

La raó d'or

AGUSTÍ REVENTÓS

13 maig 2005

Biotecnologia

Raó d'or

- Divina Proporció

- $\Phi = 1,628\dots$ $\Phi^{-1} = 0,628\dots$

- $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- $\Phi^2 = \Phi + 1$

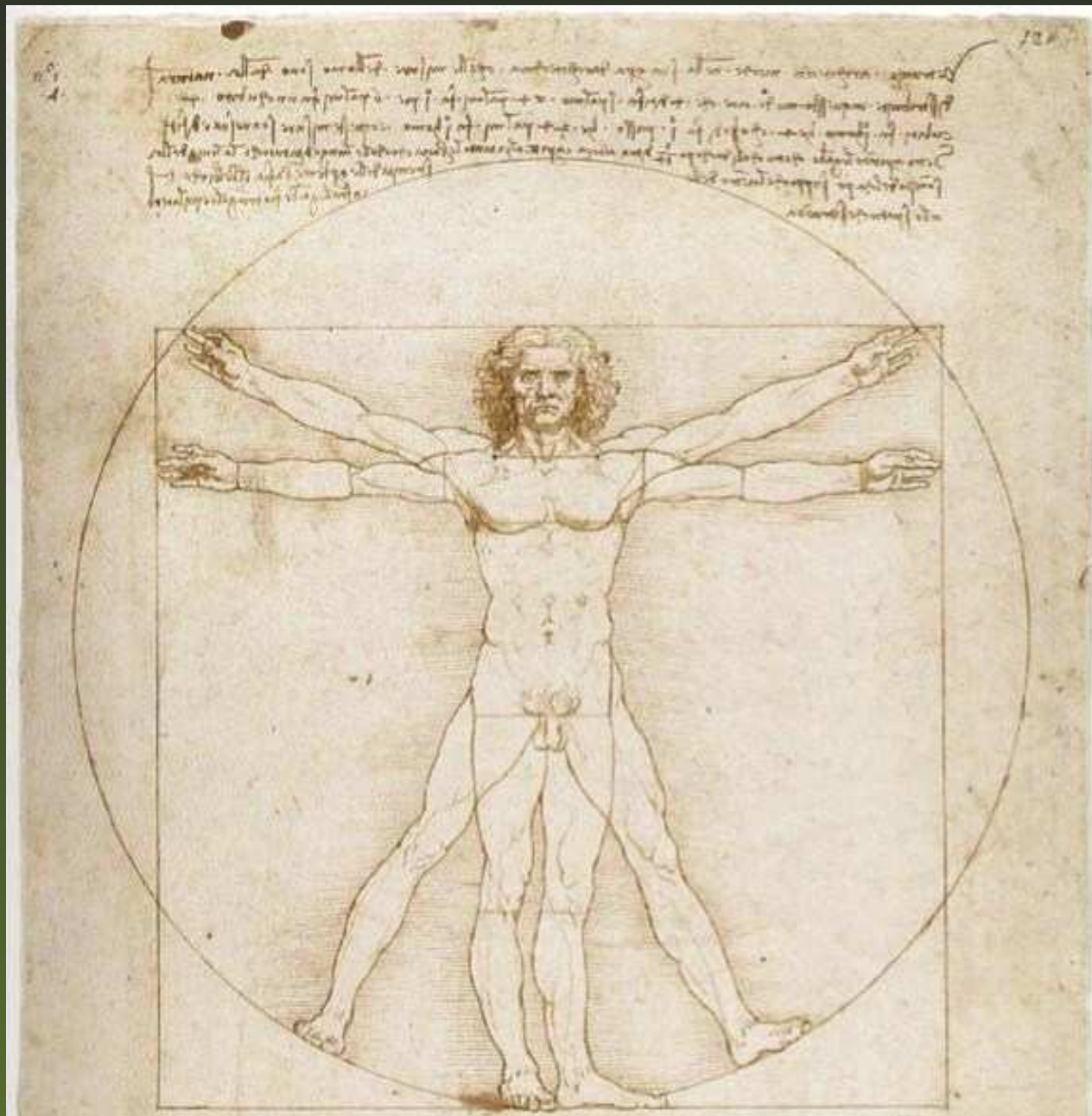
Partenó



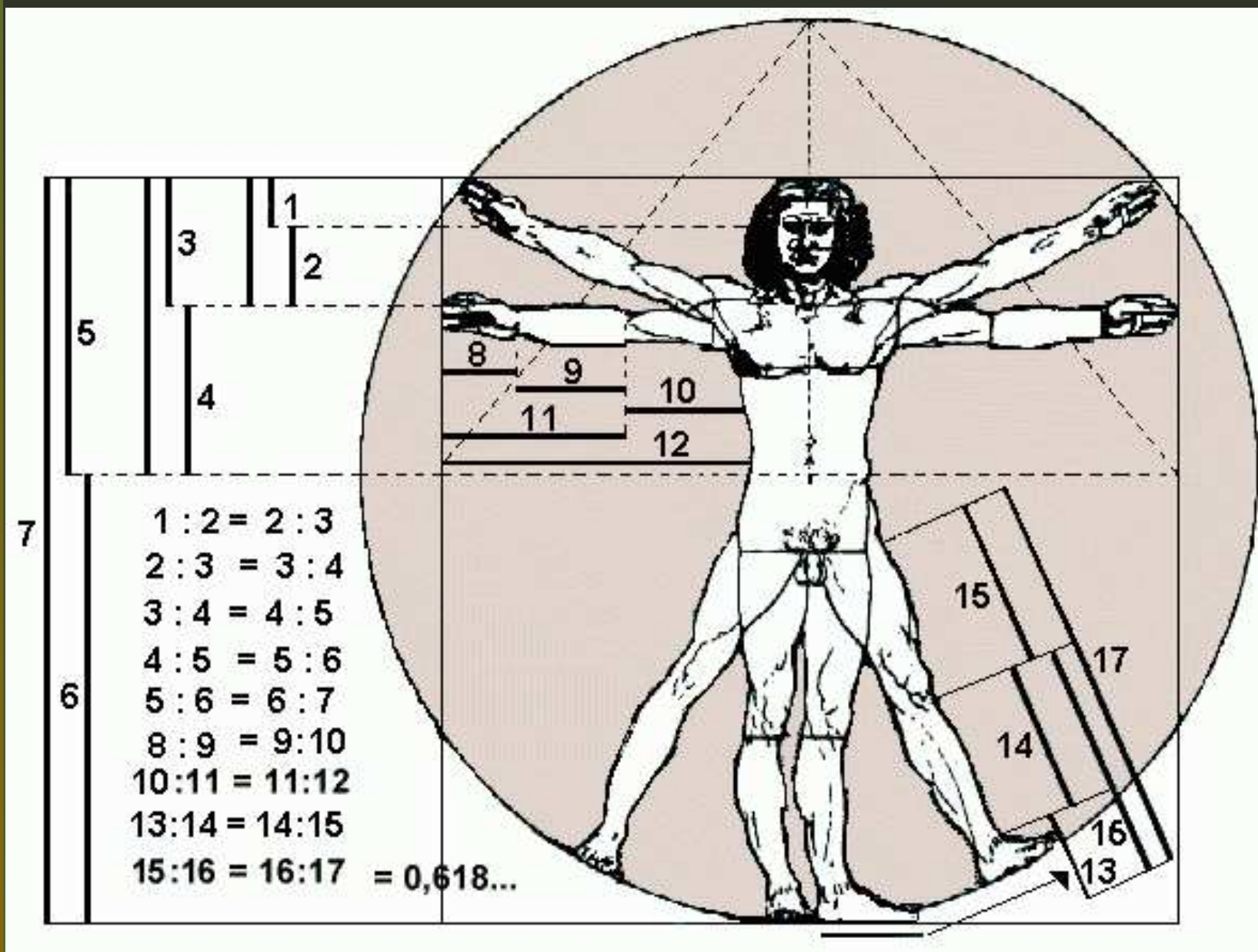
Partenó



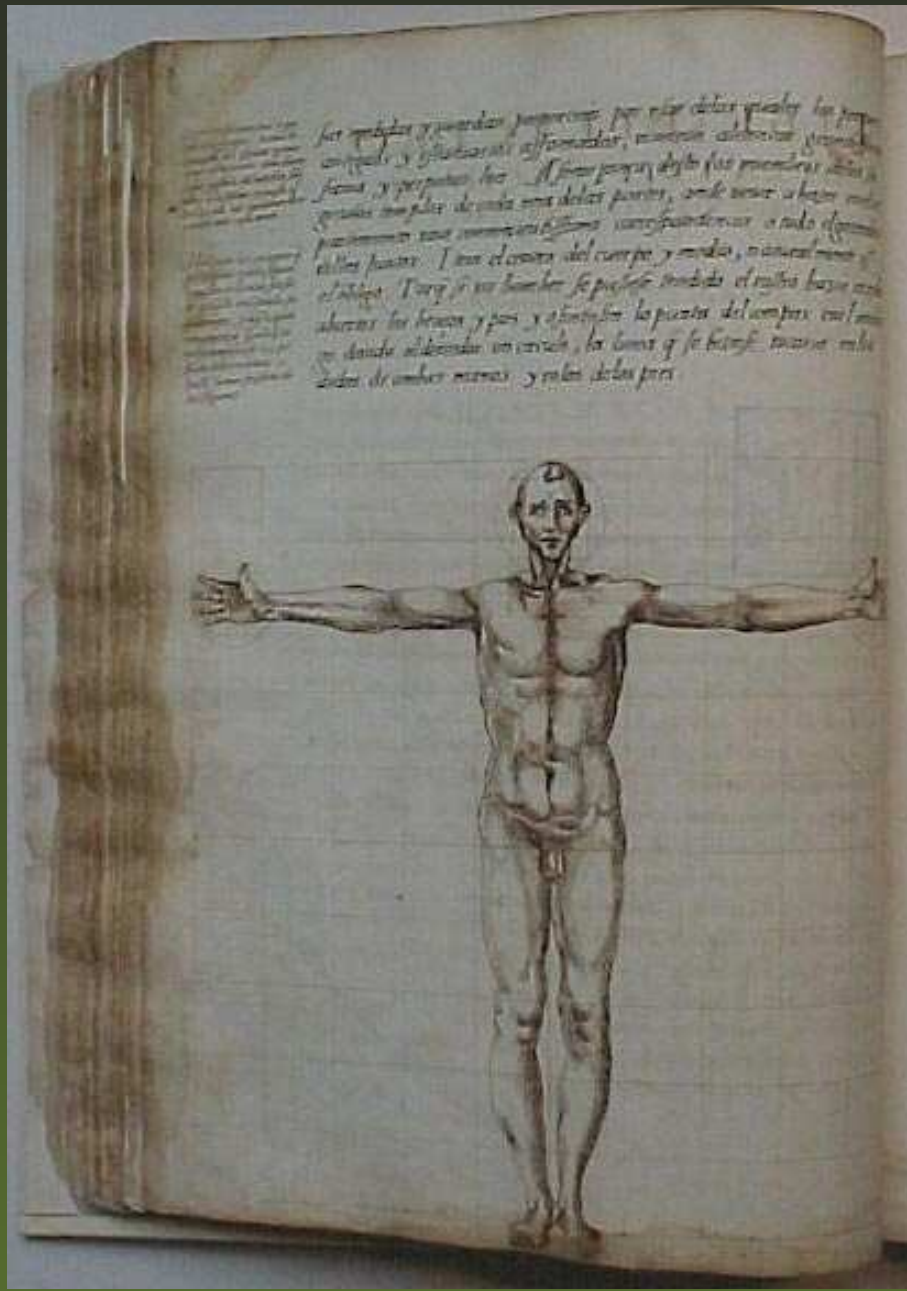
Home de Vitrubi



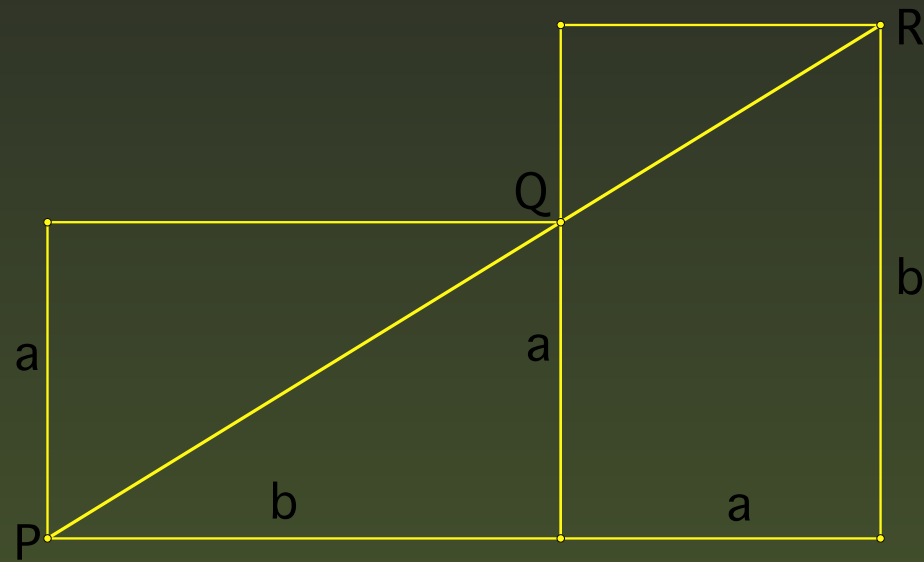
Home de Vitrubi



Marc Vitrubí Pol·lió



Targes de crèdit



$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$

Targes de crèdit

- P, Q, R alineats \Leftrightarrow

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$

- Equivalentment

$$\Phi = \Phi^{-1} + 1$$

amb $\Phi = b/a$.

