francesa de Morteau, va ser Professor a l'École Normale i a l'École Polytechnique. Autor amb el seu amic i company d'escola Briot i Appel d'un text titulat *Leçons de géométrie analytique.* Va publicar també *Remarques sur les systèmes de droites dans l'espace*, [98], *Mémoire sur les propriétés d'un système de droites*, [99] i *Démonstration d'un théorème de Gauss concernant la courbure des surfaces*,[100].

coordonnées curvilignes en Dynamique, *Mémoire sur l'équilibre des températures dans les systèmes cylindriques*, *Mémoire sur l'equilibre des températures dans les systèmes orthogonaux transformés*, *Mémoire sur les résistances des parois.*

Seguint els seus anteriors treballs ja comentats, defineix superfícies *isotermes* de la manera següent. La família de superfícies

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_0$$

es diuen isotermes si existeix una funció $V = V(x, y, z)$ el valor de la qual depèn només de $\lambda(x, y, z)$, i tal que la família de superfícies

$$V(x, y, z) = V_0$$

sigui la família inicial considerada i tal que $\nabla V = 0$. Així, per analogia amb l'equació del calor, V es pot pensar com una temperatura.

Altres treballs posteriors sobre coordenades curvilínies són els de l'Abbé Aoust, *Théorie géométrique des coordonnées curvilignes quelconques*, [4], i dos més amb el mateix títol *Théorie des coordonées curvilignes quelconques*, [7] i [12], que citem a la pàgina 260, peu de pàgina 203, i de Combescure, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes*, [170].[57]

[57]Es coneix com *transformació de Combescure d'una corba* una aplicació injectiva entre dues corbes tal que en els punts corresponents les tangents són paral·leles. En aquest cas les normals principals i les binormals en els punts corresponents són respectivament paral·leles. I es coneix com *transformació de Combescure d'un sistema triplement ortogonal de superfícies* una aplicació injectiva de l'espai en ell mateix tal que les normals a les superfícies d'un sistema triplement ortogonal de superfícies són paral·leles a les normals del sistema transformat en els punt corresponents. Aquesta transformació, complicada, apareix per primer cop a l'article mencionat, [170], en un paràgraf titulat *Système orthogonal déduit du système elliptique*, i és citat per Darboux a les seves Leçons, [204], llibre VIII, capítol XII, p. 290. Per fer-nos una idea dels interessos d'Eduard Combescure (1824-1889) citem algun dels seus treballs més importants. El 1859 publica *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, [165]; el 1863 *Sur un triple système particulier de surfaces orthogonales*, [167], i *Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées*, [166]; el 1864 *Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangent à une courbe fixe*, [169], i *Mémoire sur les coordonnées curvilignes*, [168]. Aplica els seus mètodes per resoldre sistemes d'equacions diferencials a estudiar superfícies amb línies de curvatura esfèriques, citant explícitament el treball de J. A. Serret, a *Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles*, [171], de 1875. Serret tracta aquest tema a [535] i [540]. El 1878 publica *Sur les paramètres différentilles des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes*, [172]; el 1887 *Sur la'pplication des surfaces*, [173], i el 1888 *Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces rigides*, [174].

Aquest article comença dient que és una certa generalització al cas general de coordenades curvilínies obliqües de "la grande théorie crée par M. Lamé".

Quatre anys desprès de la seva mort, el 1874, Liouville fa publicar al "seu" Journal una nota de Lamé titulada *Sur les surfaces isothermes paraboloïdales*, que diu que deu ser de 1843 o 1844, i que "j'ignore par quelle suite de circonstances il a été retardé à l'impression". I afegeix, "je m'empresse de le communiquer au public, car on le liora encore avec plaisir et avec profit. Lamé posédait un talent trés-penétrant, d'un genre tout particulier, et en ce sens on peut dire qu'il n'a pàs été remplacé jusqu'ici." El problema que tracta Lamé és trobar les superfícies isotermes compreses a l'equació

$$2lx + my^2 + nz^2 = 1. \tag{7.3}$$

És a dir, pensar l, m, n com funcions d'un paràmetre λ i determinar-les amb la condició de que el quocient

$$\frac{\Delta\lambda}{\|\nabla\lambda\|^2}$$

es pugui expressar només en funció de λ, quan λ es pensa com funció de x, y, z a partir de (7.3).

Per saber més sobre Lamé vegeu el treball de René Guitart, de 2009, *Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé*, [314]. Struik en dóna també una breu biografia, vegeu la nota **135** de Struik, pàgina 260.

7.16 Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Neix a Villiers-en-Bière, França. Entra a l'École Polytechnique al 1813. El 1839 va assistir a cursos de Liouville al Collège de França. Va treballar principalment en mecànica i elasticitat. Va donar una correcta deducció del les equacions de Navier-Sokes dos anys abans que Stokes. Va entrar en controvèrsia amb Grasmann per la introducció d'un càlcul vectorial similar al d'aquest.

Figura 7.19: *Barré de Saint-Venant.*

Sobre el tema que ens interessa va escriure *Mémoire sur les lignes courbes non planes*, [521], on introdueix el nom de *binormal*, com diu Struik a la nota **22**, pàgina 251.

A la pàgina 17, en un apartat de notacions i definicions diu:

> "*Binormale*, celle des normales qui est perpendiculaire au plan osculateur. Cette ligne, que l'on est obligé de considérer très-souvent aussi, et à laquelle il n'a pas encore été donné de nom, est, en effet, normale à deux éléments consécutifs à la fois, tandis que les autres normales à la courbe ne le sont qu'à un seul de ses éléments; on la suppose tirée comme il a été dit à la fin du n° 4."

I afegeix un peu de pàgina que diu

> "On pourrait appeler aussi *pernormale* cette normale, qui l'est en quelque sorte plus que les autres. Je l'aurais appelée simplement normale principale, sans faire un mot nouveau, si je n'avais craint la confusion, car cette dernière dénomination (qui lui conviendrait) est déjà employée, dans plusieurs écrits, pour désigner la direction du rayon de courbure, peu utilement à mon avis."

La segona part del treball es titula *Démonstration analytique de diverses formules et de divers théorèmes relatifs aux courbes dans l'espace, ainsi qu'aux lignes et aux surfaces qui ont avec elles des rapports intimes*, i hi ha una secció, la 21, titulada *Lieu des centres des sphères osculatrices, ou arête de rebroussement de la surface polaire [appelée aussi développée par le plan]* on cita dos cops a Fourier, per dir que el que ell està fent ja ho havia observat abans Fourier.

A l'apartat 25 de la tercera part del treball de Saint-Venant que estem comentant, titulat *Angle de deux rayons de courbure consécutifes*, és on apareixen les instruccions que hem seguit per fer el dibuix de la pàgina 83.

Hi ha una nota curiosa ja que diu que li sembla que no podrà continuar la recerca sobre corbes i deixa diversos problemes oberts. Concretament

> "Ne prévoyant pas que je puisse continuer des recherches sur ce sujet, qui me paraît intéressant, je crois devoir proposer ces questions, entre beaucoup d'autres, aux géomètres qui s'occupent de la théorie des surfaces réglées:1. Sur la surface gauche formée par l'ensemble des rayons de courbure d'une courbe donnée peut-on tracer une seconde courbe dont les génératrices de la surface

> soient aussi les rayons de courbure? 2. Toute surface réglée peut-elle, pourvu qu'elle ne soit pas développable, être considérée comme formée par l'ensemble des rayons de courbure d'une certaine courbe? Où est cette courbe? Et, s'il n'y a que certaines surfaces gauches qui jouissent de cette propriété quels sont leurs autres caractères distinctifs? 3. Quelles sont les surfaces réglées dont la gorge fait un angle constant avec les génératrices; quelles sont celles dont la gorge est une ligne droite oblique aux génératrices etc."

Acaba amb una Nota titulada *Sur quelques particularités de Géométrie et de Mécanique, relatives aux deux affections principales des lignes courbes non planes, et sur les dénominations à imposer à ces affections*, on discuteix sobre quins són els noms més adequats per flexió, curvatura, torsió, etc, en funció de motivacios de la Mecànica. Cita un treball previ seu als Comptes Rendus[58], *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double coubure*, [520].

7.17 Jean Frédéric Frenet (1816-1900)

Neix a Perigueux[59]. Entra a l'École Normale Supérieure el 1840 i va a la Universitat de Toulouse. Llegeix la tesi el 1847. En aquesta tesi, titulada *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroides quelconques. Programme d'une thèse sur quelque propriétés des courbes à double courbure*, [285], introdueix la

Figura 7.20: *Jean F. Frenet.*

[58]Per consultar els Comptes Rendues de l'Académie de Sciences de 1835 a 1965 hi ha la pàgina web `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb343481087/date.r=comptes`.

[59]És l'únic protagonista d'aquest capítol nascut el segle XIX. Segur que va conèixer el *Disquisitiones* de Gauss, però com que només va publicar un parell d'articles sobre corbes, i cap sobre superfícies, l'he mantingut en aquest capítol i no en el següent. La imatge de Frenet és de la Tesi de Jean Delcourt. No l'he trobat a cap altre lloc.

idea d'associar a cada punt d'u-
na corba una referència. Aquesta part de la tesi la publica el 1852 a *Sur quelque propriétés des courbes à double courbure*, [286] i és on apareixen les famoses fórmules de Frenet, també anomenades de Serret-Frenet, vegeu el comentari sobre qui va ser el primer a publicar-les a la pàgina 157 i a la nota **23** de Struik, pàgina 251.

El 1853 publica *Théorèmes sur les courbes gauches*, [287], on aplica les seves fórmules. Va ser professor a Toulouse i a Lyon, on va ser també director de l'observatori astronòmic. Va ser molt conegut pel seu llibre *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*, [284], del que se'n van fer 7 edicions, l'última el 1917.

Capítol 8

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Va néixer a Braunschweig, baixa Saxonia, i va morir a Göttingen, Alemanya. Sens dubte un dels més grans matemàtics de tots els temps. Als 18 anys va demostrar que el polígon regular de 17 costats es podia dibuixar amb regle i compàs. Als 23 anys va publicar ja una obra que el feia immortal: *Disquisitiones Arithmeticae.*

Figura 8.1: *Carl Friedrich Gauss.*

Com a conseqüència dels seus treballs com a geodesta (es va encarregar durant 7 anys de la triangulació del regne de Hannover) Gauss s'interessa de seguida en la possibilitat de desenvolupar una superfície sobre un altre conservant les distàncies o almenys conservant angles. El fet de fer un mapa de la Terra és llavors només un cas particular de l'anterior problema.

En una carta a Schumacher (5-07-1816) diu

> "He pensat un problema interessant *[per posar en una competició]*: en el cas general, projectar (aplicar) una superfície donada sobre una altra, també donada, de manera que la imatge i la original siguin infinitesimalment similars. Un cas especial esdevé quan la primera superfície és una esfera i la segona un pla. Llavors les projeccions estereogràfica i de Mercator són solucions particulars."

Aquesta pregunta es publica el 1822 a la Real Societat Cientifica de Copenhagen, a instàncies de Schumacher. Gauss mateix la contesta el 11-12-1822, però no es publica fins el 1825 a Astronomische Abhandlungen, Altona, revista editada per Schumacher, amb el títol: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird*[60], [289].

El títol acaba amb un afegitó que diu: " Ab his via sternitur ad maiora" [61], imitació de la frase de Newton a *De quadratura curvarum*, que escriu "et his principiis via ad maiora", i que fou el preludi, ni més ni menys, que del càlcul de fluxions. Podeu trobar un resum d'aquest treball, dedicat essencialment a transformacions conformes, a *Gauss i la geometria: geodèsia i geometria no euclidiana*, [490].

L'objectiu d'investigar sobre geodèsia avançada, com hem vist que li va dir a Schummaker a la carta de 1825, el porta finalment a bon port publicant dues llargues memòries titulades *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* (investigacions en alta geodèsia), part I i part II, [294] i [295]. El primer el podeu trobar comentat a [490]. També estudia les geodèsiques dels el·lipsoïdes el 1828, com a consqüència dels seus treballs de triangulació de Hannover, com es veu en el mateix títol: *Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene (Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung)*, [290]

El 1827 publica el *Disquisitiones* que comentarem a continuació.

Va ser director de l'observatori astronòmic de Göttingen des de 1801 fins la seva mort. Va impartir molts cursos d'astronomia però no va explicar cursos de matemàtica fonamental.

---

[60] Una solució general al problema d'aplicar una superfície donada sobre una altra superfície de manera que la imatge i la superfície aplicada siguin infinitesimalment similars.

[61] Camí preparat per a coses més grans.

L'autor a l'observatori de Gauss a Göttingen.

La vida detallada (novel.lada) de Gauss la podeu trobar a *L'home de la campana*, [310], de J. Girbau. La referencia bàsica és el llibre de W. G. Dunnington *Carl Friederich Gauss. Titan of Science*, [228].

El ***Disquistiones***

Però des del punt de vista dels inicis de la geometria diferencial moderna el treball fonamental és el *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, [291]. És l'origen de la geometria intrínseca de superfícies.

Gauss, motivat per problemes geodèsics, havia estudiat les representacions conformes entre superfícies, i molt especialment les representacions conformes entre una esfera i l'el·lipsoide terrestre o entre aquest el·lipsoide i el pla. Durant aquest període, que va aproximadament de 1812 a 1826, estudia també les geodèsiques de l'el·lipsoide. Vegeu *Erdellipsoid und geodätische Linie*, a la pàgina 65 del Vol. IX de [297].

Tot això el motiva a estudiar superfícies des d'un punt de vista més general.

En una carta a Schumacher (21-11-1825) diu:

> "Recentment he reprès part de les meves investigacions sobre superfícies corbes, que hauran de formar la base del meu projectat assaig en geodèsia avançada. [...] Desafortunadament, em trobo que haig d'anar molt enrera en l'exposició perquè inclús el que és conegut, ha de ser desenvolupat d'una manera diferent, adequada a les noves investigacions. [...] Molts d'ells pertanyen a la Geometria situs, un camp quasi completament inexplorat fins ara."

A partir d'aquí redacta, el mateix 1825, una primera versió que no arriba a publicar. La podeu trobar breument comentada a *Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss*, [489], i completa als *Werke*, [297].

La segona versió es publica a *Commentationes societatis regiae scientaiarum Gottingensis recentioris classis mathematicae,* Vol VI, pag. 99-146, 1828, amb data de rebuda el 8 d'octubre 1827, [291].

Esquemàticament, diguem que el *Disquisicions* té (només) unes 40 pàgines, i està dividit en 29 seccions. Conté cinc conceptes essencialment nous, i uns 10 teoremes. Només cita *"l'ill. Euler"* (§8), i el *"clar. Legendre"* (§27). L'única superfície que apareix és l'esfera (tot i que ja es coneixien superfícies tant interessants com l'helicoide i la catenoide, atribuïdes a Euler i Meusnier, respectivament). També es parla, a la penúltima secció, de "la superfície de la terra".

Alguns comentaris del propi Gauss fan pensar que el *Disquisicions* és un projecte inacabat. Per exemple,

> §6. Hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa d'aquestes figures ... §13. L'estudi d'aquestes propietats obra a la geometria un camp nou i fèrtil... §26. La consideració del triangle rectilini de costats iguals és d'una gran utilitat...

Nosaltres pensem que és un projecte inacabat, sobre tot, perquè no troba l'esfera imaginària de Lambert. Sobre la possible relació entre el *Disquisitiones* i la geometria no euclidiana vegeu *What did Gauss read in the* Appendix ?, [1].

Els cinc conceptes essencialment nous a què fèiem referència abans, són: L'*aplicació de Gauss*, la *curvatura de Gauss* i la *curvatura total*, en el paràgraf

§6 (l'aplicació de Gauss ja havia estat considerada per Rodrigues); el *transport paral·lel* (variació angular), en el paràgraf §18; i les *coordenades abciso-geodèsiques ortogonals*, en el paràgraf §19[62].

Fem un breu resum de les 29 seccions del Disquisitiones [63].

§1. Introducció.

§2. [Trigonometria esfèrica]. El punt central de la secció és el següent teorema que engloba totes les fórmules de la trigonometria esfèrica.

TEOREMA. *Si* L, L', L'', L''' *denoten quatre punts de l'esfera, i* A *denota l'angle entre els arcs* LL', $L''L'''$ *en el seu punt d'intersecció, tindrem*

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A.$$

§3. Defineix pla tangent.

§4. Calcula el vector normal.

§5. Veu que pot elegir dues direccions normals. Si la superfície està donada pels zeros d'una funció pot dividir l'espai entre els punts on aquesta quantitat és positiva i aquells on és negativa. Això li dona un criteri d'orientació.

§6. Defineix curvatura. La curvatura és la mesura de la distorsió d'àrees per l'aplicació de Gauss, amb signes i multiplicitats. En el cas particular en que l'aplicació de Gauss $\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2$ és difeomorfisme, tenim

$$|\mathcal{K}(P)| = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Area}\,(\mathcal{N}(B_n))}{\text{Area}\,(B_n)},$$

on P és un punt d'una superfície S, i B_n és una successió d'entorns connexos de P en S amb Area $(B_n) \to 0$ i tals que qualsevol entorn de P conté tots els B_n a partir d'un n prou gran.

Gauss no utilitza aquest llenguatge, sinó que diu

> "Així, a cada part d'una superfície corba inclosa dintre de límits determinats li assignem una *curvatura total* o *integral*, que és

[62] El nom "abciso-geodèsiques" és de Gauss, però no en el *Disquisicions*, vegeu l'article de Peter Dombrowski 150 *years after Gauss'"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, [226]. Vegeu també la nota **157** de Struik, pàgina 263.

[63] Podeu consultar també l'excel·lent conferència de Pere Pascual *Geometria de Superfícies. Una aproximació a la figura de Gauss*, [468].

l'àrea de la figura corresponent sobre l'esfera. Aquesta curvatura integral s'ha de distingir d'una curvatura una mica més específica que anomenarem *mesura de curvatura*: la darrera es refereix a un *punt* de la superfície, i representarà el quocient obtingut en dividir la curvatura integral de l'element de superfície al voltant d'un punt per l'àrea del mateix element; i per tant denota la raó de les àrees infinitament petites que es corresponen l'una amb l'altra, una sobre la superfície corba i l'altra sobre l'esfera. La utilitat d'aquestes innovacions quedarà abundantment justificada, esperem, pel que explicarem més endavant. Quant a la terminologia, l'hem pensat especialment desitjable per tal d'evitar tota ambigüitat, i per aquesta raó no hem cregut pas que haguéssim d'adoptar una terminologia anàloga a la que s'admet generalment (encara que no aprovada per tothom) a la teoria de corbes planes, d'acord amb la qual la mesura de curvatura s'hauria d'haver anomenat simplement curvatura, i la curvatura total, amplitud. Però, per què no ser lliures en l'elecció de les paraules, sempre que no siguin sense sentit i no siguin susceptibles d'una interpretació errònia?

La posició d'una figura sobre l'esfera pot ser o bé similar a la corresponent figura sobre la superfície corba, o bé oposada (inversa); el primer cas es dóna quan dues línies de la superfície corba que surten del mateix punt, en direccions diferents però no oposades, estan representades sobre l'esfera per línies semblantment situades, això és, quan la imatge de la línia de la dreta està també a la dreta; el darrer cas és quan passa el contrari. Distingirem aquests dos casos pel *signe* positiu o negatiu de la mesura de curvatura. Però evidentment aquesta distinció es pot fer només quan sobre cada superfície elegim una cara concreta en la qual suposem que està la figura. Sobre l'esfera auxiliar usarem sempre la cara exterior, és a dir, la girada cap enfora des del centre; sobre la superfície corba es pot agafar com a cara exterior o bé la que habitualment es considera realment com a cara exterior, o bé més aviat aquella cara a partir de la qual se suposa dibuixada la normal; manifestament, no hi ha cap canvi respecte a la similitud de les figures, si sobre la superfície corba es transfereixen al costat oposat a la vegada la figura i la normal, sempre que la pròpia imatge sigui representada en el mateix costat de l'esfera.

El signe positiu o negatiu, que assignem a la *mesura* de curvatura d'una figura infinitament petita, segons la seva posició, l'estenem també a la curvatura integral d'una figura finita sobre la superfície corba. No obstant això, si volem discutir el cas general, són necessàries algunes explicacions, les quals només podem tocar aquí breument. Sempre que la figura sobre la superfície corba sigui tal que a punts diferents d'aquesta corresponguin punts *diferents* sobre l'esfera, la definició no necessita cap més explicació. Però si aquesta condició no es compleix, serà necessari tenir en compte dues o diverses vegades certes parts de la figura sobre la superfície esfèrica, de manera que, segons que la posició d'aquestes parts sigui similar o inversa, aquestes àrees s'acumularan o es destruiran les unes amb les altres. El que serà més simple en aquest cas serà suposar la superfície corba dividida en parts, tals que cada part, considerada separadament compleixi l'anterior condició; assignar llavors a cadascuna d'aquestes parts la seva curvatura integral, determinant la seva magnitud per l'àrea de la corresponent figura sobre l'esfera, i el signe per la posició d'aquesta figura; i, finalment, assignar a la figura total la curvatura integral que prové de la suma de les curvatures integrals corresponents a les parts individualment. Així, de manera general, la curvatura integral d'una figura és $= \int kd\sigma$, on $d\sigma$ denota l'element d'àrea de la figura, i k la mesura de curvatura en cada punt. Els punts principals amb relació a la representació geomètrica d'aquesta integral es redueixen als següents. Al perímetre de la figura sobre la superfície corba (sota la restricció de l'article 3) correspondrà sempre una línia tancada sobre l'esfera. Si aquesta última no s'intersecta a ella mateixa en cap punt, dividirà la superfície completa de l'esfera en dues parts, una de les quals correspondrà a la figura sobre la superfície corba; i la seva àrea, considerada positiva o negativa segons que, amb relació al seu perímetre, la seva posició sigui semblant o inversa a la posició de la figura sobre la superfície corba, representarà la curvatura integral de la figura sobre la superfície corba. Però sempre que aquesta línia es talli a ella mateixa una o diverses vegades, donarà una figura complicada, a la qual, no obstant això, és possible assignar una àrea concreta tan legítimament com en el cas d'una figura sense nodes; i aquesta àrea, pròpiament interpretada, donarà sempre un valor exacte per la curvatura in-

> tegral. No obstant, hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa de la teoria d'aquestes figures considerades des d'aquest punt de vista tan general."

§7. [Primer càlcul de la curvatura]. Veu que la curvatura de Gauss és el quocient dels determinants (discriminants) de la primera i segona forma fonamentals,

$$k = \det II / \det I.$$

Es limita al cas en què la superfície està donada com gràfica d'una funció, $z = z(x, y)$.

§8. [Segon càlcul de la curvatura]. Veu que la curvatura de Gauss és igual al producte de les curvatures principals,

$$k = k_1 \cdot k_2.$$

Ho diu aixi:

> "Teorema. La mesura de curvatura en qualsevol punt de la superfície és igual a una fracció que té per numerador la unitat, i per denominador el producte dels dos radis de curvatura extrems de les seccions per plans normals."

§9. [Tercer càlcul de la curvatura]. Reescriu la fórmula de la secció §7 quan la superfície està donada com els zeros d'una funció.

§10. [Quart càlcul de la curvatura]. Reescriu la fórmula de la secció §7 quan la superfície està donada per una parametrització $x = x(p, q), y = y(p, q), z = z(p, q)$.

§11. [Cinquè càlcul de la curvatura]. En aquesta secció demostra l'extraordinària fórmula

$$\begin{aligned}
4 \quad & (EG - FF)^2\, k = E\left(\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\
+ \quad & F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\
+ \quad & G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) \\
- \quad & 2(EG - FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp \cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right).
\end{aligned}$$

on k és la curvatura i E, F, G són els coeficients de la mètrica, que s'expressen en funció de coordenades arbitràries p, q.

§12. [Teorema Egregi]. La fórmula de la secció anterior té com corol·lari el famós teorema egregi que enuncia a la secció §12 i que deixem en llatí ja que és on apareix la qualificació que li dóna Gauss d'egregi:

> " Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium
>
> Theorema Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet."

§13. [Geometria intrínseca]. Remarca que una superfície plana i una desenvolupable sobre un pla "s'han de mirar com essencialment idèntiques".

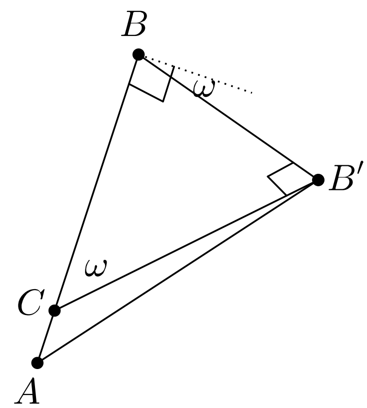
§14. [Geodèsiques]. Utilitza càlcul de variacions per veure que les geodèsiques estan caracteritzades pel fet que la seva normal principal coincideixi amb la normal a la superfície.

§15. [Lema de Gauss]. Rep aquest nom el següent resultat.

> Teorema. Si sobre una superfície corba es dibuixen des del mateix punt inicial un nombre infinit de línies més curtes d'igual longitud, les línies que uneixen les seves extremitats seran normals a cadascuna de les línies.

Un cop demostrat comenta:

> " Hem pensat que val la pena deduir aquest teorema a partir de la propietat fonamental de les línies més curtes: però la veritat del teorema es fa evident sense cap càlcul mitjançant el raonament següent. Siguin AB, AB' dues línies de longitud mínima de la mateixa longitud que formen en A un angle infinitament petit, i suposem que algun dels angles formats per l'element BB' amb les línies BA, $B'A$ difereix d'un angle recte per una petita quantitat; llavors, per continuïtat, l'un serà més gran i l'altre més petit que un angle recte.



> Suposem que l'angle en B és $= 90° - \omega$, i prenem un punt C sobre la línia AB, tal que $BC = BB' \cdot \operatorname{cosec} \omega$: llavors, com que el triangle infinitament petit $BB'C$ es pot considerar pla, tindrem $CB' = BC \cdot \cos\omega$, i consegüentment
>
> $$AC+CB' = AC+BC\cdot\cos\omega = AB-BC\cdot(1-\cos\omega) = AB'-BC\cdot(1-\cos\omega),$$
>
> i.e., el camí de A a B a través del punt C és més curt que la línia de longitud mínima. Q.e.a."

§16. [Lema de Gauss generalitzat]. Generalitza l'anterior resultat al cas en què les geodèsiques d'igual longitud surten d'una línia qualsevol, i no d'un punt com abans.

I diu:

> "Finalment, advertim que també aquí com precedentment, consideracions geomètriques poden prendre el lloc de l'anàlisi, les quals, no obstant, no ens prendrem el temps de considerar aquí, ja que són suficientment òbvies."

§17. [Àrea]. Diu que l'element d'àrea és

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dp\,dq.$$

Calcula l'angle θ que forma una corba donada $(p(s), q(s))$ amb les corbes coordenades,

$$\cos\theta\,ds = \frac{Edp + Fdq}{\sqrt{E}}.$$

§18. [Equació de les geodèsiques. Angle d'inclinació]. En aquest article troba, emprant càlcul de variacions, i també en funció de E, F i G, les equacions d'una geodèsica sobre una superfície. Concretament troba l'equació necessària

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} \cdot d\theta &= \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp \\ &- \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq \,,\end{aligned}$$

on θ és l'angle d'inclinació de la geodèsica respecte de les línies coordenades $q = constant$. Aquesta és l'equació d'Euler-Lagrange del funcional de longitud.

I acaba dient,

> "[...] és també possible eliminar l'angle θ, i derivar-ne una equació diferencial de segon ordre entre p i q, la qual, no obstant això, seria més complicada i menys útil per a les aplicacions que la fórmula precedent."

§19. [Sisè càlcul de la curvatura]. Coordenades polars geodèsiques.

Veu que els coeficients de la primera forma fonamental en coordenades polars geodèsiques són $E = 1, F = 0, G$, i que, per tant, la llarga fórmula de la curvatura queda molt simplificada i es calcula només a partir de la derivada segona de G. Concretament,

$$k = -\frac{1}{m}\frac{ddm}{dp^2}, \quad m = \sqrt{G}$$

També la fórmula de l'angle d'inclinació de les geodèsiques es redueix a

$$d\theta = -\frac{dm}{dp}dq. \tag{8.1}$$

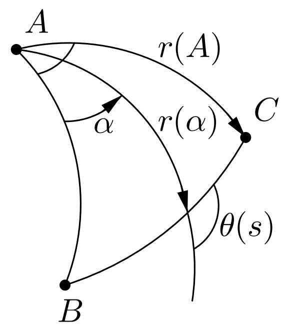
A més fa un raonament geomètric senzill per justificar que en $p = 0$ tenim $m = 0$ i $\frac{dm}{dp} = 1$. Això ho necessitarà més endavant per demostrar el teorema del defecte.

§20. [Teorema del defecte ("el més elegant")].[64]

[64] Avui en dia, el teorema del defecte és un cas particular del teorema de Gauss-Bonnet.

Aquest teorema diu que la integral de la curvatura de Gauss sobre un triangle geodèsic és el defecte o excés de la suma dels seus angles sobre π.[65]

Es demostra així: Sigui ABC un triangle geodèsic sobre una certa superfície. Prenem coordenades polars geodèsiques (r, α) amb centre A de manera que el costat AB sigui la geodèsica $\alpha = 0$, el costat AC la geodèsica $\alpha = A$. El costat BC té equació $r = r(\alpha)$.



L'element d'àrea és

$$dS = mdr\, d\alpha, \quad m = \sqrt{G}$$

per tant hem de calcular

$$\int_T K\, dS = \int_0^A \int_0^{r(\alpha)} K(r,\alpha) mdr\, d\alpha = -\int_0^A \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} dr\, d\alpha = \int_0^A (1 - \frac{\partial m}{\partial r}) d\alpha$$

ja que $\frac{\partial m}{\partial r}_{|r=0} = 1$.

Ara bé, la igualtat (8.1),

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial m}{\partial r}\frac{d\alpha}{ds},$$

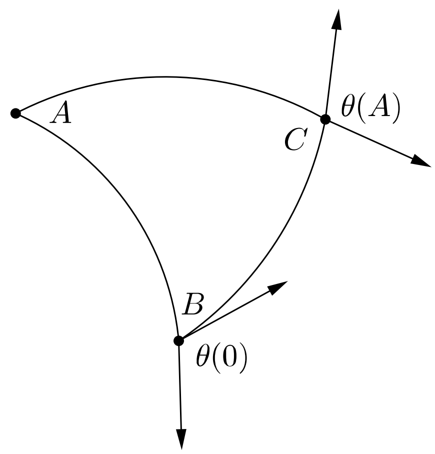
on $\theta = \theta(s)$ és l'angle que forma la geodèsica BC, d'equació $(r(s), \alpha(s))$, respecte el paràmetre arc s, amb les corbes $\alpha = \mathit{constant}$, posant $s = s(\alpha)$, és a dir, reparametritzant la geodèsica per l'angle, permet escriure

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{\partial m}{\partial r},$$

[65]Per a triangles geodèsics sobre una esfera de radi R diu que l'àrea és R^2 per l'excés. Segons Hachette ([316], p. 273) aquest resultat va ser enunciat per Albert Gérard el 1629 i demostrat per Cavalleri el 1632.

de manera que tenim

$$\int_T K\, dS = A + \int_0^A \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = A + \theta(A) - \theta(0) = A + C - (\pi - B) = A + B + C - \pi.$$



Utilitzant que la curvatura de Gauss és el jacobià de l'aplicació de Gauss, resulta que la integral de K sobre el triangle T és l'àrea, amb signe, de la porció d'esfera obtinguda per la imatge de T per l'aplicació de Gauss.

Gauss ho diu així:

> La curvatura integral és igual a l'àrea d'aquella part de l'esfera que correspon al triangle, considerada amb signe positiu o negatiu segons que la superfície corba en la qual està el triangle sigui concavocòncava o concavoconvexa: per unitat d'àrea es prendrà el quadrat de costat igual a la unitat (el radi de l'esfera), de manera que la superfície completa de l'esfera és $= 4\pi$. Així la part de la superfície de l'esfera corresponent al triangle és a la completa superfície de l'esfera com $\pm(A + B + C - \pi)$ és a 4π. Aquest teorema, que si no ens equivoquem, s'hauria de contar entre els més elegants de la teoria de superfícies corbes, es pot enunciar també com segueix:
>
> *L'excés sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície concavocòncava, o el dèficit sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície concavoconvexa, està*

mesurat per l'àrea de la part de l'esfera que correspon, a través de les direccions de les normals, a aquest triangle, si la superfície total de l'esfera és igual a 720 *graus.*

§21. [Canvi de coordenades]. En llenguatge modern, el que fa Gauss en aquest article és estudiar en gran profunditat la fórmula per al canvi de base de formes bilineals. De fet considera

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

i dóna una interpretació geomètrica de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Una de les igualtats d'aquesta secció

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

s'obté simplement aplicant determinants a l'anterior igualtat.

Justament va ser el mateix Gauss en el *Disquisitiones aritmethicae* qui va estudiar en profunditat les formes quadràtiques.

§22. [Coordenades polars]. Com sap canviar de coordenades, aplica els càlculs precedents a passar d'unes coordenades arbitràries a coordenades polars.

S'adona que al radi r i l'angle ϕ d'aquestes coordenades polars, que són funció de les coordenades inicials, queden caracteritzats com a funcions que són solució d'un sistema d'equacions en derivades parcials. En particular, el teorema d'existència de solucions de les equacions diferencials li dóna, a posteriori, l'existència local de coordenades polars.

En particular obté les equacions de les geodèsiques que passen pel pol simplement posant $\phi = constant$.

Però la solució d'aquest sistema és difícil en general, i Gauss comenta que, no obstant això, moltes coses interessants se'n poden deduir, a partir de desenvolupaments en sèrie, encara que aquests només siguin vàlids localment.

§23. [Desenvolupaments en serie]. A l'article §23 passa de coordenades polars r, ϕ a coordenades ortogonals. Concretament, considera unes noves coordenades p, q tals que les corbes $p = constant$ són geodèsiques ortogonals a la corba $\phi = 0$, i q és la distància del punt donat a la corba $\phi = 0$.

Resol, usant sèries, l'equació diferencial de les geodèsiques

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp\,,$$

on $ds^2 = n^2dp^2 + dq^2$, i θ és l'angle entre la geodèsica i la corba $q = constant$.

§24. [Desenvolupaments en serie]. a partir dels càlculs de l'article §22, obté sèries que representen les funcions r, ϕ (i altres) en termes de les coordenades p, q. Per exemple, $r^2 = p^2 + q^2 + ...$ Això li permet, entre altres coses, donar una sèrie que aproxima l'àrea del triangle rectangle sobre la superfície de vèrtexs $(0, 0), (p, 0), (p, q)$. §25. Aproximació de l'àrea d'un triangle Generalitza els càlculs de l'àrea del triangle rectangle de l'article precedent al càlcul de l'àrea d'un triangle arbitrari

§26. [Teoremes de comparació]. Comença amb aquestes paraules

> "Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuis latera aequali sunt ipsis a, b, c" [costats del triangle sobre la superfície].

Observem que el teorema del defecte compara la suma d'angles a la superfície $(\alpha + \beta + \gamma)$ amb la suma d'angles d'un triangle pla (π).

Això el porta a considerar el triangle pla de costats d'igual longitud que els costats del triangle curvilini, i a comparar els angles A, B, C d'aquest triangle curvilini amb els angles respectius A^*, B^*, C^* del triangle pla. Recordem que, pel criteri costat-costa-costat, aquests angles estan determinats.

Així doncs, podem pensar que el teorema del defecte està donant una interpretació de la diferència entre $A + B + C$ i $A^* + B^* + C^*$. Però, quina diferència hi ha entre A i A^*?

Obté el resultat següent.

$$\begin{aligned}
A^* &= A - \frac{\sigma}{12}\,(2k(A) + k(B) + k(C)) + \text{termes d'ordre superior},\\
B^* &= B - \frac{\sigma}{12}\,(k(A) + 2k(B) + k(C)) + \text{termes d'ordre superior},\\
C^* &= C - \frac{\sigma}{12}\,(k(A) + k(B) + 2k(C)) + \text{termes d'ordre superior},
\end{aligned}$$

on σ és l'àrea del triangle $\triangle ABC$, $k(A)$ és la curvatura de la superfície en el vèrtex A, i A^* és l'angle del triangle pla de costats d'igual longitud que els costats del triangle sobre la superfície, corresponent a l'angle A. Anàlogament per a B i C.

Aquests "termes d'ordre superior" a què ens referim involucren els coeficients del desenvolupament de Taylor dels coeficients de la mètrica.

§27. [Teoremes de comparació a l'esfera]. Les anteriors fórmules, en el cas particular en que la superfície de partida és una esfera de radi R, si negligim termes de quart ordre, queden reduïdes a

$$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{3R^2}, \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{3R^2}, \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{3R^2}. \end{aligned}$$

Gauss reconeix la prioritat d'aquestes fórmules a Legendre $(1752 - 1833)$ (vegeu el teorema de Legendre a la pàgina 63). Observem que si les sumem obtenim el teorema del defecte sobre l'esfera:

$$\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}.$$

§28. [BHI]. Com que aquesta secció és molt curta i ha estat tant i tant comentada,[66] la reproduïm en la seva totalitat.

> Les nostres fórmules generals, si negligim els termes de quart ordre, esdevenen extremadament simples, concretament:[67]
>
> $$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{12}\left(2k(A) + k(B) + k(C)\right) \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{12}\left(k(A) + 2k(B) + k(C)\right) \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{12}\left(k(A) + k(B) + 2k(C)\right) \end{aligned}$$
>
> Així, als angles A, B, C sobre una superfície no esfèrica, se'ls ha d'aplicar reduccions diferents, per tal de que els sinus dels angles modificats siguin proporcionals als costats oposats. La desigualtat, genèricament parlant, serà de tercer ordre; però si la

[66] El mite de Gauss. La discussió prové de si Gauss mesurava aquest triangle per saber la curvatura de l'univers. Sembla que un comentari de Sartorius, poc després de la mort de Gauss, va portar a aquesta hipòtesi. Nosaltres no ho creiem així i pensem que, en tot cas, el que preocupava a Gauss en aquells moments era la curvatura de la terra i no la de l'univers. Gauss mai va dir tal cosa.

[67] Gauss utilitza la notació α, β, γ, per a les curvatures en els vèrtexs, que nosaltres hem denotat per $k(A), k(B), k(C)$ respectivament.

> superfície difereix poc d'una esfera, la desigualtat serà d'ordre superior. Inclús en els grans triangles de la superfície de la terra, dels quals podem mesurar els seus angles, la diferència és sempre inapreciable[68]. Així, per exemple, en el triangle més gran que hem mesurat aquests darrers anys, concretament, el format pels punts Hohehagen,[69] Brocken, Inselsberg, on l'excés de la suma dels angles era $= 14''.85348$, el càlcul ha donat les següents reduccions per ser aplicades als angles:
>
> $$\begin{array}{lll} \textit{Hohehagen} & \ldots & -4''.95113 \\ \textit{Brocken} & \ldots & -4''.95104 \\ \textit{Inselsberg} & \ldots & -4''.95131 \end{array}$$

§29. [Més teoremes de comparació]. Acaba el Disquisicions comparant l'àrea d'un triangle sobre una superfície amb l'àrea del triangle pla que té els costats de la mateixa longitud que els costats del triangle donat.

[68] Compareu aquestes paraules amb les de la Carta a Olbers (Març 1827).

> *A la pràctica, aquesta diferència* [entre usar les fórmules de Legendre o les de Gauss] *no és en absolut important, ja que és negligible per als més grans triangles de la terra que es poden mesurar; no obstant la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturalesa d'aquesta desigualtat.*

[69] Actualment escrit Hohenhagen. Les altituds d'aquests tres punts són, Hohenhagen 508 m, Brocken 1146 m, Inselsberg 916 m.

Capítol 9

La influència del *Disquisitiones* de Gauss

La influència del *Disquisitiones* ha estat infinita. Aquí ens referim només a la influència immediata en el temps. A més, no volem sortir de les superfícies (dimensió 2) ni anar més enllà de 1900. Tots els protagonistes d'aquest capítol, però sobre tot els francesos, tenen també, per descomptat, una gran influència de Monge. Els he ordenat per any de naixement.

9.1 Ferdinand Minding (1806-1885)

Tot i que va néixer a l'actual Polonia (en aquelles èpoques Imperi Rus) va estudiar i va ser professor a Berlin. Però el 1843 va tornar a Rússia, concretament a Dorpat, avui Tartu, Estonia.

Figura 9.1: *Ferdinand Minding.*

Els seus treballs es poden considerar com una continuació dels resultats de Gauss en el *Disquisitiones*. En aquest sentit se'l considera com la persona que va introduir a Rússia l'estudi de la geometria diferencial de superfícies. Va estudiar el problema isoperimètric sobre superfícies, és a dir, sobre una superfície donada determinar la corba tancada més curta que tanca una àrea donada, vegeu *Ueber die Curven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen*, [430]. Aquí introdueix la curvatura geodèsica, tot i que no li dóna cap nom (aquest nom és de Bonnet[70]). Vegeu la nota **148** de Struik, pàgina 262.

El seu resultat més famós, conegut com Teorema de Minding, és el que diu que dues superfícies de la mateixa curvatura constant són localment isomètriques. Aquest resultat de 1839 apareix a *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse* [Com decidir si dues superfícies són mútuament desenvolupables; incloent remarques sobre superfícies de curvatura constant negativa], [432]. Vegeu la nota **168** de Struik, pàgina 264.

Abans ja havia publicat un parell d'articles sobre superfícies, *Ueber die Biegung gewisser Flächen*, [431] i *Bemerkung über die Abwiekclung krummer Linien von Flächen*, [429]. El primer és el citat per Struik a la seva nota **141**, pàgina 261.

El 1840 publica *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, [433], on parla del que avui dia es coneix com "l'Analogia de Lambert" o "l'esfera imaginària" (Lambert va publicar *Theorie der Parallellinien*, [360], vegeu els comentaris a [1]). Concretament diu que si es substitueixen les funcions trigonomètriques per les corresponents funcions trigonomètriques hiperbòliques les fórmules pels triangles geodèsics sobre les superfícies de curvatura constant positiva es transformen en les fórmules pels triangles geodèsics sobre les superfícies de curvatura constant negativa. Va estar, doncs, molt a punt d'anticipar-se a Beltrami com la persona que va demostrar la consistència de la geometria hiperbòlica, ja que el camí de l'Analogia és el que va permetre a Beltrami 28 anys més tard, tancar aquest tema.[71]

[70]Diu Liouville a [452]: "J'ai proposé pour la désigner le nom expressif de courbure géodésique, que M. Bonnet a bien voulu adopter dans un Mémoire remarquable inséré au XXXII^{e} cahier du Journal de l'École Polytechnique". Es refereix a [64].

[71]Un altre important matemàtic alemany d'aquesta època que va publicar també al *Journal de Crelle* com Minding fou Julius Plücker (1801-1868). Sobre superfícies destaquem el seu treball *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes*, [478]. Quan diu "nouvelle" es refereix al mètode, que no pas als resultats. Introdueix el que ell anomena *coordenades planars* de la manera següent: Escriu l'equació general del pla com

$$z + uy + vx + w = 0,$$

9.2 Joseph Liouville (1809-1882)

Va néixer a Saint-Omer. Fou alumne de Cauchy a l'École Polytechnique, i professor de la mateixa a partir de 1833. És el fundador, el 1836, del *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, revista on s'han publicat molts dels treballs que citem en aquestes notes, coneguda simplement com el *Journal de Liouville*, o *Liouville's Journal* en anglès, i que podeu trobar a `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb343487840/date`. La geometria diferencial de la segona part del segle XIX deu molt a aquesta revista i a l'alemanya amb el mateix títol *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, coneguda també per *Journal de Crelle* en honor al seu fundador

---

i diu que mirant u, v, w com coordenades variables (les 'coordenades planars') l'equació

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

representa una superfície. De fet, podem pensar que aquesta equació permet aïllar una de les variables en funció de les altres dues i pensar la primera equació general del pla com una família biparamètrica de plans. L'envolvent d'aquesta família és la superfície que els té com plans tangents. D'aquesta manera si tenim una segona equació $\psi(u, v, w) = 0$, el sistema format per aquestes dues equacions representa una superfície desenvolupable (la intersecció de dues famílies biparamètriques és una família uniparamètrica) que envolupa a la vegada les dues superfícies considerades separadament. Equivalentment, tota solució u, v, w del sistema representa un pla tangent a les dues superfícies. D'això resulta, diu Plücker "que [el pla] en el seu moviment no pot passar d'una posició a una altra més que d'una manera única i determinada: i això és evidentment en el que consisteix el caràcter de les superfícies desenvolupables". Si $F(x, y, z) = 0$ és una superfície, recordant l'expressió del pla tangent, tenim $v = -p, u = -q, w = -(-z - qy - px)$, amb $p = \partial z/\partial x$ i $q = \partial z/\partial y$. Si, per altra banda, eliminem v del sistema d'equacions que estem considerant tindrem $u = \varphi(v)$, és a dir $q = \psi(p)$. Derivant per eliminar ψ, tenim $s = \psi' \cdot r$, $t = \psi' \cdot s$, és a dir

$$s^2 - rt = 0.$$

"*C'est l'équation des surfaces développables donnée pour la première fois per Euler.* Je ne crois pas qu'il y ait une marche plus directe, d'y parvenir, que la précédente." Després de fer algun altre exemple acaba dient que el seu mètode portarà a resultats nous i que els coneixements de Monge, Dupin, Hachette i altres es poden recollir en un llibre nou sobre una matèria que semblava gastada, però que presentada sota un altre punt de vista, està lluny de ser-ho.

Altres publicacions seves sobre superfícies són *Über die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte*, [476], *Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben*, [477].

August Leopold Crelle.[72]

Figura 9.2: *Joseph Liouville.*

Entre les seves aportacions destaquem noves demostracions de resultats de Gauss sobre la invariància de la curvatura per flexions, com la que es troba a *Sur un théorem de M. Gauss concernant le produit de deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface*, [414]. Demostra l'existència de coordenades isotermes,[73] és a dir, coordenades respecte de les quals l'element de longitud s'escriu $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$, amb $\lambda = \lambda(u, v)$. Amb aquest resultat, Gauss hagués tingut ja demostrat el teorema egregi molts anys abans del *Disquisitiones.* Aquests estudis de Liouville estan relacionats amb les representacions conformes, i porten a les *superfícies de Liouville*, en les que les geodèsiques es poden obtenir per quadratures. Aquestes superfícies estan caracteritzades per que la primera forma fonamental es pot escriure com

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$$

amb $U = U(u)$ i $V = V(v)$. Són, doncs, superfícies sobre les que hi ha un tipus particular de coordenades isotermes. Per exemple, les superfícies de revolució i les quàdriques. Vegeu la caracterització de Dini, pàgina 247, i la de Bonnet, pàgina155.

També estudia les geodèsiques de l'el·lipsoide a *De la ligne geodésique sur un ellipsoide quelconque*, [411], i a *Sur quelques cas particuliers où les*

[72]`http://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PPN=PPN243919689`. I encara n'hi una altra amb quasi el mateix nom: *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, coneguda com Annales de Gergonne ja que va ser fundada 1810 per Joseph Diaz Gergonne.

[73]Darboux anomena superfícies *isotèrmiques* aquelles en les que les línies de curvatura formen un sistema isotèrmic. Per exemple, les quàdriques, les cyclides (vegeu pàgina 212), les superfícies de revolució, les de curvatura mitjana constant, etc. Observem, però, que per a aquesta definició, i a diferència del cas de Liouville, necessitem la segona forma fonamental.

équations du mouvement d'un point material peuvent s'intégrer, de 1846, [412]. I el mateix any estudia les línies de curvatura a *Sur un théorem de M. Joachimsthal, relatif aux lignes de courbure planes*, [413]. Molt important també és la seva aportació a la cinquena edició de les *Applications* de Monge, [452]. Hi afegeix una traducció al francès del *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss. I les notes següents: *I. Sur les courbes à double courbure. II. Expressions diverses de la distance de deux points infniment voisins et de la courbure géodésique des lignes sur une surface. III. Théorème concernant l'intégration de l'équation des lignes géodésiques. IV. Sur le théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface. V. Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres. VI. Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique. VII. A l'occasion de l'équation des cordes vibtrantes.*

El 1851 publica *Sur la théorie générale des surfaces*, [416]. Dóna una expressió nova de la curvatura de Gauss:

$$K=-\frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{du}\frac{1}{D}\left(\frac{dG}{du}+\frac{F}{G}\frac{dG}{dv}-2\frac{dF}{dv}\right)-\frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{dv}\frac{1}{D}\left(\frac{dE}{dv}-\frac{F}{G}\frac{dG}{du}\right),$$

amb $D=\sqrt{EG-F^2}$. I la famosa fórmula de Liouville per al càlcul de la curvatura geodèsica d'una corba en funció de l'angle i que aquesta corba fa amb les línies coordenades $u=cte$,

$$k_g=-\frac{di}{ds}+\frac{\sqrt{G}}{2D^2}\left(\frac{F}{G}\frac{dG}{du}-\frac{dE}{dv}\right)\sin i+\frac{\sqrt{E}}{2D^2}\left(\frac{dG}{du}+\frac{F}{G}\frac{dG}{dv}-2\frac{dF}{dv}\right)\sin(\omega-i),$$

on ω és l'angle entre les línies coordenades. També el 1851 publica *Sur un théorem de M. Chasles*, [417], sobre superfícies de segon grau homofocals.

També va introduir el *càlcul diferencial amb índexs arbitraris*, on considera derivades n-èssimes on n no és necessàriament enter, en un article al Journal de l'École Polytechnique de 1832 que no comentarem.