- Per tant Φ és la raó àuria.

Altres maneres d'escriure Φ

$$\blacksquare \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

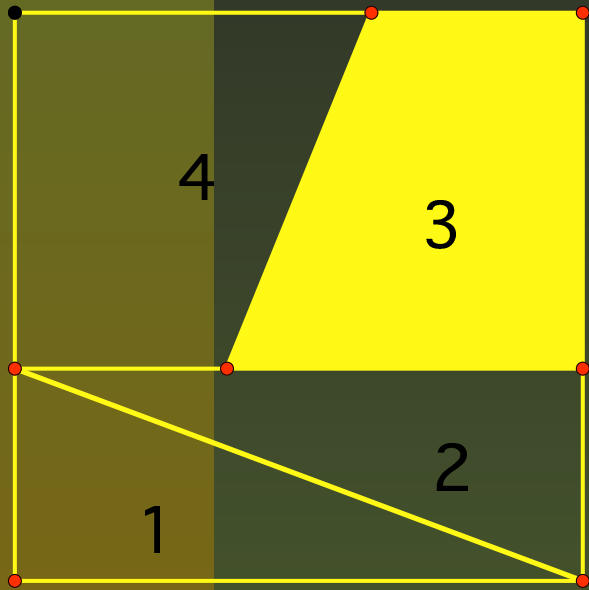
$$\blacksquare \Phi = 2 \cos \frac{\pi}{5} = 2 \cos 36^\circ$$

$$\blacksquare \Phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$$

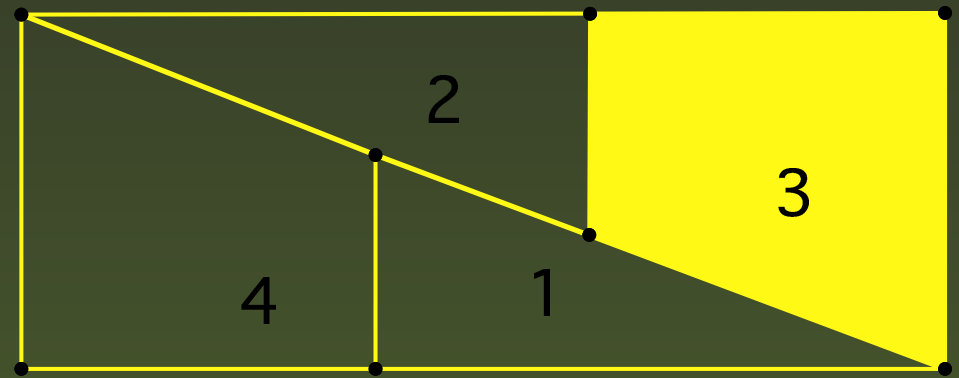
$$\blacksquare \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Un joc

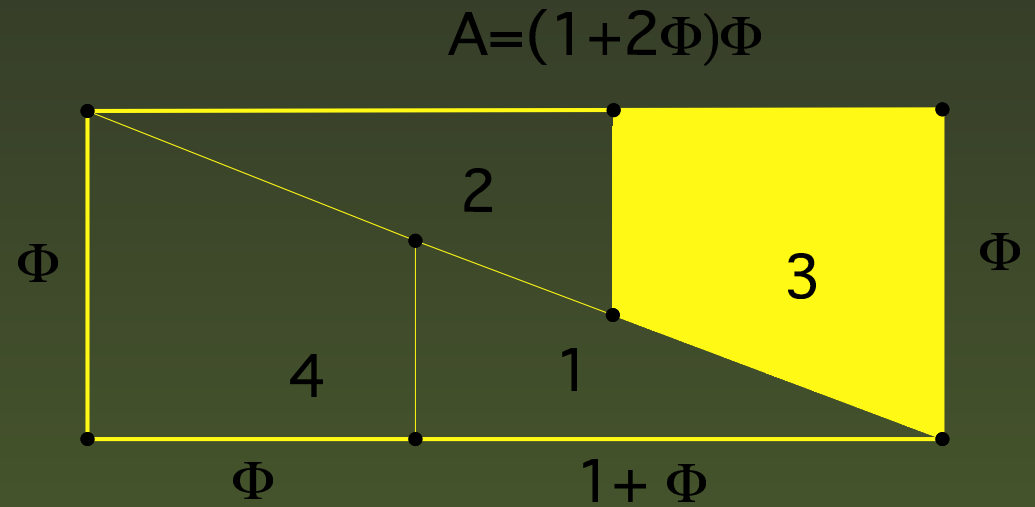
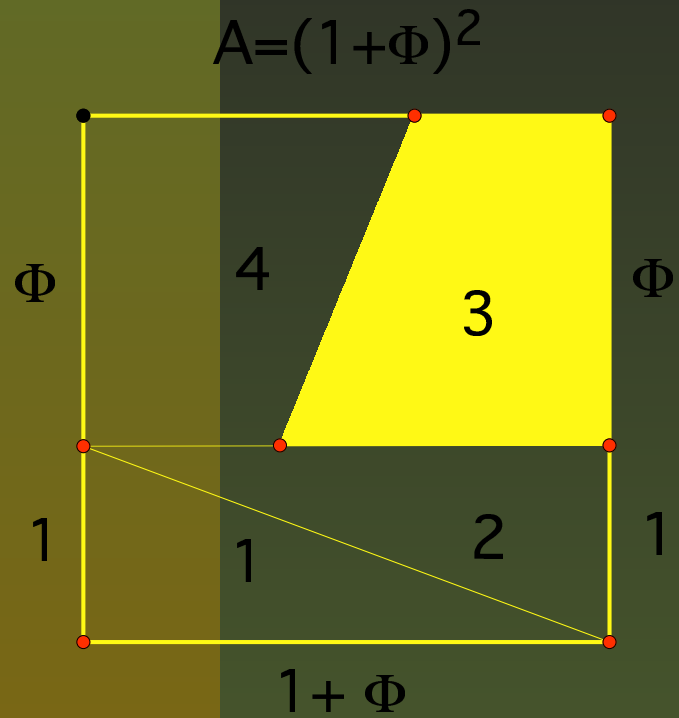
$$A=8 \times 8=64$$



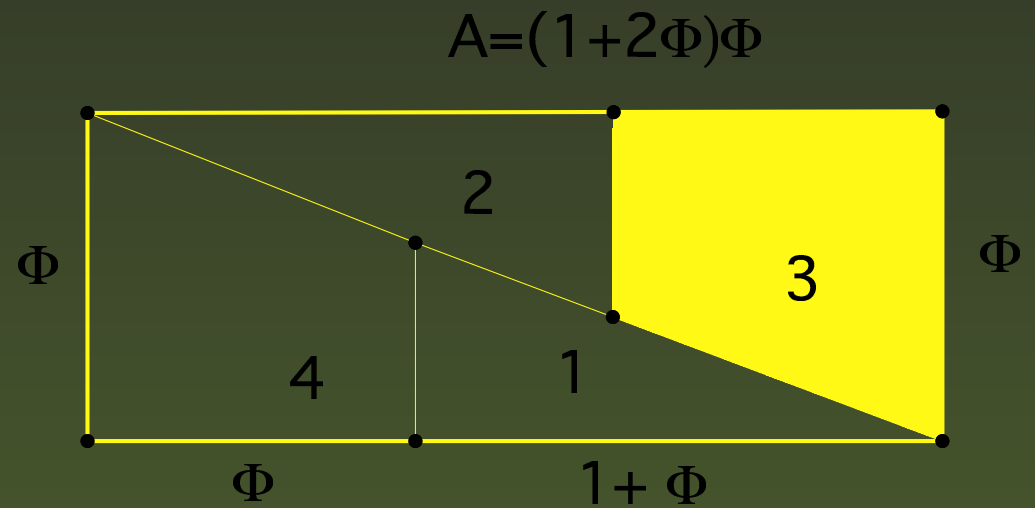
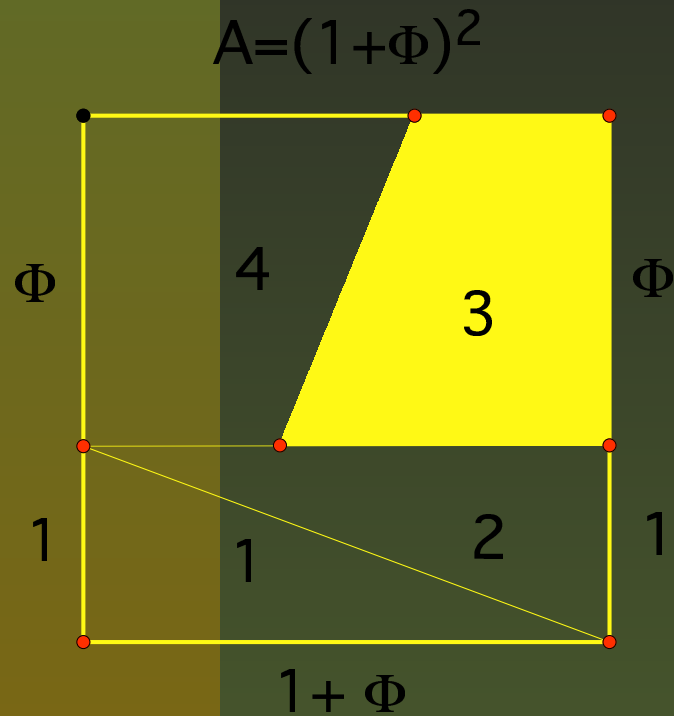
$$A=13 \times 5=65$$



No fem trampes

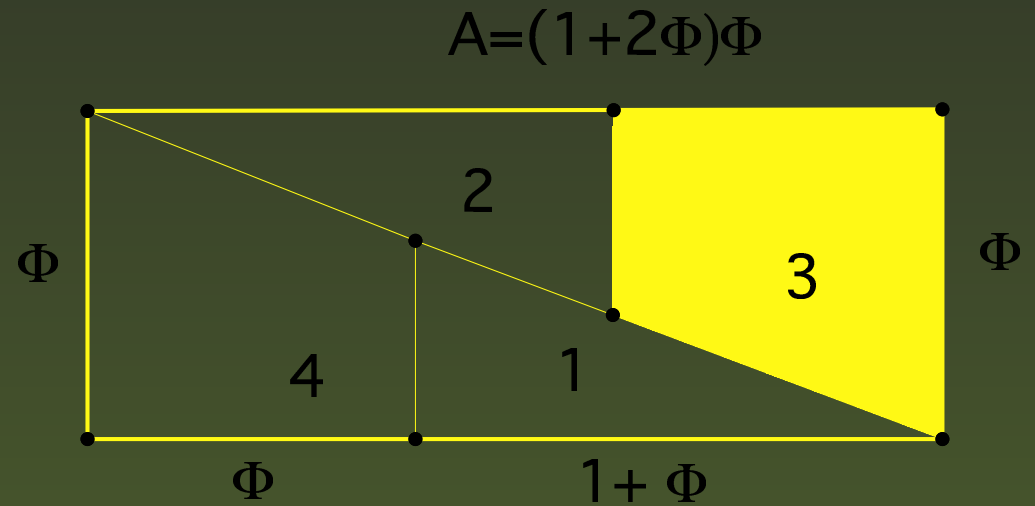
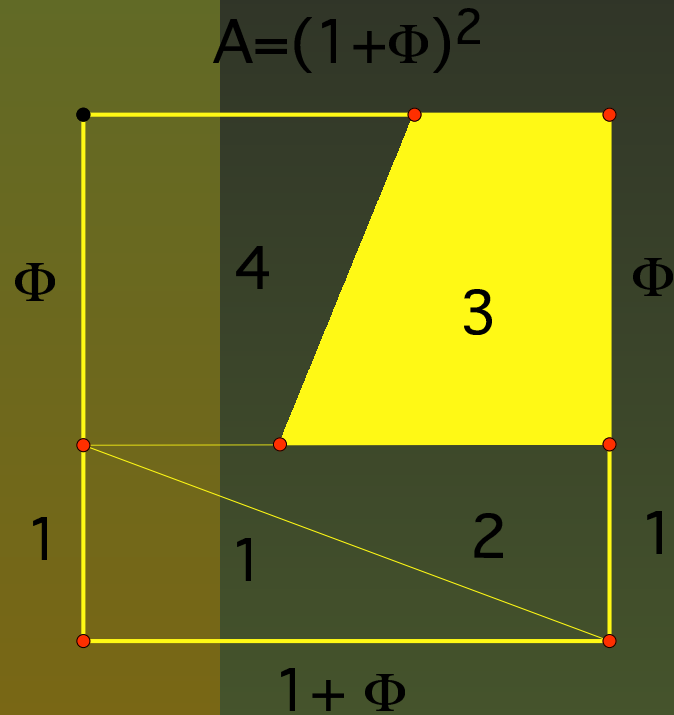