9.3 L'Abbé Aoust (1814-1885)

L'abat Louis Aoust va néixer a Béziers i va ser professor a la universitat de Marsella a partir de 1854. Abans havia estat professor al Collége Stanislas a París, al Lycée de Strasbourg i a la Facultat de Ciències de Besançon. Va publicar diversos treballs sobre corbes com per exemple *Analyse infinitésimal des courbes sur une surface quelconque*, [13]; *Analyse infinitésimal des courbes planes*, [14]; *Analyse infinitésimal des courbes de l'espace*, [17]. A *Sur la courbure des surfaces*, [8], de 1866, obté expressions de la curvatura utilitzant el concepte inventat per ell de "curvatura inclinada" de les corbes coordenades (ja havia publicat una nota als Comptes Rendus amb el mateix nom tres anys abans, [6]). Com sap que el reconegut matemàtic Philippe Gilbert[74] ha trobat resultats semblants als seus acaba l'article dient

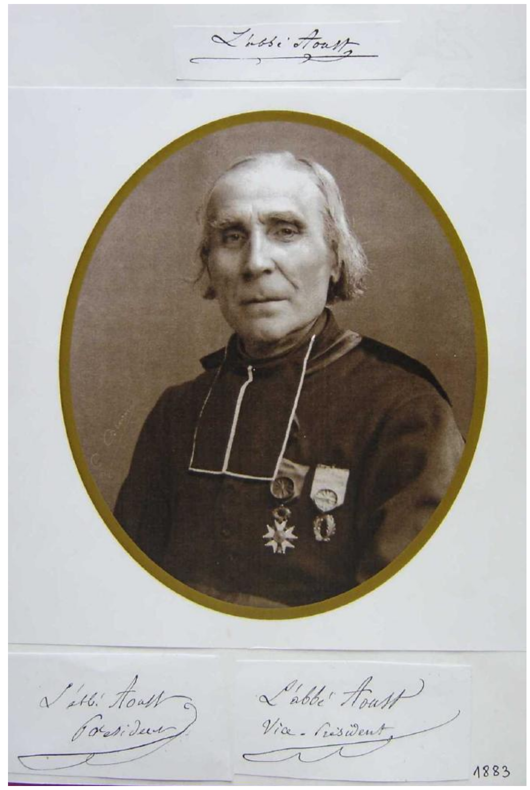


Figura 9.3: *Abbé Aoust*

[74]Philippe Gilbert (1832-1892) va ser professor a la Universitat catòlica de Lovaina des de 1855 fins la seva mort. Va treballar en anàlisi matemàtica, geometria, mecànica, física matemàtica i història de la ciència. Els treballs a que fem referència en el text són *Sur la courbure des surfaces*, [302], i *Sur quelques propriétés relatives à la courbure des surfaces*, [304]. El 1868 va enviar dues memòries a l'Acadèmia de Ciències de Bélgica, de les quals acusen rebut a les pàgines 2 i 72 del volum 25 de *Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, i que són comentades per Eugène Catalan unes pàgines més endavant amb el títol *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque*, [300]. A la mateixa revista encara hi ha un altre treball de Gilbert, *Sur quelques propriétés des trajectories*, [303], on suposant que té dos sistemes de corbes sobre una superfície que es tallen sota un angle constant θ, la integral de la curvatura geodèsica de les corbes del segon sistema de corbes sobre un quadrilàter $ABCD$, amb AB, CD del primer sistema i AD, BC del segon, és igual a $BC - AD - (DC - AB)\cos\theta$.

> "il est loin de notre pensée de chercher à diminuer le mérite des recherches de M. Gilbert, ainsi que la valeur des conséquences qu'il a tirées de ces formules."

Sobre aquest tema de prioritats hi ha una nota de Gilbert i una d'Aoust, titulades respectivament *Réponse à Mr. Aoust relative aux remarques et réclamation*, [9], i *Remarques et réclamation faites relativement au mémoire de Mr. Gilbert*, [301], publicades una a continuació de l'altre a *Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, on es tiren els plats pel cap. Els podeu trobar a `http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550#/summary`.

Aoust diu coses com

> "Toute question déjà résolue par un géomètre n'est pas chose sacrée à laquelle un autre géomètre n'ait pas le droit de toucher, bien loin de là".

I Gilbert respon amb

> "[...] jamais une raison aussi mal définie ne servira de base à une réclamation de priorité."

El 1869 estudia superfícies absidals a *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées*, [305]. Defineix *línies d'atracció* sobre uns superfície S, de pol O, com les corbes sobre S tals que en cada punt M la tangent a la corba en M pertany al pla determinat per O, M i la normal a S en M. Demostra que les trajectòries ortogonals a les línies d'atracció s'obtenen tallant la superfície per esferes de centre O. Si, per cada $M \in S$ considerem OM i tracem, en el pla OMN per OM i la normal MN, una recta OM' igual i perpendicular aOM, el lloc geomètric dels punts M' és una superfície S' que Gilbert anomena *apsidal*, nom que atribueix a Salmon, i comenta que és la superfície que Catalan anomena *conjugada* de S.

El 1870 publica *Sur les courbes planes à équations trinômes*, [306], on demostra que la relació entre els radis de curvatura d'una el·lipse i la seva développée en punts corresponents és la tercera part del quocient de les longituds dels segments de les tangents respectives compresos entre els eixos. El 1885 publica una breu nota d'una pàgina als Comptes Rendus, *Sur quelques formules de la théorie des corbes gauches*, [307], relacionant unes fórmules seves sobre la distància d'un punt de la corba a l'esfera osculatriu amb unes de Buchonnet, *Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice* , [115]. Quan Buchonnet publica el seu treball Gilbert posa en dubte les seves fórmules, però posteriorment ha de rectificar, i en una carta publicada a *Nouvelles Annales de Mtahématiques*[75], serie 2, (12), 1873, 131-133, reconeix el seu error: "l'erreur est de mon côté: la formule de M. Ruchonnet [sic] est parfaitement exacte".

I més endavant, parlant de la definició de curvatura geodèsica que dóna l'abat diu

> "Cette définition de la torsion géodésique est fausse."

El treball [8] de Aoust que estàvem comentant, continua a *Sur un principe de la théorie des surfaces*, [11], de 1868, i a *Sur la théorie des surfaces*, [10].

En la nota *Des transformations doubles des figures. Transformation des figures par normales à la sphère réciproques*, [5], estudia com canvia la curvatura geodèsica per inversions.

Podeu trobar més informació sobre l'Abbé Aoust a una mena de currículum publicat per ell mateix *Notice sur les titres et travaux scientifiques de M. L'Abbé Aoust*, [16], el 1875. El mateix any encara publica una nota continuació dels seus articles sobre coordenades curvilínies, [15].

9.4 Ferdinand Joachimsthal (1818-1861)

Neix[76] a Goldberg, Alemanya, avui Zlotoryja, Polonia. De petit va ser alumne de Kummer a Liegnitz, avui Legnica, Polonia. El 1836 va anar a Berlin on va ser alumne de Dirichlet i Steiner, i el 1838 va anar a Königsberg on va ser alumne de Jacobi[77].

Figura 9.4: *F. Joachimsthal.*

Entre 1845 i 1852 és professor a la Universitat de Berlin. Després passa a Halle i Breslau, aquí com successor de Kummer. D'aquesta època és el llibre de text *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves du Collège Royal Français*, [333]. Les notes dels seus cursos a

[76] Informació treta de `http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902191.html`.

[77] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Neix a Postdam, Prússia, actual Alemanya. Entra a la Universitat de Berlin el 1821 i llegeix la tesi el 1825. Va a Königsberg i contacte amb Gauss i Legendre. Són famosos els seus treballs sobre funcions el·líptiques, amb competència amb Abel. Va estudiar el determinant que avui es coneix com *jacobià*. Vegeu la nota **165** de Struik, pàgina 263.

Breslau es publiquen pòstumament
per Liersemann amb el títol: *Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung*[78], [336]. Hi apareix una demostració del teorema egregi de Gauss una mica diferent de la del *Disquisitiones*, ja que utilitza determinants, concretament el fet de que el determinant del producte de matrius és el producte dels determinants, resultat que atribueix a Gauss.

Va ser molt reconegut per la qualitat de les seves classes i llibres.

El 1843 publica *Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus*, [326], tema que havia estudiat a la seva tesi de 1840. Un teorema que porta el seu nom diu: *Al llarg d'una geodèsica o línia de curvatura d'una quàdrica amb centre, el producte del semi diàmetre de la quàdrica paral·lel a la tangent a la corba en un punt P i la distància del centre de la quàdrica al pla tangent per P és constant.*

Observeu la similitud entre els elements geomètrics que apareixen en aquest teorema i els paràmetres que apareixen a l'expressió de la curvatura de l'el·lipse que donem a la pàgina 14.

Les geodèsiques sobre quàdriques també van ser estudiades el 1861 per Karl T. W. Weierstrass (1815-1897) a *Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid*, [568], i per Anton von Braunmühl,[79] *Über Enveloppen*

[78] Aplicació del càlcul diferencial i integral a la teoria general de superfícies i línies de doble curvatura. Vegeu `https://archive.org/details/anwendungderdiff00joac`.

[79] Anton von Braunmühl (1853-1908) va néixer a Tiflis (Tbilisi, Georgia), va ser professor a la Technische Hochschule München. Encara com estudiant ja va publicar el 1877 un breu treball, dirigit per Alexander Wilhelm von Brill, sobre les geodèsiques de les superfícies de revolució de curvatura constant, *Die geodätischen Linien der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung*, [106], que podeu trobar a `http://digital.slub-dresden.de/en/workview/dlf/169013/`, que fou el preludi de la seva tesi *Über Geodätische Linien auf Rotationflächen und jene Einhüllenden derseleben*, [107], dirigida per Philipp Ludwig Seidel i Gustav Conrad Bauer, que podeu trobar a `http://www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/titleinfo/6026746`.

Tracta aquest tema en diversos articles posteriors com el de 1879 *Über Enveloppen geodätischer Linien*, [108], el de 1881 *Ueber die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen*, [110], i el de 1882 *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades*, [111]. Aquests dos darrers articles es van publicar a *Mathematische Annalen* que podeu trobar a `http://www.digizeitschriften.de/main/dms/toc/?PPN=PPN235181684`.

L'article [106] està publicat a *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des Königlichen Polytechnikums zu München*, és a dir, *Models matemàtics elaborats a l'institut de matemàtiques del real politècnic de Munich.* Aquesta revista estava pensada *geodätischer Linien auf dem venlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoid*, [109].

El resultat més conegut de Joachimsthal (si dues superfícies es tallen al llarg d'una corba amb angle constant i aquesta corba és línia de curvatura d'una de les superfícies també ho és de l'altre) es va publicar el 1846 a *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium*, [327], però aquí només estudiava el que després s'han conegut com *superfícies de Joachimsthale*, és a dir, superfícies tals que una de les famílies de les línies de curvatura són planes, i els plans que les contenen tenen un eix comú. Això implica que les línies de curvatura de l'altre família estan sobre esferes que tenen el centre en l'eix comú. Així, aquestes superfícies també es poden definir com les trajectòries ortogonals a una família d'esferes de radis variables i centres alineats.

L'article acaba dient que el mateix problema, però en el cas en que els plans que contenen les línies de curvatura són paral·lels, havia estat estudiat ja per Monge, [452], p.139. De fet, la secció XVII de les *Applications* es titula: *De la génération de la surface courbe dont toutes les lignes d'une des courbures sont dans des plans parallèles à un plan donné.*

Posteriorment, el 1848, va publicar *Mémoire sur les surfaces courbes*, [330]. També va estudiar aplicacions dels determinants a la geometria a *Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, [331], i problemes de geometria clàssica com per exemple *Théorème relatif au cercle qui passe pas trois points d'une ellipse*, [332], o *Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique*, [334] , on demostra, per exemple, que des d'un punt interior a una el·lipse s'hi poden traçar 4 perpendiculars. Encara hi ha qui utilitza la *notació de Joachimsthal* $s_{ij} = Ax_ix_j + B(x_iy_j + x_jy_i) + Cy_iy_j + F(x_i + x_j) + G(y_i + y_j) + H$, on $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Fxy + 2Gy + H = 0$ és l'equació d'una cònica. Això permet expressar còmodament els conceptes de polar, tangent, etc.

Va fer petites col·laboracions, proposant i resolent problemes, a la revista dels candidats a les escoles politècnica i normal, els *Nouvelles Annales de*

perque hi publiquessin els alumnes d'un laboratori, creat per Brill i Klein, per al disseny, producció i aplicacions pedagògiques de models matemàtics.

Braunmühl es va interessar també en la història de la trigonometria i és un reconegut historiador de la matemàtica. En aquest tema va col·laborar amb Heinrich Wieleitner, qui posteriorment va escriure una nota biogràfica sobre Braunmühl, [579], on hi podeu trobar una extensa bibliografia amb el seus treballs.

Mathématiques, com ara *Note sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne quelconque*, [328], i *Problème sur les polaires*, [329]. Després de la seva mort aquesta revista encara va publicar tres notes seves amb el mateix títol: *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, [335], [337], [338].

9.5 Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)

Neix a Montpellier. Entra a l'École Polytechnique el 1833 i n'esdevé professor el 1844. A partir de 1868 és ajudant de Chasles a la mateixa escola. El 1878 passa a la Sorbonne. El 1883 substituieix Liouville com a membre del Bureau des Longitudes. Va introduir la curvatura geodèsica la qual cosa li va permetre de generalitzar el teorema del defecte de Gauss a triangles amb costats no geodèsics. És el que es coneix actualment com Teorema de Gauss-Bonnet.

Independentment de Minding va demostrar que la curvatura geodèsica és una propietat intrínseca de la superfície (invariant per flexions).

El 1844 va publicar *Sur quelques proprietes générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces*, [60]. Diu: "L'illustre géomètre [Gauss] fait usage, dans ce beau travail [El Disquisitiones] de considérations analytiques trèsingénieuses et trés élégantes, mais qui laissent peut-être à désirer sous le rapport de la simplicité. Je me suis proposé [. . .] de reprendre les mêmes questions par les méthodes de la géométrie pure."

Figura 9.5: *Pierre O. Bonnet.*

El 1845 va publicar tres articles en el mateix volum, el 18, del *Journal de l'Ecole Polytechnique*: *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales*, [62], *Note sur les ombilics des surfaces*, [63], i un de contingut més físic, *Mémoire sur la théorie des corps élastiques*, [61]. A la nota sobre els punts umbilicals[80] [63] comenta que segons uns autors hi passen, per aquests punts umbilicals, infinites línies de curvatura (Monge) i segons altres només un número finit (Dupin). Però que es poden conciliar aquests punts de vista introduint el concepte de línies de curvatura de primera i segona espècie. Dóna una definició geomètrica d'aquestes segones a partir de la idea de que les normals a una superfície no es tallen, i les caracteritza de la manera següent: "si l'on considère ce que l'on peut appeler la seconde courbure des sections normales, c'est-à-dire la derivée de la première courbure par rapport a l'arc, on pourra considérer des sections principales par rapport à cette seconde courbure, et il arrivera, ce qui, je crois, n'a pas été remarqué, que la direction de ces sections principales sera celle des lignes de courbure de la seconde espèce."

A la nota sobre els cossos elàstics retroba per un mètode més senzills resultats de Lamé a [366].

El 1848 va publicar *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, [64], que és on apareix per primer cop el teorema que després es dirà de Gauss-Bonnet, i el 1849 va tornar sobre les superfícies isotermes a *Sur les surfaces isothermes et orthogonales*, [66]. Aquí dóna una demostració més simple del teorema de Lamé que diu que, si prescindim de les superfícies cilíndriques i còniques, *els únics sistemes triples de superfícies isotermes i ortogonals són els sistemes formats per les superfícies de segon grau homofocals.* Diu que ell mateix ja havia donat una primera simplificació al quadern XXX del *Journal de l'École Polytechnique* (es refereix a [62]). També diu que aquest article és un extracte d'una nota prèvia al *Comptes Rendues* (es referix a [65]).

El 1851 publica *Note sur quelques points de la théorie des surfaces*, [68], i *Note sur la théorie générale des surfaces*, [67]. Aquest darrer treball és conseqüència d'haver llegit les anotacions de Liouville a la cinquena edició de les *Applications* de Monge, [452]. Comença dient que algunes de les fórmules de Liuoville ja consten en el seu treball de 1844, concretament a [60] (com sempre, la paternitat). Cita, en particular, un parell d'expressions de la curvatura geodèsica. Diu també que M. Chelini ja havia fet notar que els resultats de Liouville es deduïen fàcilment dels de Bonnet, però la manera de veure-ho no li sembla la més simple i en dóna una nova prova.

El 1852 publica *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques*, [69], que es pot considerar com un resum sobre l'estat de la qüestió (dificultat

[80]El primer en considerar aquest tipus de punts, que els va anomenar *ombilics*, va ser Monge.

de fer mapes) en aquell moment, amb les aportacions de Lagrange, Euler, i sobre tot de Gauss. Ell mateix ja diu que aquest treball no ofereix res essencialment nou.

El 1853 publica *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, [71]. Aquest llarg treball té quatre parts: I. *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, II. *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes*, III. *Des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre, ou bien sphériques dans les deux systèmes.* IV. *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques.*

Citem a continuació diverses notes curtes d'aquesta època als *Comptes Rendues*: el mateix 1853 publica *Note sur la théorie générale des surfaces*, [73]; quatre notes sobre superfícies amb línies de curvatura planes o esfèriques [70], [72], [74] i [76], que donen lloc a l'article [71] al *Journal de l'École Polytechnique* que hem comentat abans; el 1855 publica *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation générale des surfaces à aire minimum*, [79], on respon a la pregunta de Frenet sobre les superfícies d'àrea mínima que passen per una o diverses rectes paral·leles a un mateix pla, i *Observations sur les surfaces minima*, [78], una breu nota on comenta que Joachimsthal no deu conèixer el seu treball de 1853 (es refereix a [73]) i *Sur les lignes géodésiques*, [80]; el 1856 publica *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima*, [84], continuació de [78]; *Sur les surfaces pour lesquelles la somme des deux principaux rayons de courbure est égale au double de la normale*, [86]; *Note sur un genre particulier des surfaces réciproques*, [83]; *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, [85], i *Note sur la courbure géodésique*, [82].

El 1858 publica una nota d'una sola pàgina sobre superfícies reglades, [87]. Diu que com que M. Bertrand ha citat, en una sessió anterior de l'Acadèmia, tres teoremes d'ell, demana permís a l'Acadèmia per comunicar-li al senyor Bertrand un altre teorema, que ell coneix des de fa temps, però que no ha publicat. Es refereix a com varien les curvatures de Gauss i mitjana al llarg de les generatrius. Curiosament defineix curvatura de la superfície com la mitjana geomètrica de les curvatures principals (l'arrel quadrada de la curvatura de Gauss). Així les dues curvatures que manipula són les mitjanes aritmètica i geomètrica de les curvatures principals.

La coneguda fórmula de Bonnet per a la curvatura geodèsica apareix per primer cop al treball [82] que hem citat abans. Aquesta fórmula és:

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{Gm-Fn}{\sqrt{En^2-2Fmn+Gm^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{En-Fm}{\sqrt{En^2-2Fmn+Gm^2}}\right)$$

on la corba està donada per $f(u,v)=0$, i $m=f_u$, $n=f_v$.[81]

Aquesta fórmula sembla difícil però és força senzilla si recordem algunes propietats de la curvatura geodèsica. La primera és que la curvatura geodèsica $k_g = k_g(s)$ d'una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc, està donada per

$$k_g = \det(T, T', \nu)$$

on $T = \gamma\,'(s)$ és el vector tangent unitari a la corba, i $\nu = \nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$. on $\mathcal{N}$ és l'aplicació de Gauss.

Ara pensem T no com funció de s sinó com una funció definida sobre U, és a dir, $T = T(u,v)$.

Això ho podem fer perquè no donem la corba directament com $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ sinó que la donem com la imatge per φ dels zeros d'una certa funció $f(u,v)$. Per tant, sobre la superfície tenim les corbes que són imatge per φ de les corbes de nivell de f, $f(u,v) = cte.$ Llavors en cada punt $P = \varphi(u_0, v_0)$ de la superfície tenim un vector tangent $T(u_0,v_0) \in T_P S$ definit així: $T(u_0, v_0)$ és el vector tangent a la corba $\varphi(u, v(u))$ on la funció $v = v(u)$ està definida implícitament per la condició $f(u,v) = f(u_0, v_0)$.

Així doncs tenim

$$T' = \frac{d}{ds}T(u(s), v(s)) = T_u\, u' + T_v\, v'$$

i per tant

$$k_g = \det(T, T', \nu) = \langle T \wedge T', \nu\rangle = \langle T \wedge T_u\, u' + T \wedge T_v\, v', \nu\rangle.$$

[81] Hi ha un misprint a les arrels quadrades de dintre el parèntesi a Struik, [550], p. 154, on la fórmula apareix canviada de signe respecte de l'original de Bonnet, que hem respectat. Eisenhart, a la pàgina 136 de [244], diu que el primer cop que apareix aquest fórmula és a [64], i té certa raó, però allà el problema que tracta és el de desenvolupar una superfície sobre una altra, cosa que implica que les corbes de nivell de les curvatures de Gauss de les dues superfícies han de coincidir. És a dir, estudia les corbes $K = constant$, on K és la curvatura de Gauss, no el cas general que considerem aquí. A més, no sé si perquè no se n'adona, dóna les derivades dels quocients que apareixen a la dreta de la fórmula de la curvatura geodèsica anterior ja realitzades (no les escriu en forma de derivada), per la qual cosa li surt una fórmula llarguíssima que en prou feines pot incloure en els marges de la pàgina. En canvi, a [82] apareix com l'hem donat nosaltres i com es dóna habitualment a tots els llibres de text.

Com que

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

tenim

$$\sqrt{EG - F^2}\, k_g = \langle T \wedge T_u u' + T \wedge T_v v', \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle. \tag{9.1}$$

Però

$$T \wedge \varphi_u = (\varphi_u u' + \varphi_v v') \wedge \varphi_u = v'(\varphi_v \wedge \varphi_u),$$

i anàlogament

$$T \wedge \varphi_v = (\varphi_u u' + \varphi_v v') \wedge \varphi_v = u'(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Substituint aquestes darreres expressions a (9.1) obtenim (en virtut de la fórmula fonamental que relaciona el producte escalar i el producte vectorial i la igualtat de Schwartz de les derivades creuades)

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2}\, k_g &= \langle T \wedge T_u, T \wedge \varphi_v \rangle - \langle T \wedge T_v, T \wedge \varphi_u \rangle \\ &= T_u \cdot \varphi_v - T_v \cdot \varphi_u \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(T \cdot \varphi_v) - \frac{\partial}{\partial v}(T \cdot \varphi_u). \end{aligned} \tag{9.2}$$

(En el problema 11, Secció 4-2, de Struik, es dóna aquesta fórmula per a una corba $(u(s), v(s))$ cosa que implicaria estendre T a tota la superfície (un entorn obert de la corba) per poder derivar-lo respecte u i v. Ja hem dit que nosaltres evitem aquest problema considerant la corba com zeros d'una funció de les dues variables u, v). No sé perquè no es dóna més importància a aquesta expressió simple de k_g, potser perquè a la pràctica per poder fer aquestes derivades necessitem tenir T en funció de u, v cosa que en general no tenim.

Aquests parèntesis derivats són justament els que apareixen a la fórmula de Bonnet. En efecte, com pensa la corba com $f(u, v) = 0$, tenim

$$f_u u' + f_v v' = 0,$$

és a dir,

$$\frac{u'}{v'} = -\frac{f_v}{f_u} = -\frac{n}{m}.$$

Aquestes derivades són respecte del paràmetre arc, de manera que

$$1 = \|(u', v')\| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = \frac{v'}{m}\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}.$$

Per altra banda,

$$T\cdot\varphi_u = Eu' + Fv' = v'(-E\frac{n}{m} + F) = \frac{v'}{m}(Fm - En) = \frac{Fm - En}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}},$$

$$T\cdot\varphi_v = Fu' + Gv' = v'(-F\frac{n}{m} + G) = \frac{v'}{m}(Gm - Fn) = \frac{Gm - Fn}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}}.$$

Substituint aquestes dues últimes igualtats a (9.2) tenim el resultat.

Aquesta mateixa fórmula amb la seva demostració la torna a publicar a l'article de 1860 *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces*, [88]. En aquest article atribueix el nom de curvatura geodèsica a Liouville, vegeu el peu de pàgina 70, pàgina 136.

El 1862 publica *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, [89], en dues parts al mateix volum dels *Comptes Rendues*, on estudia el problema de la determinació dels sistemes de superfícies triplement ortogonals. Diu que la importància d'aquest problema prové de la feliç utilització feta per Lamé de les coordenades curvilínies. Diu que de moment els únics exemples que es coneixen són els sistemes de superfícies de segon grau homofocals descobertes antigament per Binet, els exemples donats per Serret al volum XII del *Journal de Liouville* (es refereix a [530]), i els exemples que el senyor W. Roberts ha deduït de la consideració de coordenades el·líptiques. A continuació diu: "J'ai réussi à faire entrer la question dans une voie nouvelle, qui m'a conduit à des résultats d'une généralité et d'une étendue inespérées".

El 1864 ja està estudiant el teorema que després portarà el seu nom (quan els triangles no són geodèsics): *Démonstration du théorème de Gauss relatif aux petits triangles géodésiques tracés sur une surface courbe quelconque*, [90]. Diu que en el *Disquisitiones* Gauss arriba a aquesta fórmula després de càlculs llargs i complicats i, que ell sàpiga, cap geòmetra ha mirat de reduir-la al que té d'essencial. "Je pense donc faire une chose utile en publiant ici une démonstration nouvelle qui me paraît simple et qui de plus a l'avantage de conduire directement au but".

El 1865 publica *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, [91], primera part. Aquesta primera part es subtitula *Démonstration du théorème de Gauss. Méthode pour reconnaître si deux surfaces données sont ou ne sont pas applicables l'une sur l'autre.*

Aplica el resultat de Gauss d'existència de coordenades isotermals[82]. Cita concretament [289]. Això permet escriure la mètrica com

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

que fent el canvi a variable complexa $\alpha + i\beta = x$, $\alpha - i\beta = y$, permet escriure la mètrica com

$$ds^2 = \varphi^2\, dx\, dy$$

i demostra que quan una superfície és aplicable sobre una altra la quantitat

$$\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \ln \varphi^2}{\partial x \partial y}$$

és constant. Com que aquesta quantitat és la meitat de la curvatura, llevat del signe, cosa que no diu explícitament fins al final de l'article, ha obtingut una demostració del teorema egregi.

[82] L'argument de Gauss és el següent. Escriu la superfície com $(x(t,u), y(t,u), z(t,u))$ i escriu $dx = adt + a'du$, $dy = bdt + b'du$, $dz = cdt + c'du$. Així, la primera forma fonamental és

$$\omega = (a^2 + b^2 + c^2)dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')dt\, du + (a'^{\,2} + b'^{\,2} + c'^{\,2})du^2.$$

L'equació $\omega = 0$ es pot trobar descomponent l'anterior expressió com producte de dos factors lineals

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; (a^2 + b^2 + c^2)dt \\ &+\; [aa' + bb' + cc' \pm i\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^{\,2} + b'^{\,2} + c'^{\,2}) - (aa' + bb' + cc')^2}]du \end{aligned}$$

La integral d'aquesta equació serà del tipus

$$p \pm iq = Cte$$

on p i q són funcions de t i u. Per tant,

$$(dp + i\, dq)(dp - i\, dq) = dp^2 + dq^2$$

és un factor de ω i per tant

$$\omega = n(dp^2 + dq^2)$$

amb $n = n(t, u)$.

Llavors la integra sobre un recinte amb vora diferenciable a trossos i obté el que avui coneixem com Teorema de Gauss-Bonnet, resultat que ja havia obtingut molts anys abans a [64], si bé amb mètodes diferents que aquí.

Diu:

> "La relation précédente renferme implicitement toutes les formules des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, celles de mon Mémoire sur la théorie général des surfaces et celles un peu plus générales que M. Liouville a données dans son Cours au Collége de France."

A continuació dóna condicions necessàries i suficients (el teorema egregi és només condició necessària) per tal de que una superfície es pugui aplicar sobre una altra.

La idea és que si tenim dues superfícies l'una amb coordenades (u, v) i l'altre amb coordenades (u', v') i hi ha una relació entre aquestes coordenades que conservi longituds els elements de longitud corresponents han de ser iguals. De manera que Bonnet escriu

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = E' du'^2 + 2F' du'\, dv' + G' dv'^2. \tag{9.3}$$

Si ara tenim una funció k sobre la primera superfície i una funció k' sobre la segona (per exemple, la curvatura de Gauss) tals que per la correspondència entre les dues superfícies compleixen

$$k = k' \tag{9.4}$$

podem diferenciar i tenim

$$\frac{dk}{du} du + \frac{dk}{dv} dv = \frac{dk'}{du'} du' + \frac{dk'}{dv'} dv'$$

que Bonnet escriu com

$$m du + n dv = m' du' + n' dv'. \tag{9.5}$$

Ara eleva al quadrat (9.5) i suma terme a terme un múltiple de (9.3),

$$\begin{aligned} & (m^2 + \lambda E) du^2 + 2(mn + \lambda F) du\, dv + (n^2 + \lambda G) dv^2 \\ = \; & (m'^2 + \lambda E') du'^2 + 2(m'n' + \lambda F') du'\, dv' + (n'^2 + \lambda G') dv'^2 \end{aligned}$$

i ara imposa que aquestes expressions siguin quadrats perfectes, i obté

$$\frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{EG - F^2} = \frac{E'n'^2 - 2F'm'n' + G'm'^2}{E'G' - F'^2}$$

que escriu com

$$H = H', \tag{9.6}$$

que torna a diferenciar

$$\frac{dH}{du}du + \frac{dH}{dv}dv = \frac{dH'}{du'}du' + \frac{dH'}{dv'}dv'. \tag{9.7}$$

Llavors diu que les quatre equacions (9.4), (9.5), (9.6), (9.7), permeten determinar u', v', du', dv' a partir de u, v, du, dv i substituint aquests valors a (9.3) obtenim les condicions que expressen que les dues superfícies són aplicables.

El 1867 publica, amb el mateix títol, la segona part de [91], [92], i aquesta segona part la subtitula *Détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée*. A la pàgina 31 fa autocrítica i en una nota titulada *Addition au mémoire précédent* diu:

> "La solution du problème général de la déformation des surfaces que nous avons donnée dans la Mémoire précédent présente à certains égards une véritable lacune. Nous avons supposé que l'on connaissait les variables x et y pour lesquelles l'élément linéaire de la surface donnée prend la forme simple $\varphi^2\, dx\, dy$. Or on sait que la détermination de ces variables exige l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre; si donc cette intégration ne peut être effectuée, on se trovera arrêté dès le début dans la mise en équation du problème. Les deux solutions que M. Bour a données dans son grand et important travail sur la deformation des surfaces présentent le même inconvenient. M. Codazzi, dans le beau Mémoire qui a obtenu une mention honorable au concours de 1860, a résolu la question d'une manière plus satisfaisante, en ne faisant aucune hypothèse sur la nature des variables au moyen desquelles on exprime les coordonnées rectangulaires des différents points de la surface donnée."

A la pàgina 35 enuncia i demostra el famós teorema de Bonnet sobre l'existència d'una superfície amb primera i segona forma fonamentals donades que hem reproduït a la pàgina 171. Però el seu enunciat diu així (pàgina 35 de [92]):

> " Avant d'aller plus loin, montrons comment on calcule les coordonnées rectangulaires des points d'une surface pour laquelle on connaît, en function de u et de v, les huit quantités f, g, M, N, P, Q, R, S, et prouvons qu'à tout système de valeurs de ces quantités, satisfaisant bien entendu aux équations (3), (4), (5), répond une surface, et une seule."

Aquestes quantitats les ha introduït així:

$$\frac{f}{r_{t,v}} = M, \quad \frac{f}{r_{n,v}} = P, \quad \frac{f}{\rho_{t,v}} = R,$$

$$\frac{g}{r_{t,u}} = N, \quad \frac{g}{r_{t,u}} = Q, \quad \frac{g}{\rho_{t,v}} = S,$$

on $f\,du$ és l'element de longitud de les corbes $v = constant$ (així f és $\sqrt{E}$ amb la notació habitual), on $g\,dv$ és l'element de longitud de les corbes $u = constant$ (així g és $\sqrt{G}$ amb la notació habitual), $1/r_{t,v}$ la curvatura geodèsica, $1/r_{n,v}$ la curvatura normal i $1/\rho_{t,v}$ la torsió geodèsica (i anàleg per a u). I les equacions (3), (4), (5) són respectivament

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u} + MS - NP &= 0 \\ \frac{R}{f} + \frac{S}{g} &= 0 \\ M = -\frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad N = \frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial u} \end{aligned}$$

Compareu-les amb les equacions de Codazzi en coordenades principals, pàgina 172.

A la pàgina 44 demostra que quan dues superfícies diferents no reglades són aplicables l'una sobre l'altra, les línies asimptòtiques de la primera no poden anar a parar a les línies asimptòtiques de la segona. Per contra, quan dues superfícies reglades són aplicables l'una sobre l'altre les generatrius rectilínies de la primera van a les generatrius rectilínies de la segona.

També estudia on poden anar a parar les geodèsiques. A la pàgina 73 es planteja el problema de saber si existeixen superfícies aplicables l'una sobre l'altre tals que els dos radis de curvatura principals siguin iguals en punts corresponents, i el resol completament a les pàgines següents. Prova, en particular, que hi ha infinites superfícies de curvatura mitjana constant (això inclou les minimals) aplicables les unes sobre les altres.

Quan una superfície té una infinitat de superfícies aplicables d'aquest tipus les seves línies de curvatura formen un sistema isotermal.

A la pàgina 112 dóna una nova demostració, aquest cop utilitzant les fórmules de Codazzi, d'un fet ja conegut i del qual el propi Bonnet n'havia donat ja alguna demostració. Aquest fet consisteix en provar que si una superfície té la propietat de que al llarg de qualsevol línia de curvatura el radi de curvatura principal corresponent varia proporcionalment al cub de l'altre, llavors aquesta superfície és una quàdrica.

Per altra banda, se sabia, per càlcul directe, que *les línies de curvatura de les quàdriques formen un sistema isotermal de Liouville* (és a dir, $ds^2 = (U(u)+V(v))(du^2+dv^2)$). En aquest article, a la pàgina 120, Bonet demostra que aquesta propietat caracteritza les quàdriques. Si traiem la condició "de Liouville" llavors hi ha molts més exemples, com hem comentat al peu de pàgina número 73 de la pàgina 138, i una classificació general no existeix que jo sàpiga, almenys no existia quan Eisenhart[83] va escriure el seu llibre *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, [243], que justament a la pàgina 298 comenta aquest article de Bonnet. Aquest article és al que fa referència Struik a la seva nota **143**, pàgina 261.

El 1885 el *Bulletin des Sciences Mathématiques* publica un fragment d'una carta de Bonnet a Darboux, *Sur la surface réglée minima*, [94], en la que reprodueix la demostració que ell explica en els seus cursos de la Sorbonne de que l'helicoide (gauche à plan directeur) és la única superfície reglada mínima.

[83]Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965). Crec que és l'únic nord-americà d'aquestes notes. Va néixer a Pennsylvania. Es va doctorar a la John Hopkins University el 1897 amb una tesi titulada *Infinitesimal Deformations of Surfaces*. La seva referència eren les *Leçons* de Darboux. Eisenhart va estudiar les superfícies reglades formades per les rectes que uneixen punts corresponents de dues superfícies per l'aplicació que porta isomètricament l'una sobre l'altre. Va publicar nombrosos treballs, la majoria relacionats amb el tema de deformació de superfícies, i diversos llibres de text, com per exemple el que citem en el text [243], *Transformations of Surfaces* [245], *Riemannian Geometry* [246], *Continous Groups of Transformations* [247], *An Introduction to Differential Geometry With Use of the Tensor Calculus* [248].

Quan ja tenia quasi 70 anys es va posar nerviós[84] al llegir una nota del senyor Paraf, [467], titulada *Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques* i no va poder resistir la temptació de fer-hi afegir una nota, [95], on diu que aquests resultats els havia obtingut ell trenta anys abans, i cita [77] i [81]. Tot aquest tema està relacionat amb el fet de si les geodèsiques són minimals de longitud o no.

Un dels seus tres fills, Georges, també va entrar a l'École Polytechnique, i va publicar una nota als Comptes Rendues, *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand*, [59], on utilitza "des propositions suivants, dues à M. Ossian Bonnet, mon père." Calcula la longitud d'una circumferència geodèsica sobre una superfície negligint termes de quart ordre. També va publicar una nota sense massa interès titulada *Démonstration des proprietés fondamentales du système de coodonnées polaires géodésiques*, [58].

9.6 Joseph Alfred Serret (1819-1885)

Figura 9.6: *Joseph A. Serret.*

Neix a París. Es gradua a l'Ècole Polytechnique el 1840. La seva primera publicació, sobre integrals eulerianes al *Journal de l'École Polytechnique*, és presentada per Liouville, que escriurà desprès una mena de continuació. Neix una relació de mestre-deixeble que acaba malament per problemes amb una plaça a la Facultat de Ciències. Però sembla que es reconcilien cap el 1870 per una lluita en comú contra Le Verrier. El 1848 passa a ser examinador de les proves d'entrada a l'École Polytechnique, i és Catedràtic de la Sorbonne a partir de 1863. Va editar els treballs de Lagrange (14 volums entre 1867 i 1892).

El 1845 publica una nota molt breu als Comptes Rendues sobre superfícies isotermes, *Note sur la théorie des surfaces isothermes*, [44], on cita *l'heureuse*

[84] Això m'ho invento jo.

idée, due à Lamé, d'introduir les superfícies isotermes en l'estudi de les lleis del moviment degut al calor.

El 1847 publica *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, [530], on estudia sistemes de superfícies triplement ortogonals, donant com exemple les superfícies donades per $x^m y^n z^p = const.$ Comença l'article citant els contraexemples de Bouquet, [97], al fet de que una família donada de superfícies es pugui considerar sempre com formant part d'un sistema triplement ortogonal. Ja hem parlat d'aquest tema a la pàgina 111.

El 1848 publica *Note sur une équation aux dérivées partielles*, [531], on estudia superfícies de curvatura mitjana o total constant.

Un dels seus treballs més coneguts, de 1851, és *Sur quelques formules relatives à la theorie des courbes à double courbure*, [533]. És on apareixen per primer cop les fórmules de Frenet (o de Serret-Frenet). Frenet les va publicar el 1852 a [286], un any desprès que Serret. Però aquest article de Frenet és un extracte de la seva tesi defensada el 1847, quatre anys abans, doncs, que el treball de Serret. Tot això porta a una controvèrsia de prioritat sobre aquestes fórmules ben explicada a la tesi de Jean Delcourt, [219].

Segons [2] el primer d'utilitzar triedres mòbils va ser Martin Bartels (1769-1836) professor a la Universitat de Dorpat (avui Tartu, Estònia). Bartels és molt conegut per haver estat professor del jove Gauss i posteriorment, de Lobatchevsky a Kazan. Aquestes fórmules de Bartels, equivalents a les de Frenet varen ser publicades pel seu alumne a la Universitat de Tartu (Estonia) Carl Eduard Senff (1810-1849) el 1831 a *Teoremata principalitat e theoria curvarum et superficierum*, [528], que les atribueix a Bartels.

L'article [533] comença dient que el contingut del mateix és una carta que havia enviat dos anys abans a Liouville, i que aquest li havia fet l'honor d'incloure-la a les notes de la cinquena edició de l'obra de Monge, *Application de l'Analyse a la Géométrie*. Retroba, pels seus mètodes, resultats coneguts, com ara que la hèlix ordinària és la única corba amb les dues curvatures constants, resultat que atribueix a Puiseux; i que si el quocient de les curvatures és constant la corba és una hèlix traçada sobre un cilindre de base arbitrària, resultat que atribueix a Bertrand. Curiosament l'article que ve a continuació de [533], en el *Journal de Mathématiques*, és de Puiseux, i es titula *Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport contant*, [485].

També dóna la condició, a partir de les dues curvatures, perquè una corba estigui sobre una esfera. Concretament

$$\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4 \tau^2} = a^2,$$

on a és una constant i k i τ són la primera i segona curvatura, és a dir, la curvatura i la torsió.

A la mateixa revista on publica [533], unes pàgines més endavant, publica una breu nota titulada *Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure*, [534], on dóna una demostració del resultat de Bertrand, publicat a [47], sobre corbes amb les mateixes normals. Recordem que aquest resultat diu que entre la curvatura i la torsió de cadascuna d'aquestes corbes hi ha una relació lineal.

El 1853 publica *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes*, [537], a partir de la nota de Bonnet sobre el mateix tema [75]. Bonnet va publicar aquest mateix any diverses notes sobre superfícies amb línies de curvatura planes o esfèriques, vegeu pàgina 147. També el 1853 publica *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle*, [532], on es planteja trobar totes les solucions de l'equació

$$dx^2 + dy^2 = k^2 \frac{dz^2}{(1+z^2)^2},$$

on k és una constant donada i x i y són funcions racionals de la variable independent z. Això és, essencialment, el que vol dir el títol de l'article.

Buscant aquest article de Serret vaig trobar, en el mateix volum del *Journal de l'École Polytechnique*, un article interessant de Jules de la Gournerie[85], titulat *Mémoire sur les courbes d'ombre et de perspective des surfaces de revolution*, [216], on estudia la intersecció del con visual (vèrtex a l'ull) amb la superfície. Gournerie ja havia publicat el 1851 un llarg article sobre aquest tema, *Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des héliçoides gauches*, [215].

[85] Jules-Antoine-René Maillard de la Gournerie (1814-1883). Neix a Nantes. Entra a la marina participant a l'ocupació d'Algèria. El 1833 abandona la marina i entra a l'École Polytechnique. Es dedica a l'enginyeria. A partir de 1850 es dedica a les matemàtiques per gust. És professor a l'École Polytechnique i al Conservatori. Vegeu `http://www.sabix.org/bulletin/b5/gournerie.html`. A part dels articles comentats en el text també va publicar *Étude sur la courbure des surfaces*,[217], el 1855, on es preocupa, entre altres coses, de trobar les seccions normals d'una superfície sobreosculades per un cercle (aquestes corbes les retroba Laguerre a *Sur les courbes que l'on peut tracer sur les surfaces algébriques*, [355]). El 1858 publica *Note sur la courbure de la section faite dans une surface par un plan tangent*, [218] on diu: "Quelques auteurs ont crue que la section par le plan tangent avait un rayon de courbure infini, mais c'est une erreur qu'on peut constater en quelques minutes."

Tornant a Serret, el mateix 1853 publica *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, [535], exactament el mateix nom i any que l'article de Bonnet [71] i *Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure*, [536].

El 1856 va publicar diverses notes curtes als *Comptes Rendues*: *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des dourbures sont sphériques*, [540]; *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des dourbures sont planes*,[539]; *Sur la théorie géométrique des lignes à double courbure*, [538].

El 1862 apareix la sisena edició del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de lacroix, [347], amb cinc extenses notes de Serret i una d'Hermite. La tercera es titula "Sur quelques formules nouvelles et leur application a la théorie des lignes et des surfaces courbes" que resumeix els seus treballs previs [539] i [538]. Té els apartats següents: "Formules relatives aux lignes courbes" , p. 283; "Sur les lignes de courbure des surfaces", p. 298; "Recherches des surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes ou sphériques", p. 303; i l'apartat IV és d'Ossian Bonnet: "Sur l'integration d'une certaine classe d'equations différentielles simultanées". Tothom volia escriure al llibre de Lacroix!

A la tesi de J. Delcourt, [219], s'hi recullen els discursos que van pronunciar Camille Jordan i Ossian Bonnet en els funerals de Serret. El de Bonnet es va publicar a [93]. Destaquem aquest paràgraf:

> "Nul n'a ressenti plus douloureusement que moi les effets de ce affreux événement : j'étais le camarade de promotion de Serret à l'École polytechnique ; depuis plus de quarante ans, nous étions liés par la plus étroite amitié, et souvent, réunis dans l'intimité de sa charmante famille, aujourd'hui si désolée, nous aimions à nous entretenir des années de notre jeunesse, à nous rappeler nos premiers tra- vaux, nos premiers efforts."

A la Nota 1 de Liouville, a la cinquena edició de les *Applications* de Monge, [452], Liouville reprodueix una carta no publicada de Serret on apareixen les equacions de les corbes de torsió constant. Aquestes corbes de torsió constant

τ es poden escriure, modificant només lleugerament la notació de Serret, com

$$\begin{aligned}
\tau x &= \int \frac{ldk - kdl}{h^2+k^2+l^2} \\
\tau y &= \int \frac{hdl - ldh}{h^2+k^2+l^2} \\
\tau z &= \int \frac{kdh - hdk}{h^2+k^2+l^2}
\end{aligned}$$

on c, c', c'' són funcions d'una variable tals que

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

i h, k, l tals que

$$\frac{c}{h} = \frac{c'}{k} = \frac{c''}{l} = \frac{1}{h^2+k^2+l^2}.$$

9.7 Victor Alexandre Puiseux (1820-1883)

Figura 9.7: *Victor Alexandre Puiseux.*

Neix a Argenteuil, a la Val-d'Oise, França, però als tres anys la família va a Lorraine. El 1834, a París, rep cursos de Sturm. Entra a l'École Normale Supérieure el 1837. Entre 1841 i 1844 és professor a Rennes i de 1844 a 1849 a Besançon. En aquest període estudia evolutes i involutes i també la tautòcrona. El 1842 publica *Problème de Géométrie*, [483]. El problema consisteix en trobar totes les corbes de curvatura i torsió constants (demostra que són les hèlixs).[86]

[86]Els primers exemples de corbes amb només torsió constant, no hèlixs, són de Eugène Fabry, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, [278], i *Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante*, [279], de 1892. Abans, el 1890, I. Lyon a la seva tesis *Sur les courbes à torsion constante*, [421], dirigida per Darboux, i Maurice Fouché a *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, [280], van donar exemples de corbes imaginàries amb torsió constant. De fet, aquests autors segueixen el camí proposat prèviament per Koenigs a [344] el 1887. Koenig observa que si $B(s)$ és una corba esfèrica parametritzada

Posterirorment va ser professor de mecànica Celeste a la Sorbonne. Va succeir Lamé a l'Académie de Sciences. Va ser alumne de Cauchy i va treballar en temes proposats per ell, com variable complexa i funcions el·líptiques. Té diversos treballs sobre el moviment de la Lluna. Va treballar a l'Observatori de París de 1855 a 1859, i de 1868 a 1872 va estar al Bureau des Longitudes.

Queda clar que va llegir el *Disquisitiones* ja que té un article de 1848 titulat *Théorème de Gauss relatif à la théorie de la courbure des surfaces*, [484], on dóna una demostració diferent del teorema egregi. El 1863 publica *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales*, [486]. Explica que cadascuna de les tres famílies de superfícies ortogonals es pot representar per una equació entre les variables x, y, z i un paràmetre que varia d'una superfície a l'altre. Aquesta equació es pot resoldre respecte del paràmetre, que serà llavors una funció de x, y, z, i es pot desenvolupar en serie de potències respecte aquestes variables. Es proposa expressar els coeficients de les tres series amb ajuda d'indeterminades que li permetin trobar tots els sistemes de superfícies ortogonals.

Gran escalador, va ser el primer de pujar un cim alpí que avui porta el seu nom.

9.8 Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

Neix a París. Va ser professor a l'Ècole Polytechnique i al Collège de França. Va ser 26 anys secretari de l'Académie de Sciences de París.

Va estudiar les avui anomenades *corbes de Bertrand* que són dues corbes relacionades per tenir en punts corresponents la mateixa normal principal. En aquest cas hi ha

Figura 9.8: *Joseph Bertrand.*

per l'arc llavors

$$\gamma(s) = \frac{1}{\tau}\int B \times \frac{dB}{ds}$$

és una corba de torsió constant τ. Diguem de passada que Darboux, en el volum 1 de les *Leçons*, agraeix al jove geòmetra G. Koenig l'ajuda en la revisió de les proves d'impremta.

una relació lineal entre la curvatura i la torsió de cadascuna d'aquests corbes. És a dir, existeixen constants c_1 i c_2 tals que

$$c_1 k(t) + c_2 \tau(t) = 1.$$

Ho va publicar a *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure*, [47][87]. En aquest article es fa la pregunta següent: "Quels sont les points sur une surface gauche pour lesquels la somme des rayons de courbure de la surface est égale a zéro?" Després de diversos càlculs arriba a dues conclusions, la segona (l'helicoide com superfície minimal) ja coneguda:

> "Il est impossible qu'une surface dont la ligne de striction coupe a angle droit les génératrices, c'est-à-dire la surface formée par les normales aux plans osculateurs d'une courbe, contienne deux lignes distinctes dont les génératices soient les normales principales.
>
> L'hélicoïde à plan directeur est la seule surface réglée dont les rayons de courbure en chaque point soient égaux et des signes contraires."

Acaba demostrant que si una de les corbes té curvatura constant llavors el producte de les torsions de les dues corbes en punts corresponents és constant. Però aquest resultat és cert en general, vegeu per exemple el libre de E. Kreyszig *Differential Geometry*, [345], p. 71.

Abans però, ja havia publicat un parell de notes el 1843, [41], [43], les dues amb el mateix títol *Démonstration d'un théorème de Géométrie*. A la primera demostra que si els punts mitjans d'una sèrie qualsevol de cordes

[87]En el mateix volum del *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* on apareix aquest article també hi apareix la nota de Liouville [415], i tres articles sobre corbes i superfícies d'autors 'desconeguts', dos de M. Roberts *Mémoire sur la géométrie des courbes tracées sur la surface d'un ellipsoide*,[514], *Discussion analytique de deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chaqué un de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires*, [513] (estudia l'heliocoide i la catenoide utilitzant integrals el·líptiques), i un de Voizot *Note sur la théorie des courbes à double courbure*, [566], on critica durament l'Acadèmie tot reclamant la prioritat sobre uns resultats de Bertrand de 1850. Diu "Or ces deux relations [resultats de Bertrand] sont contenues, la première explicitement, la seconde implicitement, dans un Mémoire sur les courbes à double courbure, que j'ai adressé à l'Académie des Sciences en mai 1847, et qui est, depuis cette époque, entre lesmains d'un membre de l'Institut.".

paral·leles d'una corba estan alineats llavors la corba és una cònica. La segona és de caire més físic.

El mateix 1843 també publica *Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales*, [42], en la línia de Lamé.

El 1848 publica dues notes més: *Démonstrations géométriques de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces*, [46], on redemostra un teorema de Monge que diu que si un dels radis de curvatura d'una superfície és constant, llavors la superfície és una superfície *canal*, és a dir, la superfície envolupant d'una família d'esferes de radi constant i centre sobre una corba; i *Démonstration d'un théorème de Gauss*, [45], on dóna una demostració del teorema egregi.

El 1864 publica *Traité de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, [48], on aprofita per escriure un vertader tractat de Geometria Diferencial de corbes i superfícies. Aquesta obra està dividida en tres parts o llibres. El llibre tercer es titula *Applications Géométriques* i inclou els capítols I. *Courbure des lignes planes*, II. *Courbure des lignes tracées sur une sphère*, III. *Plane osculateur d'une courbe a double courbure*, IV. *Les deux courbures d'une courbe, le cercle osculateur et la sphère osculatrice*, V. *Théorie de la courbure des surfaces*, VI. *Étude des normales a une mème surface*, VII. *Théorie des lignes de courbure*, VIII. *Étude des lignes tracées sur une surface.*

També és conegut per la paradoxa de Bertrand, que consisteix en calcular de tres maneres diferents la probabilitat de que elegida a l'atzar una corda d'una circumferència donada, aquesta tingui longitud més gran que el costat del triangle equilàter inscrit en aquesta circumferència.

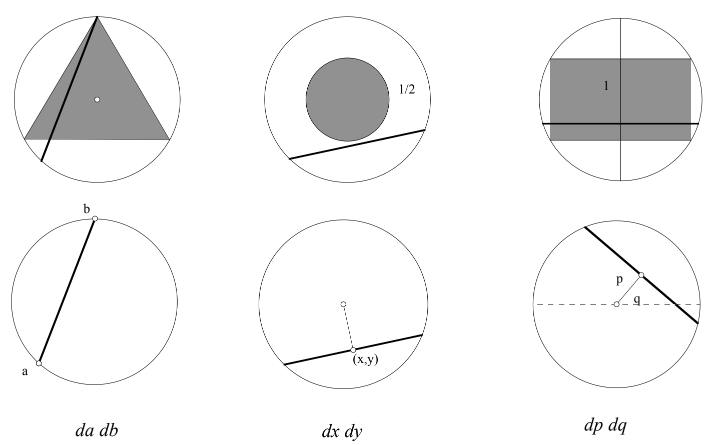


Figura 9.9: *Paradoxa de Bertrand.*

També va treballar en altres camps, com economia, termodinàmica i teoria de nombres. Per exemple, sobre teoria de nombres va conjecturar que sempre hi havia almenys un primer entre n i $2n-2$ per a $n>3$ (resultat provat posteriorment per Chebyshev).