No fem trampes



$$(1 + \Phi)^2 = (1 + 2\Phi)\Phi$$

No fem trampes



$$(1 + \Phi)^2 = (1 + 2\Phi)\Phi \Leftrightarrow \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Successió de Fibonacci

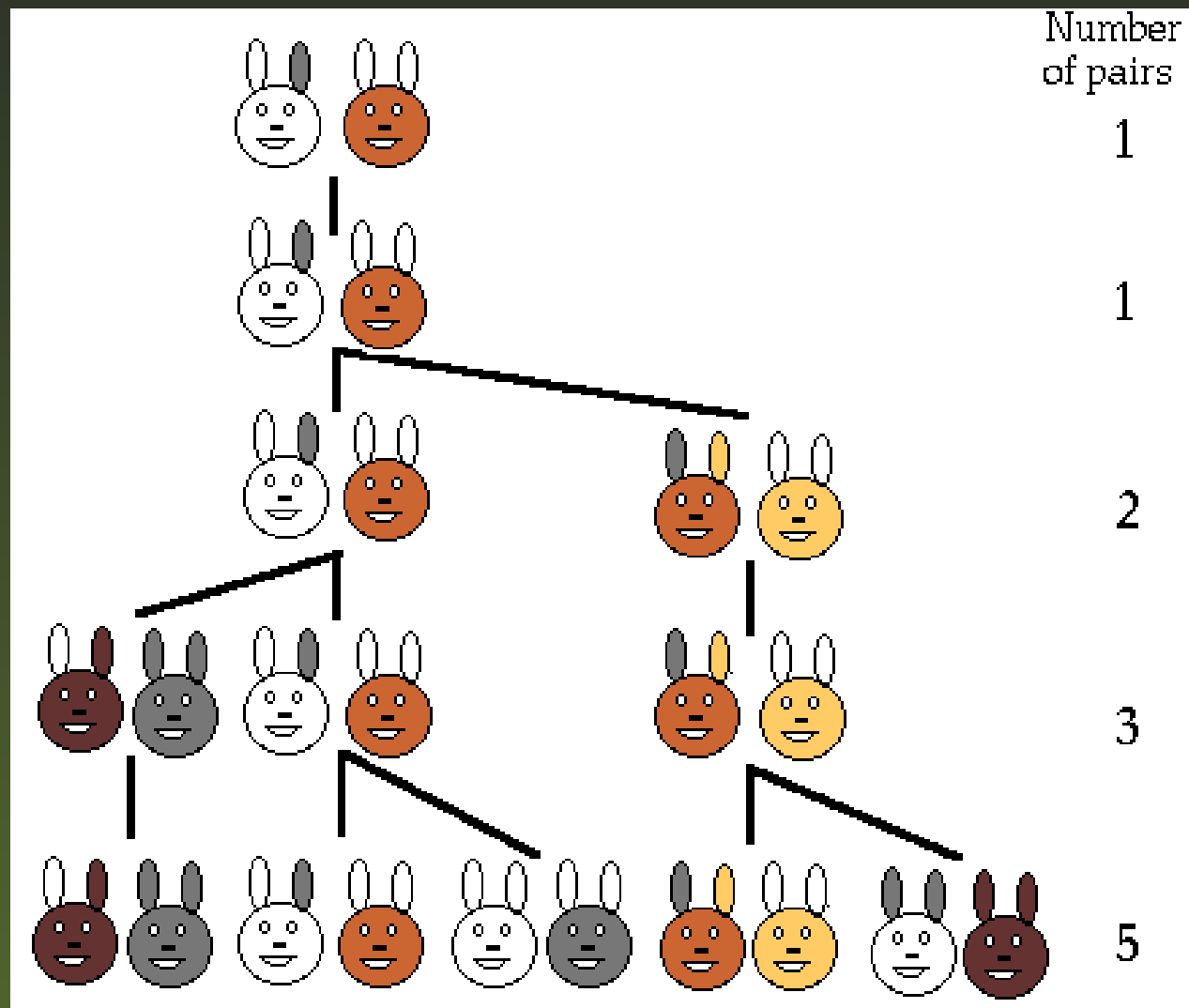
Fibonacci

- Leonardo Pisano (Fibonacci) 1202
- Una parella de conills adults (mascle i femella) produeixen 2 cries cada mes (mascle i femella). Els recent nascuts es fan adults en dos mesos i passen doncs a produir 2 cries cada mes.
- Quantes parelles de conills tindrem cada mes?

Conills

mesos	adultes	joves	total parelles
1	1	1	2
2	1	2	3
3	3	3	5
4	3	5	8
5	5	8	13

Conills



Conills

- F_n = parelles de conills adults el mes n .
- $F_n = F_{n-1} +$ parelles de conills d'un mes el mes $n - 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Fibonacci i raó àuria

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Fibonacci i raó àuria

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \dots$

Fibonacci i raó àuria

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \dots$
- En el terme general apareix la **raó àuria** Φ .

Fibonacci i raó àuria

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \dots$
- En el terme general apareix la **raó àuria** Φ .
- $$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Fibonacci i raó àuria

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \dots$
- En el terme general apareix la **raó àuria** Φ .

- $$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- $$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} (\Phi)^{-n} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} (\Phi)^n$$

Fibonacci i raó àuria

- Observem $3/2 = 1.5$, $8/5 = 1.6$, $13/8 = 1.625$, $21/13 = 1,66..$
- Es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

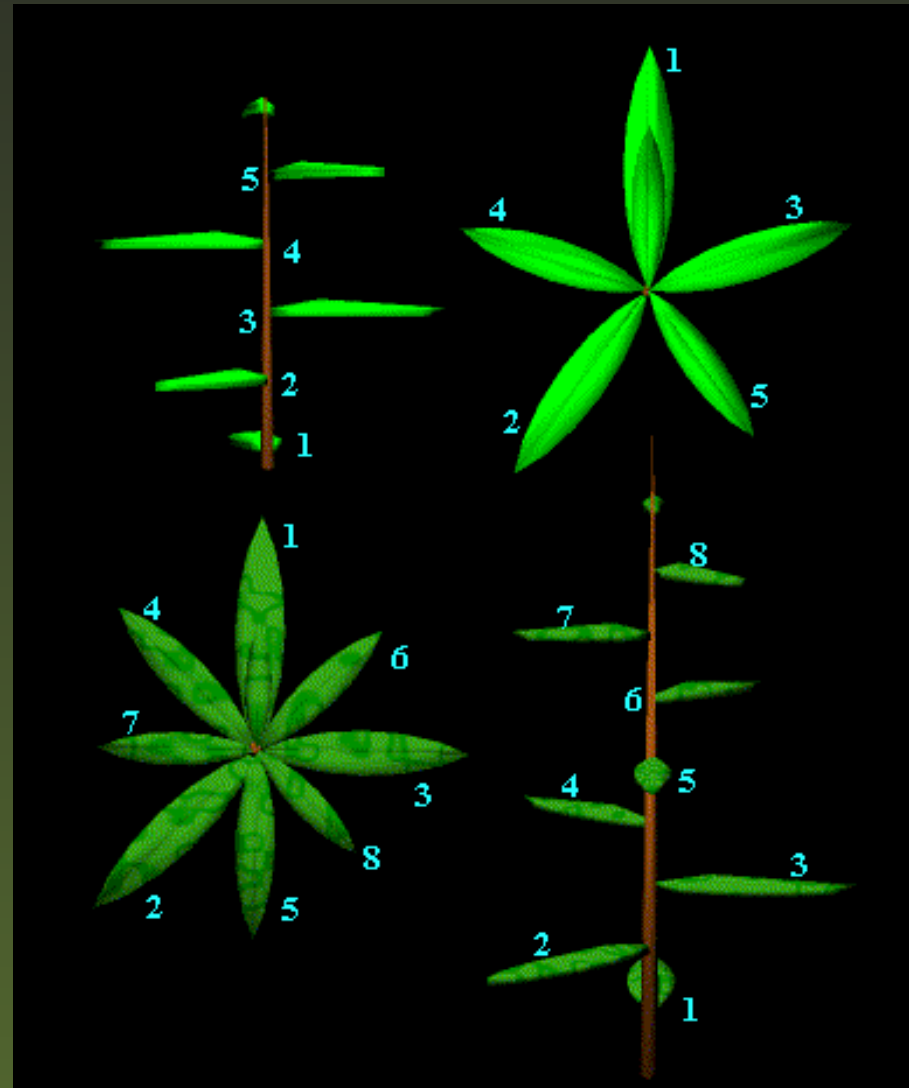
Fibonacci

- De fet, per a cada parella de nombres a_0, a_1 , tenim una successió de Fibonacci.
- Si $a_0 = 1$ i $a_1 = \Phi$ la successió de Fibonacci és una progressió geomètrica de raó Φ :

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots$$

Fitotaxia

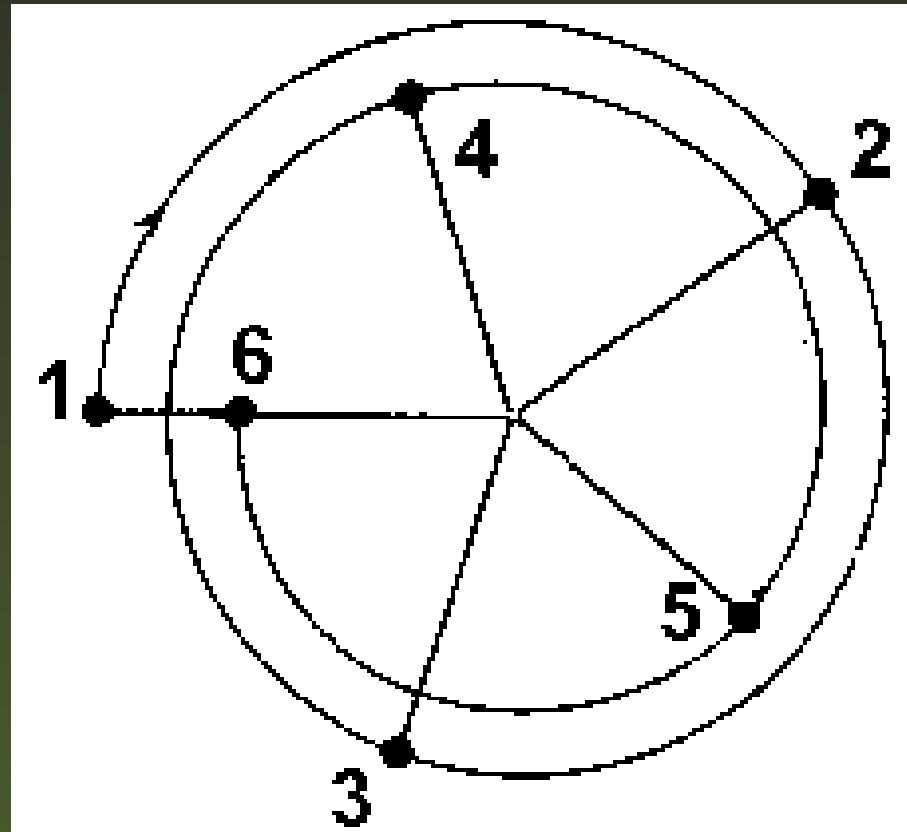
Filotaxia



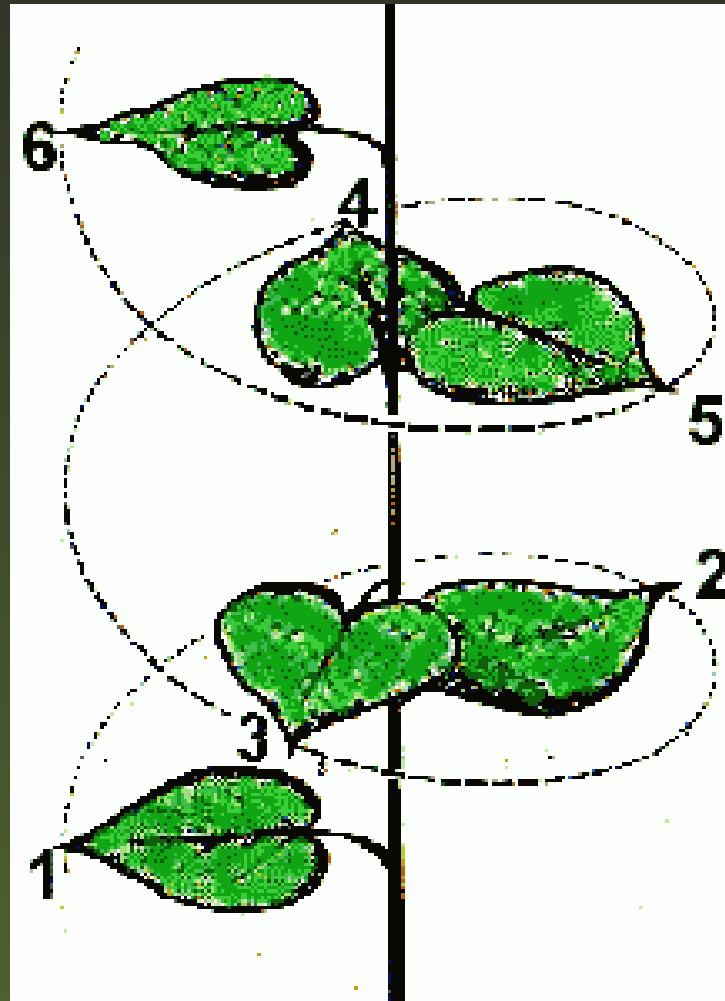
Filotaxia

- Suposem una planta que treu fulles en model helicoidal formant un mateix angle amb l'anterior.
- Quan tenim dues fulles una sobre l'altre diem que tenim un període.
- m = nombre de voltes d'un període. n = nombre de fulles d'un període.
- Si l'angle es 144° , per arribar a un nombre sencer de voltes ha de ser $144 \times 5 = 720$, que son $m = 2$ voltes i apareixen $n = 5$ fulles.

Filotaxia



Filotaxia



Filotaxia

$m = 1$ $n = 2$ oms i plantes bulboses

$m = 1$ $n = 3$ alisos, abedul, juncies

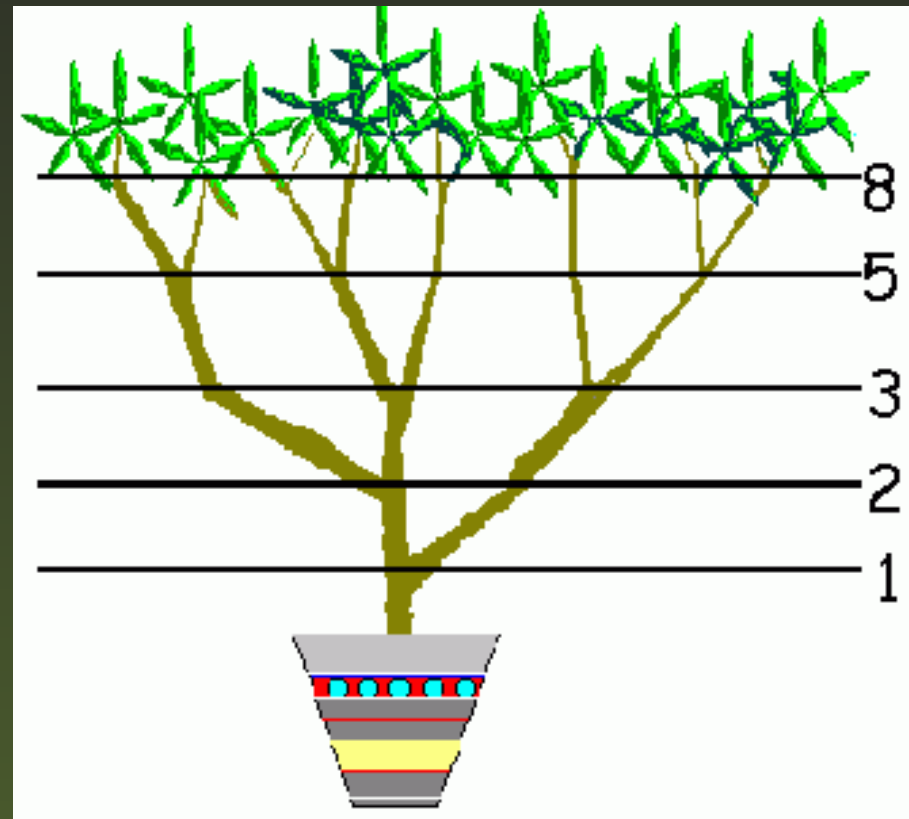
$m = 2$ $n = 5$ salce, rosers, fruits amb os

$m = 8$ $n = 21$ abets i pins

$m = 13$ $n = 34$ Escames de les pinyes. Pinus Laricio

- No es pot explicar per l'atzar.
- Màxima exposició a la llum de cada fulla sense tapar les altres.

Filotaxia



Espiral

Espiral

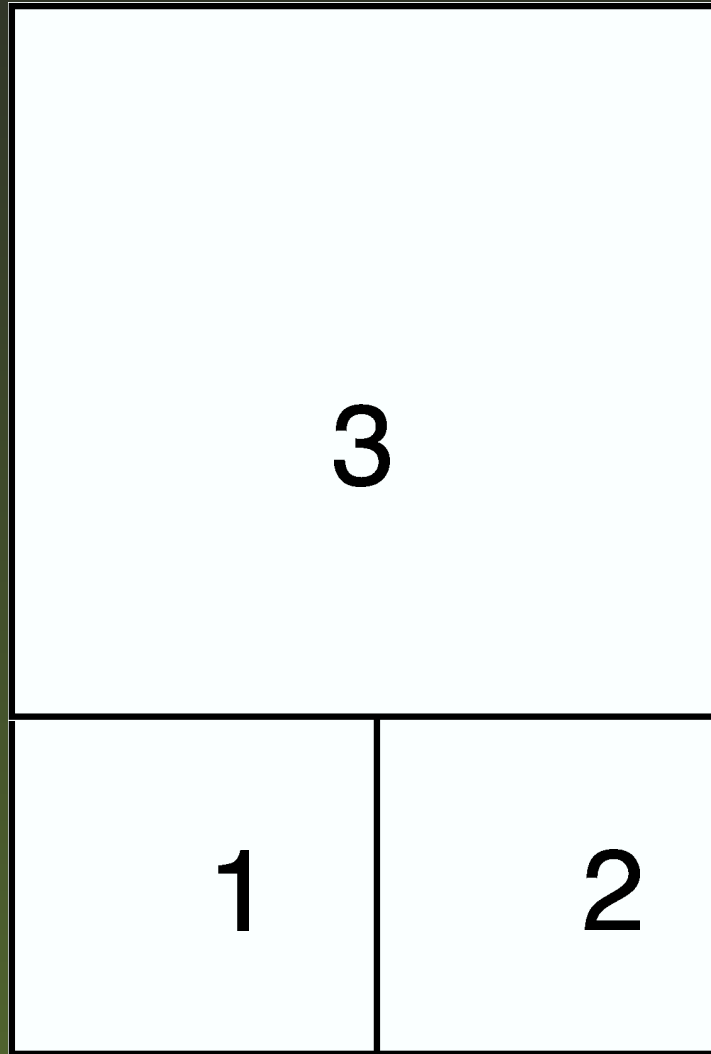
- Prenem dos quadrats de costat 1 amb costat comú.
- Prenem un quadrat de costat $2 = 1 + 1$
- Prenem un quadrat de costat $3 = 2 + 1$
- Prenem un quadrat de costat $5 = 3 + 2$