9.9 Delfino Codazzi (1824-1873)

Neix a Lodi, capital de la Lombardia. Després d'una anys a l'ensenyament secundari obté, el 1865, una càtedra a la Universitat de Pavia on va restar fins a la seva mort.

S'interessa pel tema de deformació de superfícies, publicant el 1856 el treball *Intorno alla superficie quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura*, [153].

El 1857 publica quatre notes al mateix volum d'*Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*[88] sobre curvatura de superfícies. A la primera, *Memoria sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie qualunque*, [155], estudia sistemes triplement ortogonals de superfícies en la línia de Lamé. A la segona, *Intorno ad una linea situata in una supeficie sviluppabile*, [154], molt breu, estudia corbes sobre superfícies desenvolupables. No passa de ser un exercici senzill. A la tercera, *Nota intorno ad alcuni teoremi di Dupin*, [156], dóna demostracions analítiques d'alguns resultats demostrats només geomètricament per Dupin a *De la stabilité des corps flotants*, [234]. I a la quarta *Nota intorno le superficie che hanno costante il prodotto dei due raggi di curvatura*, [157], estudia superfícies de curvatura constant seguint la nota IV de Liouville a les *Applications* de Monge, [452], però per mètodes diferents. La nota de Liouville, com hem comentat a la pàgina 139, es titula *Sur les théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface.*

L'any següent, el 1858, publica *Intorno alia questione: Riportare in una superficie piana o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell' imagine e della figura abbiano le aree in rapporto costante*, [158], on estudia, com ja es veu en aquest títol tan explícit, el problema de portar localment una superfície de revolució sobre

[88]Revista fundada el 1850 per Barnaba Tortolini (1808-1874), coneguda també com l'Annali di Tortolini, i que va ser fonamental per a la matemàtica italiana. Hi van publicar els principals matemàtics italians d'aquells temps (Francesco Brioschi, Enrico Betti, Angelo Genocchi, Felice Casorati, Luigi Cremona) i algun d'ells va entrar al comitè editorial. Més endavant va canviar el títol per *Annali di matematica pura ed applicata*. El mateix Tortolini hi va publicar diversos articles sobre teoria de superfícies, coma ara *Sopra le supeficie parallele, ed applicazione di questa teorica all'ellissoide*, [557], que és el primer article del primer volum, o *Sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodetica tracciata sulla superficie di un'ellisoide*, [558]. Els podeu trobar a `https://archive.org/details/annalidiscienze00tortgoog` i `https://archive.org/details/annalidiscienze04tortgoog` respectivament.

un pla o una esfera de manera que el quocient d'àrees sigui constant.

El 1859 sotmet el seu treball *Memoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres*, [164], a un premi de l'Acadèmia de Ciències de París. És on apareixen les avui anomenades fórmules de Codazzi-Mainardi, ja que Mainardi[89]les havia descobert independentment el 1856.

El teorema egregi i les equacions de Codazzi-Mainardi

Sigui (U, φ) una carta local d'una superfície S.

Escrivim les derivades segones de φ en el punt (u, v) respecte de la base $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v), \nu(u, v)$, on $\nu = \mathcal{N} \circ \varphi$.

Tindrem les següents igualtats de funcions vectorials definides a U,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + e\nu \\ \varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + f\nu \\ \varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\nu \end{aligned} \tag{9.8}$$

on e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental.

Tant els coeficients Γ^k_{ij}, que s'anomenen *símbols de Christoffel*, com les demès funcions que apareixen a la igualtat anterior són, doncs, funcions de u i v.

Multiplicant aquestes equacions per φ_u i φ_v i resolent els sistemes que es van obtenint és fàcil obtenir el valor dels símbols de Christoffel. Es poden escriure en funció dels coeficients E, F, G de la primera forma fonamental i de les seves derivades.

[89]Gaspare Mainardi (1800-1879). Neix a Abbiategrasso, prop de Milà. Estudia a la Universitat de Pavia on es queda com professor. L'article a que fem referència, de 1856, és *Sulle coordinate curvilinee d'una superfice e dello spazio*, [426]. El mateix any també va publicar *Sulla teoria generale delle superficie*, [425], en la línia dels *Disquisitiones*Vegeu la nota **126** de Struik a la pàgina 260. Prèviament, el 1852, havia publicat una nota sobre un resultat que Joachimsthal havia donat sense demostració sobre superfícies tals que totes les seves línies de curvatura estan sobre plans amb un mateix eix, *Compimento del problema del sig. Joachimstal, sulla teoria generale delle superficie*, [422], i, el 1854, dues notes amb el mateix títol, *Nota sulla teoria delle curve*, una continuació de l'altre, [423] i [424].

Només hem d'observar que

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle = 2\langle\varphi_{uu},\varphi_u\rangle \\ E_v &= \frac{\partial}{\partial v}\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle = 2\langle\varphi_{uv},\varphi_u\rangle \\ F_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle = \langle\varphi_{uu},\varphi_v\rangle + \langle\varphi_u,\varphi_{uv}\rangle \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \langle\varphi_{uu},\varphi_u\rangle &= \frac{E_u}{2} \\ \langle\varphi_{uu},\varphi_v\rangle &= F_u - \frac{E_v}{2} \end{aligned}$$

Multiplicant la primera de les equacions (9.8) primer per φ_u i després per φ_v obtenim

$$\begin{aligned} \frac{E_u}{2} &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{E_v}{2} &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \end{aligned}$$

Raonant de manera semblant amb la segona i tercera equació de (9.8) obtenim els sistemes

$$\begin{aligned} \frac{E_v}{2} &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{G_u}{2} &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} F_v - \frac{G_u}{2} &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{G_v}{2} &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{aligned}$$

Resolent-los obtenim fàcilment

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}. \end{aligned}$$

La importància capital d'aquestes fórmules rau en que ens diuen que *els símbols de Chirstoffel es poden calcular coneixent només els coeficients de la primera forma fonamental.* És el germen del teorema egregi.

Amb notació pròpia de Geometria Riemanniana els símbols de Christoffel s'escriuen així:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kr} \Big(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \Big)$$

on, en aquesta notació l'índex r suma des de $r = 1$ fins a 2 (fins a n en una varietat de Riemann arbitrària), g_{rs} és la primera forma fonamental (en general, la mètrica de Riemann) i g^{rs} la seva inversa.

En el nostre cas doncs,

$$\begin{aligned} g_{11} &= E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G, \\ g^{11} &= \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Per exemple, denotant $u = x_1$, $v = x_2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{2} g^{r1} \Big(\frac{\partial g_{1r}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{1r}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_r} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \Big(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \Big) \\ &+ \frac{1}{2} g^{21} \Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} (E_u + E_u - E_u) + \frac{1}{2} g^{21} (F_u + F_u - E_v) \\ &= \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{r2}(\frac{\partial g_{r2}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{r1}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_r}) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}) \\
&+ \frac{1}{2}g^{22}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(F_u+E_v-F_u)+\frac{1}{2}g^{22}(G_u+F_v-F_v) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(E_v)+\frac{1}{2}g^{22}(G_u) \\
&= \frac{-FE_v+EG_u}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}$$

etc.

Ara no ens interessa massa l'expressió explícita de cada símbol de Christoffel però sí el que hem dit abans: que es poden calcular coneixent només la primera forma fonamental.

El teorema egregi i les equacions de Codazzi-Mainardi s'obtenen sense més que considerar les parts tangent i normal de les equacions

$$(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u; \quad (\varphi_{uv})_v = (\varphi_{vv})_u,$$

és a dir,

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1\varphi_u+\Gamma_{11}^2\varphi_v+e\nu) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1\varphi_u+\Gamma_{12}^2\varphi_v+f\nu) \tag{9.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{12}^1\varphi_u+\Gamma_{12}^2\varphi_v+f\nu) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}^1\varphi_u+\Gamma_{22}^2\varphi_v+g\nu) \tag{9.10}$$

Per fer aquestes derivades necessitem recordar que

$$\begin{aligned}
\nu_u &= \frac{Ff-Ge}{EG-F^2}\,\varphi_u+\frac{Fe-Ef}{EG-F^2}\,\varphi_v \\
\nu_v &= \frac{Fg-Gf}{EG-F^2}\,\varphi_u+\frac{Ff-Eg}{EG-F^2}\,\varphi_v
\end{aligned}$$

Fem doncs les derivades i mirem els coeficients dels vectors resultants que obtenim respecte de la base $(\varphi_u, \varphi_v, \nu)$

1. *Coeficient de φ_u a* (9.9).

$$(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1+e\frac{gF-fG}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^1)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1+f\frac{fF-eG}{EG-F^2}.$$

2. *Coeficient de φ_v a* (9.9).

$$(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2+e\frac{fF-gE}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2+f\frac{eF-fE}{EG-F^2}.$$

3. *Coeficient de ν a* (9.9).

$$\Gamma_{11}^1 f+\Gamma_{11}^2 g+e_v=\Gamma_{12}^1 e+\Gamma_{12}^2 f+f_u.$$

4. *Coeficient de φ_u a* (9.10).

$$(\Gamma_{12}^1)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1+\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1+f\frac{gF-fG}{EG-F^2}=(\Gamma_{22}^1)_u+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1+g\frac{fF-eG}{EG-F^2}.$$

5. *Coeficient de φ_v a* (9.10).

$$(\Gamma_{12}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2+f\frac{fF-gE}{EG-F^2}=(\Gamma_{22}^2)_u+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^2+g\frac{eF-fE}{EG-F^2}.$$

6. *Coeficient de ν a* (9.10).

$$\Gamma_{12}^1 f+\Gamma_{12}^2 g+f_v=\Gamma_{22}^1 e+\Gamma_{22}^2 f+g_u.$$

Simplificant una mica, aquestes sis equacions es poden escriure com
1. *La que prové del coeficient de φ_u a* (9.9).

$$F\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^1)_u-(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1$$

Aquí tenim el teorema egregi!!. (si $F\neq 0$)
2. *La que prové del coeficient de φ_v a* (9.9).

$$-E\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^2)_u-(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2.$$

Novament el teorema egregi!! I ara sense problemes ja que $E\neq 0$.

Si tenim la paciència d'un monjo benedictí podem substituir aquests símbols de Christoffel pels seus valors i fer les derivades, etc, i obtenim justament l'expressió de la curvatura[90] del *Disquisitiones*,

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2K = & \ E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) \\ + & \ F\left(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u\right) \\ + & \ G\left(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2\right) \\ - & \ 2(EG-F^2)\left(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}\right). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Si $F = 0$ aquesta fórmula es pot escriure com

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)\right] \tag{9.12}$$

Si, a més, $E = 1$, tenim[91]

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}.$$

3. *La que prové del coeficient de* ν *a* (9.9).

$$\boxed{e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.}$$

AQUÍ TENIM LA PRIMERA EQUACIÓ DE CODAZZI-MAINARDI

4. *La que prové del coeficient de* φ_u *a* (9.10).

$$G\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1.$$

NOVAMENT EL TEOREMA EGREGI!! .

[90] Hi ha moltes expressions equivalents per calcular la curvatura de Gauss. Una especialment interessant és la de Francesco Brioschi (1824-1897) que apareix a [112]. Aquesta expressió és

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right).$$

[91] Això passa per exemple quan les corbes $v = constant$ són geodèsiques, com veurem més endavant.

5. *La que prové del coeficient de* φ_v *a* (9.10).

$$-F\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma^2_{22})_u - (\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}.$$

NOVAMENT EL TEOREMA EGREGI!! (Si $F \neq 0$).

6. *La que prové del coeficient de* ν *a* (9.10).

$$\boxed{f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}.}$$

AQUÍ TENIM LA SEGONA EQUACIÓ DE CODAZZI-MAINARDI

Teorema 9.9.1 (Egregi) *Sigui* $f : S_1 \longrightarrow S_2$ *uns isometria local entre dues superfícies. Llavors la curvatura de Gauss de* S_1 *en un punt* $P \in S_1$ *és igual a la curvatura de Gauss de* S_2 *en el punt* $f(P)$.

Demostració. Sigui $\varphi : U \longrightarrow S_1$ una parametrització de S_1 i prenem $\psi = f \circ \varphi$ com parametrització de S_2. D'aquesta manera si un punt de S_1 té coordenades (u, v) [respecte de φ] el punt imatge $f(P)$ té les mateixes coordenades (u, v) [respecte de ψ]. La fórmula 9.11 ens diu que si $P = \varphi(u, v)$, la curvatura de Gauss de S_1 en el punt P, $\mathcal{K}(P)$, queda determinada pels valors de E, F, G i les seves derivades en (u, v). Pel mateix motiu, la curvatura de Gauss de S_2 en el punt $f(P)$, $\mathcal{K}(f(P))$, queda determinada pels valors de E', F', G' i les seves derivades en (u, v).

Ara bé, és fàcil veure[92] que, pel fet de ser f isometria, tenim $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$, i per tant hem de fer exactament el mateix càlcul amb les mateixes funcions per calcular $\mathcal{K}(P)$ que $\mathcal{K}(f(P))$, i per tant

$$\mathcal{K}(P) = \mathcal{K}(f(P)). \quad \square$$

L'interès de les equacions de Codazzi-Mainardi està donat pel següent teorema de Bonnet, [92].

Teorema 9.9.2 (Teorema de Bonnet) *Siguin* E, F, G, e, f, g *sis funcions definides sobre un obert* U *de* $\mathbb{R}^2$. *Suposem que:*

1) $EG - F^2 \neq 0$,

2) Es compleixen les dues equacions de Codazzi-Mainardi,

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) + g\Gamma^2_{11}, \\ f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}, \end{aligned}$$

[92]Podeu trobar els detalls per exemple a [491].

on els símbols de Christoffel estan donats per les equacions de la pàgina 166, (i són per tant coneguts a partir de E, F, G)

3) Es compleix l'equació de Gauss (fórmula de la curvatura)

$$-E\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}.$$

Llavors hi ha una única superfície, llevat de moviments a l'espai, que té E, F, G com coeficients de la primera forma fonamental i e, f, g com coeficients de la segona forma fonamental.

Hem comentat la versió original de Bonnet d'aquest teorema, amb enunciat lleugerament diferent, a la pàgina 154.

Equacions de Codazzi-Mainardi en coordenades principals

En aquest cas $F = f = 0$, i les curvatures principals estan donades per $k_1 = e/E$ i $k_2 = g/G$.

Primera equació de Codazzi-Mainardi:

$$e_v = e\Gamma^1_{12} - g\Gamma^2_{11} = e\frac{E_v}{2E} - g\frac{-E_v}{2G} = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2)$$

Segona equació de Codazzi-Mainardi:

$$g_u = -e\Gamma^1_{22} + g\Gamma^2_{12} = e\frac{G_u}{2E} + g\frac{G_u}{2G} = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2)$$

Derivant les curvatures principals, i emprant aquestes expressions de e_v i g_u, obtenim

$$\boxed{\frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{E_v}{2E}(k_2 - k_1), \qquad \frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{G_u}{2G}(k_1 - k_2)}$$

9.10 Alfred Enneper (1830-1885)

Neix a Barmen, Alemania. Fa el doctorat a Göttingen sota la direcció de Dirichlet i es queda allà de professor a partir de 1870. Estudia superfícies minimals[93] trobant, el 1864, l'avui coneguda com superfície d'Enneper (pàgina 108 de [255]), la qual és una superfície minimal amb autointerseccions donada per

$$\begin{aligned} x &= u(1 - u^2/3 + v^2), \\ y &= -v(1 - v^2/3 + u^2), \\ z &= (u^2 - v^2). \end{aligned}$$

Figura 9.10: *Alfred Enneper.*

Sembla una expressió complicada, però, utilitzant la representació d'Enneper-Weierstrass, aquesta superfície correspon simplement a la donada per les funcions holomorfes $f(z) = 1$, $g(z) = z$.

Sempre que tinguem una funció holomorfa $f(z)$ i una meromorfa $g(z)$, amb $f(z)g(z)^2$ holomorfa obtenim superfícies minimals, parametritzades per la part real u i la part imaginària v de $\zeta = u + iv \in \mathbb{C}$, posant

$$\begin{aligned} x_k(\zeta) &= \mathcal{R}\left(\int_0^\zeta \varphi_k(z)dz\right) + c_k, \ k = 1, 2, 3; \\ \varphi_1 &= f(1 - g^2)/2, \\ \varphi_2 &= i\, f(1 + g^2)/2, \\ \varphi_3 &= fg. \end{aligned}$$

Un any abans, el 1862, va publicar un treball, dividit en tres parts, en el

[93]Un dels que també es va preocupar de les superfície minimals va ser Eugène Charles Catalan (1814-1894), qui el 1858 va publicar *Note sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, soint égaux et de signes contraires*, [122], article precedit per dues notes curtes amb el mateix nom al Comptes Rendus, [121]. Catalan va néixer a Bruges. Va estudiar a l'École Polytechnique amb Liouville, obtenint el doctorat el 1841. Dos anys desprès va publicar *Sur les surfaces gauches à plan directeur*, [119], on estudia superfícies reglades generades per una recta que es mou paral·lelament a un pla, aplicant els resultats a l'helicoïde. Va ser professor de geometria descriptiva al Charlemagne College. El 1865 va passar a ser professor d'Anàlisi a Liège on va morir.

mateix volum de *Zeitschrift für Mathematik und Physik*[94], titulat *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, [250], [251], [252], on redemostra fórmules conegudes per a la curvatura de Gauss i mitjana, estudia elipsoïdes cofocals, etc. Aquest treball encara té una quarta part publicada l'any següent a la mateix revista, [254].

A la primera part, article [250], l'únic resultat nou és el teorema següent[95]: *Si la diferència entre els dos radis de curvatura en cada punt d'una superfície és constant, llavors les dues superfícies dels centres de curvatura (obtingudes seguint la normal tant com els radis de curvatura) tenen en cada punt curvatura constant negativa.*

La demostració no és massa difícil si es té en compte la fórmula prèvia que ell mateix demostra (vegeu la fórmula (9.13) més avall) entre els radis de curvatura principals i les seves derivades i els coeficients de la primera forma fonamental. Per demostrar aquesta fórmula pels nostres mètodes prenem coordenades principals, és a dir, suposem que tenim una parametrització $\varphi(u,v)$ de la superfície tal que les corbes $u = cte$ i $v = cte$ són línies de curvatura.

Denotem, seguint Enneper, per ρ_1 i ρ_2 els radis de curvatura respectius de les corbes $u = cte$ i $v = cte$. Com que en coordenades principals $f = F = 0$ (la primera i segona formes fonamentals diagonalitzen en la base φ_u, φ_v) tenim $\rho_2 = E/e$ i $\rho_1 = G/g$.

Llavors, si ν és la normal a la superfície, tenim

$$\begin{aligned} \nu_u &= -\frac{1}{\rho_2}\varphi_u \\ \nu_v &= -\frac{1}{\rho_1}\varphi_v \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \nu_{uv} &= -(\frac{1}{\rho_2})_v\varphi_u - \frac{1}{\rho_2}\varphi_{uv} \\ \nu_{vu} &= -(\frac{1}{\rho_1})_u\varphi_v - \frac{1}{\rho_1}\varphi_{vu} \end{aligned}$$

Aquestes dues expressions han de ser iguals. Igualant els coeficients de φ_u i

[94] `https://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN599415665`.
[95] Novament traducció de l'alemany a càrrec de Judit Abardia.

φ_v obtenim

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{2v}}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2}\Gamma_{12}^1 &= -\frac{1}{\rho_1}\Gamma_{12}^1 \\ \frac{\rho_{1u}}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1}\Gamma_{21}^2 &= -\frac{1}{\rho_2}\Gamma_{12}^2\end{aligned}$$

on el Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel. Equivalentment

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}) &= \frac{\rho_{2v}}{\rho_2^2} \\ \Gamma_{21}^2(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}) &= -\frac{\rho_{1v}}{\rho_1^2}\end{aligned}$$

Com que

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}$$

tenim

$$\begin{aligned}\frac{E_v}{2E}(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}) &= \frac{\rho_{2v}}{\rho_2^2} \\ \frac{G_u}{2G}(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}) &= -\frac{\rho_{1v}}{\rho_1^2}\end{aligned}$$

que Enneper escriu com

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1})\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &= \frac{\sqrt{E}}{\rho_2^2}\rho_{2v} \\ (\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1})\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= -\frac{\sqrt{G}}{\rho_1^2}\rho_{1v} \qquad (9.13)\end{aligned}$$

Calculem ara la curvatura de Gauss de la superfície focal corresponent a ρ_1. Aquesta superfície està donada per

$$\psi(u,v) = \varphi(u,v) + \rho_1(u,v)\nu(u,v)$$

Així

$$\begin{aligned}\psi_u &= \varphi_u + \rho_{1u}\nu + \rho_1(-\frac{1}{\rho_2}\varphi_u) = (\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2})\varphi_u + \rho_{1u}\nu \\ \psi_v &= \varphi_v + \rho_{1v}\nu + \rho_1(-\frac{1}{\rho_1}\varphi_v) = \rho_{1v}\nu\end{aligned}$$

Observem doncs que la normal $\tilde{\nu}(u,v)$ de la superfície focal està donada per

$$\tilde{\nu} = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{|\psi_u \wedge \psi_v|} = \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_v$$

ja que $\varphi_u, \varphi_v, \nu$ és una base ortogonal.

Ara ja és fàcil calcular la primera i segona forma fonamental de la superfície focal. Obtenim

$$\tilde{E} = \frac{(\rho_2-\rho_1)^2}{\rho_2^2}E + \rho_{1u}^2, \quad \tilde{F} = \rho_{1u}\rho_{1v}, \quad \tilde{G} = \rho_{1v}^2,$$

$$\tilde{e} = -\frac{(\rho_2-\rho_1)E_v}{2\rho_2\sqrt{G}}, \quad \tilde{f} = 0, \quad \tilde{g} = -\frac{\rho_{1v}\sqrt{G}}{\rho_1}$$

Per tant, la curvatura de Gauss $\tilde{K}$ de la superfície focal és

$$\tilde{K} = \frac{\det II}{\det I} = \frac{(\rho_2-\rho_1)E_v\rho_{1v}}{2\rho_1\rho_2}\cdot\frac{\rho_2^2}{\rho_{1v}^2(\rho_2-\rho_1)^2E} = \frac{\rho_2}{\rho_1\rho_{1v}(\rho_2-\rho_1)}\cdot\frac{E_v}{2E},$$

que, utilitzant la primera de les equacions (9.13), s'escriu com

$$\tilde{K} = \frac{\rho_2}{\rho_1\rho_{1v}(\rho_2-\rho_1)}\cdot\frac{\rho_{2v}\rho_1\rho_2}{\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)} = -\frac{\rho_{2v}}{\rho_{1v}(\rho_2-\rho_1)^2}.$$

El teorema que hem enunciat a la pàgina 174 és ara trivial. En efecte, si $\rho_2 - \rho_1 = a = cte$, llavors $\rho_{1v} = \rho_{2v}$ i

$$\tilde{K} = -\frac{1}{a^2}.$$

La segona part del treball que estem comentant, article [251], comença definint *línia de màxima caiguda*. Concretament, si tallem una superfície amb plans paral·lels a un de fixat, les corbes que obtenim s'anomenen corbes de nivell respecte el pla fixat. Una trajectòria ortogonal a cada línia de nivell, que surt d'un punt π (notació d'Enneper), s'anomena *línia de màxima caiguda* pel punt π respecte al pla fixat e.

Troba l'equació general per aquestes línies

$$\left[\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v} + \cos g\frac{\partial y}{\partial v} + \cos h\frac{\partial z}{\partial v}\right)E - \left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u} + \cos g\frac{\partial y}{\partial u} + \cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)F\right]\partial u$$
$$= \left[\left(\cos f\frac{\partial x}{\partial u} + \cos g\frac{\partial y}{\partial u} + \cos h\frac{\partial z}{\partial u}\right)E - \left(\cos f\frac{\partial x}{\partial v} + \cos g\frac{\partial y}{\partial v} + \cos h\frac{\partial z}{\partial v}\right)F\right]\partial v,$$

on els cosinus són els cosinus directors del vector normal al pla fixat, i remarca que en general aquesta equació no serà integrable i que només serà interessant si el pla fixat té alguna relació geomètrica amb la superfície. A continuació l'aplica al cas particular de l'el·lipsoide de tres eixos i obté una fórmula llarga i diu que Catalan ja l'havia obtingut abans, encara que d'una manera molt més complicada i d'una forma una mica diferent. L'article de Catalan és *Sur les trajectoires othogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde*, [120]. A continuació estudia les trajectòries ortogonals a les seccions circulars d'un paraboloide el·líptic, i als paral·lels de les superfícies de revolució.

Estudia també el que anomena *seccions normals sobre-osculades*, que corresponen a seccions normals en les que el cercle osculador té un contacte d'ordre superior a dos.

La tercera part, article [252], comença redemostrant la relació entre les curvatures principals i la curvatura de les línies de curvatura. Concretament que la curvatura principal (pensada com màxim i mínim de les curvatures de la seccions normals) és la curvatura normal de la línia de curvatura. Això li permet escriure $\rho = \rho_n \cos\alpha$, on $\rho_n = 1/k_n$ és el radi de curvatura normal, $\rho = 1/k$ el radi de curvatura de la línia de curvatura, i α l'angle entre la normal a la superfície i la normal principal de la corba. I diu: "la projecció d'un radi de curvatura principal en un punt d'un superfície sobre el vector normal d'una línia de curvatura, que passa per aquest punt, és igual al radi de curvatura de la corba." A continuació estudia superfícies amb línies de curvatura planes. Retroba un resultat de Serret, publicat al volum XVIII del *Journal de Mathématiques*, per a superfícies amb els dos sistemes de línies de curvatura planes, vegeu [535]. Acaba demostrant que "els centres de curvatura de totes les seccions normals que són perpendiculars a la tangent d'una línia de curvatura plana es troben en un mateix pla. Els plans dels centres de curvatura d'un sistema de línies de curvatura planes són paral·lels entre ells."

El 1863, a part de la quarta part del treball que hem comentat abans, també publica *Über die Hauptkrümmungshalbmesser Flächen*, [253]. El 1866 publica un treball sobre corbes de doble curvatura, *Bemerkungen über Curven doppelter Krümmung*, [256], a *Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen*[96].

[96]Aquesta revista la podeu trobar a
`http://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PPN=PPN252457072` fins a 1893 i a `http://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PPN=PPN252457811` a partir de 1895.

És conegut també pel seu resultat de 1870 sobre la torsió de les línies asimptòtiques, concretament el que diu que *la torsió al quadrat en cada punt d'una d'aquestes línies és igual a menys la curvatura de Gauss de la superfície en el punt*, vegeu *Über asymptotische Linien*, [258]. Aquest resultat també es coneix com teorema de Beltrami-Enneper, vegeu l'article de Beltrami *Dimostrazione di due formole del Sig. Bonnet*, [31].

El 1875 va publicar *Bemerkungen über die Biegung einiger Flächen*, [261], dedicat al problema de desenvolupar una superfície sobre una altra. Comenta[97] que en desenvolupar una superfície sobre una altra les longituds de les corbes corresponents no varien i que a partir d'aquest fet Gauss va poder donar condicions necessàries i suficients per saber si dues superfícies són desenvolupables, l'una sobre l'altra. Diu que les condicions no són complicades però que un estudi posterior és molt complicat en el cas general i no està acabat. Diu: "en aquesta situació està justificat fer un estudi de casos particulars per veure com són aquestes deformacions en casos concrets on un sistema de corbes de la primera superfície va a un sistema de corbes de la segona".

L'article està estructurat en quatre seccions: La primera és una introducció de notació, coordenades, etc. A la segona estudia el cas en que en desenvolupar una superfície sobre una altra les línies de curvatura van a línies asimptòtiques. Veu que ena quest cas la superfície inicial i la superfície transformada són superfícies minimals. Posa com exemple l'helicoide. A la tercera part estudia el cas en que en desenvolupar una superfície sobre una altra les línies de curvatura van a línies de curvatura. Veu que en aquest cas el producte o la suma dels radis de curvatura és constant. Cita un article seu de 1870, *Untersuchnungen über einige Puncte aus der allgemeinen Theorie der Flächen*, [259].

Finalment a la secció quatre comenta que el mètode utilitzat en la secció anterior sembla el més adequat per resoldre el problema general de portar unes certes corbes a unes altres. Fa uns quants càlculs i acaba dient que està clar com seguir els càlculs però que és molt llarg.

El 1882 publica *Beiträge zur Theorie der Flächen mit besonderer Rücksicht auf die Minimalflächen*, [263]. A[98] la primera secció diu que generalitza un resultat seu del 1870 (a la mateixa revista) que es pot demostrar sense gaires càlculs. Es refereix a [258].

[97]Resum de Judit Abardia.
[98]Comentaris de Judit Abardia.

El resultat que prova és el següent: Siguin S i S_1 dues superfícies tals que es corresponen de manera que els normals en punts corresponents són paral·lels. Si les línies de curvatura de la superfície S corresponen a un sistema ortogonal a S_1, llavors es poden tenir dos casos. Primer: les línies de curvatura de S es corresponen a línies de curvatura de S_1. Segon: en cada punt de S_1 la suma dels radis de curvatures principals s'anul·la, és a dir, S_1 és una superfície minimal.

Si les superfícies S i S_1 són minimals, llavors cada sistema ortogonal d'una superfície correspon a un sistema ortogonal de l'altra.

Comenta que la primera part del resultat es troba a un article d'ell de 1878, *Untersuchunger über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien*, [262].

A la segona secció de [263] considera l'article de Bonnet de 1860, *Mémoir sur l'emploi d'un nouveau système de variable dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, [88]. Comenta que Bonnet estudia aquí les superfícies minimals amb línies de curvatura planes. Diu que els càlculs que fa no són simètrics i que això fa més difícil la seva comprensió i que el resultat que dóna no és complet ja que falta trobar una superfície, que ell sí troba. També troba, pels seus mètodes, una altra superfície ja trobada per Bonet a la pàgina 244 de [88].

A la tesi del seu alumne Heinrich Sievert, 1886, apareix un exemple de superfície de curvatura de Gauss constant, que no és de revolució. Aquesta superfície es coneix com superfície de Sievert[99].

9.11 Edmond Bour (1832-1866)

Neix a Gray, Haute-Saône, França. Entra a l'École Polytechnique el 1850. Segueix durant tres anys els cursos de Bertrand al Collège de França, que el porten a escriure *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique*, [101], publicat el 1855, on, entre altres moltes coses, completa un teorema de Bertrand mostrant com el coneixement d'una integral qualsevol permet rebaixar en dues unitats l'ordre de l'equació en derivades parcials del problema. Després de ser professor a l'Escola de Mines de Saint-Étienne torna a París el 1859 com professor de geometria descriptiva a l'École Polytechnique. Va treballar en mecànica celeste.

[99] `http://mathworld.wolfram.com/SievertsSurface.html`

Figura 9.11: *Edmond Bour.*

Va rebre el premi de l'Académie des Sciences de 1861 pel seu treball *Théorie de la déformation des surfaces*, [103], el tema iniciat per Gauss a [289]. En aquest treball[100] estudia superfícies reglades i superfícies minimals. Per exemple, dóna condicions per tal de que un l'helicoide es pugui desenvolupar sobre una superfície de revolució. Parla de les superfícies *motllura* de Monge: recorda que són les envolvents de les posicions successives d'una superfície de revolució tals que l'eix descriu un cilindre de base qualsevol. La secció feta a la superfície, normal al cilindre director, es diu *perfil* de la *motllura*. Se sap que aquesta corba plana és el meridià de la superfície evolvent, és a la vegada línia de curvatura i geodèsica de l'envolvent. A partir d'aquest recordatori troba equacions per a aquestes superfícies. Aquest article [103] va seguit, a la mateixa revista, per [102], on estudia equacions en derivades parcials de primer i segon ordre. En tots dos articles Bour signa com *Ingénieur des Mines*. Aquesta articles són de 1862. Del 1864 trobem una breu nota al Butlletí de la *Société Philomatique* titulada *Sur les lignes d'ombres d'un hélicoide quelconque*, [104]. Podeu trobar més informació sobre Bour a `http://www.annales.org/archives/x/bour.html`.

[100] Aquest treball de Bour és citat i alabat el 1867 per Picard al treball *Sur les réseaux isométriques et la déformation des surfaces de revolution*, [471]. Primer vaig pensar que aquest Picard era el famós Émile Picard, però el 1867 Émile Picard tenia 11 anys. Va ser gràcies a Jean Delcourt que vaig saber que aquest Picard, amb "d" , final era Auguste Picart, amb "t" final, ja que el treball citat i el treball d'Auguste Picart *Surfaces applicables sur des surfaces de révolution*, [472], tot i que va ser publicat 14 anys més tard, és essencialment el mateix. Aquest treball comença dient: " M. Haton de la Goupillière, dans une communication faite à la Societé, le 16 mars 1867, a indiqué la solution a la question suivante: *Quelles sont les surfaces sur lesquelles on peut tracer un réseau isotherme ou isométrique formé par des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales?*". I comenta que Haton ha demostrat que les úniques superfícies amb aquesta propietat só les aplicables sobre sobre superfícies de revolució. A continuació en dóna ell una demostració més simple. Acaba el treball dient que no ha trobat resultat nous i que el qui vulgui saber més sobre el tema el que ha de fer és llegir Bour, concretament [103].

9.12 Eugenio Beltrami (1835-1900)

Figura 9.12: *Eugenio Beltrami.*

L'edició de les obres completes de Beltrami, [39], comença amb una ressenya biogràfica feta per Luigi Cremona. Fem-ne un breu resum.

Eugenio Beltrami va néixer a Cremona el 16 de novembre de 1835. Els seus pares eren Eugenio Beltrami i Elisa Barozzi. El pare va participar als moviments polítics del 48 i es va haver d'exiliar, motiu pel qual el seu avi patern, reconegut pels seus gravats en pedra, els mantenia a la seva mare i a ell.

Estudia Matemàtiques a la Universitat de Pavia (1853-56), però va abandonar els estudis abans de fer els exàmens finals per llicenciar-se. L'expulsió del col·legi Ghislieri, on s'ospedava, acusat de promoure desordres en contra del rector, va agreujar la situació econòmica de la família, ja difícil arrel de la mort de l'avi, impossibilitant la seva manutenció a Pavia. El jove es veu obligat a deixar la vida universitària i comença a treballar fent feines administratives per l'enginyer Diday. Descobreix aquests anys la seva veritable vocació i refà del tot la seva educació científica, estudiant pel seu compte les diferents disciplines matemàtiques. La seva intenció de trobar una feina com a professor d'ensenyament secundari, més afí a la seva vocació, es veu obstaculitzada per no haver fet els exàmens de la llicenciatura. Va ser gràcies a dues memòries que va publicar als Annali di Matematica, que Brioschi (llavors secretari general del Ministeri d'Instrucció) es va fixar en ell i va fer que l'anomenessin per decret professor extraordinari d'àlgebra complementària i Geometria Analítica a la Universitat de Bologna, l'any 1862.

Un any més tard, E. Betti li ofereix la càtedra de geodèsica a la universitat de Pisa. Inicialment dubta en acceptar-la, doncs ho veu com un canvi de direcció en els seus estudis i li preocupa que la nova càtedra requereixi de coneixements poc teòrics. Finalment accepta i després de preparar-se amb l'astrònom Schiaparelli a l'observatori de Milan, el gener de 1864 s'incorpora a la nova plaça.

L'experiència de dos anys fent una feina llunyana als seus interessos, l'inclinarà sempre a prioritzar les seves inquietuds científiques, refusant càrrecs administratius, rectorats i presidències de facultats (només va acceptar entrar al Consell Superior d'Instrucció). Així, al llarg de la seva vida, els seus estudis aniran sempre relacionats amb les càtedres que ocupa i les classes que ha d'impartir. Els anys a Pisa el porten, doncs, a l'estudi de les superfícies segons les directrius de Gauss i especialment en la teoria matemàtica de les cartes esfèriques. Durant aquests temps, la seva amistat amb Betti es fa més estreta i té la oportunitat de freqüentar Riemann, que havia fixat allà la seva residència per qüestions de salut. Tots dos personatges seran una gran influència per ell.

Passem a ressenyar alguns dels seus articles. A les seves obres completes, *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, [39], n'hi consten 45.

El 1861 publica *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane*, [25] on resol el problema de trobar els sistemes de corbes planes, tals que en fer-los girar un angle donat, tallin el sistema primitiu sota un angle també donat. Diu que és una generalització del que passa amb la família d'hipèrboles equilàteres d'eixos comuns i les seves trajectòries ortogonals.

El mateix any publica *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti*, [26], generalitzant el treball previ de Brioschi *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate*, [113]. Donada una recta i un paràmetre arc sobre aquesta recta, a partir d'un punt fixat, anomena *sviluppoide* una corba tal que cadascuna de les seves tangents talla la recta donada sota un angle ω funció arbitrària del paràmetre del punt d'intersecció. El cas ω constant és el considerat per Brioschi. Demostra que sigui quina sigui la funció ω cada sviluppoide és geodèsica de la superfície generada per totes les sviluppoides generades amb la mateixa funció. I diu que aquest teorema no sembla conegut més que en el cas de ω constant.

Aquest mateix any 1861 sembla que s'està estudiant el *Disquisitiones* de Gauss, ja que en una carta al Professor B. Tortolini, *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie*, [24], li dóna una fórmula simple per calcular els radis de curvatura d'una superfície.

El 1864, a *Richerche di analisi applicata alla geometría*, [28], generalitza a superfícies els *paràmetres diferencials* de Lamé, dels quals hem parlat a la pàgina 106.

Concretament, si denotem per E, F, G els coeficients de la primera forma fonamental d'una superfície en coordenades u, v i $\Phi = \Phi(u, v)$ és una funció sobre aquesta superfície (sobre l'espai de paràmetres), l'expressió

$$\Delta_1\Phi = \frac{E(\frac{\partial\Phi}{\partial v})^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + G(\frac{\partial\Phi}{\partial u})^2}{EG - F^2} \tag{9.14}$$

és un *paràmetre diferencial de primer ordre*. Diu Beltrami a la pàgina 116 de [28]

> "Essa [es refereix al quocient anterior] presenta, rispetto ad un sistema di curve tracciate in una superfície, la piú perfetta analogia con quella quantità che il sig. Lamé ([370]) ha cosi felicemente introddotto nella teoria dei sistemi di superficie sotto il nome *parametro differentziale del* 1^0 *ordine*. Noi conserveremo perció questa denominazione alla quantità $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}$[101] , ossia alla radice quadrata dell'espressione che forma il secondo membro della (16).

Que aquesta expressió sigui un paràmetre diferencial vol dir, com hem comentat quan parlàvem de Lamé, pàgina 183, que és invariant en front dels canvis de coordenades sobre la superfície. És a dir, que si tenim uns nous paràmetres sobre la superfície definits per $u = f_1(u_1, v_1)$, $v = f_2(u_1, v_1)$ i denotem $\Phi_1(u_1, v_1) = \Phi(f_1(u_1, v_1), f_2(u_1, v_1))$, tenim

$$\begin{aligned} & \frac{E(\frac{\partial\Phi}{\partial v})^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + G(\frac{\partial\Phi}{\partial u})^2}{EG - F^2} \\ = \quad & \frac{E_1(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_1})^2 - 2F_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial v_1} + G_1(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_1})^2}{E_1G_1 - F_1^2} \end{aligned}$$

on E_1, F_1, G_1 són els coeficients de la primera forma fonamental en les noves coordenades.

Però aquesta igualtat no surt del no res ni es demostra a pic i pala. La idea, molt senzilla, és considerar les corbes de nivell $\Phi(u, v) = c$, amb c un paràmetre.

Si considerem una corba $(u, v(u))$ que vagi tallant aquestes corbes de nivell podem estudiar a quina velocitat va canviant $\Phi(u, v(u))$ en allunyarnos una longitud s sobre aquesta corba. Si s és el paràmetre arc de $(u, v(u))$,

[101] Es refereix a l'arrel quadrada de (9.14).

llavors $ds/du = \sqrt{E + 2Fk + Gk^2}$, on $k = dv/du$. Així

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{du}\frac{du}{ds} = \frac{\Phi_u + \Phi_v k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}} \tag{9.15}$$

Per saber en quina direcció aquest valor és màxim derivem respecte de k i obtenim

$$(E\frac{\partial\Phi}{\partial v} - F\frac{\partial\Phi}{\partial u}) + (F\frac{\partial\Phi}{\partial v} - G\frac{\partial\Phi}{\partial u})k = 0.$$

Substituint el valor de k així obtingut (que correspon a la direcció ortogonal, com es veu fàcilment calculant $I((1,k),(-\Phi_v,\Phi_u)))$ a (9.15) obtenim

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\sqrt{E(\frac{\partial\Phi}{\partial v})^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + G(\frac{\partial\Phi}{\partial u})^2}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

on la derivada de l'esquerra és, evidentment, respecte de la direcció ortogonal a les corbes de nivell. En particular

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 = \Delta_1\Phi.$$

Així, com que el terme de l'esquerra no depèn de les coordenades, el de la dreta tampoc. Això demostra la invariància del paràmetre diferencial de primer ordre.

Beltrami introdueix també els *paràmetres diferencials de segon ordre*. Denotant, com sempre, per E, F, G els coeficients de la primera forma fonamental d'una superfície en coordenades u, v i $\Psi(u,v) = 0$ representa una corba sobre la superfície, l'expressió

$$\Delta_2\Psi = \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\Psi}{\partial u} - F\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\Psi}{\partial v} - F\frac{\partial\Psi}{\partial u}}{H}\right)\right\}$$

amb $H = \sqrt{EG - F^2}$, és un *paràmetre diferencial de segon ordre*. Això vol dir que és invariant en front dels canvis de coordenades sobre la superfície. És a dir, que si tenim uns nous paràmetres sobre la superfície definits per $u = f_1(u_1, v_1)$, $v = f_2(u_1, v_1)$ i denotem $\Psi_1(u_1, v_1) = \Psi(f_1(u_1, v_1), f_2(u_1, v_1))$[102], ,

[102] Crec que inclús el Maple petaria si li fem fer aquest càlcul!

tenim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\Psi}{\partial u}-F\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{H}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\Psi}{\partial v}-F\frac{\partial\Psi}{\partial u}}{H}\right)\right\} \\ = & \frac{1}{H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{G_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial u_1}-F_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial v_1}}{H_1}\right)+\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{E_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial v_1}-F_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial u_1}}{H_1}\right)\right\} \end{aligned}$$

on E_1, F_1, G_1 són els coeficients de la primera forma fonamental en les noves coordenades.

En aquest mateix article [28] dóna una fórmula per a les geodèsiques que desprès utilitza en el *Riportare*, [32], i que va ser la base del model de Beltrami de la geometria no euclidiana en el *Saggio*, [34].

Aquesta fórmula és[103]

$$\begin{aligned} 0 &= (EG-F^2)(du\,d^2v-dv\,d^2u) \\ &+ (Edu+Fdv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2+\frac{\partial G}{\partial u}du\,dv+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right] \\ &- (Fdu+Gdv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2+\frac{\partial E}{\partial v}du\,dv+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2\right] \end{aligned} \tag{9.16}$$

Vegeu els comentaris sobre el *Riportare* a la pàgina 187.

Encara el 1864 publica *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione*, [27], on veu que l'àrea de la pseudoesfera (no utilitza aquesta paraula) generada per la tractriu (no utilitza aquesta paraula) de subtangent (radi) R és $4\pi R^2$ i el volum $2\pi R^3/3$, tot i que el traeix el subconscient i fa el 'misprint' de posar a l'últim moment $4\pi R^3/3$.

El 1865 estudia superfícies reglades a *Sulla flessione delle superficie rigate*, [29]. Demostra per exemple que una superfície reglada es pot transformar per flexions de manera que una geodèsica donada sobre ella es transformi en una línia recta.

I també el 1865 publica *Sur la courbure de quelques lignes tracèes sur uns surface*, [30], on, motivat per l'article de de la Gournerie [218], que hem citat a la pàgina 158, demostra que *el radi de curvatura d'una línia asimptòtica,*

[103] El terme de la dreta és la curvatura geodèsica. Struik dóna una expressió de la curvatura geodèsica, fórmula 1-6 pàgina 147, [550], en funció dels símbols de Christoffel, que un cop substituïts aquests pels seus valors en termes de E, F, G i les seves derivades, ens dóna directament la fórmula de Beltrami.

sobre una superfície qualsevol, és igual a dos terços del radi de curvatura de la secció que el pla tangent en el punt considerat fa amb la superfície[104]. Però els càlculs són llargs i no acaba de veure el significat geomètric i acaba dient:

> "Je termine en exprimant le désir que mes théorèmes puissent être vérifiés pas des considérations géométriques directes, ce qui ne pourra pas manquer d'avoir lieu, si quelqu'un des savants collaborateurs de ce journal veut bien s'en ocuper."

El 1866, l'empitjorament de la salut de la seva mare el decideix a tornar a Bologna i ocupar la càtedra de Mecànica Racional, matèria més acord amb els seves inclinacions.

El 1867 es preocupa de les superfícies minimals a *Sulle proprietá generali delle superficie d'area minima*, [33], on hi ha una introducció històrica completissima sobre el tema.

El 1868 publica *Sulla teoria dei parametri differenziali*, [35], on diu que es proposa establir la teoria dels paràmetres diferencials de Lamé sobre una base purament analítica, alliberant-la de tota restricció no necessària, sigui sobre el número de variables, o sobre el significat de les mateixes. També estudia el problema clàssic de l'aplicabilitat de superfícies a *Sulle teoria generali delle superficie*, [36], on dóna una demostració amb els seu llenguatge del teorema egregi i veu que la curvatura geodèsica és invariant per isometries, resultat que atribueix a Minding.

Roman a Bologna fins el 1873, any en que és cridat a formar part de la universitat de Roma, com tants altres noms il·lustres. Se'n penedirà poc després del seu trasllat, doncs les reformes a la universitat no compensen la manca de tranquil·litat per dedicar-se als seus estudis i pateix per la salut de la seva dona. El 1876 decideix marxar a la Universitat de Pavia, on imparteix física matemàtica seguint la nova direcció dels seus estudis. A aquesta ciutat troba més calma i amics com Felice Casorati i E. Bertini. Entre 1883 i 1900 escriu 17 cartes a Ernesto Cesàro, autor en aquest perióde de *Lezioni de Geometria Intrinseca*, [129]. La mort prematura del primer i el fet que la salut de la seva dona no millorés el fan tornar a Roma l'any 1891 on romandrà fins a la seva mort el 18 de febrer de 1900.

[104]Struik ho proposa com exercici, capítol 6, exercici 8, de [550].

Geodèsia i Geometria no Euclidiana

Es pot considerar que Beltrami arriba a la geometria no euclidiana per casualitat[105] a partir del seu interès per la geodèsia. La primera cosa que fa en aquest camp és traduir a l'italià l'article de Gauss [289], on Gauss es preocupa de les transformacions conformes. Concretament de la possibilitat d'aplicar una superfície sobre una altra de manera que les figures siguin infinitesimalment similars. La idea de representar una superfície sobre un pla de manera que les geodèsiques vagin a rectes, que Beltrami estudia a [32], cau en el mateix tipus de problemàtica: fer mapes fiables.

Aquest problema havia estat detalladament proposat per Lagrange el 1779 a *Sur la construction des cartes géographiques*, [349]. Diu Lagrange:

> "Au reste des Cartes géographiques construites d'après cette projection auraient le grand avantage que tous les lieux de la Terre, qui sont situés dans un même grand cercle du globe, se trouveraient placés en ligne droite dans la Carte; en sorte que, pour avoir le plus courte chemin d'un lieu de la Terre a l'autre, il n'y aurait qu'à joindre ces deux lieux dans la Carte par une ligne droite."

A continuació comentarem breument els articles fonamentals de Beltrami sobre geometria no euclidiana, que són el *Saggio* [34] i el *Teoria Fondamentale* [37], i també el precursor d'aquest dos, *Riportare i punti di una superficie sopra un piano* [32], i una nota posterior a un article de Schlaefli que hem considerat interessant, [38]. En el *Saggio* es dona el model projectiu i a la *Teoria* es donen els models conformes. Un estudi molt detallat del tema es pot trobar a [20].

Riportare i punti di una superficie sopra un piano

A l'article [32], de títol llarg i explícit *Risoluzione del problema: "Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette "*, es preocupa de les cartes geogràfiques, és a dir, dels mapes. Comenta que normalment es fan conservant angles o relacions d'àrea. Però que per segons quin tipus de problema relacionats amb la

[105] "[...] io ho introdotto un elemento veramente nuovo nella ricerca analitica circa la natura degli spazii; e ciò è tanto vero, che gli è appunto per questa via che io sono entrato, *senza volerlo e quasi sense saperlo*, nelle dottrine di LOBATTSCHEWSKY." (Carta a E. Ovidio, 25 desembre 1872, vegeu [420], p. 421).

distància sembla més natural considerar aplicacions que portin geodèsiques a rectes, com passa amb la projecció central de l'esfera.

A continuació redueix el problema proposat a resoldre un sistema de tres equacions en derivades parcials que involucren els coeficients de la mètrica.

Comença observant que si l'element de longitud que estem buscant és

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on (u, v) són les coordenades desconegudes respecte de les quals les geodèsiques són rectes, amb $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$ i $G = G(u, v)$, llavors els coeficients de $u'^3, u'^2v', u'v'^2, v'^3$ de la fórmula (9.16) de les geodèsiques, que hem recordat a la pàgina 185, han de ser zero.

Això es així ja que si acceptem com hipòtesi que una corba $(u(s), v(s))$ és geodèsica si i només si existeix una relació lineal entre $u(s)$ i $v(s)$, és a dir, $au + bv + c = 0$, això vol dir que l'equació de les geodèsiques es reduiex a $u'v'' - v'u'' = 0$. En efecte, derivant dos cops $au + bv + c = 0$ veiem que ha de ser $u'v'' - v'u'' = 0$ o $a = b = 0$; i integrant $u'v'' - v'u'' = 0$, que equival a

$$\frac{u''}{u'} = \frac{v''}{v'},$$

obtenim $\ln u' = \ln kv'$ i per tant $u = kv + c$.

Per tant, perquè l'equació de les geodèsiques (9.16) es redueixi a $u'v'' - v'u'' = 0$ s'han d'anular els coeficients de $u'^3, u'^2v', u'v'^2, v'^3$, com hem dit abans.

Concretament,

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\Big) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} &= 0 && (9.17)\\
E\frac{\partial G}{\partial u} + F\Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\Big) - F\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} &= 0, && (9.18)\\
G\frac{\partial E}{\partial v} + F\Big(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\Big) - F\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} &= 0, && (9.19)\\
G\Big(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\Big) - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} &= 0. && (9.20)
\end{aligned}$$

Amb moltes dificultats i moltíssima astúcia Beltrami és capaç de resoldre aquest sistema d'equacions en derivades parcials.

Anem a veure com ho va fer, perquè hi ha diversos passos genials.

Observa primerament que (9.17) i (9.20) es poden escriure com

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{F}{\sqrt{E}}) = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\frac{F}{\sqrt{G}}) = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

i això és equivalent a dir que

$$\frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}}, \quad \frac{Fdu + Gdv}{\sqrt{G}} \tag{9.21}$$

són diferencials exactes.