Espiral

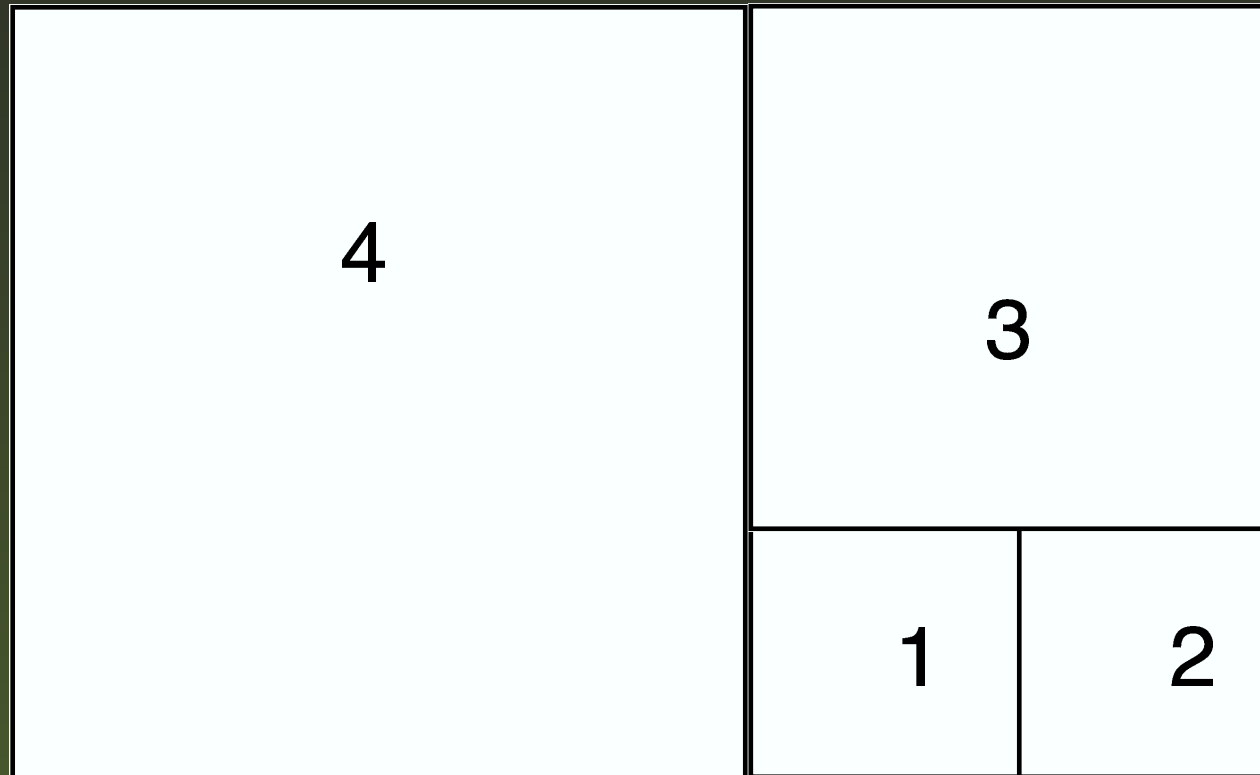
1

2

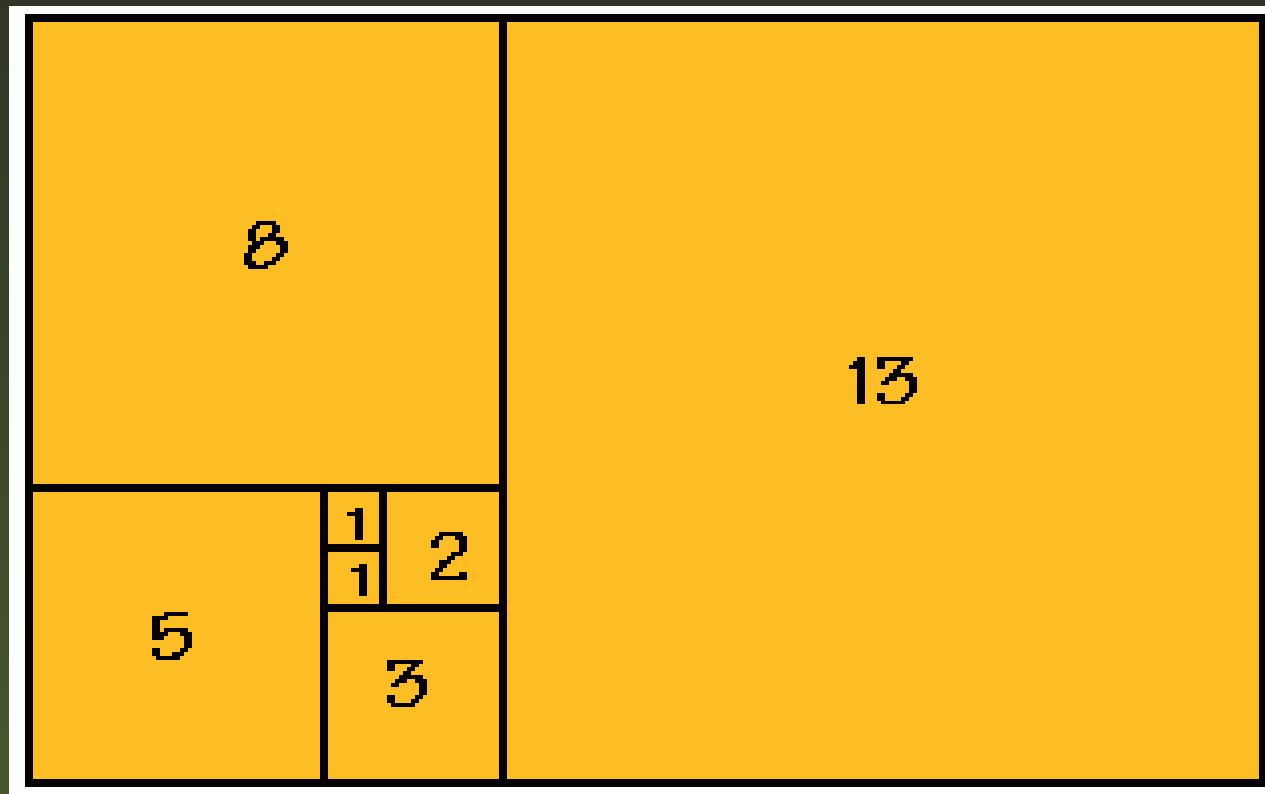
Espiral



Espiral



Espiral



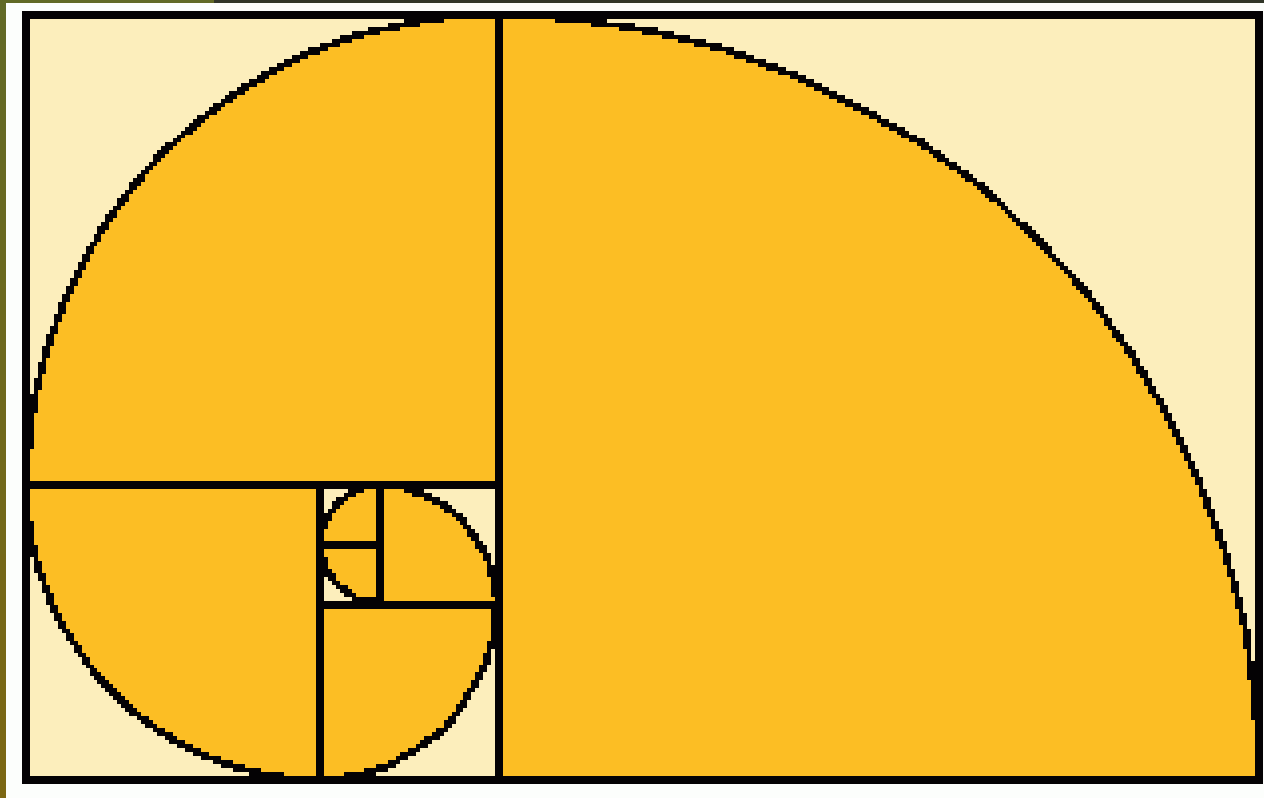
- Longitud dels costats dels quadrats.

Espiral

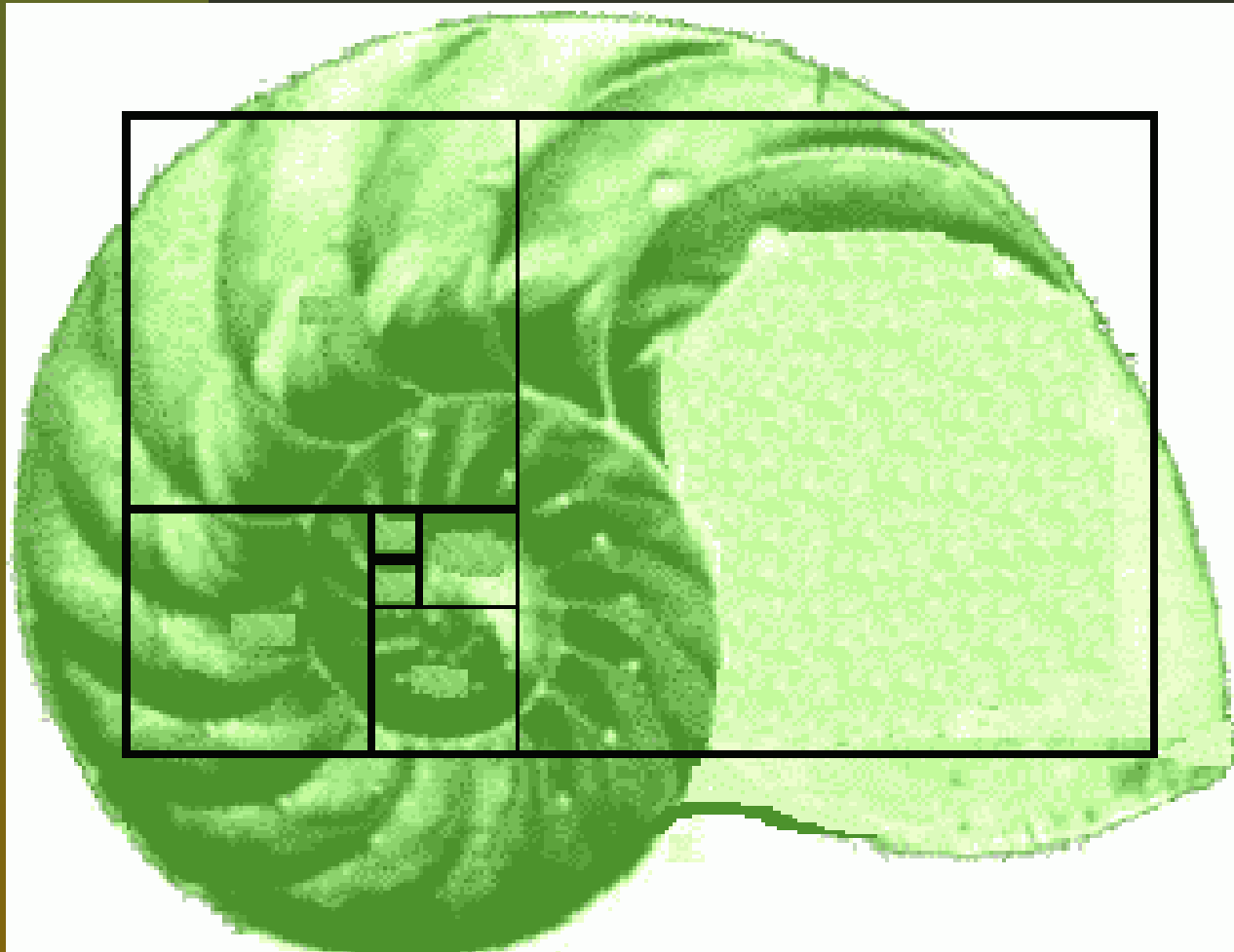
- El procés iteratiu ens acostava a un rectangle d'or.

$$\frac{\text{Llargada}}{\text{Amplada}} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_{n-1} + F_{n-2}} \rightarrow \frac{\Phi + 1}{1 + \Phi^{-1}} = \Phi$$

Espiral



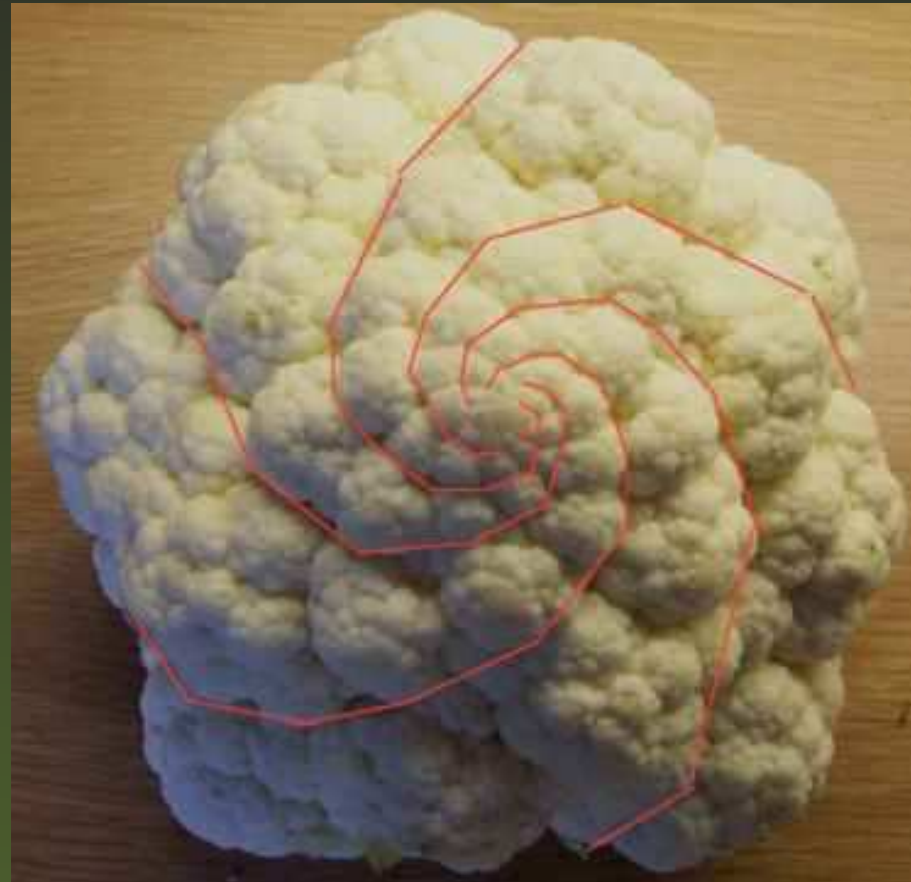
Espiral



Espiral



Espiral

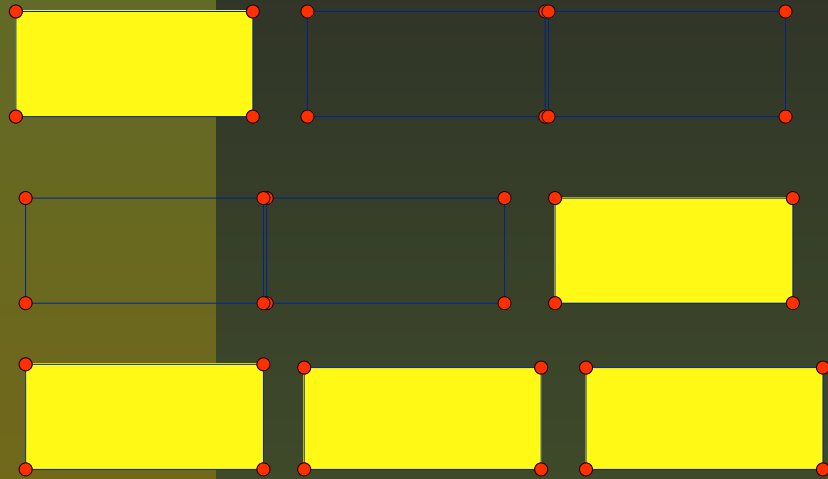


El joc dels gomets

El joc del Gometes

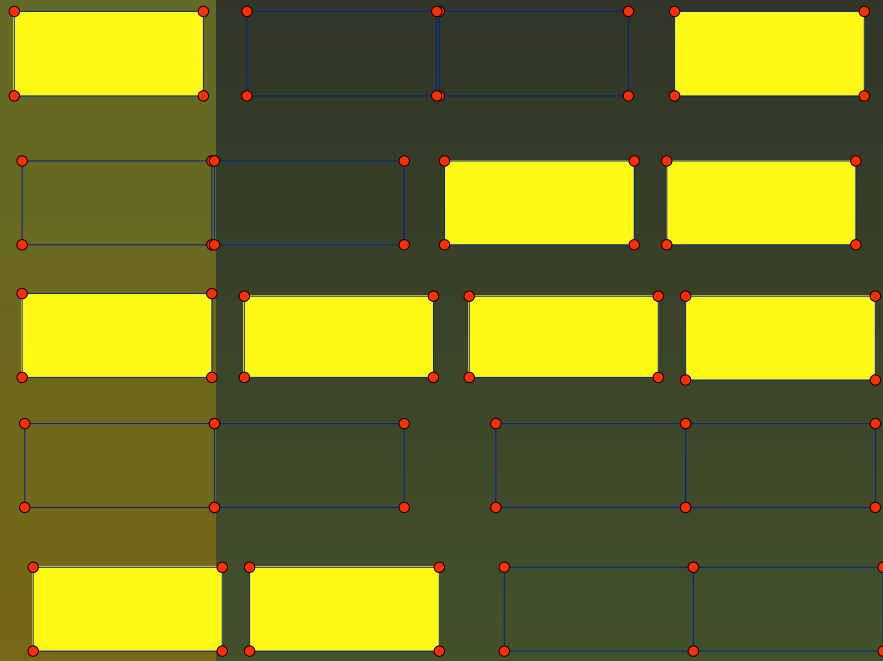
- Tenim gometes quadrats de color groc i gometes rectangulars blancs (equivalents a dos grocs).
- Quantes tires de longitud n podem fer diferents?
- Resposta: F_n ($F_0 = F_1 = 1$)

El joc del Gometes



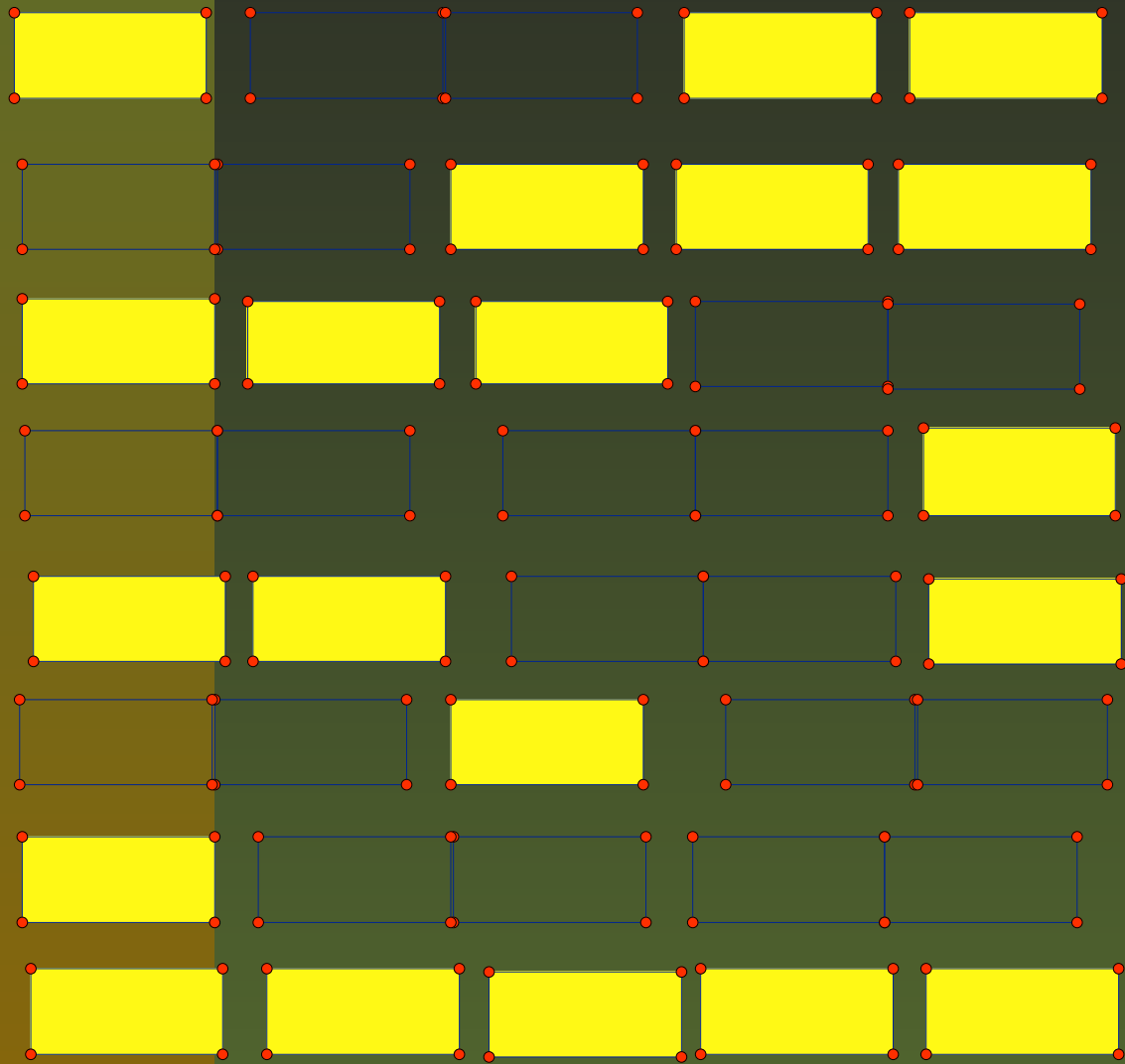
3

El joc del Gometts



5

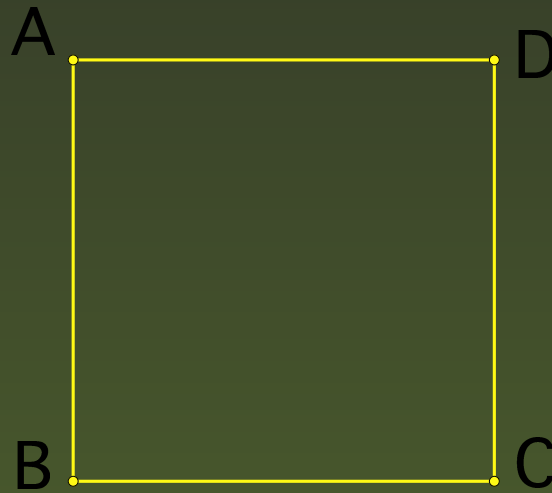
El joc del Gometes



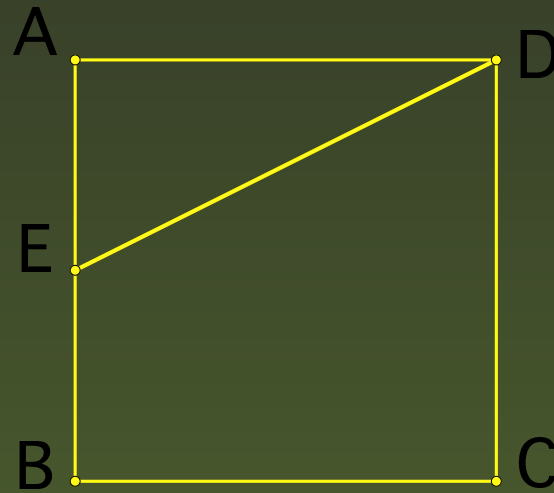
8

Construccions amb regla i compàs.