Per altra banda, eliminant $\frac{\partial E}{\partial v}$ de (9.17) i (9.18) i $\frac{\partial G}{\partial u}$ de (9.19) i (9.20) podem transformar (9.18) i (9.19) en

$$\begin{aligned} E\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{3F^2}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} &= 0 \\ G\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{3F^2}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

que tenen l'avantatge, com diu Beltrami, de que a la primera només derivem respecte de u i a la segona respecte de v. I aquestes dues últimes fórmules es poden escriure com

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}}) = 0,$$

la qual cosa vol dir que existeixen funcions $U = U(u)$, $V = V(v)$ tals que

$$\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} = V^3, \quad \frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}} = U^3.$$

Dividint-les es veu que existeix una funció $\lambda = \lambda(u, v)$ tal que

$$\frac{\sqrt{G}}{V} = \frac{\sqrt{E}}{U} = \lambda.$$

Podem escriure doncs

$$\sqrt{E} = \lambda U, \quad F = \lambda\mu UV, \quad \sqrt{G} = \lambda V, \tag{9.22}$$

amb $\mu = \sqrt{\lambda(\lambda - UV)}$.

Les dues 1-formes de (9.21) s'escriuen ara com

$$\lambda U\,du + \mu V\,dv, \quad \mu U\,du + \lambda V\,dv$$

que, posant

$$du_1 = U\,du, \quad dv_1 = V\,dv, \tag{9.23}$$

queden

$$\lambda du_1 + \mu dv_1, \quad \mu du_1 + \lambda dv_1.$$

Les funcions que depenien de u, v ara depenen de u_1, v_1.

La condició de ser exactes és ara

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} = \frac{\partial \mu}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \mu}{\partial v_1}.$$

D'aquí es dedueix fàcilment que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda+\mu)}{\partial u_1} - \frac{\partial(\lambda+\mu)}{\partial v_1} &= 0, \\ \frac{\partial(\lambda-\mu)}{\partial u_1} + \frac{\partial(\lambda-\mu)}{\partial v_1} &= 0, \end{aligned}$$

que, integrant, ens dóna

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 2\varphi(u_1 + v_1), \\ \lambda - \mu &= 2\psi(u_1 + v_1), \end{aligned}$$

on φ i ψ són funcions arbitràries.

Ara Beltrami posa

$$u_1 + v_1 = \alpha, \quad u_1 - v_1 = \beta, \tag{9.24}$$

de manera que

$$\lambda = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \mu = \varphi(\alpha) - \psi(\beta). \tag{9.25}$$

Però, per definició de μ, que equival a

$$\lambda UV = \lambda^2 - \mu^2,$$

tenim

$$(\varphi + \psi)UV = 4\varphi\psi.$$

I aquesta igualtat Beltrami l'escriu com

$$\Phi(\alpha) + \Psi(\beta) = \frac{4}{UV}, \tag{9.26}$$

on

$$\Phi = \frac{1}{\phi}, \quad \Psi = \frac{1}{\psi}.$$

Així[106]

$$\ln(\Psi + \Phi) = \ln 4 - \ln U - \ln V$$

i, com U és funció de $u_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i V és funció de $v_1 = \frac{\alpha-\beta}{2}$, el segon terme de la igualtat és de la forma

$$f(\alpha + \beta) + F(\alpha - \beta)$$

i és solució (i, per tant, el primer terme també) de

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} = 0.$$

En aplicar aquest operador al primer terme obtenim

$$\Phi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \Psi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = A(\alpha) - B(\beta), \tag{9.27}$$

amb

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \Phi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - (\frac{d\Phi}{d\alpha})^2, \\ B(\alpha) &= \Psi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - (\frac{d\Psi}{d\beta})^2. \end{aligned}$$

Derivant dos cops (9.27), primer respecte α i després respecte β, obtenim

$$\frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d^3\Psi}{d\beta^3} - \frac{d\Psi}{d\beta}\frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = 0,$$

que es pot escriure com

---

[106] Una genialitat darrera l'altra!

$$\frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = r^2\frac{d\Phi}{d\alpha}, \quad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3} = r^2\frac{d\Psi}{d\beta} \tag{9.28}$$

on r és una constant real o imaginària de la forma $r'i$.

Ara Beltrami fa unes petites consideracions sobre què passa si les anteriors quantitats s'anul·len que ometo.

Resolent les equacions diferencials de (9.28) obtenim

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= A_0 + A_1e^{r\alpha} + A_2e^{-r\alpha}\\ \Psi(\beta) &= B_0 + B_1e^{r\beta} + B_2e^{-r\beta}\end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned}A(\alpha) &= r^2\left[A_0(A_1e^{r\alpha} + A_2e^{-r\alpha}) + 4A_1A_2\right]\\ B(\beta) &= r^2\left[B_0(B_1e^{r\beta} + B_2e^{-r\beta}) + 4B_1B_2\right]\end{aligned}$$

valors que substituïts a l'equació (9.27) ens donen

$$r^2\left[(A_0 + B_0)(A_1e^{r\alpha} + A_2e^{-r\alpha} - B_1e^{r\beta} - B_2e^{-r\beta}) + 4(A_1A_2 - B_1B_2)\right] = 0.$$

Però com que $r \neq 0$, i α i β variables, la única manera que es compleixi la darrera igualtat és

$$A_0 + B_0 = 0, \quad A_1A_2 = B_1B_2.$$

Això permet introduir tres noves constants h, k, k' tals que

$$A_0 = -B_0 = -2h,\ A_1 = A,\ A_2 = kk'A,\ B_1 = k'A, B_2 = kA.$$

Introduint aquestes constants a les expressions de Φ i Ψ anteriors, tenim

$$\begin{aligned}\Phi &= A(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h\\ \Psi &= A(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h\end{aligned}$$

I ara que ja tenim Φ i Ψ busquem U i V. Primer observem que

$$\Phi + \Psi = A(1 + ke^{-r(\alpha+\beta)})(e^{r\alpha + k'e^{r\beta}}) = A(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1}).$$

Comparant amb (9.26) i recordant que U depèn només de u i V de v, veiem que ha de ser

$$U = \frac{2}{m(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})}, \quad V = \frac{2}{m'(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1})}, \quad mm' = A. \tag{9.29}$$

Com $\varphi = 1/\Phi$ i $\psi = 1/\Psi$ tenim

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{mm'(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h} \tag{9.30}$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{mm'(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h} \tag{9.31}$$

Per (9.22) i (9.25)

$$E = (\varphi + \psi)^2 U^2, \quad F = (\varphi^2 - \psi^2)UV, \quad G = (\varphi + \psi)^2 V^2. \tag{9.32}$$

Per altra banda, integrant les equacions (9.23) obtenim

$$u = \int \frac{du_1}{U}, \quad v = \int \frac{dv}{V}$$

que, substituint els valors de U i V donats a (9.29) i integrant, ens dóna

$$u = \frac{m}{2r}(e^{ru_1} - ke^{-ru_1}), \quad v = \frac{m'}{2r}(e^{rv_1} - k'e^{-rv_1}),$$

i no posa les constants d'integració perquè se les pot considerar implícites en u i v. Una manipulació elemental permet reescriure les anteriors igualtats com

$$e^{ru_1} + ke^{-ru_1} = \frac{2\sqrt{r^2u^2 + km^2}}{m},$$

$$e^{rv_1} + k'e^{-rv_1} = \frac{2\sqrt{r^2v^2 + k'm'^{\,2}}}{m'}.$$

Per (9.29) tenim

$$U = \frac{1}{\sqrt{r^2u^2 + km^2}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 + k'm'^{\,2}}}.$$

Introduint una nova funció W per

$$W^2 = (r^2u^2 + km^2)(r^2v^2 + k'm'^{\,2}),$$

es troba

$$\begin{aligned} e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha} &= \frac{2(W + r^2uv)}{mm'}, \\ k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta} &= \frac{2(W - r^2uv)}{mm'}, \end{aligned}$$

i per tant, a partir de (9.30),

$$2\varphi = \frac{1}{W + (r^2uv - h)}, \quad 2\psi = \frac{1}{W - (r^2uv - h)}.$$

Beltrami canvia llavors km^2 per k i $k'm'^{\,2}$ per k i k', ja que aquestes constants no apareixen més separades, i es pot considerar com una sola constant.

Així,

$$W^2 = (r^2u^2 + k)(r^2v^2 + k'),$$

i substituint els valors de φ i ψ a (9.32) tenim

$$\begin{aligned} E &= \frac{r^2v^2 + k'}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\ F &= -\frac{r^2uv - h}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\ G &= \frac{r^2u^2 + k}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}. \end{aligned} \tag{9.33}$$

En particular

$$EG - F^2 = \frac{1}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^3}.$$

Ara fa una mena de comprovació de que va per bon camí, cosa que nosaltres ens podríem saltar, però els càlculs que fa ens seran necessaris per al darrer pas en el descobriment de la mètrica.

La comprovació és la següent: per la natura del problema, si fem un canvi lineal de coordenades

$$u = au' + bv', \quad v = a'u' + b'v'$$

les noves coordenades han de verificar també les fórmules anteriors (9.33).

Així, si posem

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E'\,du'^{\,2} + 2F'\,du'^{\,2}dv'^{\,2} + G'dv'^{\,2}$$

i tenint en compte que

$$du = a\,du' + b\,dv', \quad dv = a'\,du' + b'\,dv'$$

tenim

$$\begin{aligned} E' &= Ea^2 + 2Faa' + Ga'^{\,2}, \\ F' &= Eab + F(ab' + a'b) + Ga'b', \\ G' &= Eb^2 + 2Fbb' + Gb'^{\,2}, \end{aligned}$$

que, introduint les noves variables

$$\begin{aligned} K' &= \frac{k'a^2 + 2haa' + ka'^{\,2}}{(ab' - a'b)^2}, \\ H &= \frac{k'ab + h(ab' + a'b) + ka'b'}{(ab' - a'b)^2}, \\ K &= \frac{k'b^2 + 2hbb' + kb'^{\,2}}{(ab' - a'b)^2}, \end{aligned}$$

es poden escriure com

$$\begin{aligned} E' &= \frac{(ab' - a'b)^2(r^2v'^{\,2} + K')}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\ F' &= -\frac{(ab' - a'b)^2(r^2u'v' - H)}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\ G' &= \frac{(ab' - a'b)^2(r^2u'^{\,2} + K)}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \end{aligned}$$

Però, per la fórmula del canvi de base de formes quadràtiques sabem que

$$E'G' - F'^{\,2} = (ab' - a'b)^2(EG - F^2),$$

que, introduint la nova variable

$$W'^{\,2} = (r^2u'^{\,2} + K)(r^2v'^{\,2} + K')$$

ens dóna

$$W^2 - (r^2uv - h)^2 = (ab' - a'b)^2[W'^{\,2} - (r^2u'v' - H)^2]$$

que ens permeten reescriure

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{(ab'-a'b)^2}\frac{r^2v'^{\,2}+K'}{[W'^{\,2}-(r^2u'v'-H)^2]^2}, \\ F' &= -\frac{1}{(ab'-a'b)^2}\frac{r^2u'v'-H}{[W'^{\,2}-(r^2u'v'-H)^2]^2}, \\ G' &= \frac{1}{(ab'-a'b)^2}\frac{r^2u'^{\,2}+K}{[W'^{\,2}-(r^2u'v'-H)^2]^2}, \end{aligned}$$

equacions que llevat de constants coincideixen amb les (9.33) com volíem veure. El canvi de constants que s'ha de fer és canviar r^2, h, k, k' respectivament per

$$\mu r^2, \quad \mu H, \quad \mu K, \quad \mu K',$$

amb

$$\mu = (ab' - a'b)^{\frac{2}{3}}.$$

Beltrami tria llavors a, a', b, b' de tal manera que

$$H = 0, \quad K = K',$$

tot dient que li sobren graus de llibertat. Amb això l'expressió de $W'^{\,2}$ de més amunt queda

$$W'^{\,2} = r^4u'^{\,2}v'^{\,2} + K(r^2u'^{\,2} + r^2v'^{\,2} + K)$$

i per tant

$$W'^{\,2} - (r^2u'v' - H)^2 = K(r^2u'^{\,2} + r^2v'^{\,2} + K).$$

Això permet reescriure E', F', G' com

$$\begin{aligned} E' &= \frac{r^2v'^{\,2}+K}{\mu^3K^2(r^2u'^{\,2}+r^2v'^{\,2}+K)^2}, \\ F' &= \frac{-r^2u'v'}{\mu^3K^2(r^2u'^{\,2}+r^2v'^{\,2}+K)^2}, \\ G' &= \frac{r^2u'^{\,2}+K}{\mu^3K^2(r^2u'^{\,2}+r^2v'^{\,2}+K)^2}, \end{aligned}$$

que posant per simplicitat

$$\frac{K}{r^2} = a^2, \quad \frac{1}{\mu^3 K^2 r^2} = R^2,$$

i escrivint u, v en lloc de u', v' obtenim finalment

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{R^2(v^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \\ F &= \frac{-R^2uv}{(u^2+v^2+a^2)^2} \\ G &= \frac{R^2(u^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \end{aligned}}$$

Veu ara que aquesta mètrica té curvatura constant $1/R^2$. I acaba l'article sense cap comentari sobre geometria no euclidiana.

És en el *Saggio* on observa que aquesta mètrica el porta a la geometria hiperbòlica només canviant les dues constants que hi apareixen, R i a, per Ri i ai respectivament, és a dir, canviant R^2 per $-R^2$ i a^2 per $-a^2$.

Observem que en canviar a^2 per $-a^2$ el denominador només està definit a l'interior (o exterior) del disc de radi a, és el disc de Beltrami, model clàssic de la geometria no euclidiana.

Textual del *Saggio*, [34], que comentem a continuació:

> "Ma siccome i valori delle costanti R ed a sono realmente arbitrari, così è lecito supporli anche immaginarî, se conviene. Ed infatti cambiando quelle costanti in$R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'elemento lineare risultante corrisponde ad una superficie di curvatura costante negativa $-1/R^2$, le cui linee geodetiche non cessano di essere, come nel caso precedente, rappresentate nel piano da linee rette, e quindi date da equazioni lineari rispetto ad u, v."

Acaba dient:

> "Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è

dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia. Quando non è nulla, questa legge è riducibili alla projezione centrale nella sfera ed alle sue trasformazioni omografiche."

El Saggio

Potser l'article més important de Beltrami, i un dels més citats, és el conegut com el *Saggio*, pel seu títol *Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea*, [34]. Comença comentant que les noves idees de les geometries no euclidianes s'estan imposant en el món matemàtic. Cita a Gauss i comenta que de les cartes de Gauss es desprèn l'acceptació total per part d'aquest a les idees de Lobachevsky. Tal era l'autoritat matemàtica de Gauss: si ell ho acceptava no calia pas continuar discutint.

A continuació fa l'error de pensar que tot el que ell ha fet en aquest article en dimensió 2 no es pot generalitzar a dimensió superior. Diu: "Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibili raggiungerlo in quanto al resto". És curiós que la dimensió tres explícitament no apareix pas a la versió italiana.[107]

Passem a comentar breument les sis seccions d'aquest article.

Secció I. Comença dient que el criteri fonamental de les demostracions de la Geometria Elemental consisteix en la *superposició de figures iguals.*[108] Tot i que ell no ho diu això fa pensar directament en Klein i els seus grups de moviments[109]. Parla de geometria esfèrica per remarcar l'existència de geometries no-euclidianes. Comenta que el principi de superposició porta a considerar superfícies de curvatura constant. Compara la situació dels pols de l'esfera (que no determinen una única geodèsica) amb lamsituació en curvatura constant negativa. Es pregunta explícitament si en aquestes superfícies pot passar que dos punts no determinin un única geodèsica. I diu: "Questa quistioni non è, per quel ch'io sappia, ancora stata esaminata."

[107]A la famosa traducció de Hoüel diu: "Mais il nous semble impossible d'y parvenir dans le cas de trois dimensions."

[108]En cursiva a l'original.

[109]Beltrami va mantenir molt bona relació amb Felix Klein. A l'article de Rossana Tazzioli, [554], es reprodueixen 3 cartes de Beltrami a Klein dels anys 1883, 1885 i 1888, que tot i ser doncs molt posteriors al Saggio es veu en elles que ja hi havia una relació previa entre ells i les seves famílies.

Secció II. Comença amb la fórmula de la mètrica de curvatura constant negativa

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2},$$

i remet al lector a una nota al final de l'article on explica que aquesta mètrica prové del problema estudiat a [32] de desenvolupar una superfície sobre un pla de tal manera que les geodèsiques vagin a parar a línies rectes. Diu explícitament que les geodèsiques d'aquest disc són les cordes del *cercle límit*.[110] Calcula la distància ρ d'un punt (u, v) a l'origen del disc $(0, 0)$:

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Acaba veient que a l'interior del disc amb aquesta mètrica dos punts qualssevol determinen una única geodèsica responent així a la pregunta que ell mateix s'havia formulat a la Secció I. Pregunta molt important ja que vol dir que l'axiomàtica d'Euclides (dos punts determinen una única recta) s'aplica aquí millor que a l'esfera.

Secció III. Estudia els triangles geodèsics. Acaba fent referència a la carta de Gauss a Schumaker, de 12 de juliol de 1831, en la que li diu que el semiperímetre d'un cercle no euclidià de radi ρ està donat per

$$\frac{1}{2}\pi k(e^{\rho/k} - e^{-\rho/k}),$$

on k és una constant. Explica que Gauss diu que aquesta constant pot ser determinada per l'experiència però que des del seu punt de vista no és altre cosa que el radi de la seva superfície pseudo-esfèrica.

Secció IV. Fa trigonometria i obté les mateixes fórmules que Lobachevsky. Per exemple, per a un triangle de costats a, b, c i angles oposats A, B, C obté

$$\cos A \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,$$

on $\Pi(a)$ és l'angle de paral·lelisme de a, etc. Diu: "Il risultati precedenti ci sembrano manisfestare pienamente la corrispondenza vigente fra planimetria non-euclidea e la geometria pseudoesfèrica." És a dir, que pels seus mètodes

[110] En cursiva a l'original.

(geometria pseudoesfperica) s'arriba al mateix lloc que pel mètode axiomàtic de Lobachevsky (planimetria no euclidiana).

Per reforçar aquesta coincidència encara més calcula pels seus mètodes l'àrea d'un triangle i troba, com ha de ser, que és el defecte pel radi al quadrat.

Troba també la fórmula de l'angle de paral·lelisme i diu que coincideix amb la obtinguda per Battaglini a [22].

Secció V. Estudia les circumferències geodèsiques. Les utilitza per introduir les coordenades polars geodèsiques (ρ, φ), respecte de les quals la mètrica de la Secció 2 s'escriu com

$$ds^2 = d\rho^2 + (R \sinh \frac{\rho}{R})^2 \, d\varphi^2.$$

Observa que sobre l'esfera les dues idees de *circumferència geodèsica* i *corba paral·lela a una línia geodèsica* coincidixen completament però que sobre la superfície pseudoesfèrica aquests conceptes són diferents. I cita novament a Battaglini com a coneixedor previ d'aquest fet, [22].

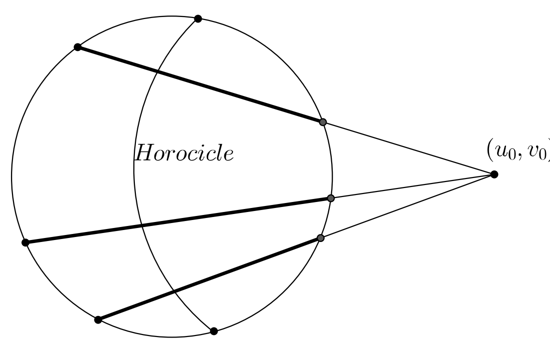


Figura 9.13: *Horocicles.*

A continuació observa que, com li passa a Lobachevsky, *tres punts no alineats poden no determinar una circumferència.* Introdueix així els *horocicles*[111], trajectòries ortogonals a feixos de geodèiques paral·leles. Calcula la seva equació considerant punts ideals, és a dir, punts exteriors al disc model.

Concretament si el feix de geodèsiques *que es tallen a l'infinit* són cordes del disc que es tallen en el punt (u_0, v_0) obté, per mètodes elementals, l'equació

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C,$$

on C és una constant.

Troba la longitud de la circumferència i torna a citar a Battaglini, [22].

[111]Ben coneguts per Gauss, Bolyai i Lobachevsky.

Secció VI. Comença insistint en un fet que és ja evident: *Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpetrazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.* I insisteix en el seu error sobre la dimensió 3: *La natura stessa di questa interpetazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea.* En un altre punt més endavant diu que no pretén provar que això sigui absolutament impossible sinó que només diu que li sembla molt inversemblant: *dicimo solo che la cosa ci sembra molto improbabile.*

No obstant, veu possible un model analític, sense suport geomètric, per a l'estereometria simplement introduint una variable més la mètrica de la secció I. L'arriba a escriure

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{(a^2-t^2-u^2-v^2)^2}[(a^2-u^2-v^2)dt^2+(a^2-v^2-t^2)du^2 \\ &+ (a^2-t^2-u^2)dv^2+2uv\,du\,dv+2vt\,dv\,dt+2tu\,dt\,du]. \end{aligned}$$

i anuncia l'aparició de la memòria [37]. Diu: "In uno scritto che deve comparire sugli Annali di Matematica pura ed applicata [serie 2ª, t.II (1868-69), pag. 232], dove i principii piú generali della geometria non-euclidea sono considerati indipendentemente dalle loro possibili relazioni cogli ordinari enti geometrici."

Teoria Fondamentale degli spazii di curvatura costante

Beltrami comença dient que aquesta memòria *Teoria Fondamentale degli spazii di curvatura costante*, [37], és fruit del seu treball sobre geodèsiques expressables com equacions lineals, [32], i del treball de Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, [511]. No dóna interpretacions geomètriques sinó només construccions analítiques. Comença dient que si considerem sobre la semiesfera

$$x^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=a^2, \quad x>0,$$

la mètrica[112]

$$ds=R\frac{dx^2+dx_1^2+\cdots+dx_n^2}{x},$$

[112] Avui coneguda com mètrica de Poincaré

llavors les geodèsiques tenen equacions lineals. De fet són seccions de la semiesfera amb plans verticals. Si projectem sobre l'equador obtenim el model 'disc', que vol dir que sobre el disc $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < a^2$ hi tenim la mètrica que s'obté eliminat x entre les dues equacions anteriors. Com diu Stillwell, [545], Beltrami no fa aquesta restricció al disc presumiblement perquè porta als mateixos resultats obtinguts el 1868 a [34].

Troba la distància ρ entre els punts de coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (la $n+1$ coordenada queda determinada per l'equació de l'esfera)

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - \cdots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)(a^2 - x_1^{0^2} - \cdots - x_n^{o^2})}}. \tag{9.34}$$

Per projecció estereogràfica de l'hemisferi nord de l'esfera sobre el seu pla tangent horitzontal obté unes noves coordenades respecte de les quals la mètrica s'escriu com

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + \cdots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}{4R^2}}$$

i diu que aquesta forma d'escriure la mètrica és la donada per Riemann, sense demostració, a la seva famosa memòria [511].

Aquesta mètrica és la que posteriorment tothom coneix com mètrica de Poincaré del disc, però aquest article de Beltrami és de 14 anys abans. Com diu Stillwell, [545] p. 36, potser Beltrami és la baula perduda entre Riemann i Poincaré.

Dóna encara un altre canvi de coordenades per obtenir expressions enunciades sense demostració per Riemann i que corresponen al model semiespai. Després de consideracions generals sobre la possibilitat de sobreposar figures, punt clau de la geometria Euclidiana, diu: "Si può verificare che la teoria di Lobatschewski coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa." Proposa anomenar *pseudoesfèrica* a la geometria no Euclidiana.

En el comentari que fa Stillwell d'aquest treball a [545] diu: "Per una de les injustícies de la nomenclatura tan freqüents en matemàtiques, els tres models — que apropiadament s'haurien de dir Riemann-Beltrami, Liouville-Beltrami[113] i Cayley-Beltrami — es coneixen usualment com el model disc de Poincaré, el semiplà de Poincaré i el model disc de Klein."

[113]Liouville ja havia considerat el 1850 una mètrica de curvatura constant, en dimensió 2. De fet, construeix la pseudoesfera fent girar la tractiu. Vegeu la Nota IV, p. 583, de [452], ja citada a les pàgines 139 i 164.

Observazione sulla nota del Prof. L. Schlaefli

Una de les maneres més còmodes de treballar amb el pla hiperbòlic és considerar l'espai $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica de Lorentz. Això vol dir que el producte de dos vectors $u = (u_0, u_1, u_2), v = (v_0, v_1, v_2)$ està donat per

$$\langle u, v\rangle = -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2.$$

D'aquesta manera hi ha vectors de norma negativa i aquest producte de Lorentz no és pròpiament un producte escalar.

Si dintre de $\mathbb{R}^3$ hi considerem l'hiperboloide

$$\mathbb{H} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3; x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\}$$

i restringim el producte de Lorentz als vectors tangents a aquest hiperboloide resulta que aquest producte és llavors definit positiu, és a dir, és un vertader producte escalar. $\mathbb{H}$ és una varietat de Riemann i no és difícil veure que té curvatura constant negativa -1. És a dir, és un model de la geometria hiperbòlica que anomenarem *model hiperboloide*.

Malgrat que la geometria de Lorentz per estudiar la geometria hiperbòlica va ser introduïda per Klein a l'article *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [340], de 1873, veurem que ja l'any 1871 Beltrami tenia pràcticament fet aquest pas.

En efecte, l'any 1871 publica la memòria [38] on fa una observació sobre una nota que L. Schlaefli havia publicat sobre el seu treball de 1869 *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, [37]. El treball de Schlaefli és [525].

En aquest article [38] apareix la fórmula de la distància hiperbòlica $d(x, y)$ entre dos punts x, y d'un espai de dimensió arbitrària respecte d'un producte escalar arbitrari. És una generalització de la fórmula (9.34) que em recordat quan comentàvem l'article [37]. Concretament

$$\cosh^2 d(x, y) = \frac{\varphi_{xy}^2}{\varphi_{xx}\varphi_{yy}}, \tag{9.35}$$

on

$$\varphi_{xx} = \sum a_{rs}x_rx_s$$

és la *quàdrica absoluta*. Diu explícitament que correspon a la quàdrica absoluta del sr. Cayley. I també diu que segueix el mateix criteri que Klein a [339] per la signatura de les funcions quadràtiques. Notem que aquest article de Klein és del mateix any que el que estem comentant de Beltrami, 1871, i té exactament el mateix títol que el ja esmentat de 1873, [340]. En aquest article del 1871 és on Klein introdueix el terme *geometria el·líptica* per referir-se a la geometria en espais de curvatura constant positiva.

Però el pas de la geometria el·líptica a la hiperbòlica no representava cap problema per Beltrami, qui ja en el mateix article [38] que estem comentant diu que el que està fent a un espai pseudoesfèric es pot fer en un espai esfèric canviant R^2 per $-R^2$.

Tornant a l'article [38], el que és sorprenent és que ja a la primera pàgina apareix gairebé el model hiperboloide, tot i que no ho cita explícitament.

En efecte, diu que en lloc de considerar la quàdrica

$$a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$$

com feia a la seva memòria [37], agafarà una funció quadràtica general i que per fer-la homogènia introduirà una nova variable x_0, i escriu

$$\varphi_{xx} = \varphi(x_0, \ldots, x_n) = \sum a_{rs} x_r x_s$$

amb $0 \leq r, s \leq n$.

Observem que si $n = 2$, la quàdrica $a^2 = x_1^2 + x_2^2$ és la vora d'un disc de $\mathbb{R}^2$. Els punts que considera Beltrami són els de l'interior d'aquest cercle, que és la cònica de l'absolut. Si pensem $\mathbb{R}^2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ i homogeneitzem, com fa Beltrami, obtenim

$$a^2 x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

que és l'anomenat actualment *con de llum* de l'espai de Lorentz.

Les direccions interiors a aquest con de llum, anomenades actualment direccions *tipus temps*, són justament els punts que considera Beltrami. Això és degut a que la condició $\varphi_{xx} = 0$, amb φ_{xx} homogeni quadràtic, determina els punts llevat d'escalars. És a dir que si $(x_0, \ldots, x_n)$ compleix aquesta condició, $\lambda(x_0, \ldots, x_n)$ també la compleix.

Resumint, al fer el procés d'homogenització passa dels punts de l'interior del disc a les direccions interiors al con. I aquestes direccions estan en correspondència bijectiva amb els punts de l'hiperboloide

$$a^2 x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$$

Aquesta darrera observació no la fa Beltrami, però insisteixo, queda implícita.

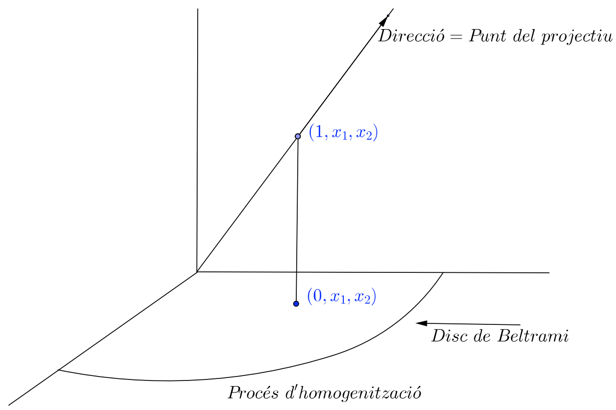


Figura 9.14: *Relació entre el disc de Beltrami i la geometria de Lorentz.*

A partir d'aquí troba l'expressió de l'element de longitud

$$ds^2 = \frac{R^2}{4\varphi_{xx}^2}[(d\varphi_{xx})^2 - 4\varphi_{xx}\varphi_{dx,dx}],$$

i el compara amb l'obtingut per Schlaefli. Acaba alabant el treball de Schlaefli tot dient que ha estat capaç de superar amb molta elegància les dificultats que el propi Beltrami havia trobar per generalitzar el seu treball en dues dimensions [32] a dimensions superiors.

Curiosament en un dels llibres de geometria hiperbòlica més erudits sobre el tema, l'escrit per J. G. Ratcliffe [487], s'atribueix la fórmula (9.35) a Killing el 1878. Set anys més tard que l'article que estem comentant.

9.13 Julius Weingarten (1836-1910)

Figura 9.15: *Julius Weingarten.*

Neix a Berlin[114]. Es doctora a la Universitat de Halle el 1864 amb una tesi titulada *De lineis curvaturae superficierum*, [573], treball de només 14 pàgines on reprodueix diversos resultats coneguts, per exemple el resultat de Joachimsthal sobre superfícies que es tallen en una línia de curvatura comú.

El mateix any 1864 passa a ser professor a la Universitat Tècnica de Charlottenburg, Berlin, fins 1905 que se'n va a Friburg. Va mantenir relació epistolar amb Bianchi, de fet es conserven nombroses cartes entre ells, que es poden trobar a les obres completes de Bianchi, [52].

El 1861 va estudiar superfícies desenvolupables a *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, [571], article que comença amb una observació interessant i fàcil de demostrar[115]. Aquesta observació és la següent. Considerem la superfície desenvolupable formada per les normals a una superfície al llarg d'una de les seves línies de curvatura (teorema de Monge). Llavors la intersecció d'aquesta superfície amb la superfície dels corresponents centres de curvatura és una geodèsica d'aquesta superfície.

Tot i que Weingarten ho dóna com una cosa sabuda donem-ne una demostració. Considerem una superfície $\varphi(u,v)$, on u,v són coordenades principals. Això vol dir que les corbes $u = cte$ i $v = cte$ són línies de curvatura. Si $N = N(u,v)$ és el vector normal, sabem que $N_u = -k_1\varphi_u$ on $k_1 = k_1(u,v)$ és la curvatura principal de les corbes $v = cte$. La superfície de centres de curvatura corresponent és

$$\psi(u,v) = \varphi(u,v) + \rho_1 N(u,v), \quad \rho_1 = \rho(u,v) = 1/k_1.$$

[114]Dades biogràfiques de Wikipedia i encyclopedia.com; foto de Oberwolfach Photo Collection.

[115]Això m'ho va traduir la Judit Abardia.

Estudiem la normal a aquesta superfície. Calculem primer

$$\begin{aligned} \psi_u &= \varphi_u + \rho_{1u} N + \rho_1 N_u = \varphi_u + \rho_{1u} N - \rho_1 k_1 \varphi_u = \rho_{1u} N. \\ \psi_v &= \varphi_v + \rho_{1v} N + \rho_1 N_v = \nu \varphi_v + \rho_{1v} N, \end{aligned}$$

per a una certa funció $\nu = \nu(u, v)$.

Així

$$\psi_u \wedge \psi_v = \delta \varphi_u$$

per a una certa funció $\delta = \delta(u, v)$, ja que φ_u, φ_v, N formen una base ortogonal, de manera que la normal buscada és

$$\frac{\varphi_u}{|\varphi_u|}.$$

La corba intersecció d'aquesta superfície amb la desenvolupable de les normals corresponent a una determinada corba $v = v_0$, que denotaré $\gamma(u) = \varphi(u, v_0)$ és

$$\sigma(u) = \gamma(u) + \rho_1 N.$$

Mirem qui és la normal principal de σ.

$$\begin{aligned} \sigma'(u) &= \gamma'(u) + \rho_1' N + \rho_1 N_u = \varphi_u + \rho_1' N - \rho_1 k_1 \varphi_u = \rho_1' N. \\ \sigma''(u) &= \rho_1'' N - \rho_1' k_1 \varphi_u. \end{aligned}$$

La binormal B^σ de σ és doncs

$$B^\sigma = \frac{\sigma'(u) \wedge \sigma''(u)}{|\sigma'(u) \wedge \sigma''(u)|} = \frac{\varphi_v}{|\varphi_v|}.$$

I, per tant, la normal principal N^σ de σ és

$$N^\sigma = B^\sigma \wedge \frac{\sigma'}{|\sigma'|} = \frac{\varphi_u}{|\varphi_u|}.$$

Com la normal principal coincideix amb la normal a la superfície, σ és geodèsica.

Tornem al treball [571]. Feta l'observació anterior, escriu els vectors tangents a la superfície en termes de les derivades de la normal. Concretament, amb la seva notació, donada la superfície $(x(p,q), y(p,q), z(p,q))$ de normal (X, Y, Z), podem posar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p} &= M\frac{\partial X}{\partial p} + N\frac{\partial X}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = M'\frac{\partial X}{\partial p} + N'\frac{\partial X}{\partial q},\\
\frac{\partial y}{\partial p} &= M\frac{\partial Y}{\partial p} + N\frac{\partial Y}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = M'\frac{\partial Y}{\partial p} + N'\frac{\partial Y}{\partial q},\\
\frac{\partial z}{\partial p} &= M\frac{\partial Z}{\partial p} + N\frac{\partial Z}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial q} = M'\frac{\partial Z}{\partial p} + N'\frac{\partial Z}{\partial q},
\end{aligned}$$

Inversament podríem escriure les derivades de la normal en termes de la base de vectors tangents. Per això es considera aquest article el primer on apareixen les equacions de Weingarten, i per extensió, l'aplicació de Weingarten $W = -d\nu$, on ν és la normal a la superfície.

A continuació, amb una tria de coordenades molt intel·ligent, demostra que *les superfícies dels centres de curvatura de totes les superfícies per les quals el radi de curvatura principal es pot determinar de la mateixa manera en cada punt a partir de l' altre*[116] *es poden desenvolupar l'una sobre l'altra.*

Continua l'article estudiant com són les superfícies que s'obtenen com centres de curvatura d'altres superfícies[117] i demostra que ni l'helicoide ni la catenoide es poden considerar com superfícies dels centres de curvatura d'una superfície de curvatura negativa constant.

Com que les superfícies minimals són un cas particular de superfícies de Weingarten, les estudia i acaba l'article amb el resultat següent: *Les superfícies dels centres de curvatura de les superfícies minimals formen la classe de superfícies desenvolupables sobre una superfície de rotació d'una línia evoluta de la catenària.*

Va estudiar més específicament les superfícies de Weingarten en un treball de 1863 titulat *Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungsmesser eine Funktion des anderen ist*, [572]. Aquest treball va ser molt

[116] Les superfícies amb aquesta propietat de que un radi de curvatura principal es pot determinar de la mateixa manera en cada punt a partir de l' altre, és a dir, superfícies en les que hi ha una equació funcional entre les dues curvatures principals $\Phi(k_1, k_2) = 0$ que es compleix en tots els punts de la superfície, es diuen avui superfícies de Weingarten. Els casos particulars més importants són les superfícies de curvatura constant i les superfícies minimals.

[117] Aquestes superfícies estan molt estudiades com es veu en aquestes mateixes notes. Una petita aportació es deu a Curtis, *Note sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe*, [179], 1858. Abans Curtis havia estudiat la superfície de les normals principals d'una corba, a [178], 1856.

valorat per Darboux que el va incorporar a les seves *Leçons*, vegeu la pàgina 228 d'aquestes notes. També Dini, dos anys més tard, va estudiar aquestes superfícies a [221].

Un dels seus treballs més important, de 1864, torna a ser sobre superfícies desenvolupables *Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen*, [574]. També va estudiar deformacions infinitesimals de superfícies a *Über die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche*, [575], de 1887, i a *Mémoire sur la déformation des surfaces*, [577], treball de 1902.

El 1894 va rebre el premi de l'Académie des Sciences de París pel treball *Sur la déformation des surfaces*, que es va publicar el 1897, [576]. Comença aquest treball dient:

> "Le problème de la déformation des surfaces s'énnonce comme il suit: E, F, G étant des fonctions données des deux variables indépendentes u, v, trouver toutes les fonctions x, y, z de u et de v qui satisfont identiquement à l'equation
>
> $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2\text{''}$$

Afegeix que sempre suposarem $EG-F^2 > 0$ ja que en cas contrari el problema no ofereix masses dificultats.

Aquesta formulació tan general té un cas particular important, que és el primer que aborda Weingarten, *trobar totes les superfícies reals aplicables sobre una superfície real donada.* La diferència amb el problema anterior és saber si les funcions E, F, G corresponen a la primera forma fonamental d'una superfície o no.

Per atacar primer aquest problema escriu la primera forma fonamental de la superfície donada com

$$ds^2 = E'dz^2 + 2F'\,dz\,d\omega + G'\,d\omega^2,$$

i fa el canvi de variables

$$t = \int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{E'G' - F'^{\,2}}d\omega$$

on K és la curvatura de Gauss. La integració és només respecte de la variable ω, de manera que $t = t(z, \omega)$ i

$$dt = \frac{\partial t}{\partial z}dz + K\sqrt{E'G' - F'^{\,2}}d\omega.$$

Introdueix la funció σ per $t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ i les funcions

$$\begin{aligned} E &= E' - \frac{2F'}{K\sqrt{E'G' - F'^{\,2}}}(\frac{\partial t}{\partial z}) + \frac{G'}{K^2(E'G' - F'^{\,2})}(\frac{\partial t}{\partial z})^2, \\ F &= -\frac{F'}{2\sqrt{\sigma^2}K\sqrt{E'G' - F'^{\,2}}} + \frac{G'}{2\sqrt{\sigma^2}K^2(E'G' - F'^{\,2})}(\frac{\partial t}{\partial z}), \\ G &= \frac{G'}{4\sigma^2 K^2(E'G' - F'^{\,2})}. \end{aligned}$$

I veu, sense masses dificultats, que donat

$$ds^2 = E'dz^2 + 2F'\,dz\,d\omega + G'\,d\omega^2,$$

el pot transformar mitjançant quadratures en un element de longitud de la forma

$$ds^2 = Edz^2 + 2F\,dz\,d\sigma + G\,d\sigma^2,$$

amb E, F, G funcions de z, σ complint

$$K\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2}}.$$

A continuació, amb arguments i càlculs complicats[118], redueix el problema a determinar totes les solucions d'una certa equació en derivades parcials de tipus Monge-Ampère.

9.14 Gaston Darboux (1842-1917)

Va néixer a Nimes i als 18 anys va anar a París. El 1861 treu el primer lloc en els exàmens d'entrada a l'École Polytechnique i a l'École Normale Superieur. Probablement per les pressions de Pasteur es decideix per aquesta última. Louis Pasteur era director d'estudis científics de l'École Normale Superieur i va escriure una carta al director del centre on diu: "Quel sera le choix de M. Darboux? Il a le goût de l'enseignement et veut embrasser la carrière des sciences. J'ais employé tous mes soins dans ces deux mois pour qu'il soit maintenu dans ces bonnes dispositions. [...] essayons de l'emporter, dans cette ocasion, sur notre rivale." El rival és, evidentment, l'École Polytechnique. Llegeix la tesi el 1866.

[118]Hi ha frases com "ces calculs plus fatigants que difficiles", "au moment oú le calcul exige violemment son droit", etc.

El 1868 publica dues notes molt breus al Comptes Rendus, *Sur les systèmes des surfaces orthogonales*, [186], on ve a dir que tot sistema triplement ortogonal de Lamé es pot considerar com formant part d'un sistema més general, i *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du segond ordre*, [185], on segueix idees de Chasles per contar el número de còniques o quàdriques d'una família uniparamètrica donada que compleixen una certa propietat. Per exemple, si μ és el número de còniques del sistema que passen per un punt i ν el nombre d'elles que tallen una recta, llavors el número de cònques que compleixen una certa condició és

Figura 9.16: *Gaston Darboux.*

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

i es diu que α, β són els paràmetres de la condició. Aquest resultat de Chasles el generalitza a quàdriques.

I encara una tercera nota *Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces*, [184]. Es refereix a les corbes intersecció d'una esfera amb superfícies de segon grau, corbes que proposa anomenar *cycliques*. L'estudi d'aquestes corbes està lligat a l'estudi de les funcions el·líptiques.

El 1869 continua enviant notes curtes als Copmtes Rendues, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, [187], tema que reprendrà anys més tard en diversos articles amb el mateix títol anterior [197] (4 notes al mateix volum dels Comptes Rendus), [199] i [206], i *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques*, [188].

El *problema de la representació esfèrica*, consisteix en trobar superfícies tals que les línies de curvatura corresponguin, per l'aplicació de Gauss, a un sistema ortogonal sobre l'esfera prèviament fixat. Recordem que, pel teorema d'Olinde, les imatges esfèriques de les línies de curvatura són ortogonals.

El 1870 funda el *Bulletin des Sciences Mathématiques*. El 1872 succeeix Ossian Bonnet com professor a École Normale Superieur. El 1880 va succeir

Chasles com professor de Geometria superior de la Sorbonne, i el 1900 va succeir Bertrand en el seu lloc de secretari perpetu de l'Académie des Sciences. Va editar les obres completes de Fourier. Vegeu la nota **117**de Struik, pàgina 259.

Encara com estudiant va publicar dues notes a *Nouvelles Annales*, la primera sobre seccions planes del tor, [181], i la segona sobre les corbes intersecció entre esferes i quàdriques, [182]. A la primera demostra, entre altres resultats, que

> "Théorème V. Toute section plane du tore a quatre foyers tels, qu'il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point de la courbe à trois quelconques de ces quatre foyers."

A la segona diu, per exemple, que si tallem una quàdrica per una esfera la corba intersecció te diverses propietats focals. Una d'elles és que hi ha tres punts sobre l'esfera tals que si r, r', r'' designen les distàncies d'un punt qualsevol de la corba a aquests tres punts (que anomenem *focus*) existeixen constants a, a', a'' tals que

$$ar + a'r' + a''r'' = 0.$$

Aquests articles estan comentats a l'article d'Eisenhart *Darboux's contribution to geometry*, [244], i al de Prasad *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century*, [482].

El 1864 va publicar *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales*, [180], que és difícil de llegir perquè és un extracte d'una carta a J. A. Serret, on, buscant sistemes de superfícies triplement ortogonals, en la línia de Dupin, Lamé i Bonnet, troba una família de superfícies

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)^2+\frac{\alpha\lambda-4h}{\alpha-\lambda}x^2+\frac{\beta\lambda-4h}{\beta-\lambda}y^2\\&+\frac{\gamma\lambda-4h}{\gamma-\lambda}z^2-h=0,\end{aligned}$$

anomenades *cyclides*, que tenen el cercle imaginari de l'infinit com corba doble; si es tallen per una esfera s'obtenen cicles; cada una d'elles és l'envolvent d'una família biparamètrica d'esferes amb centres sobre una quàdrica fixada, etc.

Ja hem comentat que Dupin, a [237], p. 201, anomena *cyclides* a les superfícies tals que les seves línies de curvatura són cercles (o rectes), vegeu pàgina 92.

La idea de considerar aquestes superfícies prové de l'estudi que va fe Kummer de les propietats focals de corbes ortogonals. Això va portar Darboux a considerar, en el pla, ovals de Descartes amb tres focus comuns, ja que aquests són ortogonals. I això el porta a preguntar-se si les superfícies compresses a l'equació

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - h^4 = 0$$

poden donar un sistema ortogonal. En imposar la ortogonalitat troba les restriccions entre els paràmetres que caracteritzen les cyclides.

Veu també que les línies d'intersecció d'un sistema triplement ortogonal de superfícies formen un sistema isotèrmic de corbes sobre cada superfície.

Aquestes idees les continua a la seva tesi, dirigida per Michel Chasles el 1866, *Sur les surfaces orthogonales*, [183]. Aquí determina els sistemes ortogonals tals que les línies de curvatura són planes.

El 1871 publica *Sur une classe particulière de surfaces réglées*, [190] i introdueix les després anomenades corbes (D) a la nota *Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, [189]. El títol és la definició de corba (D).[119] Dóna l'equació diferencial d'aquestes corbes i les integra en dos cassos importants: per a superfícies de segon ordre i per a un tipus especial de les superfícies de quart ordre.

El 1872 publica el tractat *Sur une classe remarcable de Courbes et de Surfaces algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*, [191], dividit en 5 parts: *I. De la transformation par rayons vecteurs réciproques, des foyers et des focales*, *II. Étude d'une classe remarcable de courbes du* $4^{\text{ème}}$ *ordre*, *III: Étude de certains propriétés des imaginaires en géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini*, *IV. Étude analytique des cyclides*, *V. Étude géométrique des cyclides*; i el 1880 *Sur le contact des coniques et des surfaces*, [195]. Aquí demostra entre altres coses que *en un punt regular d'una superfície no reglada*

[119] E. Cosserat, a [175] és el primer, crec, que dóna a aquestes corbes el nom de cortbes (D). Diu: "[...] courbes que nous désignons sous le nom de courbes (D) et dont la sphère osculatrice est tangente à la surface." De seguida Enneper també les estudia a *Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Curven auf Flaechen*, [260]. Jo em vaig topar per primer cop amb les corbes (D) quan preparant la *Selecta* dels treballs de L. A. Santaló, el professor Remí Langevin va comentar a Gil Solanes que hauríem d'incloure també dos treballs de Santaló sobre corbes (D), que m'havien passat per alt. Els podeu trobar a [523].

es poden construir 27 còniques que tenen cadascuna d'elles contacte d'ordre 6 *amb la superfície.*

El 1873 publica dues notes sobre superfícies ortogonals *Sur le probléme des surfaces orthogonales*, [192] i *Sur l'equation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales*, [193], que motivaran a Ribaucour a retornar sobre el tema introduït per ell mateix de sistemes cíclics (vegeu pàgina 246).

El 1878 publica en dues parts un extens treball de més de 80 pàgines titulat *Mémoire sur la Théorie des coordonnées curvilignes et des systemes orthogonaux*, [194]. Comença, com no pot ser d'una altra manera, parlant de Lamé. Però segueix el punt de vista posterior de Bonnet a [89], per tal de trobar exemples de sistemes ortogonals. Compara un resultat previ seu amb els de Bonnet. Concretament diu que ell ha provat que la condició necessària i suficient per tal de que una família de superfícies d'equació

$$\rho = \varphi(x, y, z)$$

pertanyi a un sistema ortogonal és que ρ compleixi una certa equació en derivades parcials de tercer ordre. I diu que aquest resultat ha estat sovint confós amb el de l'eminent geòmetra Bonnet (que també redueix el problema a EDP's de tercer ordre amb tres variables independents). Desenvolupa el seu mètode a la primera part del treball. A la segona part considera sistemes ortogonals de n variables.

El 1881 publica *Sur le déplacement d'une figure invariable*, [196], on estudia moviments de figures a l'espai. Per exemple descriu tots els moviments tals que tots els punts d'questa figura descriuen corbes planes. El paràgraf que m'ha cridat més l'atenció diu:

> " On sait que dans le plan il existe un mouvement dans lequel tous les points décrivent des ellipses. Il n'existe pas dans l'espace de mouvement dans lequel tous les points décrivent des surfaces du second degré. On sait que, dans certaines questions de Géométrie, pour étendre à l'espace des propriétés des coniques, il faut considérer non plus une surface du second ordre, mais la surface de Steiner. C'est ce qui se présente ici. Il existe un mouvement d'une figure invariable dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des surfaces de Steiner. Dix points particuliers de la figure mobile décrivent des plans."

El mateix any estudia la superfície de Kummer en un parell de treballs que no comentem.

El 1882 i 1883 va publicar dues notes amb el mateix nom, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, [197], [199], tema iniciat el 1869 a [187], com hem comentat abans.

El 1883 publica *Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes*, [198], que comença recordant el treball *déjà ancien* d'Enneper on aquest estudia les superfícies de curvatura constant tals que les línies de curvatura d'un dels sistemes[120] són planes o esfèriques, [257]. Comenta que en aquestes condicions les línies de curvatura són planes en un sistema i esfèriques a l'altre. A més, els plans que contenen les línies de curvatura del primer sistema tenen una recta en comú, i per tant, les esferes que contenen les línies de curvatura del segon sistema tenen el centre sobre aquesta recta. Diu que aquest tipus de superfície han estat estudiades pel geòmetres alemanys i que estan determinades per funcions el·líptiques de mòdul arbitràri.

A continuació comenta que a partir d'un comentari de Bonnet es poden associar a cada superfície de curvatura *total*[121] constant dues superfícies de curvatura mitjana constant i paral.leles a la primera. Per tant, a les superfícies de curvatura constant descobertes per Enneper els hi corresponen superfícies de curvatura mitjana constant que tindran, també elles, línies de curvatura planes en un sistema i esfèriques a l'altre.

La relació entre superfícies de curvatura constant i les paral·leles de curvatura mitjana constant ve donada per la relació entre les curvatures d'una superfície i la seva paral·lela a distància t: Concretament tenim (veure la llista de problemes `http://mat.uab.es/~agusti/geodif2015`)

$$K^t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2},$$

on $K = K(u, v)$ i $H = H(u, v)$ són les curvatures de Gauss i mitjana de la superfície $\varphi(u, v)$ inicial en el punt corresponent i $K^t = K^t(u, v)$ és la curvatura de Gauss de la superfície paral·lela a distància t, $\Psi(u, v) = \varphi(u, v) + t\nu(u, v)$.

[120] Això vol dir que si tenim coordenades principals u, v (i.e. tant les corbes dels sistema $u =$ *constant* com les del $v =$ *constant* són línies de curvatura), un dels dos sistemes, per exemple $v =$ *constant*, està format per corbes planes o esfèriques.

[121] Vol dir curvatura de Gauss.