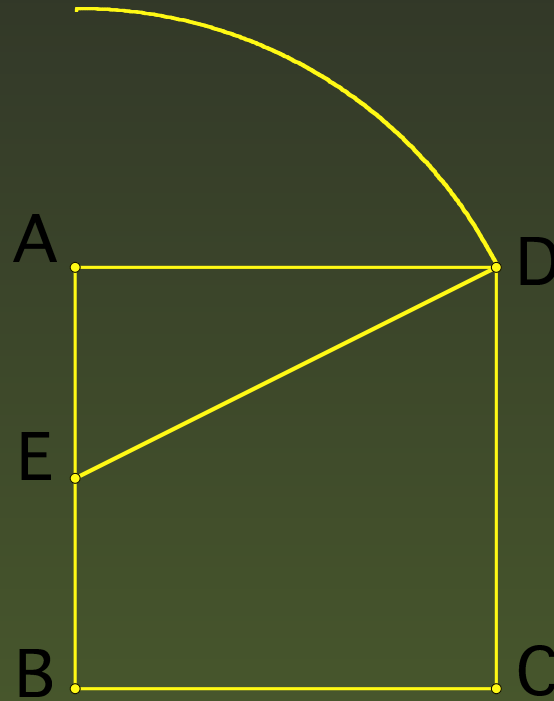
Rectangle auri



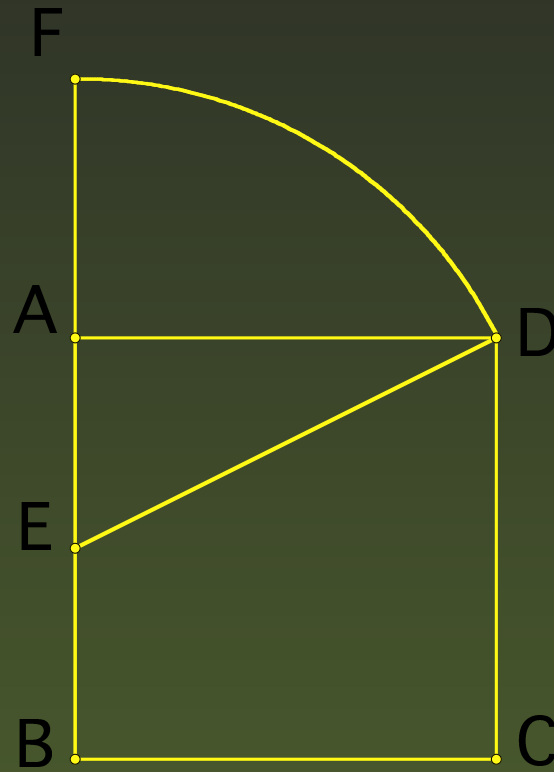
Rectangle auri



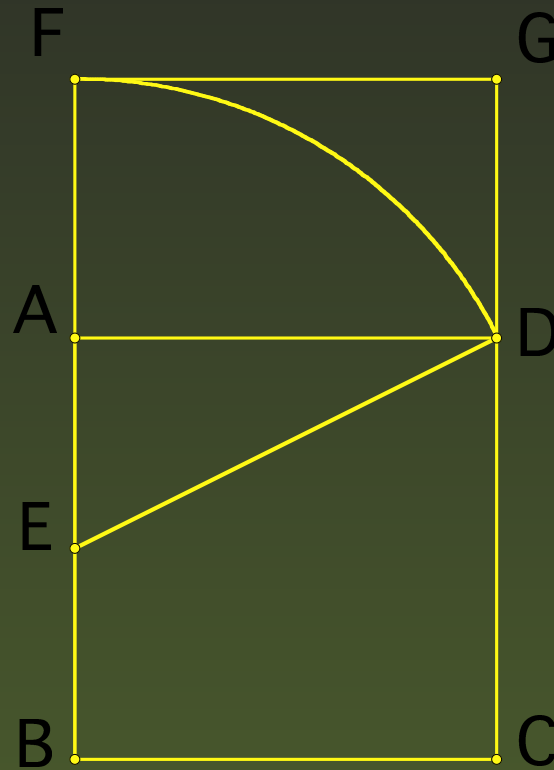
Rectangle auri



Rectangle auri

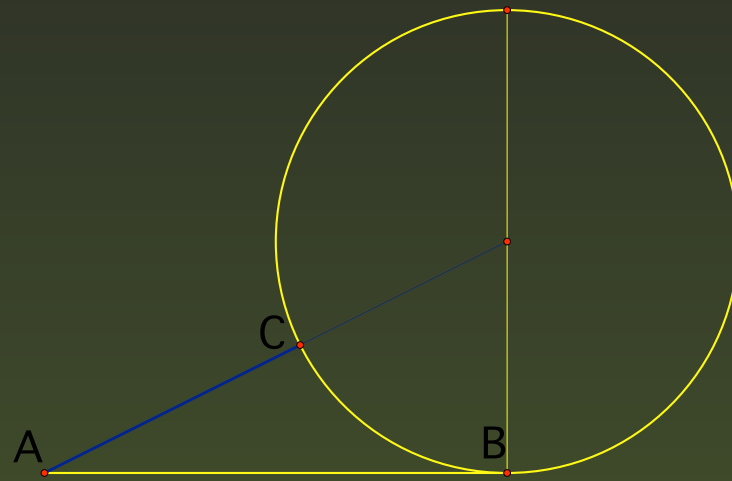


Rectangle auri



- $BF/BC = \Phi$

Construcció de Φ^{-1}



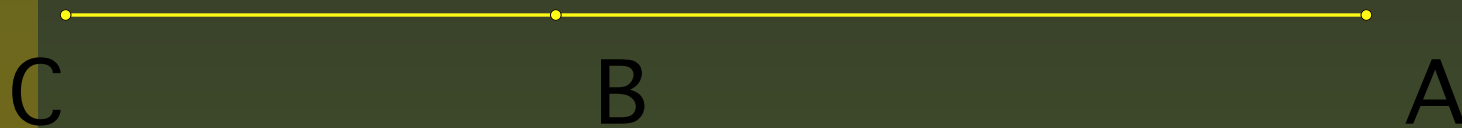
$$AB=1; AC=\Phi^{-1}$$

Construcció de Φ^{-1}

- Sigui $AB = 1$
- Construïm la circumferència tangent a AB per B
- Unim el centre amb A . Talla en C
- $AC = \Phi^{-1}$

Pentàgon

Mitjana i extrema raó

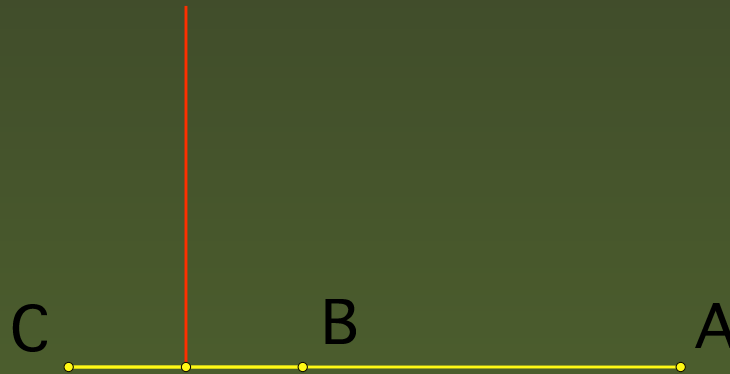


- El total és a la part gran com la gran és la petita.

- $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{CB} = \Phi$

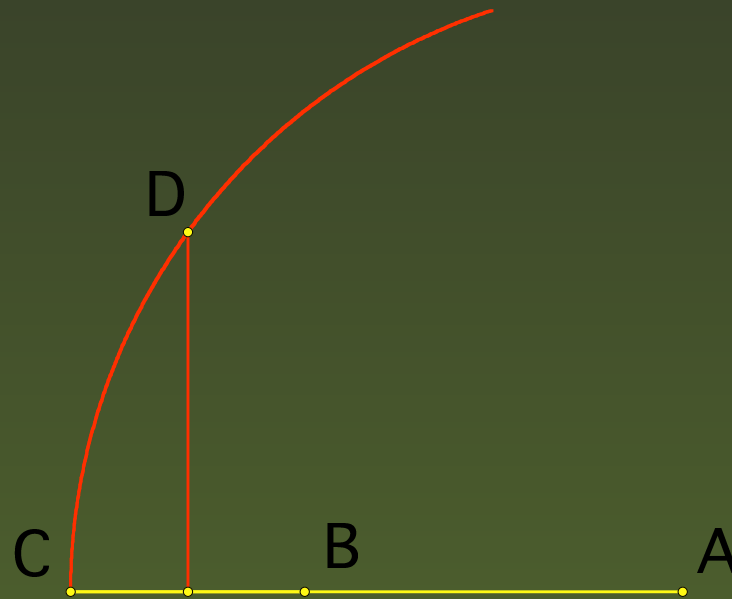
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi$.
- Construim la mediatriu de BC .



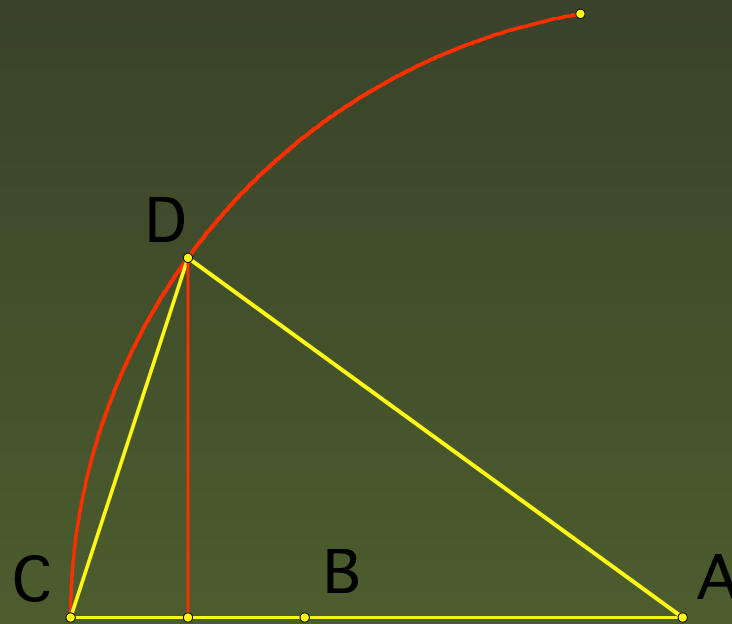
Triangle auri

- $\frac{AC}{AB} = \Phi$.
- Tallem amb la circumferència de centre A i radi AC .



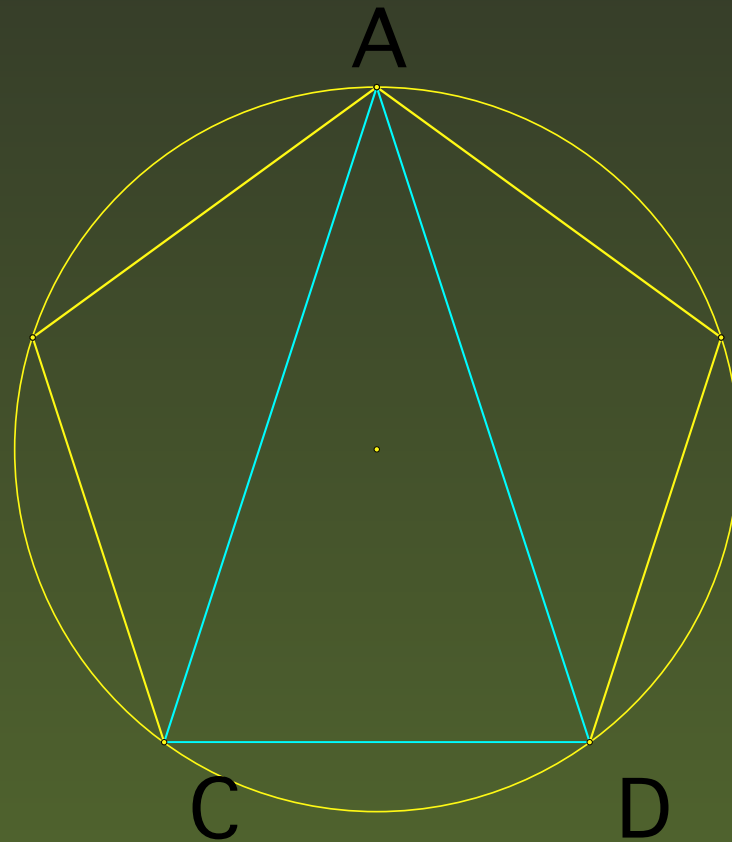
Triangle auri

- El $\triangle ACD$ és auri, ja que $CD = BD = BA$.



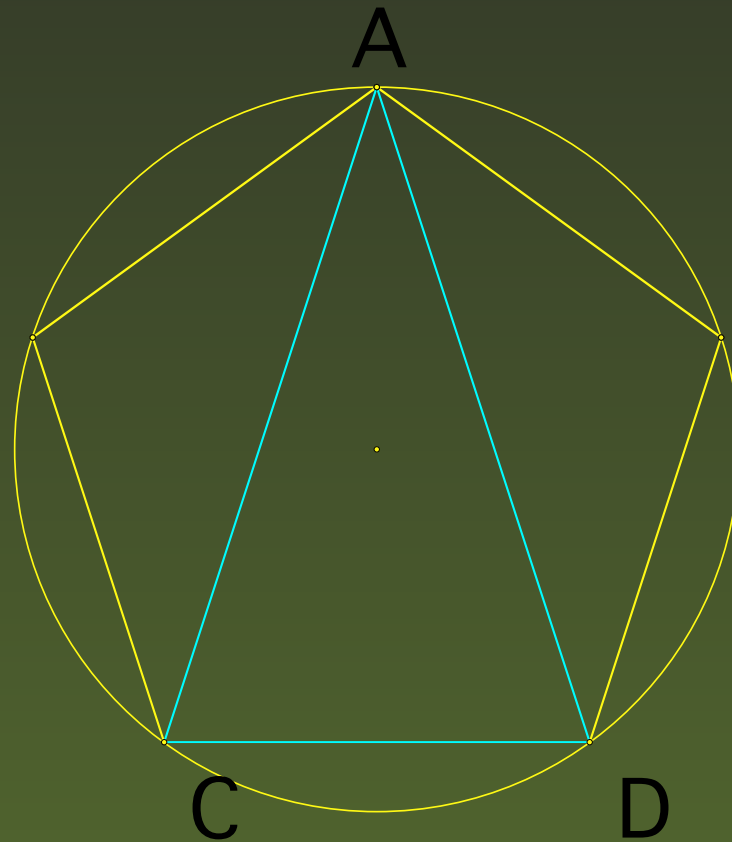
Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ.$$