Així, si H és constant, i fem la paral·lela a distància $t = 1/2H$ tenim

$$K^t = \frac{K}{Kt^2} = \frac{1}{t^2}$$

és a dir, la curvatura de Gauss d'aquesta superfície paral·lela és constant.

Novament per un resultat de Bonnet sabem que les superfícies de curvatura mitjana constant es poden dividir en quadrats infinitament petits per les línies de curvatura (les línies de curvatura són isotermes). Per tant, gràcies als resultats d'Enneper, sabem que hi ha superfícies complint la doble condició de tenir línies de curvatura planes en un sistema i que es poden dividir en quadrats infinitament petits per les línies de curvatura.

I a continuació diu:

> " J'ai été ainsi conduit à chercher toutes les surfaces, autres que les surfaces de révolution, jouissant de cette double proprieté. La solucion de ce problème fait l'objet du présent travail.
>
> Le résultat que j'ai obtenu me parait remarcable: bien que les surfaces cherchées doivent satisfaire à la fois à deux équations aux dérivées partielles, on trouve qu'elles contiennent dans leur équations deux constantes et une fonction arbitraire."

També el 1883 publica *Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante*, [202], com a continuació de les notes [200] i [201], publicades en poques pàgines de diferència i les dues amb gairebé el mateix títol: *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante* i *Sur les surfaces à courbure constante*, respectivament.

Comença dient que la mètrica, per a superfícies de curvatura constant negativa -1, es pot escriure com

$$ds^2 = \cos^2 \omega du^2 + \sin^2 \omega dv^2,$$

amb

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \sin \omega \cos \omega = 0.$$

No dóna més explicacions, ja que aquest resultat era ja ben conegut per ell en aquells moments. Es pot trobar a les *Leçons*, publicades més tard (vegeu [204], Vol 3, llibre VII, p. 378). A la secció 9.14, pàgina 222 d'aquests apunts, en dono tots els detalls.

Construeix a continuació una superfície ortogonal a la donada de la manera següent (de fet busca incloure la superfície donada en un sistema triplement ortogonal): pren, en el pla tangent en un punt M, una línia MM' de longitud 1 que forma un angle θ amb la corba $v = const.$ que passa per M, i imposa que la superfície generada per M' quan M es mou sobre la superfície donada, tingui pla tangent passi per M i sigui normal al pla tangent a la superfície donada.

Això li dóna una condició sobre θ, concretament θ ha de verificar el sistema d'equacions en derivades parcials

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sin\theta\cos\omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\cos\theta\sin\omega, \end{aligned}$$

que es dedica a resoldre.

En particular li serveix per donar una demostració alternativa al teorema de Ribaucour:[122]

> "Considerem una superfície de curvatura -1, i tracem dins de cada pla tangent de la superfície un cercle de radi 1 amb centre el punt de contacte; els cercles així obtinguts són ortogonals a una família de superfícies, totes de curvatura constant -1; a més, aquestes superfícies formen part d'un sistema triplement ortogonal tal que les dues altres famílies són envolvents d'esferes."

El 1887 publica *Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima*, [205]. Reprèn un problema que ell havia tractat abans i que consistia en trobar les superfícies minimals algèbriques inscrites en una desenvolupable algèbrica, [203], a la llum d'uns resultats nous de Ribaucour, [508].

El resultat de Ribaucour diu:

> "Si l'on considère deux développables Σ, Σ_1 circonscrites l'une et l'autre au cercle de l'infini, la surface minima la plus générale

[122] El 1870, a [499], Ribaucour diu: "Si des cercles [situats als plans tangents d'una superfície] sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal".

sest l'enveloppe des plans perpendiculaires à toutes les tangentes communes de ces développables, ces plans étant menés à égale distance des deux points de contact de ces tangentes communes."

La propietat característica dels plans tangents al cercle de l'infinit és que tota recta perpendicular a un tal pla és al mateix temps paral·lela a ell i passa pel punt de contacte del pla amb el cercle de l'infinit. Es pot considerar Darboux com l'iniciador de la Geometria Diferencial Projectiva.

Darboux demostra amb mètodes diferents a Ribaucour, que diu que no permeten saber el veritable origen de les coses, el resultat següent:

> "Pour obtenir toutes les surfaces minima inscrites dans une développable Δ, on déterminera toutes les surfaces réglées dont les génératrices sont normales aux plans de Δ et pour lesquelles le point central de chaque génératrice se trouve dans le plan correspondant de Δ. Les arêtes de rebroussement des deux développables circonscrites à chaque surface reglée et au cercle de l'infini seront les deux courbes minima Λ, Λ_1, au moyen desquelles on peut engendrer la surface minima correspondante."

La notació de *corba mínima* és de Lie, i es refereix a corbes que satisfan l'equació diferencial

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Les *Leçons sur la theorie generale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, [204], de 1887, estan dividides en quatre parts:[123]

Primera part, de 1887. Un volum dividit en tres llibres.
Llibre I: Applications a la géométrie de la théorie des mouvements relatifs.
Llibre II: Des différents systèmes de coordonnées curvilignes.
Llibre III: Les surfaces minima.

Segona part, de 1889. Un volum dividit en dos llibres:
Llibre IV: Les congruences et les equations linéaires aux dérivées partielles.
Llibre V: Des lignes tracées sur les surfaces.

Tercera part, de 1894. Un volum dividit en dos llibres:
Llibre VI: Lignes géodésiques et courbure géodésique.
Llibre VII: La déformation des surfaces.

[123] `http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath&idno=ABV4153`.

Quarta part, de 1896. Un volum que conté un llibre i diverses notes.
Llibre VIII: Deformation infiniment petite et représentation sphérique.

Acaba amb diverses Notes[124] de les quals en destaco un parell de:
Nota IV: Sur la torsion des courbes gauches et sur les courbes à torsion constante.

Nota VII: Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic.[125]

El 1888 publica *Sur la représentation sphérique des surfaces*, [206], quart treball amb aquest nom.

El 1890 publica *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, [207]. Comença dient que la determinació de superfícies minimals depèn de l'equació $s = e^z$ i que la determinació de superfícies de curvatura constant depèn de $s = ae^z + be^{-z}$,[126] que inclou l'equació anterior. A part d'aquesta relació entre aquests dos tipus de superfícies Darboux hi veu la següent: Se sap que existeixen dues superfícies de curvatura mitjana constant i paral·leles a una superfície de curvatura constant. Per tant, l'estudi de les superfícies de curvatura constant es redueix a l'estudi de les superfícies de curvatura mitjana constant, que inclouen les minimals. Llavors posa un problema de geometria projectiva que es redueix a l'anterior (tot i que d'entrada no ho sembla pas!). Concretament es proposa donada una superfície Q de segon ordre, determinar les superfícies Σ tals que les dues tangents a les línies asimptòtiques que passen per cadascun dels seus punts siguin conjugades respecte de la quàdrica Q.

El 1897 publica una nota titulada *Nouvelle démonstration des formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues*, a l'obra *Leçons de Cinématique*, de G. Koenigs, París 1897, p. 343-345.

El 1898 publica les *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, [208], que consta de tres parts: (1) *L'equation de troisième ordre.*

[124]Vuit seves, una d'Émile Picard, una de G. Koenigs i una de E. Cosserat.

[125]A aquesta nota es refereix Struik en la seva nota **93**, pàgina 256.

[126]Recordem que l'expressió de la curvatura de Gauss quan la primera forma fonamental està donada per $E = 1, F = 0, G$ (coordenades polars) és

$$k = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}.$$

Si k és constant podem trobar $\sqrt{G}$ observant que aquesta funció ha de ser múltiple de la seva derivada segona.

(Que comença amb un estudi de les famílies de Lamé, el teorema de Dupin i el seu recíproc). (2) *Les coordonées curvilignes*. (Parla del triedre mòbil, conegut posteriorment com triedre de Darboux).[127] (3) *Théorie génerales.* (Parla dels sistemes triplement ortogonals).

Recull molts dels resultats de vint anys abans sobre sistemes triplement ortogonals que hem comentat més amunt. A la introducció, datada el 21 de novembre de 1897, diu:

> "L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier Volume est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.
>
> Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication."

El 1899 publica *Sur les surfaces isothermiques*, [210], on resol el problema de trobar les famílies biparamètriques d'esferes per a les quals la correspondència entre els dos fulls de l'envolvent és conforme.

Cap al final de la seva vida va recollir els apunts dels seus cursos en el llibre *Géométrie Analytique*, [214], on estudia quaternes harmòniques, homologies, dualitat, còniques, rectes isòtropes, fórmula de Laguerre, trigonometria esfèrica, teorema de Poncelet sobre polígons inscrits i circumscrits a còniques, geometria de Cayley, etc. Fa una defensa aferrissada de l'ús dels punt imaginaris.

El 24 de setembre de 1904 participa al "Congrès des Sciences et des Arts a Saint-Louis" on imparteix una conferència titulada *Étude sur le développement des méthodes géométriques*, [211], dedicada a la geometria en general, els

[127] També anomenat en molts llocs triedre de Darboux-Ribaucour. Quan Darboux utilitza aquest triedre a les *Leçons* diu: "[...] je dois surtout signalier comme offrant le plus d'analogie avec les méthodes suivies dans cette partie de mes leçons, celles que Ribaucour a développées d'une manière plus o moins complète dans plusieurs de ses travaux et quise trouvent exposés d'una manière detaillée sous le nom de périmorphie dans le Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles". Es refereix a [508], però com diu Rouxel, Ribaucour ja l'havia utilitzat molt abans, per exemple a [509] que , encara que publicat el 1891 havia estat escrit vint anys abans. Vegeu la controvèrsia Darboux-Ribaucour a la pàgina 241.

orígens de la geometria projectiva, etc., però on dedica molta atenció als treballs de "l'École de Monge".

El 7 d'abril de 1908 dóna una conferència al Palau Corsini de Roma, durant el IV Congrés Internacional de Matemàtiques, titulada, *Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale*, [212], amb els apartats següents: I. *La théorie des cartes géographiques et les travaux de Gauss*, II. *Les premiers travaux des géomètres français Monge, Dupin, Lamé, Jacobi*[128], III. *Des méthodes en géométrie infinitésimale. Rôle de la méthode analytico-géométrique*, IV. *Nécessité d'introduire franchement et complètement les imaginaires en Géométrie. Examples à l'appui*, V. *Quelques problèmes de Géométrie infinitésimale. Les courbes à torsion constante*[129], VI. *Les surfaces à courbure constante et leurs transformations*[130], VII. *La notion de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy*, VIII. *Application aux surfaces minima. Le problème de Plateau*, IX. *Progrès et problèmes de la théorie des cartes géographiques. Représentation géodésique. Problème de Tchebychef*[131], X. *Les surfaces à courbure constante négative*

[128]En aquesta secció essencialment històrica cita també Gauss i Lagrange, i més de passada Liouville, Frenet, Puiseux, Bertrand, Serret, Minding, Joachimsthal, Bouquet, i Bonnet. D'aquest últim diu: " à qui ses recherches assignent presque le rôle d'un créateur".

[129]Cita el *curiós* teorema d'Enneper: *Les línies asimptòtiques de les superfícies de curvatura constant tenen torsió constant*, vegeu [258]. Diu "Il y aurait donc un intérêt réel à obtenir, parmi ces courbes à trorsion constante que J. A. Serret nous a appris à déterminer par trois quadratures, celles qui sont algébriques ou, seulement, unicursales". En canvi no cita els noms clàssics en aquest tema: Koenigs, Lyon, Fouché i Fabry, que hem citat nosaltres a la pàgina 160, tots ells anteriors a aquest discurs de Darboux. A la pàgina 429 del Llibre VIII de les *Leçons* Darboux els cita a tots ells i també a E. Cosserat, [176]. Més informació sobre torsió constant, ja passat el 1900 i que per això no tractem aquí, en particular els treballs de Bianchi sobre la configuració de Moebius, la podeu trobar a l'article de Vincensini *La géométrie diférentielle au XIXème Siècle*, [565], article que recomanem per la visió general que dóna de la teoria de corbes i superfícies.

[130]Explica el fet curiós següent: Bour va enunciar que, aplicant el mètode de variació de les constants, havia pogut determinar totes les superfícies que es podien aplicar [isomètriacment] sobre una superfície de revolució arbitrària, i en particular doncs sobre l'esfera. Però Bour va morir poc després sense publicar el seus resultats. La Memòria en qüestió estava a casa de Bertrand, però es va perdre durant els incendis de la *Commune* [La Commune de París és un període d'insurrecció de l'història de París que va del 18 de mars 1871 al 28 de maig 1871]. Després es van fer intents per reproduir aquests resultats, però tot i que no es van poder refer els resultats de Bour, els esforços van donar fruits molt interessants en el coneixement de les superfícies de curvatura constant.

[131]El problema de Tchebychef consisteix en saber quina forma prendrà la mantellina d'una senyora (!) quan emboliquem una superfície amb ella. Concretament Darboux

et les formes quadratiques de différentielles. Géométrie non euclidienne, XI. *Réduction des problèmes les uns aux autres. Procédés de récurrence. Surfaces isothermiques. Déformation des surfaces du second degré,* XII. *Les équations linéaires aux dérivées partielles et leur rôle en Géométrie infinitésimale*, XIII. *Le système auxiliaire en Géométrie. Déformation finie et déformation infiniment petite*, XIV. *Élargissement des cadres de la Géométrie. Nécessité de méthodes générales et uniformes permettant les simplifications nécéssaires.*

Més informació sobre Darboux per exemple al treball d'Émile Picard[132] *Notice Historique sur Gaston Darboux*, [470].

Breu repàs del mètode de la referència mòbil tal com apareix a les *Leçons*

Sigui $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ una referència mòbil. És a dir, una referència afí ortonormal, amb P com origen.

Seguint la notació de Darboux, escriurem:

$$\begin{aligned} e_1 &= a\frac{\partial}{\partial x} + a'\frac{\partial}{\partial y} + a''\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_2 &= b\frac{\partial}{\partial x} + b'\frac{\partial}{\partial y} + b''\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_3 &= c\frac{\partial}{\partial x} + c'\frac{\partial}{\partial y} + c''\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tenir una referència mòbil sobre una superfície $\varphi(u, v)$ vol dir tenir per a cada punt P d'aquesta superfície una referència mòbil $\{P; e_1, e_2, e_3\}$. Això permet pensar tant el punt P com els vectors e_i com funcions de les dues

parla d'*un filet tel que ceux dans lesquels les dames enferment leur cheveux.* Es refereix a xarxes en les quals poden canviar els angles entre els costats que les formen però no la longitud dels mateixos. Diu que Tchebychef no s'ha adonat que per al cas de l'esfera la solució ve donada per la representació esfèrica de les línies asimptòtiques d'una superfície de curvatura constant negativa.

[132] Émile Picard (1856-1941). Neix a París. Estudia a l'École Normale supérieure. La seva tesi, quan tenia només 21 anys, va de superfícies, però és conegut pels seus resultats d'anàlisi, especialemnt variable complexa.

variables u, v, de manera que podem escriure la referència com

$$\{P(u,v); e_1(u,v), e_2(u,v), e_3(u,v)\}.$$

En particular podem calcular les derivades parcials dels vectors d'aquesta referència i expressar-los respecte de la pròpia referència mòbil. Tindrem

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial e_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial e_3}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial e_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial e_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & -q_1 \\ -r_1 & 0 & p_1 \\ q_1 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

on $p = p(u,v), q = q(u,v), r = r(u,v), p_1 = p_1(u,v), q_1 = q_1(u,v), r_1 = r_1(u,v)$ són funcions sobre la superfície. Hem utilitzat que $e_i \cdot e_i = 1$ implica $e_{iu} \cdot e_i = e_{iv} \cdot e_i = 0$.

Relacionem la base donada per la parametrització amb la referència mòbil.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 \\ &= (\xi a + \eta b + \zeta c)\frac{\partial}{\partial x} + (\xi a' + \eta b' + \zeta c')\frac{\partial}{\partial y}(\xi a'' + \eta b'' + \zeta c'')\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \xi_1 e_1 + \eta_1 e_2 + \zeta_1 e_3 \\ &= (\xi_1 a + \eta_1 b + \zeta_1 c)\frac{\partial}{\partial x} + (\xi_1 a' + \eta_1 b' + \zeta_1 c')\frac{\partial}{\partial y}(\xi_1 a'' + \eta_1 b'' + \zeta_1 c'')\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Calculem les derivades creuades

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} &= \xi \frac{\partial e_1}{\partial v} + \eta \frac{\partial e_2}{\partial v} + \zeta \frac{\partial e_3}{\partial v} + \xi_v e_1 + \eta_v e_2 + \zeta_v e_3, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= \xi_1 \frac{\partial e_1}{\partial u} + \eta_1 \frac{\partial e_2}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial e_3}{\partial u} + \xi_{1v} e_1 + \eta_{1v} e_2 + \zeta_{1v} e_3, \end{aligned}$$

i apliquem Schwarz. En igualar els termes de la dreta i substituir els valors de les derivades parcials dels camps e_i en funció dels propis e_i obtingudes més amunt i igualant els coeficients de e_i, $i = 1, 2, 3$, obtenim[133]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} &= r\xi_1 - r_1\xi - p\zeta_1 + p_1\zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} &= p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi. \end{aligned} \tag{9.36}$$

Imposant ara

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 e_i}{\partial v \partial u},$$

obtenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1. \end{aligned} \tag{9.37}$$

"qui joue un rôle fondamental dans la théorie", diu Darboux[134].

Les sis equacions (9.36), (9.37), quan s'apliquen a una referència mòbil *adaptada* a una superfície, és a dir, que P es mou sobre la superfície i $e_3 = N$ en tot punt de la superfície (N és el vector normal a la superfície, de manera que la condició $e_3 = N$ equival a dir $\zeta = \zeta_1 = 0$), donen lloc al famós sistema (A) de Darboux.[135]

[133] Darboux diu que són anàlogues a les donades per Kirchoff.

[134] Darboux afegeix un peu de pàgina per dir que aquestes equacions han estat obtingudes per Combescure a *Annales de l'École Normale*, t. IV, série 1, p.108. Es refereix a [170], que hem citat a la pàgina 112. Però córrer a dir que ell ja les havia explicat abans en els seus cursos al Collège de France!

[135] L'introdueix a la pàgina 348 del volum 2, llibre V, i l'utilitza més endavant i en el volum 3 diversos cops referint-se sempre al *Sistema (A)*. També les anomena *equacions de Codazzi.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= -r\eta_1 + r_1\eta, \\
\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} &= r\xi_1 - r_1\xi, \\
0 &= p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi. \qquad (9.38)\\
\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1, \\
\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1, \\
\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1.
\end{aligned}$$

A continuació barreja aquest punt de vista amb el punt de vista de Gauss. Se situa[136] en una superfície amb mètrica

$$ds^2 = Edu^2 + 2\sqrt{E}\sqrt{G}\cos\alpha du\, dv + Gdv^2.$$

Això vol dir que les línies coordenades es tallen en un angle α i que, amb la notació de Gauss, $F = \sqrt{E}\sqrt{G}\cos\alpha$.

Sigui m l'angle entre e_1 i φ_u. Com

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3,$$

tenim

$$\xi = \sqrt{E}\cos m, \qquad \eta = \sqrt{E}\sin m$$

Anàlogament

$$\xi_1 = \sqrt{G}\cos n, \qquad \eta_1 = \sqrt{G}\sin n, \qquad n = m + \alpha.$$

Aplicant el mètode de Cramer per resoldre les dues primeres equacions del sistema (9.38), obtenim

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\begin{vmatrix} \xi_v - \xi_{1u} & \eta \\ \eta_v - \eta_{1u} & -\xi \end{vmatrix}}{\eta_1\xi - \eta\xi_1} = \frac{\xi\xi_v + \xi\xi_{1u} - \eta\eta_v + \eta\eta_{1u}}{\sqrt{EG}\sin\alpha}, \\
r_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -\eta_1 & \xi_v - \xi_{1u} \\ \xi_1 & \eta_v - \eta_{1u} \end{vmatrix}}{\eta_1\xi - \eta\xi_1} = \frac{-\eta_1\eta_v + \eta_1\eta_{1u} - \xi_v\xi_1 + \xi_{1u}\xi_1}{\sqrt{EG}\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

[136] Seguim amb les *Leçons*, [204], Vol. 2, p. 362. En l'únic punt en que no segueixo la notació de Darboux és en el nom dels coeficients de la primera forma fonamental, ja que vull mantenir E, F, G com Gauss.

Efectuant aquestes derivades i substituint els seus valors en el sistema (A) (9.38), obtenim finalment el sistema (A')

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{\partial n}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}\sin\alpha}(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\alpha), \\
r_1 &= -\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}\sin\alpha}(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\alpha), \\
\sqrt{E}(p_1\sin m - q_1\cos m) &= \sqrt{G}(p\sin n - q\cos n) \qquad (9.39)\\
\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1, \\
\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1, \\
\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1.
\end{aligned}$$

Coordenades principals

En aquests cas, per definició, les línies $u = constant$, $v = constant$, són línies de curvatura. Com són ortogonals $\alpha = \pi/2$, i com fem coincidir la direcció de e_1 amb la direcció de φ_u, $m = 0$. Considerem un triedre mòbil adaptat a la superfície amb e_1 en la direcció de φ_u i e_2 en la direcció de φ_v. Això implica

$$\eta = \zeta = \xi_1 = \zeta_1 = 0.$$

Pel teorema d'Olinde Rodrigues, e_{3u} té la direcció de φ_u, i és per tant, ortogonal a e_2, i e_{3v} té la direcció de φ_v, i és per tant, ortogonal a e_1. Això implica

$$p = q_1 = 0.$$

El sistema (A') queda reduït doncs a

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{1}{\sqrt{G}}(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}), \\
r_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}), \\
0 &= 0 \\
-\frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1, \\
\frac{\partial q}{\partial v} &= rp_1, \\
\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= -qp_1.
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Observa a continuació que si pensem $e_3 = N$ com una parametrització de l'esfera unitat, la mètrica d'aquesta esfera és

$$d\sigma^2 = q^2du^2 + p_1^2dv^2, \tag{9.41}$$

cosa òbvia ja que $N_u \cdot N_u = e_{3u} \cdot e_{3u} = q^2 + p^2 = q^2$, i $N_v \cdot N_v = e_{3v} \cdot e_{3v} = q_1^2 + p_1^2 = p_1^2$.

Denotem R, R' els radis de curvatura principals. Per Olinde Rodrigues,

$$\begin{aligned}
e_{3u} &= -\frac{1}{R}\varphi_u \\
e_{3v} &= -\frac{1}{R'}\varphi_v
\end{aligned}$$

però com $e_{3u} = qe_1$ i $e_{3v} = -p_1e_2$ tenim

$$R = -\frac{\xi}{q} = -\frac{\sqrt{E}}{q}, \qquad R' = \frac{\eta_1}{p_1} = \frac{\sqrt{G}}{p_1}. \tag{9.42}$$

En particular la mètrica en coordenades principals s'escriu com

$$ds^2 = R^2q^2du^2 + R_1^2p_1^2dv^2.$$

Acaba notant que hi ha una relació diferenciable entre els radis de curvatura i la representació esfèrica

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}(R' - R), \tag{9.43}$$

$$\frac{\partial R'}{\partial u} = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}(R' - R), \tag{9.44}$$

que implica que no es poden prendre a priori dues funcions $R(u,v), R'(u,v)$ com radis de curvatura.

Superfícies el les quals hi ha una relació entre els radis de curvatura

Seguim les *Leçons*, Vol. 3, llibre VII, p. 316. Suposem $R' = R'(R)$, és a dir, que hi ha una relació funcional entre els radis de curvatura. Llavors les fórmules (9.43) es poden integrar trivialment i obtenim

$$q = Ue^{\int \frac{dR}{R'-R}}, \qquad p_1 = Ve^{-\int \frac{dR'}{R'-R}}.$$

amb $U = U(u), V = V(v)$.

Mirant l'expressió de la mètrica de la representació esfèrica, (9.41), veiem que podem reparametritzar les línies de curvatura de manera que $U = V = 1$.

Per tal de poder resoldre les dues integrals precedents fem respectivament els canvis de variable

$$R = f(k), \qquad R' = f(k) - kf'(k).$$

Atenció! R' és el segon radi de curvatura, no pas la derivada del primer. En canvi $f'(k)$ és la derivada de f.

Així
$$\int \frac{dR}{R'-R} = \int \frac{f'(k)dk}{R'-f(k)} = \int \frac{f'(k)dk}{-kf'(k)} = -\ln k,$$

és a dir, $q = 1/k$. Anàlogament

$$\int \frac{dR'}{R'-R} = \int \frac{-kf''(k)dk}{-kf'(k)} = \int \frac{f''(k)dk}{f'(k)} = \ln f'(k),$$

és a dir, $p_1 = 1/f'(k)$.

A la pràctica per determinar aquesta funció $f(k)$, que sembla inclús que podria no existir, resolem[137]

$$k = e^{-\int \frac{dR}{R-R'}}$$

(recordem que la relació $R' = R'(R)$ se suposa donada i, per tant, coneguda), i això ens dóna k com a funció de R, i pel teorema de la funció inversa, també

$$R = f(k).$$

[137]Hi ha un missprint en aquesta fórmula, Vol 3, p.318.

És a dir, la funció f buscada és la inversa de la funció $k = k(R)$ que obtenim resolent l'anterior integral. Llavors, com cabem de veure, el canvi $R' = f(k) - kf'(k)$ ens resol la segona integral.

Utilitzant ara la relació (9.42) tenim

$$\sqrt{E} = -\frac{f(k)}{k}, \qquad \sqrt{G} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)}.$$

Cas particular de curvatura -1

En aquest cas $RR' = -1$, és a dir, la relació funcional entre els radis és

$$R' = -\frac{1}{R}.$$

Trobem k.

$$k = e^{-\int \frac{dR}{R'-R}} = e^{\int \frac{RdR}{1+R^2}} = e^{\ln(1+R^2)^{1/2}},$$

és a dir,

$$k = \sqrt{1+R^2}.$$

I per tant,

$$R = f(k) = \sqrt{k^2-1}.$$

Així,

$$R' = f(k) - kf'(k) = -\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

I la mètrica és

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = \frac{f(k)^2}{k^2}du^2 + \frac{(f(k) - kf'(k))^2}{f'(k)^2}dv^2 = (1 - \frac{1}{k^2})du^2 + \frac{1}{k^2}dv^2.$$

Això incita el canvi de variable $k = 1/\sin\omega$ i la mètrica, per a varietats de curvatura constant negativa, en coordenades principals pren la forma

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2.$$

En aplicar la fórmula del teorema egregi de Gauss per calcular la curvatura en funció dels coeficients de ds^2 i imposar que sigui igual a -1, veiem que aquesta ω ha de complir l'equació en derivades parcials

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \sin\omega\cos\omega = 0.$$

Torsió geodèsica

Aprofito la notació del triedre mòbil introduïda a la pàgina 223 per donar l'expressió de la torsió geodèsica, seguint les *Leçons*, llibre V.

Suposem, doncs, que sobre una superfície $\varphi(u,v)$ hi tenim el triedre mòbil e_1, e_2, e_3 amb e_3 igual a la normal a la superfície en tot punt. Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre la superfície, parametritzada per l'arc, i denotem $w = w(s)$ l'angle entre $\gamma'(s)$ i $e_1 = e_1(u(s), v(s))$.

Tenim, en el punt de paràmetre s,

$$\cos w = \langle \gamma', e_1 \rangle$$

Però

$$\gamma' = \frac{d\,\varphi(u(s), v(s))}{ds} = \varphi_u u' + \varphi_v v'$$

on

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}, \quad u' = u'(s), v' = v'(s).$$

Per tant, amb la mateixa notació que a la pàgina 223, tenim

$$\cos w = \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', e_1 \rangle = \xi u' + \xi_1 v'.$$

Anàlogament,

$$\sin w = \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', e_1 \rangle = \eta u' + \eta_1 v'.$$

Aquestes fórmules es poden escriure com

$$\begin{aligned} \cos w\, ds &= \xi\, du + \xi_1\, dv \\ \sin w\, ds &= \eta\, du + \eta_1\, dv \end{aligned}$$

que ens permeten escriure directament la mètrica com

$$ds^2 = (\xi\, du + \xi_1\, dv)^2 + (\eta\, du + \eta_1\, dv)^2.$$

Derivant la igualtat $\gamma'(s) = T(s) = \cos w(s)\, e_1(u(s), v(s)) + \sin w(s)\, e_2(u(s), v(s))$, que escriurem només com $\gamma' = T = \cos w\, e_1 + \sin w\, e_2$, obtenim

$$\begin{aligned} T' &= \sin w\, w' e_1 + \cos w\, w' e_2 \\ &+ \cos w\, ((r e_2 - q e_3) u' + (r_1 e_2 - q_1 e_3) v') \\ &+ \sin w\, ((-r e_1 + p e_3) u' + (-r_1 e_1 + p_1 e_3) v') \end{aligned}$$

Si posem la normal principal N com

$$N = \cos\xi'\, e_1 + \cos\eta'\, e_2 + \cos\zeta'\, e_3,$$

la primera fórmula de Frenet $T' = kN$ ens diu que

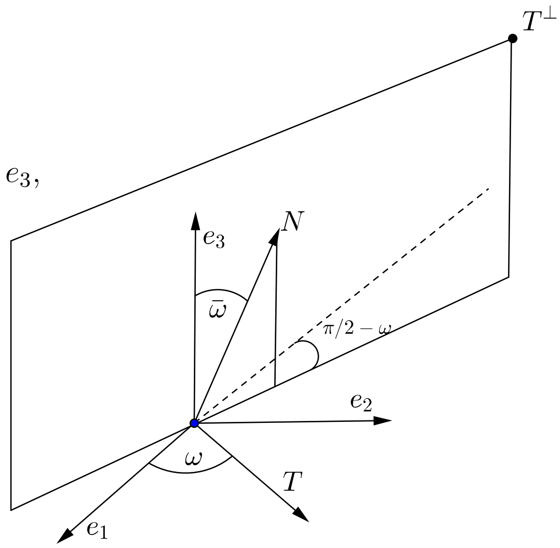


Figura 9.17: *Triedres de Darboux i Frenet.*

$$\begin{aligned} k\cos\xi' &= -\sin w(w' + r\,u' + r_1 v') \\ k\cos\eta' &= \cos w(w' + r\,u' + r_1 v') \\ k\cos\zeta' &= \sin w(p\,u' + p_1 v') - \cos w(q\,u' + q_1 v') \end{aligned}$$

Aquestes tres fórmules apareixen a la pàgina 354, del llibre V, de les *Leçons*.

La figura 9.17 mostra les relacions

$$\begin{aligned} \cos\xi' &= -\sin w \sin\bar{\omega} \\ \cos\eta' &= \cos w \sin\bar{\omega} \\ \cos\xi' &= \cos\bar{\omega} \end{aligned}$$

que permeten reduir les tres equacions anteriors a les dues següents:

$$\begin{aligned} k\sin\bar{\omega} &= w' + r\,u' + r_1 v' \\ k\cos\bar{\omega} &= \sin w(p\,u' + p_1 v') - \cos w(q\,u' + q_1 v') \end{aligned} \tag{9.45}$$

"Ces formules appellent plusieurs remarques", diu Darboux.

La primera ens dóna una expressió per a la curvatura geodèsica $k\sin\bar{\omega}$, la curvatura de la corba projectada sobre el pla tangent.

Diu Darboux: "M. Liouville, qui l'a considerée après M. O. Bonnet, lui a donné le nom, accepté par tous les géomètres, de *courbure géodésique*". Els articles corresponents de Bonnet i Liouville a que fa referència són respectivament [64] i [416].

Observem també que, com que la condició perquè una corba sigui geodèsica és $N = e_3$, o curvatura geodèsica zero, l'equació de les geodèsiques és

$$w' + ru' + r_1 v' = 0.$$

La segona fórmula ens diu que la curvatura normal $k \cos\bar{\omega}$ és la mateixa per a totes les corbes amb la mateixa tangent, és a dir, el Teorema de Meusnier.

Observem també que del dibuix anterior es desprèn que el vector binormal respecte del triedre de Darboux s'escriu com

$$B = \sin w \cos\bar{\omega}\, e_1 - \cos w \cos\bar{\omega}\, e_2 + \sin\bar{\omega}\, e_3,$$

on tots aquests elements, $B, w, \bar{\omega}, e_i$, són funcions de s.

Si ara derivem i ens fixem per exemple en la tercera coordenada, i recordant la tercera fórmula de Frenet $B' = \tau N$, tenim

$$\tau \cos\bar{\omega} = \cos\bar{\omega}\frac{d\bar{\omega}}{ds} - \frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos\bar{\omega}\cos w - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\cos\bar{\omega}\sin w.$$

Equivalentment,

$$\tau - \frac{d\,\bar{\omega}}{ds} = -\frac{p\,du + p_1\,dv}{ds}\cos w - \frac{q\,du + q_1\,dv}{ds}\sin w. \tag{9.46}$$

Es veu, doncs, que el primer terme pren el mateix valor per a totes les corbes sobre la superfície amb la mateixa tangent en el punt condiderat. "Ce résultat important est dû a M. O. Bonnet", diu Darboux.

Bonnet va donar al primer terme d'aquesta igualtat el nom de *torsió geodèsica*, ja que coincideix amb la torsió de la geodèsica que passa pel punt amb la mateixa tangent que la corba considerada. Però a diferència de la curvatura geodèsica la torsió geodèsica no es conserva per deformacions (isometries) de la superfície.

Les fórmules (9.45) de la curvature geodèsica i (9.46) de la torsió geodèsica prenen una forma una mica més simple si el triedre de Darboux es pren adaptat a coordenades principals, és a dir, e_1 i e_2 tangents en cada punt a les línies de curvatura.

En efecte, ja hem vist a la pàgina 226 que en aquest cas $p = q_1 = 0$, de manera que tenim

$$\begin{aligned} k\cos\bar{\omega} &= p_1 v'\sin w - q\,u'\cos w \\ \tau - \frac{d\,\bar{\omega}}{ds} &= -p_1 v'\cos w - qu'\sin w. \end{aligned}$$

Utilitzant les fórmules (9.42) de la pàgina 227, podem escriure aquestes equacions com

$$\begin{aligned} k\cos\bar{\omega} &= \frac{\eta_1}{R'}v'\sin w + \frac{\xi}{R}\,u'\cos w \\ \tau - \frac{d\,\bar{\omega}}{ds} &= -\frac{\eta_1}{R'}v'\cos w - \frac{\xi}{R}u'\sin w. \end{aligned}$$

Ara bé, com $\eta = \xi_1 = 0$ (pàgina 226), tenim

$$\begin{aligned} \cos w &= \langle \gamma', e_1\rangle = \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', e_1\rangle = u'\xi + v'\xi_1 = u'\xi, \\ \sin w &= \langle \gamma', e_2\rangle = \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', e_2\rangle = u'\eta + v'\eta_1 = v'\eta_1, \end{aligned}$$

i per tant,

$$\begin{aligned} k\cos\bar{\omega} &= \frac{\sin^2 w}{R'} + \frac{\cos^2 w}{R} \\ \tau - \frac{d\,\bar{\omega}}{ds} &= \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\sin w\cos w. \end{aligned} \tag{9.47}$$

Observem que la primera fórmula és la famosa fórmula d'Euler de la curvatura normal.

I la segona es pot escriure com

$$\tau_g = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}(k_n(w))$$

on τ_g és la torsió geodèsica i $k_n(\omega)$ la curvatura normal en la direcció que forma un angle ω amb la direcció principal. Exactament així escrita apareix a la pàgina 357 del Llibre V de les Leçons.

Genial integració de les equacions de Frenet a les *Leçons*

Aquest canvi de variables que ara explicarem apareix al vol I, pàgina 22, de les *Leçons sur la theorie generale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, [204].

El problema és integrar les equacions de Frenet, és a dir, trobar una corba amb curvatura i torsió donades.

Considerem les equacions diferencials

$$\frac{du}{ds} = kv, \quad \frac{dv}{ds} = -ku + \tau w, \quad \frac{dw}{ds} = -\tau v \tag{9.48}$$

amb $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$ funcions desconegudes i $k = k(s)$, $\tau = \tau(s)$ funcions donades.

Aquest sistema es compleix quan u, v, w són les primeres (resp. segones i terceres) coordenades del triedre de Frenet T, N, B.

Pel teorema d'existència i unicitat de solucions d'equacions diferencials sabem que tenim solució única tal que per a $s = 0$, sigui $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$. Anàlogament, tenim una única solució tal que per a $s = 0$, sigui $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 0$ i una altra única solució tal que per a $s = 0$, sigui $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$. Diguem a aquestes tres solucions (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2),(u_3, v_3, w_3).

Això vol dir que els vectors T, N, B que busquem són $T(s) = (u_1, u_2, u_3)$, $N(s) = (v_1, v_2, v_3)$, $T(s) = (w_1, w_2, w_3)$.

Es pot comprovar que aquests vectors així construïts formen una base ortonormal, per a tot s.

La corba buscada és

$$x = \int u_1 \, ds, \quad y = \int u_2 \, ds, \quad z = \int u_3 \, ds.$$

Falta veure com podem resoldre el sistema per trobar efectivament les u_i. Observem que, per ser base ortonormal[138],

$$u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Com que l'argument és el mateix per a cada índex escriurem només

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Introduïm les noves variables σ, ν per

$$\frac{u + iv}{1 - w} = \frac{1 + w}{u - iv} = \sigma,$$

[138] La matriu que té per columnes u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3; w_1, w_2, w_3 és ortogonal i per tant $AA^t = A^t A = id$.

$$\frac{u-iv}{1-w}=\frac{1+w}{u+iv}=-\frac{1}{\nu}.$$

Resolent per a u, v, w obtenim

$$u=\frac{1-\sigma\nu}{\sigma-\nu}, \quad v=i\frac{1+\sigma\nu}{\sigma-\nu}, \quad w=\frac{\sigma+\nu}{\sigma-\nu}.$$

Substituint a (9.48) veiem que tant σ com ν són solucions de l'equació de Ricatti

$$y'=\frac{\tau i}{2}+kiy-\frac{\tau i}{2}y^2$$

amb $y=y(s)$ i $y'=dy/ds$.

De fet, utilitzant només la primera i tercera equacions de Frenet tenim,

$$\frac{du}{ds}=\frac{\sigma'(\nu^2-1)-\nu'(\sigma^2-1)}{(\sigma-\nu)^2}=ki\frac{1+\sigma\nu}{\sigma-\nu}$$
$$\frac{dw}{ds}=\frac{-2\sigma'\nu+2\sigma\nu'}{(\sigma-\nu)^2}=-\tau i\frac{1+\sigma\nu}{\sigma-\nu}.$$

Equivalentment, tenim el sistema de dues equacions i dues incògnites (σ', ν')

$$\begin{aligned}\sigma'(\nu^2-1)-\nu'(\sigma^2-1) &= ki(1+\sigma\nu)(\sigma-\nu)\\ -2\sigma'\nu+2\sigma\nu' &= -\tau i1+\sigma\nu)(\sigma-\nu)\end{aligned}$$

que resolent per Cramer ens dóna

$$\begin{aligned}\sigma' &= -\frac{\tau i}{2}-ki\sigma+\frac{\tau i}{2}\sigma^2.\\ \nu' &= -\frac{\tau i}{2}-ki\nu+\frac{\tau i}{2}\nu^2.\end{aligned}$$

És a dir, com havíem comentat, σ i ν són solucions de la mateixa equació de Ricatti. Observem que no hem utilitzat la segona equació de Frenet.

Un cop resolta (no sé com) l'equació de Ricatti tenim σ i ν i, per tant, u, v, w.

Recordem que si coneixem una solució d'una equació de Ricatti, podem trobar una altra solució amb dues quadratures; si en coneixem dues, podem trobar una altra solució amb una quadratura; i si en coneixem tres podem trobar la quarta sense cap quadratura: imposant que la raó doble de les quatre solucions sigui constant, ja que les solucions d'una Ricatti tenen aquest propietat de raó doble constant.

9.15 Sophus Lie (1842-1899)

Figura 9.18: *Sophus Lie.*

Neix[139] a Nordfjordeid, Noruega. Estudia a la Universitat de Christiania (avui Oslo). El 1862 rep un curs sobre Teoria de Galois impartit per Sylow que sembla que el va influir molt. El 1868 estudia els treballs de Poncelet i Plücker. El 1869 publica el seu primer treball *Representation der Imaginären der Plangeometrie*, [391]. El 1870 fa una estada a Berlin, on fa amistat amb Klein, i junts van a París on coneix Jordan i Darboux.

El juliol de 1870 descobreix la relació entre les línies asimptòtiques d'una superfície i les línies de curvatura d'una altra. Klein, que estava a l'habitació del costat diu (vegeu Helgason, [318], o el propi Klein a [341], I, p.97):

> " [...] one morning I got up early and wanted to go out right away when Lie, who still lay in bed called me into his room. He explained to me the relationship he had found during the night between the asymptotic curves of one surface and the lines of curvature of another, but in such away that I could not understand a word. In any case he assured me that this meant that the asymptotic curves of the fourth degree Kummer surface must be algebraic curves of degree sixteen."

Lie va publicar de seguida aquest resultat amb el títol *Sur une transformation géométrique* a [392]. La transformació que descobreix Lie, inspirat per Plüker, és entre rectes i esferes, de manera que pot transformar una família de rectes en una família d'esferes. Però ha de passar objectes sobre els reals a objectes sobre els complexos. Es coneix com la *transformació recta-esfera de Lie.*

[139] En aquestes notes donem només una idea dels treballs d'aquest gran matemàtic. Hem seleccionat els que estan més relacionats amb corbes i superfícies. Per aprofundir en la vida i obra de Sophus Lie recomanem [551]. La seva immensa obra està recollida a les seves obres completes [406].

Com diu Darboux a [209], "en aquest curiós mètode de transformació cada propietat de les línies asimptòtiques d'una superfície correspon una propietat relativa a les línies de curvatura".

Helgason a [318] és més precís i diu " Al conjunt de tangents a una superfície donada S associem com abans el conjunt d'esferes tangents a una altra superfície S'. Al subconjunt de rectes tangents a S en un punt M correspon el conjunt d'esferes tangents a S' en un punt M'. Si llavors M es mou sobre una línia asimptòtica de S, M' es mou sobre una línia de curvatura de S'".

Aquesta nota [392] comença així:

> " Dans cette Note, je donnerai d'abord une méthode de transformation qui permet de déduire de théorèmes relatifs à des droites des théorèmes concernant des sphères ou plus généralement des surfaces du second degré qui contiennent une conique fixe. Cette méthode permet, quand les lignes asymptotiques d'une surface sont connues, d'en déduire les lignes de courbure d'une autre surface et inversement."

Això va ser l'inici de diversos treballs conjunts amb Felix Kein, principalment les dues notes als *Comptes Rendus*, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, el mateix 1870, [407]. Diuen:

> [...]"Notre Note se composera de deux parties. Dans la première partie nous définirons les courbes et les surfaces dont nous voulons parler; dans la seconde, nous donneros l'explication et la démonstration de notre théorème.
>
> 1. Les corbes que nous allons considérer sont celles qui se transforment en elles-mêmes par une infinité de transformations linéaires, permettant d'amener en général chaque point de la courbe en chaque autre."

La primera nota acaba amb l'enunciat del teorema: *Si l'on transforme des courbes V ou des surfaces V par une correspondance appartenant au tétraèdre donné, on obtient des courbes V ou des surfaces V du mème système.* La definició de corbes i superfícies V és delicada[140], però inclouen paràboles,

[140] El primer cop que la vaig llegir vaig pensar el mateix que Klein: "I could not understand a word".

espirals logarítmiques, hèlixs, transformades lineals de loxodromes esfèriques, helicoides, les superfícies $x^m y^n z^p = const.$ considerades per Serret a [530], etc.

Klein i Lie També van col·laborar a [408], [409].

Desprès de la seva estada a París, i quan es dirigia a Milan a veure a Luigi Cremona, va ser arrestat a Fontainebleau en ser confós per un espia alemany, i va poder sortir de presó gràcies a Darboux. La seva tesi, *Über eine Classe geometrischer Transformationen*, va ser llegida el 1871 a Christiania.

El 1872 desenvolupa detalladament la seva transformació entre rectes i esferes a [393].

El 1877 publica un primer article sobre superfícies minimals, *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal Flächen I*, [394], i el 1878 un article en tres parts *Sätze über Minimalflächen*, [395], [396], [397]. Darboux, a [209], diu que aquests articles de Lie són els seus preferits.

Curiosament en el seu estudi de les superfícies minimals no segueix les idees de Weirstrass, de 1866, sinó les més clàssiques de Monge. Estudia el problema de determinar totes les superfícies algebraiques minimals inscrites en una superfície algebraica desenvolupable donada.

L'any següent es preocupa de classificar les superfícies segons el grup de transformacions de les seves geodèsiques a *Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven*, [399].

El 1879 continua amb les minimals a *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* [398] i entre 1879 i 1881 publica 5 articles sobre superfícies de curvatura constant, tots amb el mateix nom: *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung*, [400].

Com es veu, Lie es preocupa dels problemes propis de la geometria diferencial de l'època. Un dels més importants, com hem comentat, és l'estudi de certes d'aplicacions entre superfícies. Per exemple, Dini i Beltrami havien estudiats transformacions entre superfícies que porten geodèsiques a geodèsiques. Lie, en un llarg article de 1882, de quasi cent pàgines, *Untersuchungen über geodätische Kurven*, [403], ataca aquest problema. Comença comentant que aquest problemes han estat tractats per Beltrami a [29] i Dini a [224]. A la pàgina 424, comentant els treballs de Dini, apareix el resultat que Struik comenta a la seva nota **295**, pàgina 266. L'enunciat exacta és el següent (vegeu el peu de pàgina 236, pàgina 266):

> " Satz 21. Sollen zwei Flächen sich in solcher Weise geodätisch auf einander lassen, dass die eine und nur die eine Schaar von Minimalcurven der einen Fläche einer Minimalcurvenschaar auf der

zweiten Fläche entspricht, so kann das Bogenelement der ersten Flächen die Form

$$ds^2 = (y + X(x))dx\,dy$$

und gleichzeitig das Bogenelement der zweiten Fläche die Form

$$ds_1^2 = \frac{1}{2}x^{-4}(y + X)^2dx^2 - x^{-3}(y + X)dx\,dy$$

erhalten."

El 1880 es preocupa de les superfícies de Weingarten a *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation*, [401]. Potser aquesta idea, tenir radis de curvatura relacionats, l'indueix a estudiar corbes on hi hagi una relació entre diversos dels seus elements. Concretament classifica les corbes en les que hi ha una relació entre el radi de curvatura i el radi de torsió, a *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind*, [402].

El 1882 reuneix geodèsiques i minimals a [404].

El 1884 encara es preocupa de les geodèsiques a *Über die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreis einer Fläche*, [405].

La seva gran obra *Theorie der Transformationsgruppen*, on apareixen els avui coneguts *grups de Lie*, i que no comentarem en aquestes notes, va ser publicada a Leipzig entre 1888 i 1893. La motivació, segons ell mateix, és saber com pot ajudar a la integració d'una equació diferencial el coneixement d'un grup d'estabilitat de la mateixa.

El 1886 va a Leiptzig com substitut de Klein i treballa intensament fins caure malalt (depressió nerviosa) el 1889. El 1898 torna a Kristiania on mort el 1899.

9.16 Albert Ribaucour (1845-1893)

Neix a Lille. Entra com alumne a l'École Polytechnique el 1865. Va treballar com enginyer a diversos llocs, fins i tot a Algeria on va morir. Només va abandonar aquesta professió de desembre del 1873 a febrer de 1874 per ser professor a l'École Polytechnique, reemplaçant Laguerre.[141]

[141] Edmond Laguerre (1834-1886). Neix a Bar-le-Duc. Entra a l'École Polytechnique el 1852. Es dedica a l'exèrcit uns deu anys però torna a l'École entre 1864 i 1874, passant

Ja el 1868 publica una nota molt bonica titulada *Sur le rayon de courbure des coniques*, [492], on redemostra pels seus mètodes resultats coneguts, com per exemple la fórmula de Petit que diu, amb la seva notació,

$$\frac{2}{R\cos i} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

on R és el radi de curvatura de la cònica en un punt A, ρ i ρ' són els radis vectors en A (distàncies de A als focus) i i és l'angle d'un d'aquest radis vectors amb la normal a la cònica en A.

El mateix any reclama prioritat sobre Darboux per un resultat sobre superfícies ortogonals. Diu a *Sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères*, [494]: "J'étais arrivé de mon côté au même resultat avant que M. Darboux eût publié son travail."

Sembla que el motiu principal de la disputa és la paternitat sobre els sistemes cíclics. No obstant , a les *Leçons* Darboux cita molts cops Ribaucour, sempre en relació a sistemes triplement ortogonals, i els sistemes cíclics. Per exemple a la pàgina 433 del volum II diu:

> "[...] mais, il est just de remaquer, les propositions géométriques sur lesquelles s'appuyait M. Bianchi étaint virtuelment connues et avaient été énoncées en 1870 sous une autre forme par M. Ribaucour."

Bernard Rouxel[142] a *L'oeuvre Mathématique d'Albert Ribaucour*, [518], explica que les relacions entre aquests dos geòmetres varen començar molt bé. El

posteriorment al College de France. Va publicar més de 140 articles. Nosaltres només hem citat [354], [353], i [355], a les pàgines 92, 158, i 242. També destaquem *Sur une propriété relative aux courbes tracées sur une surface quelconque*, [358], *Sur quelques propriétés des courbes algébriques et la détermination des rayons de courbure des sections planes des surfaces annallagmatiques*, [356], *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces*, [359], i *Sur une formule relative aux courbes trcées sur les surfaces du second ordre*, [357], on retroba el resultat de Joachimstal que diu que al llarg d'una geodèsica d'una quàdrica el radi de curvatura de la corba és proporcional al cub de la normal (segment de la recta normal entre el punt i un dels plans de simetria) i el de Dupin que diu que al llarg d'una línia de curvatura d'una quàdrica el radi de curvatura de la direcció normal en la direcció de la corba és proporcional al cub de la normal.

[142]En els abstracts del Col·loqui Internacional "Béjaïa et sa région à travers les âges: Histoire, Société, Sciences, Culture" de 1997, apareix la ressenya d'un article de Bernard Rouxel i Djamil Aïsani, que parla del conflicte entre Ribaucour i Darboux, però no he pogut trobar l'article.

1882 Ribaucour escriu a Darboux i diu: "C'est M. Lie le premier qui m'a parlé du gran éloge que vous faisiez de moi". I quan van aparèixer les *Leçons*, el 1887, diu: "j'ai constaté que vous m'aviez fort bien traité et que vous vous préparer à me remettre en scène à propos des systèmes cycliques".

En canvi, en una carta a Cosserat, de 1891, diu: "conséquence grave de tout ceci Darboux n'avait pas le droit d'écrire le théorème suivant [...]".

Aquesta picabaralla va ser coneguda entre els geòmetres de l'època. Per exemple, el 29 de desembre de 1893 Weingarten escriu a Bianchi i diu: "Dass Ribaucour mit Darboux verfeindet war, wusste ich nicht, und würde mich Näheres sehr interessiren".[143]

Estudia corbes "anallagmatiques", nom que atribueix a Moutard, a *Sur les courbes enveloppes de cercles, et sur les surfaces enveloppes de sphères*, [493]. Si prenem cada punt d'un arc de corba com centre de cercles ortogonals a un cercle donat, la corba anal·lagmàtica[144] és l'envolvent d'aquesta família de cercles. Cada paràgraf d'aquest article és una afirmació sense demostració: i hi ha molts paràgrafs.

El 1869 publica *Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre*, [496], on demostra, entre altres, el resultat següent:

> Siguin (A) i (A') dues superfícies aplicables l'una sobre l'altra. Unim els punts corresponents A i A' i portem a partir del punt mig M de AA', d'una i altra part, les longituds MB i MB' iguals a K vegades AM; les superfícies (B) i (B'), lloc geomètric dels punts B i B' respectivament, són també aplicables l'una sobre l'altre.

A *Sur les surfaces orthogonales*, [498], del mateix any, considera una família d'esferes amb centre una superfície donada i posa condicions (una equació en derivades parcials) per tal de que les rectes formades pels dos punts de contacte de cada esfera amb l'envolvent de la família d'esferes puguin ser les rectes normals a una superfície.

A *Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan*, [497], estudia entre altres coses el *centre de gravetat de curvatura* d'un arc de corba que defineix com el centre de gravetat d'un arc carregat en cadascun

[143] *Que Ribaucour estava enemistat amb Darboux, no ho sabia, i m'interessaria molt (saber-ne) més detalls. ([52], p. 262).*

[144] DIEC: adj. [MT] En mat., que no canvia de forma per inversió.

dels seus punts d'una massa proporcional a l'angle de contingència corresponent. L'angle de contingència d'un arc de corba AB en un punt X d'aquest arc és l'angle entre la corda AX i la tangent a la corba en X. No obstant, aquest concepte ja l'havia utilitzat el 1868 a [493] per a corbes particulars relacionades amb les anal·lagmàtiques.

I encara el 1869 publica *Sur la déformation des surfaces*, [495], continuació de [496].

I el 1870 publica encara un tercer article amb el mateix nom, [499], en el que defineix per primer cop els *sistemes cíclics*: sistemes triplement ortogonals tals que una de les famílies té per trajectòries cercles. Diu així:

> "Des courbes sont tracées dans les plans tangents d'une surface (A)[145]. Si elles sont normales a une famille de surfaces, elles jouissent toujours de cette propriété, quelle que soit la forme de (A). Suposons que ces courbes soient des cercles. J'ai énnoncé à la Société Philomathique cet autre théorème:
>
> Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.
>
> Il en resulte une classe de systèmes triples orthogonaux que je proposerai d'appeler *systèmes cycliques*, intimement liée a la déformation des surfaces.

El 1870 publica, en el mateix número del *Bulletin de la Société Philomatique* tres notes amb el títol *Sur la théorie des surfaces*, [500].

El primer comença parlant de l'abat Aoust. Concretament del resultat que diu que si les línies de curvatura d'una superfície són cercles la recerca de les segones línies de curvatura es redueix a la recerca de trajectòries ortogonals d'una serie de cercles traçats sobre un pla. I demostra llavors que si té una solució d'aquest segon problema en pot trobar una infinitat més. El resultat final és que si una superfície és tal que les línies de curvatura són cercles geodèsics llavors aquesta superfície és l'envolvent d'una família d'esferes que passen per dos punts fixos.

El segon està motivat pel treball previ de Laguerre *Sur quelques propriétés générales des courbes algébriques*, [353], i els resultats que obté (en aquesta nota només els enuncia, no hi ha càlculs) responen la pregunta de quines relacions compleixen els elements geomètrics d'una corba quan aquesta corba

[145]És habitual denotar A un punt de la superfície (A).

està situada sobre una quàdrica. A la tercera introdueix el que ell anomena *coordenades tangencials*, que consisteix essencialment en utilitzar la funció suport. Concretament agafa la funció suport p (distància de l'origen al pla tangent) i les coordenades esfèriques u, v del punt on la perpendicular al pla tangent talla l'esfera unitat.

A continuació es planteja el *problema de la representació esfèrica*, és a dir, trobar superfícies tals que la imatge esfèrica (i.e. per l'aplicació de Gauss) de les seves línies de curvatura siguin línies predeterminades ortogonals de l'esfera, és a dir, tals que

$$ds^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2.$$

Diu, sense demostrar-ho, que cal integrar

$$\frac{d^2 p}{du\, dv} = \frac{dp}{du}\frac{1}{f}\frac{df}{dv} + \frac{dp}{dv}\frac{1}{g}\frac{dg}{du}.$$

Diu que aquesta equació ja s'estudia en el seu treball [494], reproduït posteriorment per Darboux a [187].

El 1872 publica *Note sur les développées des surfaces*, [501], *Sur la théorie des lignes de courbure*, [503], i *Sur la répresentation sphérique des surfaces*, [502], on estudia la condició de Cayley (es refereix a [128]) perquè una superfície pertanyi a un sistema triplement ortogonal. Diu que el seu mètode, amb coordenades imaginàries, és millor.

De 1873 és l'article *Sur les faisceaux de cercles*, [504].

A *Propriétés de courbes tracées sur les surfaces*, [506], de 1875, estudia les corbes D, de les que hem parlat a la pàgina 213.

El 1877 rep el premi Dalmont de l'Académie des Sciences de Paris i el 1880 un premi de L'Académie Royale de Belgique pel seu estudi dels élassoïdes, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*,[508], en resposta al repte de l'Acadèmia

> Trouver et discuter les équations de quelques surfaces algébriques a courbure moyenne nulle.

En aquest extens treball de 221 pàgines apareix la que avui es coneix com *corba de Ribaucour* (pàgina 138), en relació a l'estudi de les superfícies minimals, que ell prefereix anomenar élassoïdes. Aquesta corba ja havia estat estudiada per Bonnet (1844) i altres. Diu Ribaucour

> Cherchons les courbes planes (O) pour lesquelles le rayon de courbure R0 est égal au produit de la normale comptée jusqu'à la rencontre d'une droite DD', par un coefficient n arbitraire, mais constant. Bien que le problème soit resolut dans tous les traités, il convient pour notre objet d'en donner une solution fort simple et qui a l'avantage d'introduire à nouveau des courbes intéressantes, rencontrées précédemment.

Així doncs, aquesta corba està caracteritzada pel fet de que existeix una recta r i una constant μ tal que els punts $\gamma(t) + \mu\rho(t)N(t)$ pertanyen a r per tot t. Equivalentment, els radis de curvatura són proporcionals a la subnormal. Si pensem $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametritzada per l'arc i r l'eix de les $x's$ és fàcil veure que es compleix l'equació diferencial $1 + y'^2 + \lambda yy'' = 0$, amb λ constant. Està associada a problemes variacionals.

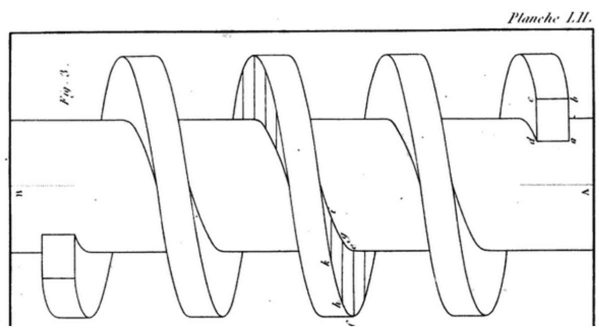
Sobre el nom d'*élassoide* diu

> "Il faut commencer par s'entendre au sujet des locutions employées dans ce mémoire. Il n'est pas commode d'employer constamment l'expression de surface à courbure moyenne nulle ni même celle de surface minima, que les Allemands ont adoptée, sous le vocable de ≪Minimälfläche≫. D'ailleurs ce terme est impropre, en général, l'aire de la surface n'étant pas, le plus souvent, un minimum absolu. Nous emploierons le mot Élassoïde formé des deux mots grecs $\epsilon\lambda\alpha\sigma\sigma\omega\nu$ (comparatif de $\mu i\xi\rho o\zeta$) et de $\epsilon i\delta o\zeta$ (apparence). La substitution de l'o à l'é est consacrée par l'usage. Nous dirons donc, conformément à l'avis de Terquem, un élassoïde. Cette locution nous paraît réunir les deux avantages d'être régulièrement établie et surtout d'être brève."

A la introducció fa un repàs dels resultats sobre superfícies minimals que considero útil resumir.

- Els primers exemples de superfícies minimals són de Meusnier. Va estudiar les de revolució, anomenades *alysséïdes* per Bour. I la superfície "de vis à filet quarré".[146]

[146] Vallée a [559], pàgina 260, dóna la definició següent: Sigui *abcd* un rectangle amb el costat *ad* sobre un cilindre i tal que el pla *abcd* passa per l'eix del cilindre. Suposem que aquest rectangle es mou mantenint les dues condicions que acabem de donar i de manera que el punt *a* descrigui una hèlix sobre el cilindre donat. Aquest cilindre i el sòlid generat pel rectangle conformen el que s'anomena "vis à filet carré" (rosca quadrada).



Vis à filet quarré. Detall de la planxa LII de Vallée, [559].

- Catalan veu que únicament superfície de "vis à filet quarré" és a la vegada guerxa i d'àrea mínima.

- Bonnet demostra que l'aplicació de Gauss d'una superfície d'àrea mínima és conforme. Que les línies de curvatura i les asimptòtiques són isomètriques. Dóna exemples de superfícies aplicables tals que les línies de curvatura d'una d'elles s'apliquen sobre les línies asimptòtiques de l'altre. Estudia també les superfícies d'àrea mínima amb les línies de curvatura planes.

- Catalan dóna exemples superfícies d'àrea mínima destacant una que admet una doble generació per paràboles i cicloides.

- Serret observa que algunes superfícies desenvolupables imaginàries s'han de considerar com superfícies d'àrea mínima.

- Bour veu que una superfícies d'àrea mínima es pot deformar sense perdre el seu caràcter de mínima. I que n'hi ha infinites que es poden aplicar sobre una superfície de revolució.

- S'atribueix a Björling el mèrit d'haver establert que si al llarg d'un contorn es fixen els plans tangents existeix una única superfície d'àrea mínima amb aquest contorn, resultat utilitzat per Bonnet i Catalan.

- Schwartz es proposa trobar superfícies d'àrea mínima que admeten una geodèsica plana donada. Henneberg demostra que si la geodèsica és algebraica la superfície també.

- Weirstrass dóna, finalment, un mètode per trobar totes les superfícies mínimes.

- Sophus Lie demostra que les superfícies de curvatura mitjana nul·la són de dues maneres superfícies motllures.[147]

El 1879 reprèn l'estudi de les corbes envolvents de cercles, que havia iniciat el 1868 a [493], publicant sis notes als volums 5 i 6 de *Nouvelle correspondance mathématique*[148], [507]. Diu: "Ce Mémoire, écrit en 1868, a reçu, depuis, des développements trés-considérables, tellment que le but primitif: *étude des enveloppes de sphères*, a été oublié".

El 1891 va aparèixer un extens article *Mémoire de la théorie générale des surfaces courbes*, [509], en dues parts, on recull moltes de les seves idees sobre el tema, escrit el 1871 a Draguignan.

Del mateix any 1891 són dues breus notes als Comptes Rendus, una continuació de l'altre, titulades *Sur les systèmes cycliques*, [510], en les quals no hi ha gairebé cap fórmula. Diu que com és un tema que s'ha posat de moda convé recordar una nota presentada a l'Acadèmia a la sessió del 14 de febrer de 1890 on ell ja defineix sistema cíclic com el format per totes les circumferències ortogonals a una superfície donada. Però aquesta sessió de 14 de febrer no existeix, només he trobat l'entrada "M. Ribaucour adresse un Mémoire de Géométrie contenant la démonstration d'un gran nombre de théorèmes dont il avait depuis longtemps fait connaître les énoncés", Comptes Rendus, 1890, p. 640, que correspon a la sessió de 24 de mars de 1890. Segur que hi ha una errada en les dates i es referix a la sessió del 14 de febrer de 1870, on va presentar l'article [499] que hem comentat abans.

Torna a parlar de sistemes cíclics el 1873 a *Sur les systèmes cycliques*, [505], on comença dient que un resultat recent de Darboux (13 de gener de 1873, vegeu [192]) sobre sistemes cíclics l'ha portat a tornar sobre el tema.

Es conserva molta correspondència seva a les biblioteques de l'École Polytechnique, de l'Institut i de la Universitat de Liège, que permet seguir amb precisió les seves contribucions matemàtiques durant la seva estada a Algèria.

El 27 de maig de 1893, any de la seva mort escriu a Bianchi, que l'havia invitat, i diu: "Je suis arrivé à Grenoble avant-hier, claquant de *fièvre Algériene* et en fort mauvais état" ([52], p.144). Va morir el 13 de setembre.

[147] Nom introduït per Monge per referir-se a les superfícies generades per una corba plana quan el pla que la conté gira sense lliscar sobre una superfície desenvolupable. Pirondini em dóna una altre caracterització a *Quelques propriétés des surfaces moulures*,[473].

[148] `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PID=PPN598948236`

9.17 Ulisse Dini (1845-1918)

Figura 9.19: *Ulisse Dini.*

Neix a Pisa. Va estudiar a la Scuola Normale Superiore de Pisa, dirigida per E. Betti. El 1865 va a París a estudiar amb Bertrand i Hermite. El 1866 obté una plaça a la Universitat de Pisa. Es dedica a la política i és elegit al Consell de Pisa el 1871, i al Parlament Italià el 1880. Aquest mateix any és elegit rector de la Universitat de Pisa. En relació a la teoria de superfícies va publicar diversos treballs fruit de la seva estada a París. Per exemple, a *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un'altra*, [224], estudia aquest antic problema relacionat amb la geodèsia i proposat per Gauss molts anys abans.

Es pregunta si existeixen superfícies amb un sistema isotermal d'ell·lipses i hipèrboles geodèsiques, és a dir, coordenades ortogonals tals que les línies coordenades són geodèsiques i a més el·lipses i hipèrboles (en el sentit de que la suma o diferència de les distàncies geodèsiques a dos punts donats és constant, vegeu [244], p. 213). Veu que això és equivalent a que existeixin coordenades u, v on la mètrica és

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$$

amb $U = U(u)$ i $V = V(v)$, és a dir, si i només es tracta d'una superfície de Liouville.

Va estudiar superfícies en les que un dels radis de curvatura és funció de l'altre a [221]. A [222] estudia les superfícies de curvatura mitjana constant, i a [223] estudia superfícies de curvatura constant negativa i les aplicables sobre les superfícies d'àrea mínima. De fet, més que un estudi és una breu enumeració de resultats (l'article té una pàgina i mitja) que ell diu haver obtingut. Per exemple, diu que les superfícies aplicables sobre superfícies d'àrea mínima són les *développées* de les de curvatura constant negativa i les superfícies amb element lineal del tipus

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

També diu que els helicoides desenvolupables són els únics que tenen la propietat de que les superfícies formades per les seves normals seguint cadascuna de les hèlixs són aplicables sobre el mateix helicoide.

9.18 Luigi Bianchi (1856-1928)

Neix a Parma.[149] Entra a la Scuola Normale Superiore de Pisa el 1873 on estudia amb Betti i Dini. A la seva tesi estudia el problema de l'aplicabilitat de superfícies. CITAR-LA. Va estudiar també a Göttingen amb Felix Klein. El 1881 esdevé professor de la Scuola Normale Superiore de Pisa. Estudia varietats de Riemann que admeten un grup continu de transformacions. Els seus treballs foren utilitzats per Einstein a la seva teoria de la relativitat.

Figura 9.20: *Luigi Bianchi.*

BUSCAR In 1879 appeared a paper on the centro-surface of a helicoid in the Giornale di Matematiche

Struik, a [548], diu:[150]

> "La molt productiva carrera de Bianchi comença amb l'aplicabilitat de superfícies (1878) tema al que ràpidament succeeixen articles sobre superfícies de curvatura constant, superfícies ortogonals, superfícies de Weingarten, superfícies minimals i congruències. Bianchi també s'interessa per la geometria no euclidiana, a partir de les idees de Beltrami; les superfícies de curvatura zero en aquesta geometria el van interessar especialment. [...] La principal fama de Darboux i Bianchi prové dels seus bonics llibres, en els quals ells combinen els seus propis resultats amb els dels seus predecessors. Les *Lezioni di geometria differenziale* de Bianchi (I893), una edició feta a partir de les notes autògrafes publicades el 1886, és un tractat sistemàtic de la teoria de corbes

[149]Dades extretes de `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bianchi.html`
[150]Traducció lliure.

> i superfícies, amb especial atenció a geometries de més dimensions."

Va escriure nombrosos llibres de text sobre geometria, anàlisi i àlgebra. Va ser editor de *Annali di Matematica pura ed applicata*. I senador del regne d'Italia el 1924.

El 1890 va publicar *Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali*, [50], que és el treball de què li parla a Darboux en la seva carta de 31 de Maig de 1890 ([52], XI, p. 14). En aquesta carta llença una velada crítica a Darboux, ja que aquest havia presentat a l'Acadèmia el treball de Guichard[151] *Sur les surfaces qui possèdent un résseau de géodésiques conjuguées*, [312] (Bianchi alaba també un altre treball de Guichard, [311]) i li diu que sembla que ni ell ni Guichard coneixen el treball de Voss [567] on aquest troba, a partir de les superfícies de curvatura constant, superfícies que admeten una xarxa de geodèsiques conjugades. I encara els hi retreu que les fórmules per a la representació esfèrica de línies asimptòtiques havien estat ja donades per Dini a [225].

El 1897 apareix el seu treball més conegut: *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, [51].

[151]Claude Guichard (1861-1924). De Rennes. Entra a l'École Normale el 1880 on és alumne de Darboux. La seva tesi és sobre funcions analítiques. El 1884 és professor a Nancy, passant desprès per Rennes i Clermont-Ferrad. El 1899 publica dos teoremes sobre quàdriques de revolució que marquen una nova època en l'estudi de la deformació de superfícies. És molt conegut el seu *Traité de Géométrie*, [313], del que se n'han fet múltiples edicions. Professor a la Sorbonne a partir de 1910. Estudia també els sistemes triplement ortogonals.

Apèndix A

Les notes històriques de Struik

Reproduïm, traduïdes lliurament al català, les notes històriques que apareixen al llibre de Dirk Struik *Lectures on Classical Differential Geometry*[152]. La numeració de les pàgines on van apareixen aquestes notes, que ara reproduïm tot seguit, corresponen a les pàgines de l' edició en castellà de l'editorial *Aguilar* de 1970, [550]. Els peus de pàgina són meus.

p.22. El nom de *torsió* es deu a L. L. VALLÉE: *Traité de géométrie descriptive*, p. 295 de l'edició de 1825[153]. Abans se'n deia *flexió*. El nom de *binormal* es deu a B. DE SAINT VENANT: *Journal École Polytechnique*, **18**, 1845, p.17[154].

p.23. [Les fórmules de Frenet] foren obtingudes a la tesi doctoral de F. FRENET, 1847, Toulouse, de la qual se'n va publicar un resum a *Journal de Mathém.,* **17**, 1852, pp. 437-47, amb el títol *Sur les courbes à double courbure*[155]. El treball de J. A. SERRET va aparèixer en el *Journal de Mathém.,* **16**, 1851, pp. 193-207[156], i, malgrat que fou publicat després de la tesi de FRENET, aquest no havia donat major difusió als seus resultats.

[152] He mantingut la grafia de majúscules per als noms propis que usa Struik.
[153] Vegeu [559].
[154] Vegeu [521]. Vegeu la nota **61** de Struik, pàgina 255.
[155] Vegeu [286].
[156] Vegeu [533].

p.31. El resultat expressat per l'equació[157]

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} + R\mathbf{n} + TR'\mathbf{b}$$

és degut a MONGE (1807); vegeu les seves *Applications*, (1850) p. 412. La notació de MONGE és completament diferent.

p.32. Aquesta representació[158] de la corba mitjançant k (o R) i s ja fou utilitzada per EULER en casos especials: *Comment. Acad. Pretopolit.* **8**, 1736, pp. 66-85[159], es poden posar objeccions a aquesta elecció de k i s com a coordenades naturals, ja que s conté una constant arbitrària i k presenta l'ambigüitat del signe. G. SCHEFFERS ha desenvolupat un sistema d'equacions intrínseques per a una corba plana en el que expressa $d(k^2)/d\varphi$ en funció de k^2. Vegeu *Anwendung I*, pp. 84-91[160].

p.38. Per a més detalls sobre les equacions intrínseques[161] vegeu E. CESARO: *Lezioni di geometria intrinseca*, Nàpols, 1896[162]. Hi ha la traducció alemanya de G. KOWALEWSKI, amb el títol *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig, 1901, p. 341. Vegeu també L. BRAUDE: *Les coordonnées intrinsèques*, colec. *Scientia*, París, 1914, 100 pàgines. Altres formes d'equacions naturals de corbes de l'espai es poden consultar a G. SCHEFFERS: *Anwendung I*, pp. 278-87[163], on està demostrat el teorema fonamental per a $(dk/ds)^2 = f(k^2)$, $\tau = f(k^2)$.

p.42. Aquest cas[164] ha estat estudiat per W. BLASCHKE: *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **19**, 1908, pp. 188-204; vegeu també la seva *Differentialgeometrie*, p. 41[165].

---

[157] Equació dels centres de les esferes osculatrius.

[158] El coneixement de la curvatura en funció del paràmetre arc, determina la corba, llevat de moviments rígids.

[159] Es refereix a [266].

[160] Vegeu [524]. Probablement Struik es refereix a la tercera edició, de 1923, ja que a la primera edició, la única que he pogut consultar, no apareixen pas les equacions intrínseques de que parla Struik. En canvi Struik va fer una ressenya de la tercera edició.

[161] Ara, a diferència del punt anterior, es refereix a corbes de l'espai.

[162] Vegeu [129].

[163] Vegeu [524].

[164] *Les hèlixs esfèriques es projecten sobre un pla normal al seu eix en un arc d'epicicloide.* BLASCHKE n'estudia un cas particular.

[165] Vegeu [53] i [54] respectivament.

p.48. La teoria d'evolutes a l'espai es deu a MONGE (1771); el treball, publicat el 1785, va ser reproduït a les *Applications*. Estudis posteriors foren publicats per LANCRET[166] a *Mémoires présentées à l'Institut*, París **1**, 1805, i **2**, 1811. Lancret va discutir les *evolutoides* d'una corba o corbes tals que les seves tangents tallen la corba donada sota un angle constant no recte.

p.52. Les rectes isòtropes foren introduïdes per V. PONCELET a *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822[167]. També s'anomenen *corbes mínimes* o *corbes nul·les*.

p.57. Aquest teorema[168] és de S. MUKHOPADHYAYA: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 1909; *Coll. geom. papers I*, pp. 13-20. En aquest treball un *punt cíclic* es defineix com aquell tal que el seu cercle de curvatura passa per quatre punts consecutius; un punt *sextàctic*, quan passa per sis punts consecutius, etc. El teorema fou redescobert per A. KNESER: *H. Weber Festschrift*, 1912, pp. 170-80[169]; des de llavors s'han han donat diverses demostracions; per exemple, vegeu W. BLASCHKE: *Differentialgeometrie*, p. 31[170]; vegeu també S. B. JACKSON: *Bull. Amer. Math. Soc.* **50**, 1944, pp. 564-78; P. SCHERK: *Proc. First Canadian Math. Congress*, 1945, pp. 97-102.

p.59. Les corbes d'amplada constant foren introduïdes per L. EULER: *De curvis triangularibus*, *Acta Acad. Petropol.* 1778 (1780) II, pp. 3-30[171], que les va anomenar *corbes orbiformes*, i va designar com *corba triangular* a la corba ABC de la figura 1-42. E. BARBIER: *Journal de Mathém.* (2) **5**, 1860, pp. 273-86[172], va relacionar la teoria d'aquestes corbes amb el problema de l'agulla del càlcul de probabilitats. (Vegeu també C. JORDAN i R. FIEDLER: *Contribution à l'étude des courbes convexes fermées*, 1912).

[166] Les obres a que es refereix Struik són [372] i [373].
[167] Vegeu [479].
[168] El teorema dels quatre vèrtexs.
[169] Vegeu [343].
[170] Vegeu [54].
[171] Vegeu [276].
[172] Vegeu [21]. El teorema de Barbier diu que una corba d'amplada constant Δ té longitud $\pi\Delta$.

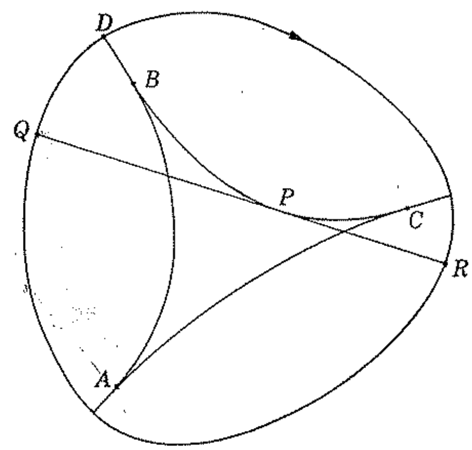


FIG. 1-42.

Les equacions[173] [13-2] foren introduïdes per primer cop per A. P. MELLISH: *Annals of mathem.,* **32**, 1931, pp. 181-90[174]. Per a més informació sobre la geometria diferencial global, vegeu W. BLASCHKE: *Differentialgeometrie* i *Einführung*[175]; vegeu també D. J. STRUIK: *Bulletin Amer. Matem. Soc.*, **37**, 1931, pp. 49-62[176].

p.61. **Monge**. Hem tingut ja oportunitat de mencionar algunes de les contribucions d'aquest matemàtic, que, juntament amb Gauss, es pot considerar com el fundador de la geometria diferencial de corbes i superfícies. GASPARD MONGE (1746-1818) va iniciar la seva carrera com a professor a l'Acadèmia Militar de Mézières (Meuse, France) on va desenvolupar la geometria descriptiva actual. Durant la revolució fou un actiu jacobí i va ocupar llocs dirigents polítics i científics; era cap del Govern el dia de l'execució del rei, per la qual cosa va atraure sobre seu el ressentiment del monàrquics, que el varen considerar el principal regicida. Desprès de 1795 va passar a ser l'organitzador de l'Escola Politècnica de París, prototip de tots els instituts tècnics moderns, i a la que estan lligats molts matemàtics i físics notables, com LAGRANGE i AMPÈRE.

[173] Són dues fórmules que apareixen en estudiar òvals. Concretament $0 = \lambda k + \mu'$ i $0 = \lambda d\varphi + d\mu$, on μ és l'amplada de la corba de curvatura $k = d\varphi/ds$.

[174] Vegeu [427]. Aquest article fou publicat pels companys del matemàtic canadenc Arthur Preston Melish a la Brown University, desprès de la seva prematura mor als 25 anys.

[175] Vegeu [54] i[55].

[176] Vegeu [546].

MONGE fou un gran professor i les seves lliçons sobre geometria algebraica i diferencial van inspirar a molts joves estudiants entre els que podem citar: V. PONCELET, a qui es deuen els fonaments de la geometria projectiva, i C. DUPIN, qui va contribuir de forma important al desenvolupament de la geometria de superfícies. Altres deixebles de MONGE foren: J. B. MEUSNIER, E. L. MALUS[177], M. A. LANCRET i O. RODRIGUES, tots ells han aportat teoremes a la geometria diferencial[178]. Els treballs més importants de MONGE sobre la geometria de corbes i superfícies es troben reunits a les seves *Applications de l'Analyse à la Géométrie (1807)*[179], la cinquena edició del qual, amb notes de J. LIOUVILLE, va aparèixer el 1850. MONGE va tenir la confiança de Napoleó i va ser destituït com a director de l'Escola Politècnica a la caiguda de l'Emperador, i va morir poc desprès. Les principals idees contingudes en el capítol II es deuen a MONGE i als seus deixebles, mentre que les del capítol I foren desenvolupades en part per aquests i en part per un grup posterior de matemàtics francesos associats al *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, publicat ininterrompudament des de 1836, data de la seva fundació per JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882). Entre aquest darrers si inclouen: A. J. C. BARRÉ DE SAINT VENANT (1796-1886), que es va interessar per la teoria de corbes a partir de les seves investigacions sobre elasticitat, i un grup de matemàtics posteriors entre els que hi ha: F. FRENET (1816-1888), J. A. SERRET (1819-1885), V. PUISEUX (1820-1833) i J. BERTRAND (1822-1900), els treballs més importants dels quals en aquest camp foren escrits en el període 1840-1850. J. LIOUVILLE va donar un resum complet d'aquestes investigacions a la nota I de l'edició de 1850 de les

[177]Étienne Louis Malus (1775-1812). Alumne de Monge a l'École Royale de Genie Militaire a Mézières, fins 1793, que és expulsat per motius polítics. Posteriorment entra com alumne a l'École Polytechnique on és alumne de Fourier. Va continuar vinculat a l'Escola tota la seva vida. Acompanya Napoleó a la campanya d'Egipte (1798). Els seus treballs matemàtics giren quasi sempre sobre l'estudi de la llum. Descobreix la polarització de la llum per reflexió (1809).

[178]Entre 1770 i 1800, Tinseau i Meusnier van ser els únics en treballar en la línia de la geometria diferencial de Monge. Tinseau fou cronològicament el primer deixeble de Monge, ja que va ser alumne seu a Mézières de 1769 a 1771. El títol del seu primer treball ja demostra la forta influència de Monge: *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes à double courbure,* Mém. div. Sav. t. IX, Paris, 1780, pp.593-624. Vegeu [555]. El segon deixeble fou Meusnier.

[179]Vegeu [452].

Applications de Monge.

p.87. **Jean Baptiste Meusnier** (1754-1793) fou deixeble de Monge a Mézières. Va publicar el seu teorema a *Mémoire sur la courbure des surfaces*, *Mémoires des savants étrangers* **10** (lu 1776), 1785, pp. 477-510[180], que va redactar després que Monge li ensenyés el treball de Euler (vegeu Sec. 2-6). El 1783-1784, després de l'ascensió en globus de Montgolfier, es va dedicar a la investigació en *aerostació*, i en aquest mateix període va col·laborar amb Lavoiser en el seu treball sobre la descomposició de l'aigua en els seus elements. Va morir essent general de la Revolució durant el setge de Maguncia. Vegeu G. Darboux: *Eloges Académiques*, París, 1912, pp. 218-62.[181]

p.92. Aquest teorema[182] és una de les contribucions a la teoria de superfícies que devem a Leonard Euler (1707-1783), qui va enriquir les matemàtiques amb un nombre extraordinari d'aportacions. Fou publicat, amb una demostració diferent a la que hem donat, a *Recherches sur la courbure des surfaces*, *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlín*, **16**, 1760, editades el 1767, pp. 119-43, una de les primeres memòries sobre la teoria de superfícies[183]. La nostra demostració segueix la donada per C. Dupin (vegeu secció 2-7). Euler va publicar també altres treballs sobre la teoria de superfícies desenvolupables a *De solidis, qurum superficiem in planum explicare licet, Novi Comment. Acad. Petropol.* **16**, 1771, pp.3.34[184]. En aquest treball va introduir x, y i z com a funcions de dos paràmetres. Aquesta és la primera, o una de les primeres, memòries en la que s'utilitzen coordenades curvilínies sobre una superfície.

p.93. El comportament de les línies de curvatura al voltant d'un punt umbilical es pot estudiar a Darboux: *Surfaces IV, Note VII.* Hi ha diverses possibilitats. Tenim un exemple en les línies de curvatura d'un el·lipsoide, les quals rodegen un umbilical d'una forma que recorda les còniques homofocals (Fig. 2-22). Vegeu també A. Gullstrand: *Acta*

[180] Vegeu [428]. Hem reproduït la primera pàgina d'aquest article a la pàgina 65.
[181] Vegeu [213].
[182] $k = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha$.
[183] Vegeu [271].
[184] Vegeu [275].

mathematica, **29**, 1905, p. 59[185].

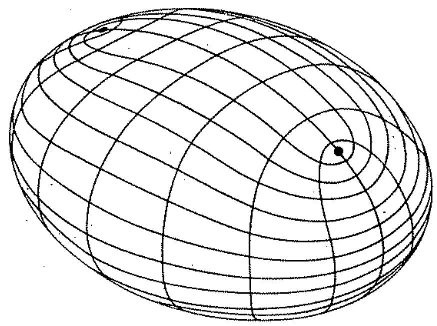


FIG. 2-22.

p.93. Aquesta *sella de mono* (*Affensattel*) es descriu a D. HILBERT- S. COHN VOSSEN: *Anschauliche Geometrie*, Berlín, Springer, 1932. Aquesta obra, en el seu capítol IV, pp. 152-239, conté una exposició molt original de la teoria de corbes i superfícies, fent ressaltar el seu aspecte visual i intuïtiu.

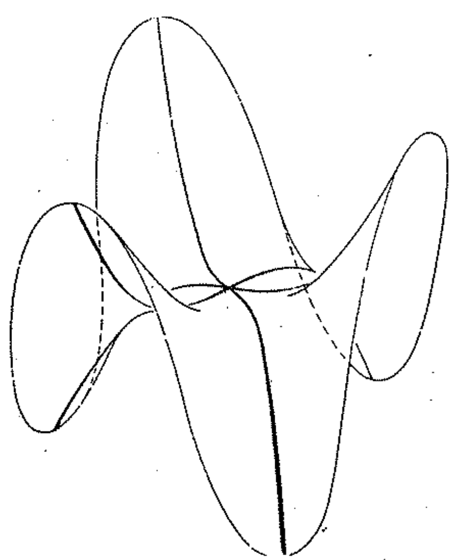


FIG. 2-23.

[185]Vegeu [315].

p.97. **Charles Dupin** (1784-1873) fou deixeble de MONGE a l'École Polytechnique de París. És autor de *Développements de géometrie*, (1813)[186], on va publicar un cert nombre de resultats, alguns dels quals porten el seu nom, i una exposició de la teoria de les línies de curvatura i asimptòtiques, que és essencialment la que s'utilitza en l'actualitat. El subtítol de la seva obra, *Avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc.*, demostra que l'autor no va perdre mai contacte amb la pràctica de l'enginyeria, cosa que també és evident en el seu segon llibre, *Applications de géometrie*, 1822[187]. Havent servit com enginyer a la marina napoleònica, Dupin va ser durant tota la seva vida un promotor de la ciència i de la industria, i fou nombrat par de França i senador en temps de Napoleó III. La noció de curvatura mitjana es deu a SOPHIE GERMAIN: *Journal für Mathem.*, de Crelle, **7**, 1831, pp. 1-29[188].

p.107. **Olinde Rodrigues** (1794-1851), un altre dels deixebles de MONGE, va publicar els seus resultats a *Correspondance sur l'École Polytechnique*, **3**, 1815, i a *Bull. Soc. Philomatique*, **2**, 1815[189]. El seu nom va unit també a un teorema sobre les funcions de Legendre. Va ser partidari ardent de SAINT SIMON[190] i editor de les Obres Completes d'aquest reformador.

p. 108. MONGE va anar a parar a les línies de curvatura en una superfície en la seva *Mémoire sur la theorie des déblais et des remblais*, *Mémoires de l'Acad. des Sciences*, 1781, pp. 666-704[191], pel problema d'enginyeria següent: Descompondre dos volums equivalents donats en partícules infinitament petites, que es corresponguin entre si, de manera que la suma dels productes de les trajectòries descrites pel transport de cada

---

[186] Vegeu [233].
[187] Vegeu [237].
[188] Vegeu [298].
[189] Vegeu [515] i *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces*,[516]. És sorprenent veure com ja utilitza la després anomenada curvatura de Gauss, comparant l'àrea d'un element de superfície amb l'àrea sobre l'esfera unitat determinada per aquest element de superfície a través de la després anomenada aplicació de Gauss. Els articles del Bulletin de la Société Philomatique, com aquest darrer, els podeu trobar a `http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/9580#/summary`.
[190] El Compte de Saint-Simon va ser creador d'una teoria socialista coneguda com sant-simonianisme. A la seva mort, Rodrigues en fou el principal defensor.
[191] Vegeu [435].

partícula del primer volum (el *déblai*) a la corresponent partícula del segon volum (el *remblais*) pel volum de les partícules sigui mínim. Va suposar que les trajectòries eren rectes, i això el va portar a congruències rectilínies; és a dir, a famílies de rectes amb la propietat de que per cada punt d'una regió de l'espai passa una, i només una, d'aquestes rectes. Aquestes rectes es poden agrupar sempre en dues series de superfícies desenvolupables; quan aquestes superfícies són ortogonals, les rectes de la congruència són normals a un conjunt de superfícies sobre les que les desenvolupables determinen les línies de curvatura. Vegeu la monografia de P. Appell: *Le problème géométrique des déblais et des remblais*, *Mémorial des sciences mathematiques*, **29**, 1928, 34 pàgines[192].

p. 117. Diversos tractats (Foryth, Eisenhart, etc.) dediquen capítols als sistemes de superfícies triplement ortogonals. Un tractament complet es pot trobar a G. Darboux: *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, París, 1910[193]. Gaston Darboux (1842-1917), als treballs del qual haurem de referir-nos freqüentment, va succeir Chasles com professor de Geometria superior de la Sorbonne, i el 1900 va succeir Bertrand en el seu lloc de secretari perpetu de l'Académie des Sciences. En les seves moltes memòries i llibres va combinar la intuïció geomètrica amb el domini de l'Àlgebra i l'Anàlisi. Les seves *leçons* no són només una font abundant d'informació sobre la teoria de superfícies, sinó que es troben entre els llibres de matemàtiques més ben escrits de la passada centúria.

p. 122. Els símbols de Christoffel es denominen així en record de Erwin Bruno Christoffel (1829-1901), que primer va ensenyar a Zurich i després de la guerra francoprusiana de 1870-1871, a Estrasburg. Christoffel va introduir els seus símbols en una memòria sobre formes diferencials de n variables, publicada a *Journal für Mathem.*, de Crelle, **70**, 1869[194] (*Gesamm. Abhandlungen I*, 1910, p. 352), utilitzant el

[192]Vegeu [18].

[193]Vegeu [208]. Al prefaci de la segona edició diu que el tema en qüestió va ser inaugurat pels treballs de Gabriel Lamé. I ja a la primera pàgina dóna el nom de *família de Lamé* a tota família [de superfícies] que forma part d'un sistema triplement ortogonal.

[194]Vegeu *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrüke zweiten Grades*, [144]. En aquest treball es planteja el problema de determinar quan dues formes diferencials quadràtiques poden convertir-se l'una en l'altre per un canvi de coordenades. A la mateixa revista, unes pàgines més endavant, publica un altre article, [145], amb gairebé el

símbol $\left\{ \begin{matrix} jk \\ i \end{matrix} \right\}$ en lloc de Γ^i_{jk}. El canvi a l'actual notació s'ha fet per la influència de la teoria de tensors.

p. 126. Aquestes fórmules[195] apareixen en un treball[196] de D. Codazzi (1824-1875), redactat com a resposta a un *concours* de l'Acadèmia de París (1860), imprès a *Mém. présentés à l'Académie*, **27**, 1883; també a *Annali di Matem.*, **2**, 1868-1869. pp. 101-19[197]. Per aquells temps ja havien estat publicades per G. Mainardi: *Giornali Istituto Lombardo*, **9**, 1856, pp. 385-98[198]. Gauss, a les seves *Disquisitiones* manipula en principi aquestes fórmules, però no explícitament. La seva fonamental importància va ser reconeguda, en primer lloc, per O. Bonnet: *Journal de l'École Polytechnique*, **42**, 1867, pp. 31-151[199].

p. 135. Les equacions d'aquesta secció[200] varen ser deduïdes per Gabriel Lamé (1795-1870), qui, a partir de 1837, va introduir coordenades curvilínies per a l'integració de les equacions diferencials de la calor i l'elasticitat. Va reunir els seus resultats en el llibre *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859)[201]. A ell es deuen els conceptes de sistemes isoterms (vegeu Sec. 5-2) i paràmetres diferencials (vegeu Sec. 4-8, exercici 11).

Els seus treballs foren utilitzats per G. Darboux per a les seves investigacions sobre els sistemes triplement ortogonals (Sec. 2-11), qui els va generalitzar als sistemes que es tallen en sistemes conjugats (*Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 361[202]).

Es poden trobar fórmules relatives a sistemes generals de coordenades curvilínies de l'espai en algunes memòries de l'Abbé Aoust (p. ex. *Annali di Matem.*, **6**, (1864), pp. 65-87)[203], que va generalitzar els

mateix nom. Vegeu els comentaris de Girbau a [309].

[195] Es refereix a les equacions de Mainardi-Codazzi.

[196] Es refereix a [164].

[197] Vegeu [160], i també [161], [162], [163]. Podeu trobar els Annali di Matematica a `http://iris.univ-lille1.fr/handle/1908/63`

[198] Vegeu [426].

[199] Vegeu [92].

[200] Secció 3-4. *Coordenades curvilínies a l'espai.* Vegeu [363] i [365].

[201] Vegeu [370].

[202] Vegeu [208].

[203] Vegeu *Théorie des coordonées curvilignes quelconques*, [7]. Aquest treball té una segona part amb el mateix nom, [12], de 1868. De fet, anys abans, el 1862, ja havia

treballs de Lamé. Tot aquest treball ha estat superat, a partir de 1887, pel treball de G. RICCI-CURBASTRO, qui va crear, amb el càlcul tensorial, un nou instrument per tractar les qüestions relatives a les coordenades curvilínies generals, no només per a la geometria de tres dimensions, sinó també per a qualsevol nombre $n > 3$ de dimensions.

p. 141. El teorema de Liebmann[204] va ser suggerit per F. MINDING: *Journal für Mathem.*, de Crelle, **18**, (1838), p. 368[205]; la primera demostració és de H. LIEBMANN: *Göttinger Nachrichten*, (1899), pp. 44-55[206]. La demostració que hem donat segueix la de W. BLASCHKE: *Differentialgeometrie*, **I**, Sec. 91. Les demostracions de HILBERT es poden veure a *Trans. Amer. Math. Soc.*, **2**, (1901), pp. 97-99[207], i també a *Grundlagen der Geometrie, Anhang V* [208].

L'esmentat teorema de Liebmann és un cas especial d'un teorema més general referent a que una superfície convexa i tancada no es pot deformar, teorema que sembla deure's a LAGRANGE (1812). Vegeu CAUCHY: *Comptes Rendues*, **21**, (1845), p. 564[209]. Una demostració d'aquest teorema va ser donada també per LIEBMANN. També es pot demostrar que els poliedres convexos no són deformables.

p. 143. La primera demostració del Teorema Fonamental[210] és de O. BONNET: *Journal Ecole Polytechnique*, cah. **42**, (1867)[211]; es poden veure demostracions a les *Lezioni* de BIANCHI, Sec. 68[212], i a EISENHART: *Differential Geometry*, pp. 158-59[213]. El lector pot comparar aquest te-

publicat alguna nota als Comptes Rendus sobre aquest tema, [4].

[204] *La única superfície tancada de curvatura constant i positiva (sense singularitats) és l'esfera.*

[205] Vegeu [431].

[206] Vegeu [410].

[207] Vegeu [320].

[208] Vegeu [319].

[209] Vegeu [126]. L'Académie va demanar un informe sobre el treball de Bonnet a una comissió formada per J. V. Poncelet, G. Lamé i, com a "rapporteur", A. Cauchy. En aquesta nota fa els comentaris sobre Lagrange i la deformació de superfícies de què parla Struik.

[210] La primera i segona forma fonamental (dos tensors complint Gauss-Codazzi) determinen la superfície, llevat de moviments rígids.

[211] Vegeu [92].

[212] Vegeu [49].

[213] Vegeu [243].

orema fonamental amb el referent a les corbes guerxes, on consideràvem un sistema d'equacions diferencials ordinàries que no necessita condicions del tipus Gauss-Codazzi per a la seva integrabilitat completa. En el cas de les corbes hem donat un mètode efectiu de realitzar la integració (Sec. 1-10), que porta a una equació de Riccati. El problema anàleg en el cas de les superfícies es por reduir també a una equació de Riccati. Una discussió completa d'aquest cas es pot veure a G. SCHEFFERS: *Anwendung II*, pp. 393-414[214]. La teoria general de sistemes mixtos d'equacions en derivades parcials, sobre la que està basada la demostració del Teorema Fonamental, es pot estudiar a T. LEVI CIVITA: *The absolute differential calculus*, Cap. II, Sec. 8.

p. 148. La curvatura geodèsica era ja coneguda per GAUSS. El primer treball on fou considerada es deu a F. MINDING: *Journal für Mathem.*, de Crelle, **5**, (1830), p. 297[215]. En el número següent[216] (**6**, (1830), p. 159) va demostrar el seu caràcter d'invariant per flexions. El nom de *curvatura geodèsica* va ser donat per O. BONNET: *Journal Ecole Polytechnique*, **19**, (1848), p. 43[217]. FERDINAND MINDING (1806-1885), nom que trobarem en repetides ocasions, va ser professor de la Universitat Alemanya de Dorpat (actualment Tartú, Estònia).

p. 151. La història de les línies geodèsiques s'inicia amb la solució donada per J. BERNOULLI al problema de la mínima distància entre dos punts d'una superfície convexa (1697-1698). BERNOULLI demostra que el pla osculador ("el pla que passa per tres punts *quolibet proxima*") ha de ser sempre ortogonal al pla tangent. Per a més detalls vegeu P. STÄCKEL: *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien*, Berichte sächs. Akad. Wiss., Leipzig, **45**, (1893), pp. 444-67. El nom de *línies geodèsiques*, amb el seu significat actual, es deu, segons STÄCKEL, a J. LIOUVILLE: *Journal de Mathem.*, **9**, (1844), p. 401[218]; l'equació de les geodèsiques la va obtenir per primer cop EULER en el seu treball *De linea brevissima in superficie quacumque duo quaelibet puncta jungente, Comment. Acad. Petropol.* **3**, (ad annum 1728), (1732)[219]; l'equació

[214]Vegeu [524].
[215]Vegeu [430].
[216]Vegeu [429].
[217]Vegeu [64].
[218]Vegeu [411].
[219]Vegeu [265].

d'EULER es refereix a una superfície definida per $F(x, y, z) = 0$ (vegeu exercici 22, al final d'aquesta secció[220]).

p. 157. Les coordenades geodèsiques foren introduïdes i constantment utilitzades per GAUSS a les seves *Disquisitiones*[221] de 1827. Ja LEIBNIZ, el 1692, es va ocupar de les línies paral·leles en el pla, i a ell es deu el nom de *paral·leles* per designar les evolvents d'una corba[222].

p. 165. La qüestió de si una geodèsica és la mínima distància entre dos punts va ser plantejada per primer cop per C. G. J. JACOBI a les seves *Vorlesungen über Dynamik*[223] (1842-43, vegeu les seves *Ges. Werke*). La teoria ha estat discutida a les *Leçons III*, Cap. V, de G. DARBOUX, i en alguns tractats de càlcul de variacions. La figura 4-8 està presa de A. VON BRAUNMÜHL: *Mathem. Annalen*, **14** (1879), p. 557.

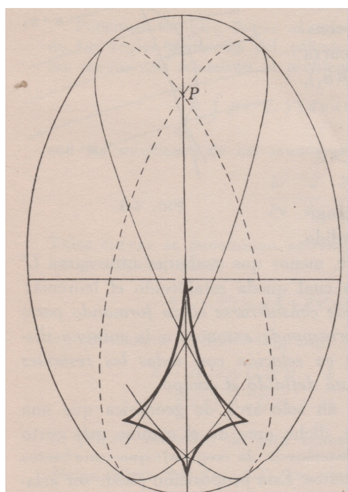


FIG. 4-8.

[220]Aquest exercici diu: Demostreu que l'equació de les geodèsiques de la superfície $F(x, y, z) = 0$ és

$$\begin{vmatrix} F_x & dx & d^2x \\ F_y & dy & d^2y \\ F_z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

[221]Vegeu [291].

[222]Vegeu [387].

[223]Vegeu [325]. Estudia les geodèsiques de l'el·lipsoide de tres eixos, vegeu [324]. El "cut locus" d'un punt és el conjunt de punts on les geodèsiques que surten d'aquest punt deixen de ser mínims de longitud. Sobre l'esfera, el cut locus del pol nord és el pol sud.

Figura 4-8 de Struik. Cut Locus.

p. 168. Aquesta teoria[224] és deguda a MINDING: *Journal für Mathem.*, **19**, (1839)[225], i va ser elaborada en detall per molts altres matemàtics, especialment per E. BELTRAMI. Excel·lents exposicions de la teoria de les superfícies de curvatura constant es poden veure a les *Leçons* de DARBOUX o a les *Lezioni* de BIANCHI[226]. HILBERT, *loc. cit.*, Sec. 3-5, ha demostrat que no existeix una superfície de curvatura constant negativa sense singularitats i analítica en tot punt.

p. 174. Per a més detalls[227] es pot consultar algun llibre sobre Geometria no Euclidiana, especialment J. L. COOLIDGE: *The elements of non-Euclidan geometry*, Oxford (1909), o R. BONOLA: *Geometrías no Euclidianas*, Madrid, 2ª ed., (1951). Un encertat resum es pot veure a J. L. COOLIDGE: *A history of geometrical methods,* Oxford (1940), pp. 68-97. G. B. HALSTED té publicades traduccions angleses dels treballs de LOBACHEVSKII i BOLYAY: *Geometrical researches on the theory of parallels*, Chicago, Londres (1914), 50 pp.; *New principles of geometry*, Austin, Tex., (1827), 27 pp. (ambdós de LOBACHEVSKII); *The science absolute of space*, Chicago, Londres (1914), xxx+71 pp. (de BOLYAI). BELTRAMI: *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*[228] es pot consultar a *Opere I*, pp. 374-405. Hi ha traducció francesa: *Annales Ecole Normale*, **6** (1869), pp. 251-88. Vegeu també COXETER: *Non-Euclidean geometry*, Toronto, 1947.

p. 178. Aquest teorema[229] va ser publicat per primer cop per O. BONNET a la memòria abans esmentada[230] *Journal Ecole Polytechnique*, **19** (1848), pp. 1-146, com a generalització del teorema de GAUSS sobre un triangle geodèsic; vegeu l'aplicació II d'aquesta secció. BONNET el va demostrar primer per a triangles geodèsics mitjançant el mètode utilitzat a l'exercici 6 d'aquesta secció. La relació d'aquest teorema amb el teore-

[224] *Totes les superfícies d'igual curvatura constant són [localment] isomètriques.*
[225] Vegeu [432].
[226] Vegeu [49].
[227] Sobre Geometria no Euclidiana.
[228] Vegeu [34].
[229] Es refereix al Teorema de Gauss-Bonnet.
[230] Vegeu [64].

ma de GREEN va ser estudiada per G. DARBOUX: *Leçons III*, p.122, etc.

p. 178. Aquesta propietat de la curvatura integral[231] era ja coneguda per l'escola francesa de MONGE, amb anterioritat a que GAUSS posés de manifest el seu significat en relació a la geometria intrínseca d'una superfície: vegeu O. RODRIGES, *loc. cit.,* secció 2-9.

p. 198. **Gerhard Mercator**, forma llatinitzada de *Kremer* (1512-1594), pertany, com ORTELIUS i BLAEAU, a l'escola dels grans cartògrafs flamencs dels segles XVI i XVII. Va introduir la projecció de "Mercator" en el seu famós mapamundi de 1569 (en el que utilitza la denominació de "Norumbega" per designar una part de l'actual Nova Anglaterra). Aquesta projecció havia estat ja utilitzada en alguna ocasió. MERCATOR coneixia el caràcter conforme de la seva projecció.

p. 199. Aquesta projecció[232] era ja coneguda per PTOLOMEU (150 anys d.C.), que la descriu a la seva *Geographia*, i els seus orígens semblen remuntarse a HIPARC (150 anys a.C.). Va ser utilitzada en la construcció de mapes pel matemàtic flamenc GEMMA FRISIUS (1540). El nom apareix per primer cop en un llibre d'òptica del belga F. D'AIGUILLON (1613).

La teoria de la representació conforme que hem exposat es deu essencialment a GAUSS, a la seva memòria sobre la representació *d'una superfície donada sobre una altra, de manera que resulti semblant en les seves porcions més petites*, apareguda el 1822 (*Werke IV*, pp. 193-216[233]; traducció parcial anglesa a D. E. SMITH: *Source book in mathematics* (1922), pp. 463-75). El nom *isoterma* és de G. LAMÉ (any 1833); vegeu les seves *Leçons sur les coordonnées curvilignes*[234] (1859). El qualificatiu *isomètrica* es deu a BONNET.

p. 202. El primer matemàtic que va donar criteris per decidir la possibilitat d'una representació isomètrica de dues superfícies fou F. MINDING: *Journal für Mathem.*, **19** (1839), pp. 370-87[235]. Per a una exposició

[231] *La curvatura integral (absoluta) d'una regió de la superfície és igual a l'àrea de la seva imatge esfèrica.*
[232] La estereogràfica.
[233] Vegeu [297].
[234] Vegeu [365].
[235] Vegeu [432].

d'aquesta teoria vegeu L. P. EISNEHART: *Differential Geoemtry*, pp. 323-25.

p. 203. Aquest problema[236] va rebre especial atenció quan el 1859 l'Acadèmia de París el va proposar com a tema d'un concurs. El premi el va guanyar EDMOND BOUR (1832-1866), amb una Memòria que, en opinió de LIOUVILLE *es pot considerar amb tota la bellesa d'una Memòria de* LAGRANGE. La part principal d'aquest treball va ser publicada a *Journal Ecole Polytech.*, (1862), pp.1-148[237]. Van mereixa menció honorable altres treballs de BONNET i CODAZZI. Per a una exposició del problema de BOUR vegeu *Leçons III* de DARBOUX, i també L. P. EISENHART: *Differential Geometry*, Cap. 9[238].

p. 205. Per a la demostració del teorema de DINI-LIE[239] referim a A. R. FORSYTH: *Lectures on Differential Geometry*, pp. 243-54, o a *Leçons III*, de DARBOUX, pp. 40-65. El teorema de BELTRAMI[240] va ser publicat per primer cop el 1865 (*Opere I*, pp. 262-80)[241]. Va ser seguit per una Memòria de U. DINI: *Annali di Matem.*, **3** (1869), pp. 269-93[242], desprès de la qual S. LIE va publicar, el 1879, el seu teorema suplementari; vegeu *Math. Annalen*, **20** (1882), p. 419[243]. (Vegeu també,

[236] *Donada una forma quadràtica definida positiva $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, es demana trobar totes les superfícies que l'admeten com a primera forma fonamental (Problema de Bour).*

[237] Vegeu [103].

[238] Vegeu [243].

[239] *Dues superfícies es poden representar geodèsicament l'una sobre l'altra, sense isometria o semblança, en el cas en que les seves primeres formes fonamentals, respecte de les corresponents coordenades u, v, es puguin posar en la forma de* DINI

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \quad ds_1^2 = (\frac{1}{V} - \frac{1}{U})(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V})$$

o en la forma de LIE

$$ds^2 = (u + V)du\,dv, \quad ds_1^2 = \frac{u+V}{2v^3}\,du\,dv - \frac{(u+V)^2}{4v^4}\,dv^2$$

on U és només funció de u i V és només funció de v.

[240] *Les úniques superfícies que es poden representar geodèsicament sobre el pla són les de curvatura constant.*

[241] Vegeu [32].

[242] Vegeu [224].

[243] Vegeu [403].

més endavant, l'exercici 11).

p. 213. Les superfícies mínimes es troben entre les superfícies millor estudiades de la geometria diferencial. La seva teoria va ser iniciada per LAGRANGE, com una aplicació dels seus estudis sobre el càlcul de variacions (1760-1761, *Oeuvres I*, p. 335)[244]. MONGE, MEUSNIER, LEGENDRE, BONNET, RIEMANN i LIE van fer contribucions a la teoria, i es deu a MEUSNIER el descobriment de les dues superfícies mínimes "elementals": la catenoide i l'helicoide recte. KARL WEIERSTRASS (*Monatsber. Berlin Akad*, 1866)[245] i H. A. SCHWARTZ varen desenvolupar les relacions entre la teoria de les funcions analítiques complexes i les superfícies mínimes reals (vegeu H. A. SCHWARTZ: *Ges. Math. Abh. I*)[246]. A les *Leçons* de DARBOUX, llibre III, p. 267 i següents, es pot veure un estudi complet de les superfícies mínimes, i també una nota històrica.

La importància de les superfícies mínimes en la teoria de capilaritat, com a superfícies de mínima energia potencial superficial, va ser il·lustrada amb els experiments de PLATEAU: *Statique expérimentale et théorique des liquids* (1873), que va aconseguir superfícies mínimes de pel·lícula sabonosa introduint un filferro en forma de corba guerxa tancada en una dissolució de sabó. El problema de PLATEAU consisteix en determinar la superfície mínima que passa per una corba donada, i ha estat estudiant en gran generalitat per J. DOUGLAS. Vegeu *Solution of the problem of* PLATEAU, *Trans. Amer. Mathem. Soc.*, **33** (1931); vegeu també *American Journal Mathem.*, **61** (1939). Per a més detalls consulteu R. COURANT-H. ROBBINS: *¿ Qué es la matemàtica?* (Aguilar, S. A. de Ediciones, (1955), p. 395); R. COURANT: *Acta Mathematica*, **72** (1940), pp. 51-98.

p. 221. Qui primer va estudiar les superfícies reglades va ser MONGE (a les seves *Applications*), qui va establir l'equació en derivades parcials que compleixen totes les superfícies reglades (la qual és de tercer ordre). HACHETTE va fer a continuació el seu estudi geomètric. La teoria que

[244] Vegeu [348].

[245] Vegeu [569]. En aquestes dues pàgines apareixen les famoses equacions de Weierstrass, tan útils per a estudiar supefícies minimals a partir de la variable complexa. Torna a tocar el tema anys més tard a [570].

[246] Vegeu [526] i [527].

hem exposat es deu principalment a MINDING: *Journal für Mathem.* **18** (1838), pp. 297-302[247]; i a M. CHASLES: *Corresp. Mathem. et Phys. de Quetelet,* **11** (1839)[248]; també a BONNET. Els noms de *punt central* i *línia d'estricció* són de CHASLES. El teorema sobre les línies asimptòtiques es pot veure a l'obra de PAUL SERRET: *Théorie nouvelle géométrique et méchanique des lignes à double courbure* (1860)[249].

p. 227. MONGE s'ocupa d'aquestes superfícies[250] en el capítol XIX de les seves *Applications*. Un estudi detallat es pot veure a G. SCHEFFERS: *Anwendung II*, pp. 283-86, 293-95[251].

p. 246. El mètode del triedre mòbil i el seu estudi sistemàtic mitjançant Pfaffians és típic del treball d'E. CARTAN (1869-1951), qui, inspirat per S. LIE i G. DARBOUX, va introduir el seu mètode cap al 1900 en les seves invetigacions sobre els grups continus. Vegeu E. CARTAN: *Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* (1937). Les aplicacions a la geometria diferencial clàssica es poden veure a W. BLASCHKE: *Einführung in die Differentialgeometrie* (1950)[252]. Vegeu també, en rus, S. P. FINIKOV: *El mètode Cartan de les formes exteriors en geometría diferencial* (1948). En lloc de $D\omega = [dv_i\, dx_i]$ es troba també a la literatura la notació $d\omega$ i ω'.

[247]Vegeu [431].
[248]Vegeu [138].
[249]Vegeu [542]. També va escriure el llibre *Des Méthodes en Géométrie*, [541]. Es va preocupar de corbes algebraiques a [543].
[250]Superfícies reglades amb generatrius isòtropes.
[251]Vegeu [524].
[252]Vegeu [55].

Apèndix B

Ordre cronològic dels articles citats

Segle XVII

1651 – Huygens: *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli*, [322].

1673 – Huygens: *Horologium oscillatorium*, [323].

1684 – Leibniz: *Nova methodus pro maximis and minimis*, [384].

1686 – Leibniz: *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, [386].

– Leibniz: *De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, [385].

1687 – Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*, [457].

1692 – Leibniz: *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentenbus formata casque omnes tangente*, [387].

– Leibniz: *Generalia de natura linearum, anguiloque contactus et osculi*, [388].

1696 – Hôpital: *Analyse des infinitement petits*, [390].

– Carré: *Rectification de la Cicloide*, [117].

Segle XVIII

1701 – Carré: *Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangents*, [116].

– Carré: *Rectification de la Cicloide*, [117].

– Varignon: *Autre regle generale des Forces Centrales*, [561].

1704 – Newton: *Optiks*, [458].

1706 – Varignon: *Differentes manieres infiniment generales de trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes*, [562].

1712 – Newton: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, [459].

– Varignon: *Nouvelles reflexions sur les développées*, [563].

– Varignon: *Solution de deux Probèmes de Géométrie*, [560].

1713 – Varignon: *Suite des réflexions qui se trouvent dans la Mémoire du 28 Juin 1712 sur les Sur les développées*, [564].

1724 – Pitot: *Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloide*, [474].

1728 – Euler: *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, [265].

1731 – Clairaut: *Rechereches sur les courbes a double courbure*, [146].

1732 – Euler: *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, [265] [rebut el 1728].

1733 – Clairaut: *Determination Géométrique de la perpendiculaire a la meridienne tracée par M. Cassini; Avec plusieurs Methodes d'en tirer la grandeur et la figure de la Terre*, [147].

1734 – Clairaut: *Solution de plusieurs problemes oú il s'agit de trouver des Courbes dont la propiété consiste dans une certain relation entre leurs branches, exprimé par une equation donée*, [148].

1735 – Clairaut: *Sur la nouvelle methode de M. Cassini, pour connaître la figure de la Terre*, [149].

1736 – Euler: *De constructione aequationum ope motus tractorii*, [266].

– Newton: *The Method of Fluxions and infinite Series*, [460].

1737 – Clairaut: *Des épicycloïdes sphériques*, [150] [presentat el 1732].

1741 – Clairaut: *Eléments de Géométrie*, [151].

1742 – Bernoulli: *Opera Omnia*, [40].

1743 – Clairaut: *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'Hydrostatique*, [152].

1744 – Euler: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, [267].

1745 – Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum*, [270].

1746 – Euler: *Solutio problematis catoptrici*, [268].

– Euler: *Sur quelques proprietes des Sections coniques*, [269]

1750 – Cramer: *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques* [177].

1760 – Lagrange: *Essai d'un nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* [348].

1767 – Euler: *Recherches sur la courbure de surfaces*, [Escrites el 1760], [271].

– Euler: *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, [272].

1770 – Euler: *Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum*, [273].

1771 – Euler: *De curva rectificabili in superficie sphaerica*, [274].

1772 – Euler: *De solidis quorum sperficiem in planum explicare licit*, [275].

1774 – Euler: *De curvis triangularibus*, [276].

1779 – Newton: *Isaaci Newton Opera quae extant omnia*, [461].

– Lagrange: *Sur la construction des cartes géographiques*, [349].

1780 – Monge: *Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulèrement sur celles des surfaces développables, avec une applicaction à la théorie des ombres et des pénombres*, [presentat el 1775], [434].

– Tinseau: *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des lignes à double courbure*, [555].

– Tinseau: *Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites*, [556].

1781 – Monge: *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [435].

1782 – Euler: *Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum*, [277].

1783 – Monge: *Sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires*, [436].

1784 – Monge: *Sur l'expression analytique de la génération des surfaces*, [439].

– Monge: *Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes*, [437].

– Monge: *Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*, [438]

1785 – Monge: *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, [440].

– Meusnier: *Mémoire sur la courbure des surfaces*, [llegit el 1775], [428].

– Legendre: *Recherche sur l'attraction des sphéroïdes*, [378].

1786 – Lambert: Theorie der Parallellinien, [360] [escrit el 1766].

1787 – Legendre: *Mémoire sur l'integration de quelques équations aux différences partielles*, [380].

– Legendre: *Mémoire sur les opérations trigonométriques*,[379].

1789 – Legendre: *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*, [llegit el 1787], [380].

1794 – Legendre: *Eléments de Géométrie*, [381].

– Monge: *Stéréotomie*, [441].

1795 – Lacroix: *Eléments de Géométrie descriptive*, [346].

– Monge: *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide*, [442].

1797 – Lacroix: *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, [347].

– Lagrange: *Théorie des fonctions analytiques*, [351].

1798 – Lagrange: *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques*, [350].

1799 – Monge: *Géométrie descriptive*, [443].

– Monge-Hachette: *Des courbes à double courbure*, [453].

Segle XIX

1801 – Monge: *Feuilles d'Analyse*, [444].

– Fourier: *Notes sur les développées des lignes courbes*, [281].

– Fourier: *Sur les propriétés des lignes courbes*, [283].

– Fourier: *Notes sur les propriétés des lignes courbes*, [282].

1802 – Lancret: *Mémoire sur les courbes a double courbure*, [372].

1805 – Monge-Hachette: *Application de l'algébre a la géométrie*, [455].

1806 – Lancret: *Mémoire sur les courbes a double courbure*, [372].

– Monge: *De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon*, [449].

– Monge: *Sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface d'eveloppable quelconque*, [448].

– Legendre: *Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde*, [382].

1807 – Dupin: *Analyse d'un mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [229].

– Hachette: *De quelques propriétés des rayons de courbure*, [316].

– Monge: *Applications de l'Analyse a la Géométrie*, [452].

1808 – Ampère: *Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices*, [3].

– Dupin: *Sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré*, [230].

1811 – Lancret: *Mémoire sur les développoides des corbes planes*, [373].

1813 – Dupin: *Développements de géométrie*, [233].

– Lagrange: *Théorie des fonctions analytiques*, [351].

1814 – Dupin: *Sur un Mémoire relatif à la stabilité des corps flottants*, [234].

1815 – Rodrigues: *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces*, [515].

– Rodrigues. *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces*, [516].

1816 – Rodrigues: *De l'attraction des sphéroïdes*, [517].

1817 – Lamé: *Sur les intersections des lignes et des surfaces*, [361].

1819 – Vallée: *Traité de géométrie descriptive*, [559].

– Dupin: *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, [236].

1822 – Dupin: *Applications de géométrie*, [237].

– Gauss: Representació d'una superfície donada sobre una altra, de manera que resulti semblant en les seves porcions més petites [297] (IV, pp. 193-216).

– Poncelet: *Traité de propriétés projectives des figures*, [479].

1825 – Lardner: *An investigation of the lines of curvature of Ellipsoides, Hyperboloids and Paraboloids*, [377].

– Gauss: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildenten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird*, [289].

1826 – Cauchy: *Exercices de Mathématiques*, [123].

– Cauchy: *Leçons sur les Applications du Calcul Infinitésimal a la Géometrie*, [124].

– Dupin: *Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts*, [238].

1827 – Gauss: *Disquisitiones generles circa superficies curvas*, [291].

1828 – Gauss: *Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene* , [290].

– PLücker: *Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte*, [476].

1829 – Plücker: *Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben*, [477].

1830 – Minding: *Bemerkung über die abwiekclung krummer linien von flächen*, [429].

– Minding: *Ueber die curven kürzesten perimeters auf krummen flächen*, [430].

- Chasles: *Théorèmes sur les surfaces du second degré*, [136].
- Chasles: *SPremier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures*, [130].
- Chasles: *Extrait d'un Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré*, [132].
- Chasles: *Second mémoire sur les transformations paraboliques des relations métriques des figures*, [134].
- Chasles: *Propriétés générales des surfaces du deuxième degré*, [133].
- Chasles: *Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré*, [135].
- Chasles: *Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré*, [131].

1831
- Bolyai: *Scientiam spatii absolute veram exhibens*, [57], [56], [96].
- Sophie Germain: *Mémoire sur la courbure des surfaces*, [298].
- Plücker: *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes*, [478].
- Senff: *Teoremata principalia e theoria curvarum et superficierum*, [528].
- Gauss: *Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda*, [292].

1832
- Gauss: *Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda*, [293].

1833
- Legendre: *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, [383].
- Lamé: *Sur la propagation de la chaleur dans Polyèdres*, [362].
- Olivier: *Construction des points d'inflexion de la transformée d'une courbe plane ou à double courbure tracée sur une surface développable*, [462].

1834
- Olivier: *Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques*, [464].

– Olivier: *Construction des centres de courbure des Épicycloïdes planes et sphériques*, [463].

1835 – Olivier: *Addition au mémoire sur la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure*, [465].

– Olivier: *Sur la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure*, [466].

1837 – Lobachevsky: *Géométrie Imaginaire*, [418].

– Lamé: *Mémoire sur les surfaces isothermes*, [363].

– Chasles: *Aperçu historique*, [137].

1838 – Minding: *Ueber die biegung gewisser flächen*, [431].

1839 – Minding: *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind*, [432].

– Chasles: *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, [138].

– Jacobi: *Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid*, [324].

1840 – Lobachevsky: *Geometrical researches on the theory of parallels*, [419].

– Lamé: *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, [365].

– Minding: *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, [433]

1841 – Frenet: *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*, [284].

1842 – Bertrand: *Démonstration d'un théorème de Géométrie*, [41].

– Puiseux: *Problème de Géométrie*, [483].

1843 – Bertrand: *Démonstration d'un théorème de Géométrie*, [43].

– Gauss: *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, [294].

– Joachimsthal: *Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus*, [326].

– Saint-Venant: *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double coubure*, [520].

1844 – Liouville: *De la ligne géodésique sur un ellipsoide quelconque*, [411].

– Bonnet: *Sur quelques proprietes générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces*, [60].

– Leroy: *Traité de stéréotomie*, [389].

1845 – Saint-Venant: *Mémoire sur les lignes courbes non planes*, [521]

– Cauchy: *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, [125].

– Cauchy: *Rapport sur un Mémoire de M. Ossian Bonnet*, [126].

– Bonnet: *Mémoire sur la théorie des corps élastiques*, [61].

– Bonnet: *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales*, [62].

– Bonnet: *Note sur les ombilics des surfaces*, [63].

– Bertrand: *Note sur la théorie des surfaces isothermes*, [44].

1846 – Liouville: *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point material peuvent s'intégrer*, [412].

– Liouville: *Sur un théorem de M. Joachimsthal, relatif aux lignes de courbure planes*, [413]

– Gauss: *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, [295].

– Joachimsthal: *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium*, [327].

– Chasles: *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré*, [141].

– Chasles: *Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales*, [140].

1847 – Catalan: *Sur les trajectoires othogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde*, [120].

– Frenet: *Sur les courbes à double courbure*, [286].

- Frenet: *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroides quelconques*, [285].
- Liouville: *Sur un théorem de M. Gauss concernant le produit de deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface*, [414].
- Joachimsthal: *Note sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante*, [328].
- Joachimsthal: *Problème sur les polaires*, [329].
- Serret: *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, [530]

1848
- Bonnet: *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, [64].
- Puiseux: *Théorème de Gauss relatif à la théorie de la courbure des surfaces*, [484].
- Bertrand: *Démonstration d'une théorème de Gauss*, [45].
- Bertrand: *Démonstrations géométriques de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces*, [46].
- Joachimsthal: *Mémoire sur les surfaces courbes*, [330].
- Serret: *Note sur une équation aux dérivées partielles*, [531].

1849
- Bonnet: *Sur les surfaces isothermes et orthogonales*, [66].
- Bonnet: *Sur la théorie des surfaces orthogonales et isothermes*, [65].

1850
- Monge: *Application de l'analyse a la géométrie*, [Escrites el 1807, aquestes amb anotacions de Liouville], [452].
- Bertrand: *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure*, [47].
- Joachimsthal: *Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, [331].
- Joachimsthal: *Théorème relatif au cercle qui passe pas trois points d'une ellipse*, [332].
- Tortolini: *Sopra le supeficie parallele, ed applicazione di questa teorica all'ellissoide*, [557].

1851
- Bonnet: *Note sur quelques points de la théorie des surfaces*, [68].

- Bonnet: *Note sur la théorie générale des surfaces*, [67].
- Serret: *Sur quelques formules relatives à la theorie des courbes à double courbure*, [533].
- Serret: *Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure*, [534].
- Serret: *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle*, [532].
- Gournerie: *Mémoire sur les courbes d'ombre et de perspective des surfaces de révolution*, [216].
- Lamé: *Mémoire sur les variations des coordonées curvilignes*, [369].
- Liouville: *Sur la théorie générale des surfaces*, [416].
- Liouville: *Sur un théorem de M. Chasles*, [417].
- Puiseux: *Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant*, [485].
- Tortolini: *Sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodetica tracciata sulla superficie di un'ellisoide*, [558].
- Gournerie: *Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des héliçoides gauches*, [215].

1852
- Bonnet: *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques*, [69].
- Brioschi: *Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie*, [112].
- Frenet: *Sur quelques propriétés des courbes à double courbure*, [286].
- Chasles: *Traité de géométrie superieure*, [142].
- Joachimsthal: *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves du Collège Royal Français*, [333].
- Mainardi: *Compimento del problema del sig. Joachimstal, sulla teoria generale delle superficie*, [422].

1853
- Bonnet: *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, [71].

- Bonnet: *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, [75].
- Bonnet: *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes*, [70].
- Bonnet: *Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure sphériques*, [72].
- Bonnet: *Troisième Note sur les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques*, [76].
- Bonnet: *Note sur les développées des surfaces à lignes de première courbure planes*, [74].
- Bonnet: *Note sur la théorie générale des surfaces*, [73].
- Frenet: *Théorèmes sur les courbes gauches*, [287].
- Serret: *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, [535].
- Serret: *Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure*, [536].
- Serret: *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes*, [537].

1854
- Arago: *Biographie de Gaspard Monge*, [19].
- Joachimsthal: *Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite*, [334].
- Mainardi: *Nota sulla teoria delle curve*, [423], [424].
- Riemann: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen*, [511].

1855
- Bonnet: *Observations sur les surfaces minima*, [78].
- Bonnet: *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation générale des surfaces à aire minimum*, [79].
- Bonnet: *Sur les lignes géodésiques*, [80].
- Bonnet: *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, [81].

- Bonnet: *Deuxième Note sur les lignes géodésiques*, [77].
- Bour: *Sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique*, [101].
- Catalan: *Note sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, soint égaux et de signes contraires*, [121].
- Paul Serret: *Des Méthodes en Géométrie*, [541].

1856

- Bonnet: *Nouvelles remarques sur les surfaces à area minima*, [84].
- Bonnet: *Sur les surfaces pour lesquelles la somme des deux principaux rayons de courbure est égale au double de la normale*, [86].
- Bonnet: *Note sur un genre particulier des surfaces réciproques*, [83].
- Bonnet: *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, [85].
- Bonnet: *Note sur la courbure géodésique*, [82].
- Mainardi: *Sulle coordinate curvilinee d'una superfice e dello spazio*, [426].
- Mainardi: *Sulla teoria generale delle superficie*, [425].
- Codazzi: *Intorno alla superficie quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura*, [153].
- Curtis: *Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure*, [178].
- Serret: *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques*, [540].
- Serret: *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes*, [539].
- Serret: *Sur la théorie géométrique des lignes à double courbure*, [538].

1857

- Codazzi: *Memoria sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie qualunque*, [155].
- Codazzi: *Nota intorno ad alcuni teoremi di Dupin*, [156].
- Codazzi: *Intorno ad una linea situata in una supeficie sviluppabile*, [154].

– Codazzi: *Nota intorno le superficie che hanno costante il prodotto dei due raggi di curvatura*, [157].

1858 – Codazzi: *Intorno alia questione: Riportare in una superficie piana o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell' imagine e della figura abbiano le aree in rapporto costante*, [158].

– Bonnet: *Note sur la théorie des surfaces réglées*, [87].

– Gournerie: *Note sur la courbure de la section faite dans une surface par un plan tangent*, [218]

1859 – Lamé: *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, [370].

1860 – Barbier: *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, [21].

– Paul Serret: *Théorie nouvelle géométrique et méchanique des courbes á double courbure*, [542].

– Bonnet: *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, [88].

1861 – Weierstrass: *Úber die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid*, [568].

– Weingarten: *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, [571].

1862 – Bonnet: *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, [89].

– Bour: *Théorie de la déformation des surfaces*, [103].

– Bour: *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre*, [102].

– Enneper: *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, [250], [251], [252].

– Poncelet: *Applications d'analyse et de géométrie*, [480].

– Poncelet: *Traité des propriétés projectives des figures*, [481].

1863 – Puiseux: *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales*, [486].

– Weingarten: *Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungsmesser eine Funktion des anderen ist*, [572].

- Enneper: *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, [254].
- Enneper: *Über die Hauptkrümmungshalbmesser Flächen*, [253].

1864
- Aoust: *Théorie des coordonées curvilignes quelconques*, [7].
- Darboux: *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales*, [180].
- Darboux: *Sur les sections du tore*, [181].
- Darboux: *Théoremes sur l'ntersection d'une sphère et d'une surface de second degrée*, [182].
- Beltrami: *Richerche di analisi applicata alla geometría*, [28].
- Beltrami: *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione*, [27].
- Bertrand: *Traité de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, [48].
- Bonnet: *Démonstration du théorème de Gauss relatif aux petits triangles géodésiques tracés sur une surface courbe quelconque*, [90].
- Enneper: *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, [255].
- Weingarten: *De lineis curvaturae superficierum*, [573].

1865
- Dini: *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dello altro*, [221].
- Dini: *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante*, [222].
- Dini: *Sur les surfaces à courbure constante négative*, [223].
- Beltrami: *Sulla flessione delle superficie rigate*, [29].
- Beltrami: *Sur la courbure de quelques lignes tracèes sur uns surface*, [30].
- Chasles: *Traité des sections coniques*, [143].
- Bonnet: *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, [91].

1866
- Beltrami: *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*, [32].

- Beltrami: *Dimostrazione di due formole del Sig. Bonnet*, [31].
- Enneper: *Bemerkungen über Curven doppelter Krümmung*, [256].
- Weierstrass: *Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflachen*, [569].
- Darboux: *Sur les surfaces orthogonales*, [183].
- Jacobi: *Vorlesungen Uber Dynamik*, [325].

1867
- Bonnet: *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée,*, [92].
- Codazzi: *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria prima e seconda)*, [159].
- Schwarz: *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche*, [526].
- Battaglini: *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, [22].
- Lagrange: *Oeuvres de Lagrange*, [352].

1868
- Beltrami: *Saggio di interpretazione del la geometria non-euclidea*, [34].
- Beltrami: *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, [37].
- Codazzi: *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria seconda e terza)*, [160] i [161].
- Enneper: *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, [257].

1869
- Christoffel: *Uber die Transformation der homogenen Differentialausdrüke zweiten Grades*, [144], [145].
- Dini: *Sopra un problema che si presenta nella teoria delle rappresentazione geografiche du una superficie su di un'altra*, [224].
- Aoust: *Analyse infinitésimal des courbes sur une surface quelconque*, [13].
- Lie: *Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie*, [391].

1870
- Codazzi: *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria quarta)*, [162].

- Ribaucour: *Note sur la déformation des surfaces*, [499].
- Enneper: *Über asymptotische Linien*, [258].
- Gauss: *Carl Friedrich Gauss Werke*, [297].
- Joachimsthal: *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, [335].
- Lie: *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, [407].
- Lie: *Sur une transformation géométrique*, [392].

1871
- Codazzi: *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria quinta)*, [163].
- Darboux: *Sur une classe particulière de surfaces réglèes*, [190].
- Beltrami: *Observazione sulla nota del Prof. Schlaefli*, [38].
- Klein: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [339].
- Schlaefli: *Nota alla Memoria del sig. Beltrami "Sugli spazi di curvatura constante"*, [525].
- Lie: *Über diejenigen ebenen Kurven*, [408].

1872
- Darboux: *Sur une classe remarcable de Courbes et de Surfaces algébriques*, [191].
- Schwarz: *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen*, [527].
- Joachimsthal: *Anwendung Der Differential Und Integralrechnung Auf Die Allgemeine Theorie Der Flachen Und Der Linien Doppelter Krummung*, [336].
- Joachimsthal: *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, [337], [338].
- Ribaucour: *Note sur les développées des surfaces*, [501].
- Ribaucour: *Sur la théorie des lignes de courbure*, [503].
- Ribaucour: *Sur les systèmes cycliques*, [510].
- Lie: *Über Complexe, insbesondere Linie und Kugel-Complexe*, [393].

1873
- Plateau: *Statique expérimentale et théorique des liquids sourmis aux seules forces moléculaires*, [475].

- Klein: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, [340].
- Aoust: *Analyse infinitésimal des courbes planes*, [14]. Ribaucour: *Sur les faisceaux de cercles*, [504].
-

1875 – Enneper: *Bemerkungen über die Biegung einiger Flächen*, [261].

1876 – Aoust: *Analyse infinitésimal des courbes de l'espace*, [17].

1877 – Lie: *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal Flächen*, [394].

- Braunmühl: *Die geodätischen Linien der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung*, [106].

1878 – Enneper: *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien*, [262].

- Braunmühl: *Übre Geodätische Linien auf Rotationflächen*, [107].
- Laplace: *Oeuvres completes*, [376].
- Lie: *Sätze über Minimalflächen*, [395], [396], [397].

1879 – Lie: *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung*, [400].

- Lie: *Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven*, [399].
- Lie: *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen*, [398].
- Braunmühl: *Über Enveloppen geodätischer Linien*, [108].

1880 – Darboux: *Sur le contact des coniques et des surfaces*, [195].

- Lie: *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation*, [401].

1881 – Ribaucour: *Étude des élassoïdes*, [508].

1882 – Lie: *Untersuchungen über geodätische Kurven*, [403].

- Lie: *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind*, [402].

- Lie: *Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen*, [404].
- Darboux: *Sur la représentation sphèrique des surfaces*, [197].
- Braunmühl: *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades*, [111].
- Cauchy: *Oeuvres complètes*, [127].
- Enneper: *Beiträge zur Theorie der Flächen mit besonderer Rücksicht auf die Minimalflächen*, [263].

1883
- Codazzi: *Memoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres*, [164].
- Darboux: *Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes*, [198].
- Darboux: *Sur la représentation sphérique des surfaces*, [199].
- Darboux: *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, [200].
- Darboux: *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, [201].
- Darboux: *Sur l'equation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante*, [202].
- Bonnet fill: *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand*, [59].
- Bonnet fill: *Démonstration des proprietés fondamentales du système de coodonnées polaires géodésiques*, [58].

1884
- Lie: *Über die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreis einer Fläche*, [405].
- Lie-Klein: *Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten*, [409].
- Weingarten: *Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen*, [574].

1885
- Bonnet: *Sur la surface réglée minima*, [94].

1886
- Bianchi: *Lezioni di geometria differentziale*, [49].

– Darboux: *Sur la théorie des surfaces minima*, [203].

1887 – Darboux: *Leçons sur la théorie generale des surfaces*, [204].

– Darboux: *Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima*, [205].

– Weierstrass: *Úber eine Besondere Gattung von Minimalflächen*, [570].

– Weingarten: *Über die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche*, [575].

1888 – Darboux: *Sur la représentation sphérique des surfaces*, [206].

1890 – Darboux: *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, [207].

1896 – Cesàro: *Lezioni di Geometria Intrinseca*, [129].

– Weingarten: *Sur la déformation des surfaces*, [576].

1897 – Hill: *Bibliography of surfaces and twisted curves*, [321].

1898 – Darboux: *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, [208].

1899 – Liebmann: *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, [410].

– Darboux: *Sur les surfaces isothermiques*, [210].

– Hilbert: *Grundlagen der geometrie*, [319].

– Hilbert: *Sophus Lie*, [209].

Segle XX

1901 – Scheffers: *Anwendung der Differential und Integral rechnung auf Geometrie*, [524].

– Loria: *ugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, [420].

1905 – Gullstrand: *Zur kenntnis der kreispunkte*, [315].

1908 – Blaschke: *Bemerkungen über allgemeine achraubenlinien*, [53].

– Darboux: *Les origines, les méthodes et les problémes de la Géometrie infinitessimal*, [212].

1909 – Eisenhart: *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, [243].

1912 – Darboux: *Eloges académiques et discours*, [213].

– Kneser: *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven*, [343].

– Bonola: *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, [96].

1917 – Darboux: *Principes de Géométrie Analytique*, [214].

1918 – Eisenhart: *Darboux's contribution to geometry*, [244].

1921 – Blaschke: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, [54].

1928 – Appell: *Le problème géométrique des déblais et remblais*, [18].

1931 – Mellish: *Notes on Differential Geometry*, [427].

1950 – Blaschke: *Einführung in die Differentialgeometrie*, [55].

– Kreyszig: *Differential Geometry*, [345].

Bibliografia

[1] Judit Abardia, Agustí Reventós, and Carlos J. Rodríguez, *What did Gauss read in the* Appendix ?, Historia Mathematica **39** (2012), 292–323.

[2] M. A. Akivis and B. A. Rosenfeld, *Élie Cartan (1869-1951)*, AMS, 1993, Translations of Mathematical Monographs, 123.

[3] André-Marie Ampère, *Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices, avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes*, Journal de l'École Polytechnique **14** (1808), 159–181, presentat el 1803.

[4] Abbé Aoust, *Théorie géométrique des coordonnées curvilignes quelconques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **54** (1862), 461–463.

[5] ______, *Des transformations doubles des figures. Transformation des figures par normales à la sphère réciproques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **56** (1863), 906–909.

[6] ______, *Sur la courbure des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **57** (1863), 217–219.

[7] ______, *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **6** (1864), serie 1 (Roma) 65–87, també Imprimerie de propagande Fide, Rome.

[8] ______, *Sur la courbure des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **3-4** (1866), ser. 6, 240–244.

[9] ———, *Remarques et réclamation faites relativement au mémoire de Mr. Gilbert*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **26** (1868), 471–480.

[10] ———, *Sur la théorie des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1868), ser. 6, 102–106.

[11] ———, *Sur un principe de la théorie des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1868), ser. 6, 24–29.

[12] ———, *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **2** (1868), serie 2 (Milano) 39–64; Vol 3, serie 2, 55–69; Vol 5 (1871), serie 2, 261–288, també Imprimerie de propagande Fide, Rome.

[13] ———, *Analyse infinitésimal des courbes sur une surface quelconque*, Gauthier-Villars, París, 1869.

[14] ———, *Analyse infinitésimal des courbes planes*, Gauthier-Villars, París, 1873.

[15] ———, *Des surfaces coordonnées telles, qu'en chaque point considéré comme centre d'une esphère de rayon constant, les normales aux surfaces déterminent sur cette sphère les sommets d'un triangle sphérique d'aire constante*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **81** (1875), 963–966.

[16] ———, *Notice sur les titres er travaux scientifiques de M. L'Abbé Aoust*, Typ. et Lith. Barlatier-Feissat et Demonchy, Marseille, 1875.

[17] ———, *Analyse infinitésimal des courbes de l'espace*, Gauthier-Villars, París, 1876.

[18] Paul Appell, *Le problème géométrique des déblais et remblais*, Mémorial des Sciences mathématiques **XXVII** (1928), 1–36.

[19] Arago, François, *Biographie de Gaspard Monge*, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France **XXIV** (1854), I–CLVII, Lue à la séance publique du 11 mai 1846.

[20] Nicola Arcozzi, *Beltrami's Models of Non-Eucidean Geometry*, Mathematicians in Bologna 1861-1960. Birkhauser (2012), 1–30.

[21] Joseph-Émile Barbier, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **5** (1860), 273–86.

[22] Giuseppe Battaglini, *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*, Giornale di Matematica, Napoli **5** (1867), 217–231.

[23] Bruno Belhoste, *Gaspard Monge: Urgences revolutionnaires et utopie*, Association française pour le M.U.R.S **17** (1989), 55–75.

[24] Eugenio Beltrami, *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie*, Annali di Matematica pura ed applicata **IV** (1861), 283–284, *Opere Mathematiche I*, 36-37.

[25] ______, *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **IV** (1861), 102–108, *Opere Mathematiche I*, 1-7.

[26] ______, *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **IV** (1861), 257–283, *Opere Mathematiche I*, 8-35.

[27] ______, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione*, Annali di Matematica pura ed applicata **VI** (1864), no. serie I, 271–279, *Opere Mathematiche I*, 199-208.

[28] ______, *Richerche di analisi applicata alla geometría*, Giornale di Matematiche **II** (1864), 267–282, 297–306, 331–339, 355–375, *Opere Mathematiche I*, 107-198.

[29] ______, *Sulla flessione delle superficie rigate*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **VII** (1865), 271–279, Opere Matematiche, [39], vol. 1, p. 208-244.

[30] ______, *Sur la courbure de quelques lignes tracèes sur uns surface*, Nouvelles Annales de Mathématiques **IV** (1865), 258–267, Opere Matematiche, [39], vol. 1, p. 255-262.

[31] ______, *Dimostrazione di due formole del Sig. Bonnet*, Giornale di Matematiche **4** (1866), 123–127, *Opere Mathematiche I*, p. 301.

[32] ———, *Risoluzione del problema: "riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **VII** (1866), 185–204, *Opere Mathematiche I*, 262-275.

[33] ———, *Sulle proprietá generali delle superficie d'area minima*, Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de Bologne **7** (1867), 412–481, Opere Matematiche, [39], vol. 2, XXVII, p. 1-54.

[34] ———, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematica, **6** (1868), 248–312, traducció francesa: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 6, (1869) 215-286, Gauthier-Villars, París.

[35] ———, *Sulla teoria dei parametri differenziali*, Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de Bologne **8** (1868), 552–590, Opere Matematiche, [39], vol. 2, p. 74-118.

[36] ———, *Sulle teoria generali delle superficie*, Atti dell'Ateneo Veneto **5** (1868), 535–542, Opere Matematiche, [39], vol. 2, XXVIII, p. 55-62.

[37] ———, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **II** (1868), 232–255, versió francesa: *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante*, Annales Scientifiques de l'É.N.S. Premier série **6** (1869), 347-375. Vegeu també [39], vol. 1, p. 406.

[38] ———, *Observazione sulla nota del Prof. L. Schlaefli alla memoria del Sig. Beltrami 'Sulla spazii di curvatura constante'*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **V** (1871), 194–198.

[39] ———, *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Hoepli, Milano, 1902, Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, dos volums.

[40] Johannis Bernoulli, *Opera Omnia*, Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, Lausanne & Geneve, 1742, 4 vol.

[41] Joseph Bertrand, *Démonstration d'un théorème de Géométrie*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1842), 214–216.

[42] ______, *Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales*, Journal de l'École Royale Polytechnique **28 cahier, tome XVII** (1843), 157–173.

[43] ______, *Démonstration d'un théorème de Géométrie*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **8** (1843), 209–214.

[44] ______, *Note sur la théorie des surfaces isothermes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **21** (1845), 570–571.

[45] ______, *Démonstration d'un théorème de Gauss, suivi d'une Note de M. Diguet*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13** (1848), 80–86.

[46] ______, *Démonstrations géométriques de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13** (1848), 73–79.

[47] ______, *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **15** (1850), 332–350.

[48] ______, *Traité de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Gauthier Villars, París, 1864.

[49] Luigi Bianchi, *Lezioni di geometria differentziale*, Nistri, Pisa, 1886, edició litogràfica. Posteriorment apareixen tres volums, editats per Enrico Spoerri, Pisa, 1894, 1902,1909.

[50] ______, *Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali*, Rendiconti Accademia dei Lincei **4** (1890), 435–438, [52], III, p. 307-312.

[51] ______, *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, General Relativity and Gravitation **33** (1897), n.12, 2171–2253, [52], IX, 17-109.

[52] ______, *Opere: Corrispondenza*, vol. 11, A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Richerche, Edizioni Cremonese, Roma, 1959.

[53] Wilhelm Blaschke, *Bemerkungen über allgemeine schraubenlinien*, Monatsshefte für Mathematik **19** (1908), no. 1, 188–204.

[54] ———, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, Julius Springer, Berlin, 1921-1929, vol. 1, Elementare Differentialgeometrie; vol. 2, Affine Differentialgeometrie; vol. 3, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln.

[55] ———, *Einführung in die Differentialgeometrie*, Julius Springer, Berlin, 1950.

[56] János Bolyai, *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, Polygon, Szeged, 2002 (treball original 1831), amb una traducció a l'hongarès per Rados Ignàcz, 1897, i a l'anglès per George Bruce Halsted, 1897.

[57] ———, *The science of absolute space*, suplement a [96], traduït per George Bruce Halsted, el treball de Bolyai és de 1831.

[58] Georges Ossian Bonnet, *Démonstration des proprietés fondamentales du système de coodonnées polaires géodésiques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **97** (1883), 1422–1424.

[59] ———, *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **97** (1883), 1360–1362.

[60] Pierre Ossian Bonnet, *Sur quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **19** (1844), 980–982.

[61] ———, *Mémoire sur la théorie des corps élastiques*, Journal de l'Ècole Polytechnique **18** (1845), trentième cahier, 171–191.

[62] ———, *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales*, Journal de l'Ècole Polytechnique **18** (1845), trentième cahier, 141–164.

[63] ———, *Note sur les ombilics des surfaces*, Journal de l'Ècole Polytechnique **18** (1845), trentième cahier, 165–171.

[64] ———, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique **19** (1848), trente–deuxième cahier, 1–146.

[65] ______, *Sur la théorie des surfaces orthogonales et isothermes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **29** (1849), 506–511.

[66] ______, *Sur les surfaces isothermes et orthogonales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **14** (1849), 401–416.

[67] ______, *Note sur la théorie générale des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **33** (1851), 89–92.

[68] ______, *Note sur quelques points de la théorie des surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **12** (1851), 191–192.

[69] ______, *Sur la théorie mathématique des cartes géographiques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **17** (1852), 301–340.

[70] ______, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 219–22.

[71] ______, *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, Journal de l'École Polytechnique **20** (1853), 117–306.

[72] ______, *Mémoire sur les surfaces à lignes de courbure sphériques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 291–294.

[73] ______, *Note sur la théorie générale des surfaces*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1853), 529–532.

[74] ______, *Note sur les développées des surfaces à lignes de première courbure planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 1046–1050.

[75] ______, *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 81–84.

[76] ______, *Troisième note sur les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 585–587.

[77] ______, *Deuxième note sur les lignes géodésiques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **41** (1855), 32–35.

[78] ______, *Observations sur les surfaces minima*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **41** (1855), 1057–1058.

[79] ______, *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation générale des surfaces à aire minimum*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **40** (1855), 1107–1110.

[80] ______, *Sur les lignes géodésiques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **41** (1855), 32–35.

[81] ______, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **40** (1855), 1311–1313.

[82] ______, *Note sur la courbure géodésique*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 1137–1139.

[83] ______, *Note sur un genre particulier des surfaces réciproques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 485–487.

[84] ______, *Nouvelles remarques sur les surfaces à area minima*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 532–535.

[85] ______, *Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 1067–1070.

[86] ______, *Sur les surfaces pour lesquelles la somme des deux principaux rayons de courbure est égale au double de la normale*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 110–112.

[87] ______, *Note sur la théorie des surfaces réglées*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **46** (1858), 906.

[88] ______, *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués **V** (1860), 2$^{\text{ème}}$ série, 153–266.

[89] ______, *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **54** (1862), 554–559,655–659.

[90] ______, *Démonstration du théorème de Gauss relatif aux petits triangles géodésiques tracés sur une surface courbe quelconque*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **58** (1864), 183–188.

[91] ———, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, Journal de l'École Polytechnique **25** (1865), 209–230, cahier 41.

[92] ———, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, Journal de l'École Polytechnique **25** (1867), 1–151, cahier 42.

[93] ———, *Discours prononcé aux funérailles de M. Serret, au nom de l'Académie et de la Faculté des Sciences*, Bulletin des Sciences Mathématiques, París **9** (1885), 126–130.

[94] ———, *Sur la surface réglée minima*, Bulletin des Sciences Mathématiques, París **9** (1885), 14–15.

[95] ———, *Remarque sur une communication de M. Paraf*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **106** (1888), 1141.

[96] Roberto Bonola, *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, Dover, 1955, Primera edició de 1912. Conté la traducció de *l'Appendix* de J. Bolyai, i la de la *The theory of parallels* de N. I. Lobatxevski.

[97] Jean Claude Bouquet, *Note sur les surfaces orthogonales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 446–450.

[98] ———, *Remarque sur les systèmes de droites dans l'espace*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 125–128.

[99] ———, *Mémoire sur les propriétés d'un système de droites dont chacune correspond à un point déterminé de l'espace*, Mémoires de l'Académie des sciences belles-lettres et arts de Lyon (1848), 385–401.

[100] ———, *Démonstration d'un théorème de Gauss concernant la courbure des surfaces*, una nota al final del llibre de Cournot, *Traité de la théorie des fonctions*, Hachette, París (1857), 488–492.

[101] Edmon Bour, *Sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1855), 185–200.

[102] ______, *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre*, Journal de l'École Polytechnique **22** (1862), 149–192.

[103] ______, *Théorie de la déformation des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique **22** (1862), 1–148.

[104] ______, *Sur les lignes d' d'un hélicoide quelconque*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **1-2** (1864), ser. 6, 74–75.

[105] Margaret Bradley, *Charles Dupin (1784-1873) and His Influence on France*, Cambria Press, 2012.

[106] Anton von Braunmühl, *Die geodätischen Linien der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung*, Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des Königlichen Polytechnikums zu München **Serie II, Nr.3, VIII** (1877), 1–5, unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

[107] ______, *Über Geodätische Linien auf Rotationflächen und jene Einhüllenden derseleben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden*, Universität München. Akademische Buchdruckerei von F. Straub (1878), 1–52, Inaugural-Dissertation einer hohen philosophischen Facultät der Universität München.

[108] ______, *Über Enveloppen geodätischer Linien*, Mathematische Annalen **14** (1879), 557–566.

[109] ______, *Über Enveloppen geodätischer Linien auf dem venlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoid*, Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des Königlichen Polytechnikums zu München **XVIII** (1880), unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

[110] ______, *Ueber die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren*, Abhandlungen der Königl Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig **14** (1881), 93–110.

[111] ______, *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades*, Mathematische Annalen **XX** (1882), 557–586.

[112] Francesco Brioschi, *Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie (Lettera al prof. B. Tortolini)*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **III** (1852), 271–276, també, Vol I de [114], p.11-13.

[113] ______, *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **IV** (1853), 50–61, *Opere Mathematiche I*, 8-35.

[114] ______, *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, Pubblicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli), Milano, U. Hoepli, 1901-1909.

[115] Ch. Buchonnet, *Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice*, Nouvelles Annales de Mathématiques **9** (1870), ser.2, 457–463.

[116] L. Carré, *Méthode pour la rectification des lignes courbes par les tangents*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1701), 159–163.

[117] ______, *Rectification de la Cicloide*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1701), 163–170.

[118] Josep Casadellà, *Recreació del descobriment Newtonià de la llei de gravitació*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **14** (1999), 41–61.

[119] Eugène Charles Catalan, *Sur les surfaces gauches à plan directeur*, Journal de l'École Polytechnique **17** (1843), cahier 29, 121–156.

[120] ______, *Sur les trajectoires othogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **12** (1847), 483–491.

[121] ______, *Note sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, soint égaux et de signes contraires*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **41** (1855), 35–38; 1019–1022.

[122] ______, *Note sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, soint égaux et de signes contraires*, Journal de l'École Polytechnique **21** (1858), cahier 37, 129–168.

[123] Augustin-Louis Cauchy, *Exercices de Mathématiques (anciens exercices)*, Chez de Bure Fréres, Rue Serpente, n.7, París, 1826, segona edició a *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, Serie 2, Vol 6 i Vol 8, Gauthiers-Villars et Fils, 1828, [127].

[124] ———, *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géometrie*, Imprimerie Royale, Chez de Bure Frères, Libraires du Roi et de la Bibliothéque du Roi, rue Serpente n. 7, París, 1826.

[125] ———, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, Mémoires de l'Académie des Sciences, **22** (1845), 3–14, *Oeuvres complètes*, vol. 2, p. 167-178, [127].

[126] ———, *Rapport sur un Mémoire de M. Ossian Bonnet, concernant quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **21** (1845), 564–566, *Oeuvres complètes*, p. 275-277.

[127] ———, *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*, Gauthiers-Villars et Fils, 1882-1974.

[128] Arthur Cayley, *Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs courbes de courbure et sur la théorie de Dupin*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **74** (1872), 1445–1449.

[129] Ernesto Cesàro, *Lezioni di Geometria Intrinseca*, Presso l'autore-editore: via Sapienza 29, Napoli, 1896.

[130] Michel Chasles, *Premier mémoire sur la transformation des relations métriques des figures*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **5** (1829), 281–324.

[131] ———, *Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles **5** (1829), 1–80.

[132] ———, *Extrait d'un mémoire de géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **6** (1830), 289–295.

[133] ______, *Propriétés générales des surfaces du deuxième degré*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **6** (1830), 312–314.

[134] ______, *Second mémoire sur les transformations paraboliques des relations métriques des figures*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **6** (1830), 1–25.

[135] ______, *Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **6** (1830), 255–258.

[136] ______, *Théorèmes sur les surfaces du second degré*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **8** (1830), 215–216.

[137] ______, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, M.Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1837.

[138] ______, *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite; particulièrement sur l'hyperboloïde, le paraboloïde et le cône du second degré*, Corresp. Mathem. et Phys. Publiée par A. Quetelet **11** (1839), 49–112.

[139] ______, *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace*, Comptes Rendues hebdomadaires de l'Académie de Sciences de Paris **16** (1843), 1420–1432.

[140] ______, *Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales; et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 105–119.

[141] ______, *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 5–20.

[142] ______, *Traité de géométrie superieure*, Bachelier, Paris, 1852.

[143] ______, *Traité des sections coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1865.

[144] Erwin B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrüke zweiten Grades*, Journal für Mathem. **70** (1869), 46–70.

[145] ______, *Über ein die Transformation der homogenen Differentialausdrüke zweiten Grades betreffendes Theorem*, Journal für Mathem. **70** (1869), 241–245.

[146] Alexis Claude Clairaut, *Rechereches sur les courbes a double courbure*, Nyon, Didot et Quillau, París, 1731.

[147] ______, *Determination Géométrique de la perpendiculaire a la meridienne tracée par M. Cassini; Avec plusieurs Methodes d'en tirer la grandeur et la figure de la Terre*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1733), 406–416, presentat 5 desembre 1733.

[148] ______, *Solution de plusieurs problemes oú il s'agit de trouver des Courbes dont la propiété consiste dans une certain relation entre leurs branches, exprimé par une equation donée*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences (1734), 196–215.

[149] ______, *Sur la nouvelle methode de M. Cassini, pour connaître la figure de la Terre*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1735), 117–122.

[150] ______, *Des épicycloïdes sphériques*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1737), 289–294, presentat el 1732.

[151] ______, *Eléments de géométrie*, Chez David Fils, Libraire, roë Saint Jaques, à la Plume d'or, París, 1741.

[152] ______, *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'Hydrostatique*, Chez Durand, Libraire, ruë Sain-Jacques á Saint Landry et au Griffon, París, 1743.

[153] Delfino Codazzi, *Intorno alla superficie quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **7** (1856), 410–416.

[154] ______, *Intorno ad una linea situata in una supeficie sviluppabile*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **8** (1857), 165–167.

[155] ______, *Memoria sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo dei centri di curvatura di una superficie qualunque*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **8** (1857), 129–164.

[156] ———, *Nota intorno ad alcuni teoremi di Dupin*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **8** (1857), 309–324.

[157] ———, *Nota intorno le superficie che hanno costante il prodotto dei due raggi di curvatura*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **8** (1857), 346–355.

[158] ———, *Intorno alia questione: Riportare in una superficie piana o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell' imagine e della figura abbiano le aree in rapporto costante*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **1** (1858), 89–109.

[159] ———, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (Memoria prima e seconda)*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **1** (1867-1868), 293–316.

[160] ———, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (memoria seconda)*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **2** (1868-1869), 101–119.

[161] ———, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (memoria terza)*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **2** (1868-1869), 269–287.

[162] ———, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (memoria quarta)*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **4** (1870-1871), 10–24.

[163] ———, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (memoria quinta)*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **5** (1871-1873), 206–222.

[164] ———, *Memoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, envoyé au concours ouvert sur cette question en 1859 par l'académie des sciences*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **27** (1883), 1–47, Publicat 10 anys després de la seva mort.

[165] Edouard Combescure, *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **2** (1859), 278–285.

[166] ———, *Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **62** (1863), 174–187.

[167] ———, *Sur un triple système particulier de surfaces orthogonales*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **5** (1863), 39–51.

[168] ———, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **58** (1864), 1086–1087.

[169] ———, *Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangent à une courbe fixe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **63** (1864), 332–358.

[170] ———, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Paris **IV** (1867), 93–131.

[171] ———, *Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **80** (1875), 33–51.

[172] ———, *Sur les paramètres différentilles des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **7** (1878), 409–434.

[173] ———, *Sur la'pplication des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **105** (1887), 434–435.

[174] ———, *Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces rigides*, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure **5** (1888), 49–78.

[175] E. Cosserat, *Sur la théorie des lignes tracées sur une surface*, Mémoires de l'Académie royale des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse **7** (1895), Ser. 9, 366–394.

[176] ———, *Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une esphère*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **CXX** (1895), 1252–1254.

[177] Gabriel Cramer, *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*, Chez les Freres Cramer & Cl. Philibert, Geneve, 1750.

[178] Arthur Hill Curtis, *Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **1** (1856), 223–229.

[179] ______, *Sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **3** (1858), 79–83.

[180] Gaston Darboux, *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **59** (1864), 240–242.

[181] ______, *Sur les sections du tore*, Nouvelles Annales de Mathématiques **3** (1864), Ser. 2, 156–165.

[182] ______, *Théoremes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface de second degrée*, Nouvelles Annales de Mathématiques **3** (1864), Ser. 2, 199–202.

[183] ______, *Sur les surfaces orthogonales*, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure **3** (1866), 97–141.

[184] ______, *Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces*, Comptes Rendues de l'Académie de Sciences **68** (1868), 1311.

[185] ______, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **67** (1868), 1333–1334.

[186] ______, *Sur les systèmes de surfaces orthogonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **67** (1868), 1101–1103.

[187] ______, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **68** (1869), 253–256.

[188] ______, *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **69** (1869), 392–394.

[189] ______, *Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **73** (1871), 732–737.

[190] ______, *Sur une classe particulière de surfaces réglées*, Bulletin de Sciences Mathématiques **2** (1871), 301–314.

[191] ______, *Sur une classe remarcable de Courbes et de Surfaces algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*, Hermann, París, 1872.

[192] ______, *Sur le probléme des surfaces orthogonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **76** (1873), 160–163.

[193] ______, *Sur l'equation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **76** (1873), 83–86.

[194] ______, *Mémoire sur la Théorie des coordonnées curvilignes et des systemes orthogonaux*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Paris **VII** (1878), 101–150, 227–260.

[195] ______, *Sur le contact des coniques et des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **91** (1880), 969–971.

[196] ______, *Sur le déplacement d'une figure invariable*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **92** (1881), 118–121.

[197] ______, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **94** (1882), 120–122, 158–169, 1290–1293, 1343–1345.

[198] ______, *Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes*, Bulletin des Sciences Mathématiques **7** (1883), 257–276.

[199] ______, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **96** (1883), 366–368.

[200] ______, *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **97** (1883), 848–850.

[201] ______, *Sur les surfaces à courbure constante*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **97** (1883), 892–894.

[202] ______, *Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **97** (1883), 946–949.

[203] ______, *Sur la théorie des surfaces minima*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **102** (1886), 1513–1519.

[204] ______, *Leçons sur la theorie generale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, Gauthier Villars et Fils, París, 1887, 4 vol. de 1887, 1889, 1894, 1896 respectivament.

[205] ______, *Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **104** (1887), 728–733.

[206] ______, *Sur la représentation sphérique des surfaces*, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure **5** (1888), 79–96.

[207] ______, *Sur les surfaces dont la courbure totale est constante*, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure **7** (1890), 9–18.

[208] ______, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars, París, 1898, segona edició 1910.

[209] ______, *Sophus Lie*, Comptes Rendues de l'Académie de Sciences **t.128** (1899), 525–529.

[210] ______, *Sur les surfaces isothermiques*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **16** (1899), Ser. 3, 491–508.

[211] ______, *Étude sur le développement des méthodes géométriques*, Gauthier-Villars, Paris (1904), 1–34, Congrès des Sciences et des Arts a Saint-Louis.

[212] ______, *Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale*, Bulletin de Sciences Mathématiques **32** (1908), 106–122.

[213] ______, *Eloges académiques et discours*, Comité du Jubilé Scientifique de M. Gaston Darboux ed., Librairie Scientifique Hermann et Fils, París, 1912.

[214] ______, *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars, París, 1917.

[215] Jules de la Gournerie, *Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des héliçoides gauches*, Journal de l'École Polytechnique **XX** (1851), cahier 34, 1–100.

[216] ______, *Mémoire sur les courbes d'ombre et de perspective des surfaces de révolution*, Journal de l'École Polytechnique **XX** (1853), cahier 35, 29–68.

[217] ______, *Étude sur la courbure des surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **1** (1855), 145–156.

[218] ______, *Note sur la courbure de la section faite dans une surface par un plan tangent*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **3** (1858), série 2, 73–78.

[219] Jean Delcourt, *Analyse et géométrie: les courbes gauches de Clairaut à Serret et Frenet*, Université Pierre et Marie Curie (2007), 1–302, Thèse de doctorat de L'Université de Paris VI.

[220] ______, *Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches. De Clairaut à Darboux*, Arch. Hist. Exact. Sci. (2011), 229–293.

[221] Ulisse Dini, *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dello altro*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **7** (1865), 205–210.

[222] ______, *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **7** (1865), 5–18.

[223] ______, *Sur les surfaces à courbure constante négative, et sur celle applicables sur les surfaces à aire minima*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **60** (1865), 340–341.

[224] ______, *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un'altra*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **3** (1869), 269–93.

[225] ______, *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **(2) 4** (1870), 175–206.

[226] Peter Dombrowski, 150 *years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astérisque, **62** (1979), 97–153, with the Latin original Gauss version.

[227] Joâo Caramalho Domingues, *Lacroix and the calculus*, Birkhauser, Basel, 2008.

[228] Waldo G. Dunnington, *Carl Friederich Gauss. Titan of Science*, The Mathematical Association of America, 2004, with additional material by Jeremy Gray and Fritz-Egbert Dohse.

[229] Charles Dupin, *Analyse d'un mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique (1807), 218–225, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[230] ______, *Sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré*, Journal de l'École Polytechnique (1808), cahier XIV, 45–83.

[231] ______, *Analyse de plusieurs mémoires de géométrie*, Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique (1812), 387–396, Editat per Hachette, Gener 1809-Mars 1813.

[232] ______, *Mémoire sur la sphère tangente à trois ou à quatre autres*, Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique (1812), 420–425, Editat per Hachette, Gener 1809-Mars 1813.

[233] ______, *Développements de Géométrie, avec des applications à la stabilité des Vaisseaux, aux Déblais et Remblais, au Défilement, à l'Optique, etc.*, M.V. Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n. 57, París, 1813, pour faire suite a la *Géométrie Descriptive* et a la *Géométrie Analytique* de M. Monge.

[234] ______, *Sur un Mémoire relatif à la stabilité des corps flottants*, Annales de Gergonne **5** (1814), 173–183.

[235] ______, *Recherche du plan osculateur et du centre de courbure d'une ligne courbe, en un point donné*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1816), 18–23.

[236] ______, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, Bachelier, París, 1819.

[237] ______, *Applications de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts-et-chausses, etc., pour faire suite aux "Développments de géométrie"*, París, 1822.

[238] ______, *Géométrie et Mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts*, C. J. De Mat Fils et H. Remy, Bruxelles, 1826.

[239] ______, *Premier Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **25** (1847), 689–696.

[240] ______, *Mémoire sur les éléments du troisième ordre de la courbure des lignes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **26** (1848), 321–325.

[241] ______, *Troisème Mémoire sur les éléments du troisième ordre de la courbure des lignes; valeurs spéciales données par le télégraphe géométrique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **26** (1848), 393–398.

[242] ______, *Sur les surfaces de second degré*, Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique (pluviose, an XIII, 1804), 144–148, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[243] Luther P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, 1909.

[244] ______, *Darboux's contribution to geometry*, Bulletin of the American Mathematical Society **24** (1918), 227–237.

[245] ______, *Transformations of Surfaces*, Princeton University Press, 1923.

[246] ______, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1926.

[247] ______, *Continuous groups of transformations*, Princeton University Press, 1933.

[248] ______, *An Introduction to Differential Geometry With Use of the Tensor Calculus*, Princeton University Press, 1940.

[249] Eisenman, *Stéréotomie*, Journal de l'École Polytechnique **I** (1794-1796), 2^{nd} cahier, 100–106; 3^{eme} cahier, 440–442; 4^{eme} cahier, 619–622.

[250] Alfred Enneper, *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **7** (1862), 75–92.

[251] ______, *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **7** (1862), 313–327.

[252] ______, *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **7** (1862), 365–384.

[253] ______, *Über die Hauptkrümmungshalbmesser Flächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **8** (1863), 410–428.

[254] ______, *Über einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **8** (1863), 241–263.

[255] ______, *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **9** (1864), 96–125.

[256] ______, *Bemerkungen über Curven doppelter Krümmung*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen (1866), 134–140.

[257] ______, *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen (1868), 421–443.

[258] ______, *Über asymptotische Linien*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen **12** (1870), 493–510.

[259] ______, *Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen*, Mathematische Annalen **2** (1870), 587–623.

[260] ______, *Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Curven auf Flaechen*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen (1871), 577–583.

[261] ______, *Bemerkungen über die Biegung einiger Flächen*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen (1875), 129–162.

[262] ______, *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien*, Abhandlungen der Königlichen gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische Classe; Bd. XXIII, Bd. XXVI, 1878, 12 edicions entre 1878 i 1880.

[263] ______, *Beiträge zur Theorie der Flächen mit besonderer Rücksicht auf die Minimalflächen*, Nachrichten von der Königlichen Akademie der Wissenschaften und der George-Augusts-Universität zu Göttingen (1882), 89–120.

[264] José J. Etayo, *Las bases de la Geometría Diferencial*, Historia de la Matemática en el siglo XIX; Real Academia de Ciencias (1993), 171–190.

[265] Leonhard Euler, *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente*, Comentarii Academiae Scientiarum Imperials Petropolitanae Sant Petersburg **3** (1732, rebut el 1728), 110–123, *Opera Omnia*, Serie 1, vol. 25, p. 1-12.

[266] ______, *De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus*, Comentarii Academiae Scientiarum Imperials Petropolitanae Sant Petersburg **8** (1736), 66–85, Rebut el 1735. *Opera Omnia*, Serie 1, vol. 22, p. 83-107.

[267] ______, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, Marcum-Machalem Bousquet & Socios, Lausanne-Geneve, 1744, *Opera Omnia*, Serie1, Volum 24.

[268] ______, *Solutio problematis catoptrici in his actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi* , Nova acta eruditorum **11** (1746), 230–233, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 27, pp. 74 - 77.

[269] ______, *Sur quelques propriétés des Sections coniques qui conviennent a un infinite d'autres lignes courbes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin **3** (1746), 71–98.

[270] ______, *Introductio in analysin infinitorum*, vol. Volume 2, Adolf Krazer et Ferdinand Rudo, 1748, escrit el 1745, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 9.

[271] ______, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin **16** (1767), 119–143, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 28. pp. 1-22.

[272] ______, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Imperials Petropolitanae Sant Petersburg **11** (1767), 103–123, *Opera Omnia*: Serie 1, Volum 26, pp. 139 - 157.

[273] ______, *Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, Sant Petersburg **14** (1770), 46–71, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 28. pp. 120-141.

[274] ______, *De curva rectificabili in superficie sphaerica*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae Sant Petersburg **15** (1771), 195–216, *Opera Omnia*: Serie 1, vol. 28. pp. 142-160.

[275] ______, *De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet*, Novi Comentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae **XVI** (1772), 3–34.

[276] ______, *De curvis triangularibus*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae, presentat a St. Petersburg Academy el 12 de Maig, 1774. (1778,1781), 3–30, *Opera Omnia* Serie I, vol. 28, pp. 298-321.

[277] ______, *Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae (1782), 19–57, *Opera Omnia*, Serie 1, vol. 28, p. 348-381.

[278] Eugène Fabry, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **IX** (1892), 177–196.

[279] ______, *Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **IX** (1892), 158–161.

[280] Maurice Fouché, *Sur les courbes algébriques à torsion constante*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **VII** (1890), 335–344.

[281] Jean Baptiste Joseph Fourier, *Notes sur les développées des lignes courbes*, Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier: conservés au cabinet

des manuscrits de la Bibliothèque nationale (fonds français 22501 à 22529) / par Louis Charbonneau. (1801), 22519: 5–7.

[282] ______, *Notes sur les propriétés des lignes courbes*, Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier: conservés au cabinet des manuscrits de la Bibliothèque nationale (fonds français 22501 à 22529) / par Louis Charbonneau. (1801), 22519: 28–32.

[283] ______, *Sur les propriétés des lignes courbes*, Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier: conservés au cabinet des manuscrits de la Bibliothèque nationale (fonds français 22501 à 22529) / par Louis Charbonneau. (1801), 22519: 23–27.

[284] Jean F. Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal à l'usage des candidats à l'École Polytechnique et à l'École normale, des élèves de ces écoles, et des aspirants à la licence en sciences mathématiques*, Hermann Laurent, 1841, Gauthiers-Villars, 1891, 1904.

[285] ______, *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroides quelconques. Programme d'une thèse sur quelques propriétés des courbes à double courbure*, A. Chauvin, Toulouse, 1847, Thèse de doctorat.

[286] ______, *Sur quelques propriétés des courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **17** (1852), 437–447, resultats obtinguts a la seva tesi de 1847.

[287] ______, *Théorèmes sur les courbes gauches*, Nouvelles Annales de Mathématiques **12** (1853), 365–372.

[288] Garcia Azcarate, Ana, *Legendre, la honestidad de un científico*, Nivola, 2002, La matemática en sus personajes, vol.11.

[289] Carl Friedrich Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildenten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird*, Astronomischen Abhandlungen **VI** (1825), 112–145, Traduït a l'italià per E. Beltrami, Annali de Matematica Pura ed Applicata, *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura*

rappresentata, serie 1, 1861, V. 4, 214–232. Veure també [297], Bd. IV, 193-216.

[290] ———, *Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene (Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung)*, Gauss Werke [297] **IX** (1828), 141–194.

[291] ———, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae, **VI** (1828), 99–146, presentat el 8 d'octubre, 1827. Vegeu també [297], vol *IV*, p. 217-258.

[292] ———, *Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda*, Göttingische gelehrte Anzeigen (1831), 625–638.

[293] ———, *Theoria residuorum biquadraticorum: Commentatio secunda*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores **7** (1832), 89–148, reprinted in [297], vol. 2, pp.93-148.

[294] ———, *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **2** (1843), 3–45, Gauss Werke [297], Vol. IV, p.259-301.

[295] ———, *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **3** (1846), 3–43, Gauss Werke [297], Vol. IV, p.301-340.

[296] ———, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, segona ed., Imprimerie de Prudhome, rue Lafayette, 14, Grenoble, 1870, traduïda, anotada i comentada per *M. E. Roger*.

[297] ———, *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. 1-12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, també http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache-/toc/D38910.html.

[298] Sophie Germain, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **7** (1831), 1–29.

[299] Étienne Ghys, *Gaspard Monge. Le mémoire sur les déblais et les remblais*, CNRS, Images des Mathématiques (2012), 1–24, article adjunt a l'obra "Gaspard Monge, le beau, l'utile et le vrai". http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.

[300] Philippe Gilbert, *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **25** (1868), 180–184, l'autor d'aquestes pàgines és Eugène Catalan, actuant com a referee de la revista.

[301] ———, *Réponse aux observations de M. l'Abbé Aoust*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **26** (1868), 480–494.

[302] ———, *Sur la courbure des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1868), ser. 6, 3–8.

[303] ———, *Sur quelques propriétés des trajectories*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique (1868), 288–294.

[304] ———, *Sur quelques propriétés relatives à la courbure des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **3-4** (1868), ser. 6, 226–233.

[305] ———, *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **ser.2, 28** (1869), 31–53.

[306] ———, *Sur les courbes planes à équations trinômes*, Nouvelles Annales de Mathématiques **9** (1870), ser. 2, 370–371.

[307] ———, *Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches*, Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **101** (1885), 52.

[308] Joan Girbau, *Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la geometría diferencial*, Barcelona, [s. n.], 1973.

[309] ______, *La geometria diferencial, de Gauss a Riemann*, El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX (1984), 40–53, Arxius de la secció de Ciències LXXV, Institut d'Estudis Catalans. Edició a cura de *Manuel Castellet*.

[310] ______, *L'home de la campana*, Gregal, 2015.

[311] Claude Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **(3) 7** (1890), 233–264.

[312] ______, *Sur les surfaces qui possèdent un résseau de géodésiques conjuguées*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **110** (1890), 995–997.

[313] ______, *Traité de Géométrie*, Librairie Nony & C. Paris, 1899, El 1903 publica uns complents.

[314] Guitart, *Les coordonées curvilignes de gabriel lamé, représentations des situations physiques et nouveaux objets mathématiques*, Bull Sabix **44** (2009), 119–129, Colloque International Gabriel Lamé, Nantes.

[315] Allvar Gullstrand, *Zur kenntnis der kreispunkte*, Acta Mathematica **29** (1905), 59–100.

[316] Jean Nicolas Pierre Hachette, *De quelques propriétés des rayons de courbure d'une surface*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique (1807), 213–218, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[317] ______, *Sur les plans osculateurs et les rayons de courbure des lignes planes ou à double courbure, qui résultent de l'intersection de deux surfaces*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1816), 24–27.

[318] Sigurdur Helgason, *Sophus Lie, the Mathematician*, Scandinavian University Press, 1992, "Sophus Lie Memorial Conference", Oslo, pp.3-22.

[319] David Hilbert, *Grundlagen der geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1899.

[320] ______, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung*, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901), 87–99.

[321] J. E. Hill, *Bibliography of surfaces and twisted curves*, Bulletin of the American Mathematical Society **3** (1897), 133–146.

[322] Christiaan Huygens, *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro quibus subjuncta est exetatis cyclometriae Cl. viri Gregorii a St Vincentino*, Leiden (1651), 12–13, Oeuvres complètes, Vol XI, Traveaux mathematiques, 1645-1651. La Haye.

[323] ______, *Horologium oscillatorium, siue, de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parisiis, Apud F. Muguet, 1673.

[324] Carl Gustav Jacob Jacobi, *Note von der geodätischen linie auf einem ellipsoid und den verschiedenen anwendungen einer merkwürdigen analytischen substitution*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **19** (1839), 309–313.

[325] ______, *Vorlesungen Über Dynamik*, Druk und verlag von Georg Reimer, Berlin, 1866.

[326] Ferdinand Joachimsthal, *Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **26** (1843), 172–181.

[327] ______, *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **30** (1846), 347–350.

[328] ______, *Note sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne quelconque*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6** (1847), 260–262.

[329] ______, *Problème sur les polaires*, Nouvelles Annales de Mathématiques **6** (1847), 312–312.

[330] ______, *Mémoire sur les surfaces courbes*, Programme du Collège Royal Français (1848), 3–20.

[331] ______, *Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **40** (1850), 21–47.

[332] ______, *Théorème relatif au cercle qui passe par trois points d'une ellipse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **39** (1850), 138–140.

[333] ______, *Cours de géométrie élémentaire à l'usage des élèves du Collège Royal Français*, Starcke, 1852.

[334] ______, *Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **48** (1854), 138–140.

[335] ______, *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, Nouvelles Annales de Mathématiques **9** (1870), 481–489.

[336] ______, *Anwendung Der Differential Und Integralrechnung Auf Die Allgemeine Theorie Der Flachen Und Der Linien Doppelter Krummung*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1872.

[337] ______, *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, Nouvelles Annales de Mathématiques **11** (1872), 8–14.

[338] ______, *Sur le nombre de normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde*, Nouvelles Annales de Mathématiques **11** (1872), 149–155.

[339] Felix Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen **IV** (1871), 573–625, *Sur la géométrie dite non Euclidien*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 11 (1897), 1-62.

[340] ______, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen **VI** (1873), 112–145.

[341] ______, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Berlin, 1921-1923.

[342] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[343] Adolf Kneser, *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über vertwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie*, Festschrift H. Weber (1912), 170–180.

[344] G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **1(2)** (1887), 1–8.

[345] Erwin Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover, 1991, reproducció de les notes de la Universitat de Toronto, de 1959, n. 11, *Mathematical Expositions*.

[346] Sylvestre François Lacroix, *Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces Courbes;* Ou *Éléments de Géométrie descriptive*, Paris Fuchs, Régent et Bernard, An III de la République, 1795, segona edició: *Complement des Eléments de Géométrie*. J. B. M. Duprat, París, 1802.

[347] ———, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, J. B. M. Duprat., París, 1797-1800, 3 vols. Hi ha diverses edicions posteriors, editades per Bachelier, París. La que citem en el text de 1810 està editada per Chez Courcier, i porta el subtítol “Seconde édition, revue et augmentée”.

[348] Joseph Louis Lagrange, *Essai d'un nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Miscellanea Taurinensia **II** (1760-61), 173–195, *Oeuvres de Lagrange*, [352], Vol I, pp. 335-362.

[349] ———, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1779), 161–211, *Oeuvres de Lagrange*, [352], Vol IV, pp. 637-692.

[350] ———, *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles*, Journal de l'École Polytechnique **II** (1798), cahier VI, 270–296, *Oeuvres de Lagrange*, [352], Vol VII, pp. 333-359.

[351] ———, *Théorie des fonctions analytiques*, $M^{me}V^{e}$ Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n. 57, 1813, segona edició. Primera edició 1797. Aquest treball apareix

gairebé igual ocupant tot un volum del Journal de l'École Polytechnique, cahier 9, t2, 1800.

[352] ——, *Oeuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, París, 1867-1892.

[353] Edmon Laguerre, *Sur quelques propriétés générales des courbes algébriques et sur leur application à la theorie des courbes et des surfaces anallagmatiques*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1868), ser 6, 112–119.

[354] ——, *Recherches géométriques sur la cyclide*, Bulletin de la Société Tomatiquera de Paris **7** (1870), ser 6, 209–219.

[355] ——, *Sur les courbes que l'on peut tracer sur les surfaces algébriques*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **7** (1870), ser 6, 69–74.

[356] ——, *Sur quelques propriétés des courbes algébriques et la détermination des rayons de courbure des sections planes des surfaces annallagmatiques*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **7** (1870), ser 6, 241–245.

[357] ——, *Sur une formule relative aux courbes trcées sur les surfaces du second ordre*, Nouvelles Annales de Mathématiques (1870), 5–12.

[358] ——, *Sur une propriété relative aux courbes tracées sur une surface quelconque*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **7** (1870), ser 6, 49–51.

[359] ——, *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces*, Nouvelles Annales de Mathématiques **11** (1872), ser 2, 60–66.

[360] Johann Heinrich Lambert, *Theorie der Parallellinien*, Mag. Reine Angew. Math. (1786), 137–164, 325–358, Escrit el 1766.

[361] Gabriel Lamé, *Sur les intersections des lignes et des surfaces*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées **VII** (1817), no. 8, 229–240, presentat el desembre de 1816 a l'Académie Royale des Sciences.

[362] ——, *Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres, et principalement dans le prisme triangulaire régulier*, Journal de l'École Royale Polytechnique **XIV** (1833), 194–251, vingt-deuxieme cahier, presentat el 1829.

[363] ———, *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **10** (1837), 147–183, Memòria extreta del Volum V dels *Savants étrangers* per J. Liouville.

[364] ———, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **6** (1838), 43–45.

[365] ———, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **5** (1840), 313–348.

[366] ———, *Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **6** (1841), 37–60.

[367] ———, *Mémoire sur les surfaces isothermes et orthogonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **17** (1843), 338–341.

[368] ———, *Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **8** (1843), 397–434.

[369] ———, *Mémoire sur les variations des coordonées curvilignes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XVI** (1851), 171–185.

[370] ———, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leur diverses applications*, Mallet-Bachelier, París, 1859.

[371] ———, *Résumé de plusieurs Mémoires et d'un Ouvrage présenté*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **49** (1859), 341–346.

[372] Michel Ange Lancret, *Mémoire sur les courbes a double courbure*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **1** (1802), 416–454, Lu le 6 floréal an 10.

[373] ———, *Mémoire sur les développoides des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **2** (1811), 1–79, presentat el 1806.

[374] ———, *Des courbes à double curbure*, Correspondance sur l'École Imperiale Polytechnique (pluviose, an XIII, 1804), 51–52, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[375] Rémi Langevin, *Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure*, Presses Universitaires Franc-Comtoises sous la direction de Michel Serfati, 2002, Text extret de “De la Métode”, p.127-154.

[376] Pierre Laplace, *Oeuvres completes*, vol. 8, Publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, Gauthier-Villars, 1878-1912.

[377] Dionysius Lardner, *An investigation of the lines of curvature of Ellipsoides, Hyperboloids and Paraboloids, with a view to the improvement of the Theory of the structure and decoration of Domes*, Transactions of the Royal Irish Academy **XIV** (1825), 75–101.

[378] Adrien-Marie Legendre, *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, Mémoires des savants étrangers **10** (1785), 441–434.

[379] ______, *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris (1787), 352.

[380] ______, *Mémoire sur l'integration de quelques équations aux différences partielles*, Histoire de l'Académie Royale de Sciences (1789), 309–351, lu le 1 septembre 1787.

[381] ______, *Élements de Géométrie*, Firmin Didot, París, 1794.

[382] ______, *Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde*, Mémoires de la classe des sciences Mathématiques et Physiques de l'Institut National de France **10** (1806), 130–161.

[383] ______, *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris **XIII** (1833), 213–220.

[384] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, Acta Eruditorum (1684), 467–473, [Un nou mètode pels màxims i mínims, així com per a les tangents, que no està limitat per quantitats fraccionals i irracionals, i un curiós tipus de càlcul per a ell].

[385] ______, *De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, Acta Eruditorum (1686), 292–300.

[386] ______, *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, Math. Schriften, ed. Gerhardt II **3** (1686), 326–329.

[387] ______, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu*, Acta Eruditorum (1692), 266–269.

[388] ______, *Generalia de natura linearum, anguiloque contactus et osculi*, Math. Schriften, ed. Gerhardt II **1** (1692), 266–269.

[389] Charles F. A. Leroy, *Traité de stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente*, Bachelier, Paris, 1844.

[390] Guillaume-François-Antoine de L'Hôpital, *Analyse des infinitement petits pour l'intelligence des lignes courbe*, París, 1696.

[391] Sophus Lie, *Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **70** (1869), no. 4, 346–353, la primera versió, amb el títol *Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie*, va ser publicada privadament per Lie; després ho va publicar a *Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania.*, 16-38 amb una segona part p.107-146.

[392] ______, *Sur une transformation géométrique*, Comptes Rendues hebdomadaires de l'Académie de Sciences de Paris **71** (1870), 579–583.

[393] ______, *Über Complexe, insbesondere Linie und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen*, Math. Annalen **5** (1872), 145–256.

[394] ______, *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal Flächen I. Über reelle algebraische Minimalflächen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **Vol II** (1877), 157–198.

[395] ______, *Sätze über Minimalflächen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **Vol III** (1878), 166–176.

[396] ______, *Sätze über Minimalflächen, II. Bestimmung aller algebraischen Minimalflächen, die sich in einem algebraische Kegel einschreiben lassen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **Vol III** (1878), 224–233.

[397] ______, *Sätze über Minimalflächen, III. Über die in einer algebraischen Developpable eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **Vol III** (1878), 340–351.

[398] ______, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen*, Mathematische Annalen **14** (1879), 331–416.

[399] ______, *Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven*, Universitetsprogram, Kristiania (1879), 358–408.

[400] ______, *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung, I,II,III,IV,V*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **4 i 5** (1879-81), 345–354, 355–366, 282–306, 328–358, 518–541.

[401] ______, *Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques **4,** 2^e **série** (1880), 300–304.

[402] ______, *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind*, Forhhandlinger i Videnskapbs-Selskabet i Christiania **10** (1882), 531–536.

[403] ______, *Untersuchungen über geodätische Curven*, Math. Annalen **20** (1882), 357–454.

[404] ______, *Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **6** (1882), 490–501.

[405] ______, *Über die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreis einer Fläche*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab, Christiania **IX** (1884), 62–68.

[406] ———, *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner, Leipzig, 1922-1960, 7 vols.

[407] Sophus Lie and Felix Klein, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, Comptes Rendues hebdomadaires de l'Académie de Sciences de Paris **70** (1870), 1222–26, 1275–79, dues notes amb el mateix títol.

[408] ———, *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einflach unendlich vielen vertanschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*, Math. Annalen **4** (1871), 50–84.

[409] ———, *Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten*, Math. Annalen, **23-4** (1884), 579–586, Presentat a Berlin Akad. 1870.

[410] Heinrich Liebmann, *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1899), 44–55.

[411] Joseph Liouville, *De la ligne geodésique sur un ellipsoide quelconque*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **9** (1844), 401–408.

[412] ———, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point material peuvent s'intégrer*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 345–378, vol 12, (1847), pp. 410-444; nota vol. 13 (1848). pp. 34-37.

[413] ———, *Sur un théorem de M. Joachimsthal, relatif aux lignes de courbure planes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1846), 87–89.

[414] ———, *Sur un théorem de M. Gauss concernant le produit de deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **12** (1847), 291–304.

[415] ———, *Théorème sur l'equation* $dx^2+dy^2+dz^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)$, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XV** (1850), 103.

[416] ———, *Sur la théorie générale des surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **16** (1851), 130–132, Extret de Comptes Rendues de l'Académie des Sciences, XXXII, séance 14 abril 1851.

[417] ______, *Sur un théorem de M. Chasles*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1851), 6–8.

[418] Nicolaï Ivanovitch Lobachevsky, *Géométrie Imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **17** (1837), 295–320.

[419] ______, *Geometrical researches on the theory of parallels*, Dover, 1955, suplement II de [96], traduït per George B. Halsted. Versió original alemanya de 1840.

[420] Gino Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, Bibliotheca Mathematica **ser. 3, 2** (1901), 392–440.

[421] I. Lyon, *Sur les courbes à torsion constante*, Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble **2** (1890), 353–422, tesis llegida el 10 juliol de 1890, Faculté des Sciences de Paris; Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-libraires.

[422] Gaspare Mainardi, *Compimento del problema del sig. Joachimstal, sulla teoria generale delle superficie*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **3** (1852), 495–498.

[423] ______, *Nota sulla teoria delle curve*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **5** (1854), 273.

[424] ______, *Nota sulla teoria delle curve*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **5** (1854), 459.

[425] ______, *Sulla teoria generale delle superficie*, Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze lettere ed arti e Biblioteca Italiana **9** (1856), Fascicolo 54, 385–398.

[426] ______, *Sulle coordinate curvilinee d'una superfice e dello spazio*, Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze lettere ed arti e Biblioteca Italiana **9** (1856), 385–98.

[427] Arthur P. Mellish, *Notes on Differential Geometry*, Annals of Mathematics **32** (1931), 181–190.

[428] Jean Baptiste Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires de savants étrangers, París **X** (1785), 477–510, Lu a l'Académie les 14 et 21 Février 1776.

[429] Ferdinand Minding, *Bemerkung über die abwiekclung krummer linien von flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **6** (1830), 159–161.

[430] ______, *Ueber die curven kürzesten perimeters auf krummen flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **5** (1830), 297–304.

[431] ______, *Ueber die biegung gewisser flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **18** (1838), 297–302.

[432] ______, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **19** (1839), 370–387.

[433] ______, *Beiträge zur theorie der kürzesten linien auf krummen flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **20** (1840), 323–327.

[434] Gaspard Monge, *Mémoire sur les propiétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulèrement sur celles des surfaces développables, avec une applicaction à la théorie des ombres et des pénombres*, Mémoires de Mathématique et de Physique. Mémoires des Savants Étrangers. París. Présenté le 11 Janvier 1775 **9** (1780), 382–440.

[435] ______, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. París (1781), 666–704.

[436] ______, *Sur une méthode d'intégrer les Équations aux Différences ordinaires, lorsqu'elles sont élevées, et dans les cas où leurs Intégrales complètes sont algébriques*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris (1783), 719–724.

[437] ______, *Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes*, Mémoires de Mathématique et de Physique (1784), 85–117, Histoire de l'Académie Royale de Sciences 1784. Avec les mémoires de Mathématique et de Physique pour la même Année.

[438] ______, *Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*, Mémoires de Mathématique et de Physique. Mémoires des Savants Étrangers. París. (1784), 118–192.

[439] ———, *Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin (1784), 19–33.

[440] ———, *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **X** (1785), 511–550, veure també [452], pp. 392-420.

[441] ———, *Stéréotomie*, Journal de l'École Polytechnique **I** (1794), 1er cahier, 1–15.

[442] ———, *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide*, Journal de l'École Polytechnique (1795), cahier II, 145–165, reproduït a la secció XVI, p.139, de les *Applications*, [452].

[443] ———, *Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la République*, Baudouin, París, 1799, hi ha moltes edicions, per exemple una de Klostermann de 1811 i una de Jacques Gabai de 1989.

[444] ———, *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géomètrie à l'usage de l'École Polytechnique*, Baudouin, Imprimeur du Corps Législative, du Tribunat, et de l'Institut National, (Thermidor an 9), París, 1801, Éditions Jaques Gabay en fa una reimpressió el 2008.

[445] ———, *Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère*, Journal de l'École Polytechnique **IV** (1802), 28–58.

[446] ———, *Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire*, Journal de l'École Polytechnique **IV** (1802), 59–86.

[447] ———, *Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire*, Journal de l'École Polytechnique **4** (1802), cahier XI, 59–86.

[448] ———, *De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double*

courbure quelconque, Journal de l'École Polytechnique **6** (1806), cahier XIII, 41–59.

[449] ———, *Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque*, Journal de l'École Polytechnique **6** (1806), cahier XIII, 1–40.

[450] ———, *Trouver l'équation de la surface développable, qui a pour aréte de rebroussement une courbe à double courbure, dont on connait l'équation unique aux différences ordinaires*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique (1807), 209–211, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[451] ———, *Sur les Équations différentielles des Courbes du second degré*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique **II** (1810), 51–54, Editat per Hachette, Janvier 1809-Mars 1813.

[452] ———, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, Bachelier, París, 1850, cinquena edició, revisada, corregida i anotada per J. Liouville. Primera edició 1807.

[453] Monge, Gaspard and Hachette, Jean Nicolas Pierre, *Des courbes à double courbure (extrait des ouvrages du C.^{en} Gaspard Monge)*, Journal de l'École Polytechnique **II** (1799), 6ème cahier, 345–363.

[454] ———, *Application d'àlgebre à la géométrie*, Journal de l'École Polytechnique **4** (1802), cahier 11, 143–170.

[455] ———, *Application de l'algébre a la géométrie. Des Surfaces du premier et second decré, a l'usage de l'École Polytechnique*, Bernard, Libriare de l'École Polytechnique et des Ponts et Chaussées, quai des Augustins, n. 31. Imprimerie de H.L. Perroneau, París, 1805.

[456] ———, *Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique **8** (1807), 295–305, Editat per Hachette, Abril 1804-Mars 1808.

[457] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, S. Pepys, Londini, 1687.

[458] ———, *Optiks, or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of Light*, Sam Smith and Benj. Walford, London, 1704, El títol del volum porta l'afegitó: "also two treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures", la segona de les qual és *Tractatus de Quadratura Curvarum*.

[459] ———, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analyze promota (1712), 3–20.

[460] ———, *The Method of Fluxions and infinite Series, with its Application to the Geometry of Curve-Lines*, Henry Woodfall, London, 1736, traduït a partir de la versió original de l'autor en llatí mai publicada.

[461] ———, *Isaaci Newtoni Opera quae extant omnia*, Joannes Nichols, Londres, 1779-1785, publicada per Samuel Horsley.

[462] Théodore Olivier, *Construction des points d'inflexion de la transformée d'une courbe plane ou à double courbure tracée sur une surface développable*, Journal de l'École Polytechnique **14** (1833), cahier 22, 78–123.

[463] ———, *Construction des centres de courbure des Épicycloïdes planes et sphériques*, Journal de l'École Polytechnique **14** (1834), cahier 23, 85–152.

[464] ———, *Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques, et les développantes sphériques, sur les rayons de courbure des courbes et surfaces du second ordre, avec des applications aux engrenages*, Bachelier, París, 1834, Tesis presentada a la Facultat de Ciències de París.

[465] ———, *Addition au mémoire sur la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure*, Journal de l'École Polytechnique **15** (1835), cahier 24, 252–263.

[466] ———, *Sur la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure*, Journal de l'École Polytechnique **15** (1835), cahier 24, 61–92.

[467] Paraf, *Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **106** (1888), 1139–1141.

[468] Pere Pascual, *Geometria de Superfícies. Una aproximació a la figura de Gauss*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques **20** (2005), no. 2, 137–164.

[469] Irène Passeron, *Maupertuis, passeur d'intelligibilité. De la cycloïde à l'ellipsoïde aplati en passant par le "newtonianisme": années parisiennes*, Pierre Louis Morreau de Maupertuis, H. Hecht ed., Berlin Verlag (1999), 277–292.

[470] Émile Picard, *Notice Historique sur Gaston Darboux*, Académie des Sciences, Gauthier-Villars (1917), 1–36, llegit a l'Académie des Sciences el 10 de desembre de 1917.

[471] Auguste Picart, *Sur les réseaux isométriques et la déformation des surfaces de révolution*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **3-4** (1867), ser. 6, 73–78.

[472] ———, *Surfaces applicables sur des surfaces de révolution*, Nouvelles Annales de Mathématiques **20** (1881), ser. 2, 113–120.

[473] Geminiano Pirondini, *Quelques propriétés des surfaces moulures*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **3** (1897), 405–422.

[474] Henri Pitot, *Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloide*, Histoire de l'Académie de Sciences (1724), 107–113, publ. 1726.

[475] Joseph Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquids sourmis aux seules forces molécularies*, Gauthier-Villars, París, 1873.

[476] Julius Plücker, *Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **3** (1828), 324–336.

[477] ———, *Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **4** (1829), 349–370.

[478] ———, *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **9** (1831), 124–134.

[479] Jean V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, París, 1822.

[480] ______, *Applications d'analyse et de géométrie*, Mallet-Bachelier, París, 1862-1864, 2 vol.

[481] ______, *Traité des propriétés projectives des figures*, Mallet-Bachelier, París, 1862-1864, 2 vol.

[482] Ganesh Prasad, *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century*, Benares Mathematical Society, 1933, reedició de 2002 a càrrec de J. N. Kapur, Mathematical Sciences Trust Society, New Delhi.

[483] Victor Alexandre Puiseux, *Problème de géométrie*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1842), 65–69.

[484] ______, *Théorème de Gauss relatif à la théorie de la courbure des surfaces*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13** (1848), 87.

[485] ______, *Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **16** (1851), 208–212.

[486] ______, *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **8** (1863), Serie 2, 335–346.

[487] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 149, Springer-Verlag, 1994.

[488] Karin Reich, *Euler's Contribution to Diffential Geometry and its Reception*, Leonhard Euler: Life, Work and Legacy, Robert E. Bradley and C. E. Sandifer (Editors), Elsevier B.V. (2007), 479–502.

[489] Agustí Reventós and Carlos J. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss*, Societat Catalana de Matemàtiques, 2005.

[490] Agustí Reventós Tarrida, *Gauss i la geometria: geodèsia i geometria no euclidiana*, Conferències FME **III** (2006), 156–214, Conferència pronunciada el 15 de febrer de 2006 a la FME de la UPC.

[491] ———, *Notes sobre corbes i superfícies*, http://mat.uab.es/ agusti/2016GeoDif.pdf (2016), 1–411.

[492] Albert Ribaucour, *Sur le rayon de courbure des coniques*, Nouvelles Annales de Mathématiques **7** (1868), 171–176.

[493] ———, *Sur les courbes enveloppes de cercles, et sur les surfaces enveloppes de sphères*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1868), ser 6, 30–35.

[494] ———, *Sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **67** (1868), 1334–1338.

[495] ———, *Sur la déformation des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1869), ser. 6, 51–53.

[496] ———, *Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1869), ser. 6, 37–38.

[497] ———, *Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1869), ser. 6, 12–16.

[498] ———, *Sur les surfaces orthogonales*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **5-6** (1869), ser. 6, 1–5.

[499] ———, *Sur la déformation des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **70** (1870), 330–333.

[500] ———, *Sur la théorie des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **7** (1870), ser 6, 22–24; 110–113,124–127.

[501] ———, *Note sur les développées des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **74** (1872), 1399–1403.

[502] ———, *Sur la répresentation sphérique des surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **75** (1872), 533–536.

[503] ———, *Sur la théorie des lignes de courbure*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **74** (1872), 1489–1491; 1570–1572.

[504] ______, *Sur les faisceaux de cercles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **76** (1873), 830–833.

[505] ______, *Sur les systèmes cycliques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **76** (1873), 478–482.

[506] ______, *Propriétés de courbes tracées sur les surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1875), 642–645.

[507] ______, *Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles, et sur les surfaces enveloppes de sphères*, Nouvelle correspondance mathématique **5** (1879), 257–263;305–315;337–343;385–393;417–425; Vol 6, 1–7, 1880, escrita el 1868.

[508] ______, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, vol. 44, Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique, 1881.

[509] ______, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7** (1891), serie 4, 5–108; 219–270, escrit el 1871.

[510] ______, *Sur les systèmes cycliques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **113** (1891), 304–307; 324–326.

[511] Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* (habilitationsvortrag), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1867), 133–152, Llegida el 10 de Juny de 1854; Vegeu la versió anglesa a [544], vol. II, o [512].

[512] ______, *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry*, Nature **VIII** (1873), no. 183, 184, pp. 14–17, 36–37, traduït per William Kingdon Clifford i transcrit per D. R. Wilkins. Vegeu http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/WKCGeom.html.

[513] Michaël Roberts, *Discussion analytique de deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chaqué un de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XV** (1850), 323–332.

[514] ______, *Mémoire sur la géométrie des courbes tracées sur la surface d'un ellipsoide*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XV** (1850), 275–295.

[515] Olinde Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique **3** (1815), 162–182, Editat per Hachette.

[516] ______, *Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **2** (1815), 34–36.

[517] ______, *De l'attraction des sphéroïdes*, Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique **3** (1816), 361–385.

[518] Bernard Rouxel, *L'Oeuvre Mathématique d'Albert Ribaucour*, Archive for History of Exact Sciences **23** (1980), 159–177.

[519] David E. Rowe, *Dirk Jan Struik and His Contributions to the History of Mathematics*, Historia Mathematica **21** (1994), 245–273.

[520] Saint-Venant, A. J. C. Barré de, *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double coubure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumise*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **17** (1843), 942–953.

[521] ______, *Mémoire sur les lignes courbes non planes*, Journal de l'École Polytechnique **18** (1845), trentième cahier, 1–76.

[522] Joël Sakarovitch, *Gaspard Monge founder of "Constructive Geometry"*, Proceedings of the Third International Congress on Construction History (2009), 1293–1300.

[523] L. A. Santaló, *Selected Works*, Springer, 2009, editat per A. M. Naveira i A. Reventós.

[524] Georg Scheffers, *Anwendung der Differential und Integral rechnung auf Geometrie*, Verlag von Veit& Comp., 1901, vol. 1 i vol. 2.

[525] Ludwig Schlaefli, *Nota alla Memoria del sig. Beltrami "Sugli spazi di curvatura costante"*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **V** (1871), 178–193.

[526] Hermann A. Schwarz, *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche*, vol. 1, Preisschrift der Preuss. Akad. Wiss. Ges. Math. Abh., Berlin, 1867, pp. 6-125, New York, Dover (1972, edició original 1890).

[527] ______, *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen*, vol. 1, Preisschrift der Preuss. Akad. Wiss. Ges. Math. Abh., Berlin, 1872, pp. 126-148, New York, Dover (1972).

[528] Karl Eduard Senff, *Teoremata principalia e theoria curvarum et superficierum*, Dorpat (Tartu) (1831), 1–107.

[529] Pierre Sergescu, *Le bicentenaire de Gaspard Monge*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **1** (1947), no. 2, 162–170.

[530] Joseph Alfred Serret, *Mémoire sur les surfaces orthogonales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **12** (1847), 241–254.

[531] ______, *Note sur une équation aux dérivées partielles*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13** (1848), 361–368.

[532] ______, *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle*, Journal de l'École Polytechnique **XX** (1851), 69–88.

[533] ______, *Sur quelques formules relatives à la theorie des courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **16** (1851), 193–207.

[534] ______, *Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **16** (1851), 499–500.

[535] ______, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **18** (1853), 113–163.

[536] ______, *Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **18** (1853), 1–40.

[537] ______, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **36** (1853), 200–204.

[538] ______, *Sur la théorie géométrique des lignes à double courbure*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 932–933.

[539] ______, *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 194.

[540] ______, *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 190–193.

[541] Paul Serret, *Des Méthodes en Géométrie*, Mallet-Bachelier, París, 1855.

[542] ______, *Théorie nouvelle géométrique et méchanique des lignes á double courbure*, Mallet-Bachelier, París, 1860.

[543] ______, *Théorémes relatifs aux courbes et surfaces algébriques*, Bulletin de la Société Philomatique de Paris **3-4** (1866), 98–102.

[544] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, 2a ed., 5 v.

[545] John Stillwell, *Sources of hyperbolic geometry*, American Mathematical Soc., 1996.

[546] Dirk J. Struik, *Differential Geometry in the Large*, Bulletin of the American Mathematical Society **37** (1931), 49–62.

[547] ______, *Outline of a History of Differential Geometry I*, Isis **19** (1933), no. 1, 92–120.

[548] ______, *Outline of a History of Differential Geometry II*, Isis **20** (1933), no. 1, 161–191.

[549] ______, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.

[550] ______, *Geometría Diferencial clásica*, Aguilar, 1970, traducció de *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1950.

[551] Arild Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie: It was the Audacity of My Thinnking*, Springer, 2002, primera edició en Norueg, 2000. *Det var mine tankers djervhet-Matematikeren Sophus Lie.*

[552] René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951.

[553] ______, *La première note mathématique de Gaspard Monge (juin 1769)*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **19** (1966), no. 2, 143–149.

[554] Rossana Tazzioli, *New Perspectives on Beltrami's Life and Work*, Mathematicians in Bologna 1861-1960. Birkhauser (2012), 465–517.

[555] Charles Tinseau, *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des lignes à double courbure*, Mémoires de Mathématique et de Physique **IX** (1780), 593–624.

[556] ______, *Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites*, Mémoires de Mathématique et de Physique **IX** (1780), 625–642.

[557] Barnaba Tortolini, *Sopra le supeficie parallele, ed applicazione di questa teorica all'ellissoide*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **1** (1850), 5–22.

[558] ______, *Sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodetica tracciata sulla superficie di un'ellisoide*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **2** (1851), 345–357.

[559] Louis L. Vallée, *Traité de géométrie descriptive*, M. V. Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Sciences, Rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs; París, 1819.

[560] P Varignon, *Solution de deux Probèmes de Géométrie*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1712), 19–26.

[561] Pierre Varignon, *Autre regle generale des Forces Centrales, avec une maniere d'en déduire et d'en trouver une infinité d'autres à la fois, dépendemment et indépendemment des Rayons Osculateurs, qu'on va trouver aussi d'une maniere infiniment generale*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1701), 20–40.

[562] ______, *Differentes manieres infiniment generales de trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes, soit qu'on regarde ces Courbes sous la forme de Polygons, ou non*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1706), 490–507.

[563] ______, *Nouvelles reflexions sur les développées et sur les courbes résultantes du développement de celles-là*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1712), 146–180.

[564] ______, *Suite des réflexions qui se trouvent dans la Mémoire du 28 Juin 1712: Sur les développées et sur les courbes résultantes du développement de celles-là*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1713), 121–167.

[565] P Vincensini, *La géométrie diférentielle au XIXème Siècle*, Scientia:rivista internazionale di sintesi scientifica, Bologna **107** (1972), 617–660.

[566] Voizot, *Note sur la théorie des courbes à double courbure*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XV** (1850), 481–487.

[567] A. Voss, *Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein koniugiertes system bilden*, Münchener Ber. **18** (1888), 95–102.

[568] Karl T. W. Weierstrass, *Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid*, Monatsber. Königl. Akad. Wiss. (1861), 986–987, Mathematische Werke, Vol. 1 (Berlin, 1894), pp. 257-266.

[569] ______, *Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflachen*, Mathematische Werke, Mayer, Berlin, 1903 **3** (1866), 219–221, Monatsber. Königl. Akad. Wiss. 855-856.

[570] ______, *Über eine Besondere Gattung von Minimalflächen*, Mathematische Werke, Mayer, Berlin, 1903 **3** (1887), 241–247, Monatsber. Königl. Akad. Wiss.

[571] Julius Weingarten, *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **59** (1861), 382–393.

[572] ______, *Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungsmesser eine Funktion des anderen ist*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **62** (1863), 160–173.

[573] ______, *De lineis curvaturae superficierum*, Sax, Hallis, 1864.

[574] ______, *Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen*, Reichsdruckerei, Berlin, 1884.

[575] ______, *Über die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **100** (1887), 196–310.

[576] ______, *Sur la déformation des surfaces*, Acta Mathematica **20** (1896), 159–200.

[577] ______, *Mémoire sur la déformation des surfaces*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France **32** (1902), 2nd ser. 1–46.

[578] H. S. White, *The Geometry of Leonhard Euler*, Leonhard Euler: Life, Work and Legacy, Robert E. Bradley and C. E. Sandifer (Editors), Elsevier B.V. (2007), 303–321.

[579] Heinrich Wieleitner, *Anton von Braunmühl*, Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften **3** (1910), 316–330.