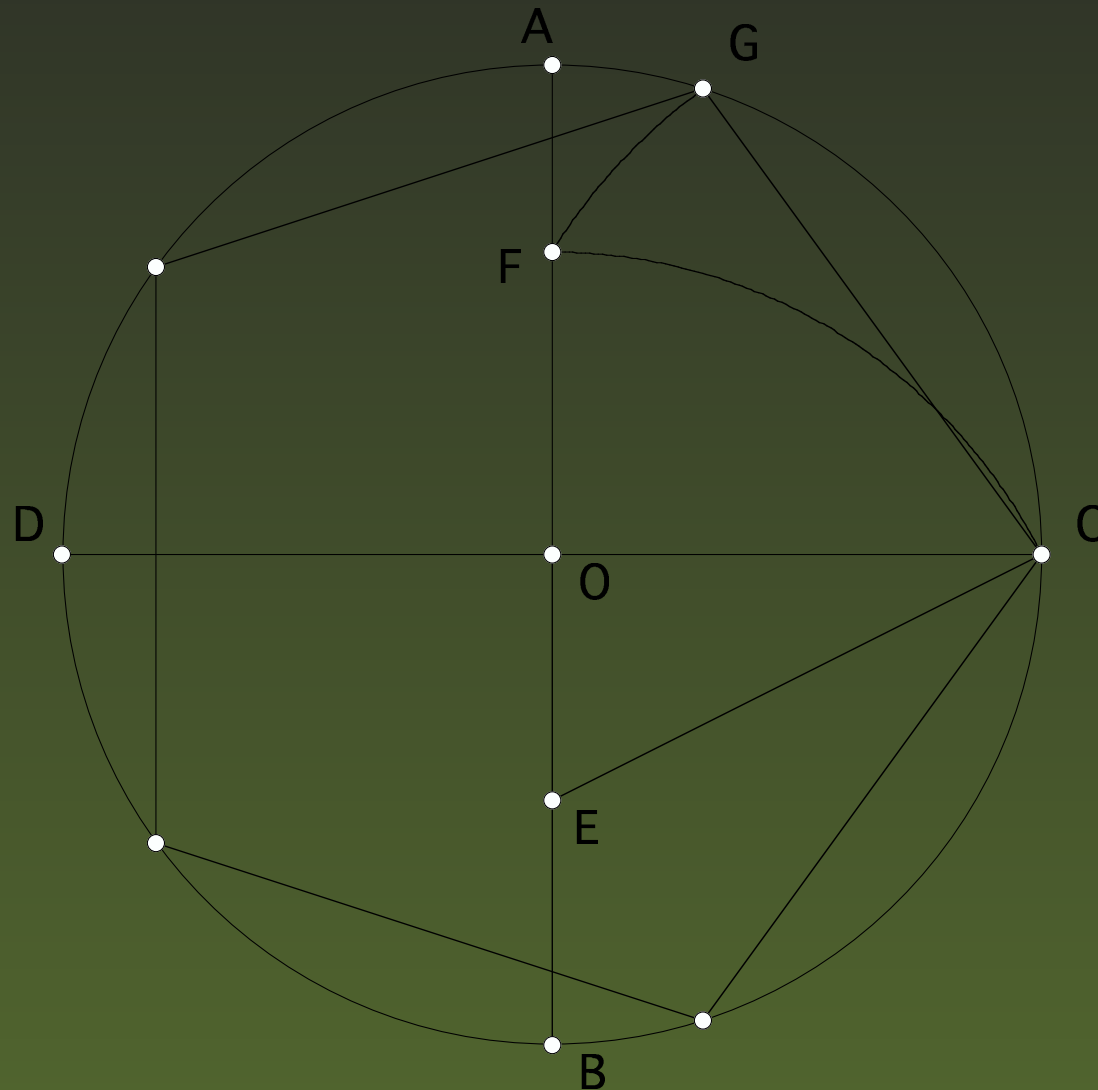
Pentàgon i raó àuria

$$\triangle ACD = 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ.$$



$$\frac{AC}{CD} = \Phi$$

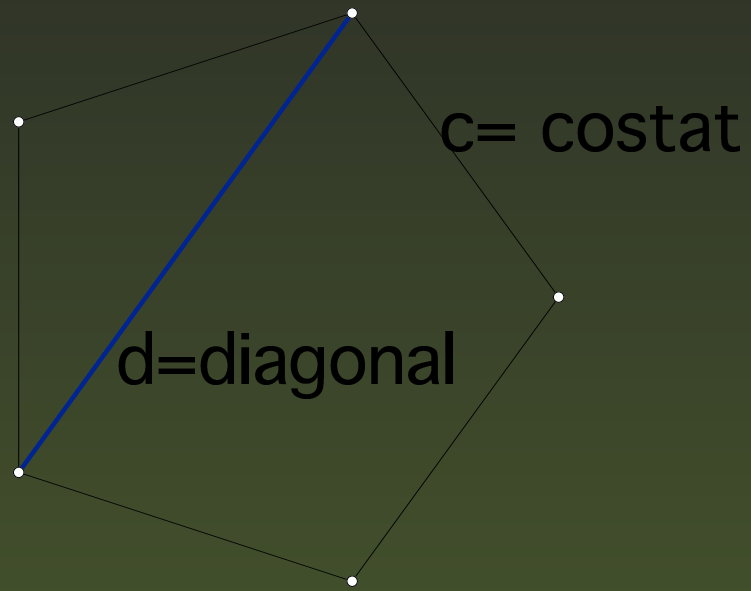
Pentàgon. Segona Construcció



Explicació

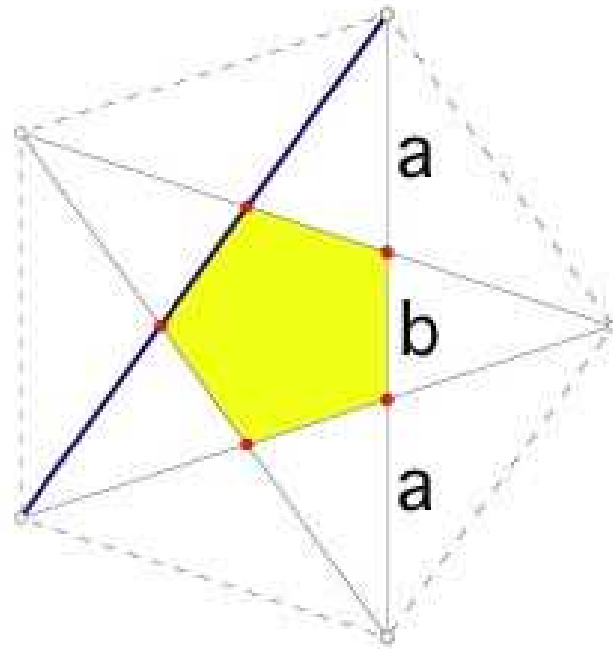
- Prenem el punt mitjà E entre O i B .
- Amb centre E i radi EC tracem la circumferència fins F .
- Amb centre C i radi CF tracem la circumferència fins G .
- CG és el costat del pentàgon.

Pentàgon i raó àuria



$$\frac{d}{c} = \Phi$$

Pentagrama



$$\frac{a}{b} = \Phi$$

Pentagrama

- Símbol dels Pitagòrics



$$\frac{a}{b} = \Phi$$



$$\frac{a + b}{b} = \Phi^2$$



$$\frac{2a + b}{b} = \Phi^3$$

Leda Atòmica. Dalí 1949



Leda Atòmica. Dalí 1949



Leda Atòmica. Dalí 1949



Polígons regulars

- Quins polígons regulars es poden dibuixar amb regla i compàs?
- El primer que no es pot dibuixar és l'**eptàgon**
- Gauss, als disset anys, va construir el de **17** costats
- Es poden construir els de **3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, ...** costats

Polígons regulars

- TEOREMA(Gauss 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regla i compàs si i només si n té una descomposició en factors primers de la forma*

$$n = 2^\alpha (2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ són enters diferents entre ells.

Polígons regulars

- TEOREMA(**Gauss** 1801) *El polígon regular de n costats es pot construir amb regla i compàs si i només si n té una descomposició en factors primers de la forma*

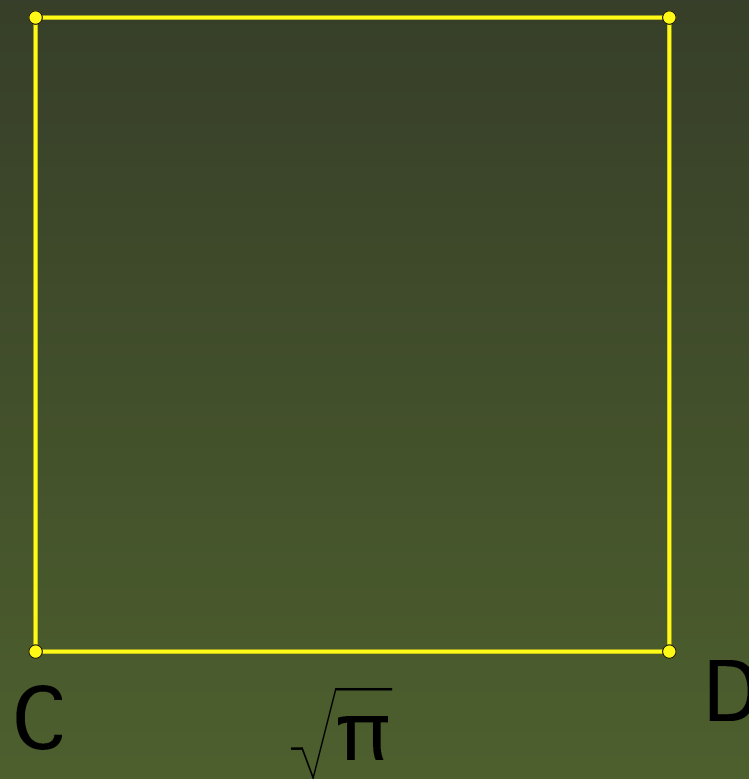
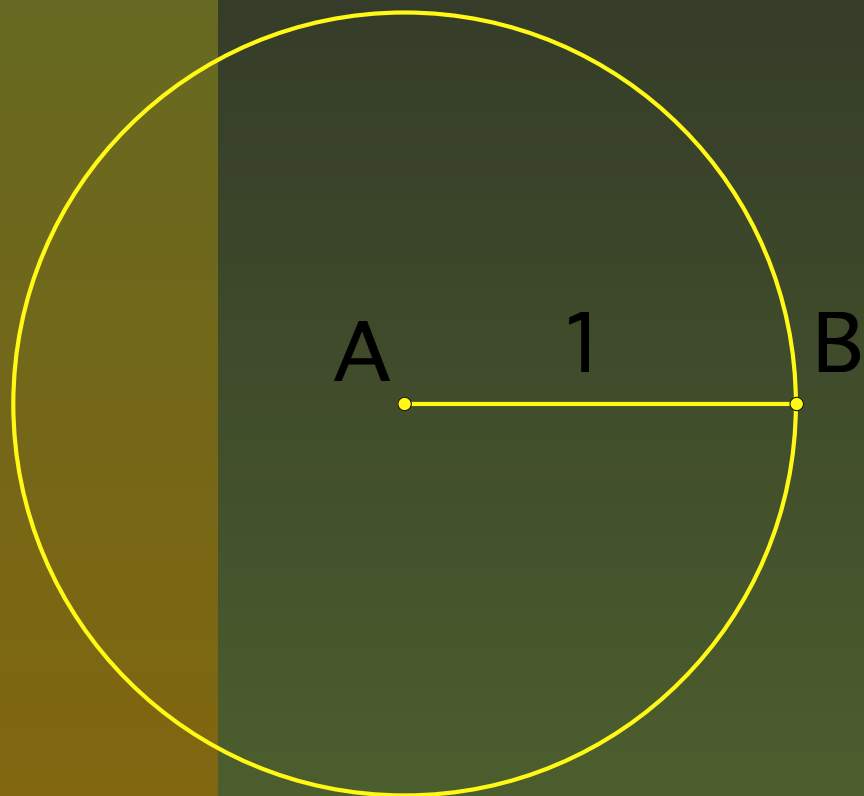
$$n = 2^\alpha (2^{2^{\alpha_1}} + 1) \cdot (2^{2^{\alpha_2}} + 1) \cdots (2^{2^{\alpha_k}} + 1)$$

on $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ són enters diferents entre ells.

- Primers de **Fermat** $(2^{2^a} + 1)$: 3, 5, 17, 257, 65537, ..

Quadratura del cercle

Quadratura del cercle



Quadratura del cercle

- Anaxagoras 499 – 428 aC.
- Aristofanes en fa burla a *Els ocells*, 414 aC.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regla i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.
- Exemple: $a = \sqrt{2}$, $a^2 - 2 = 0$.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[F. Lindemann, 1882] El nombre π no és arrel de cap polinomi a coeficients racionals.



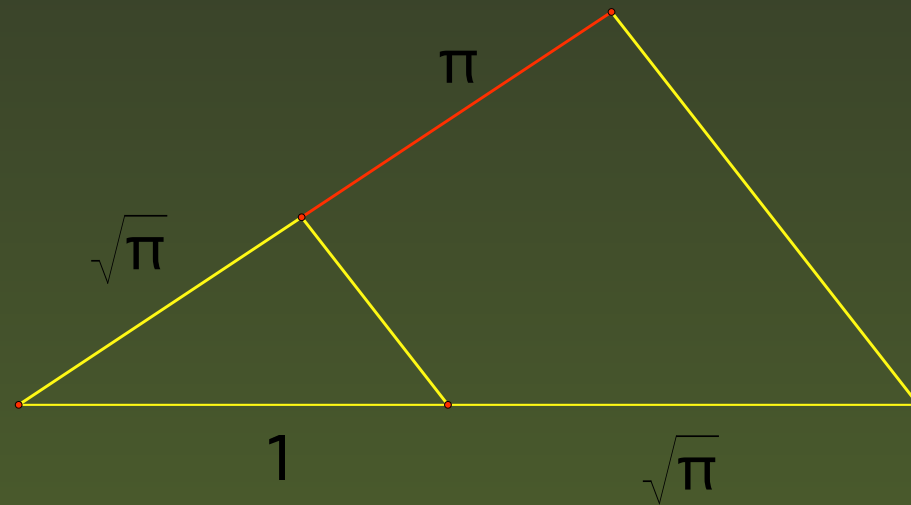
L. F. von Lindemann, 1852 – 1939

Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle),
podríem construir π .

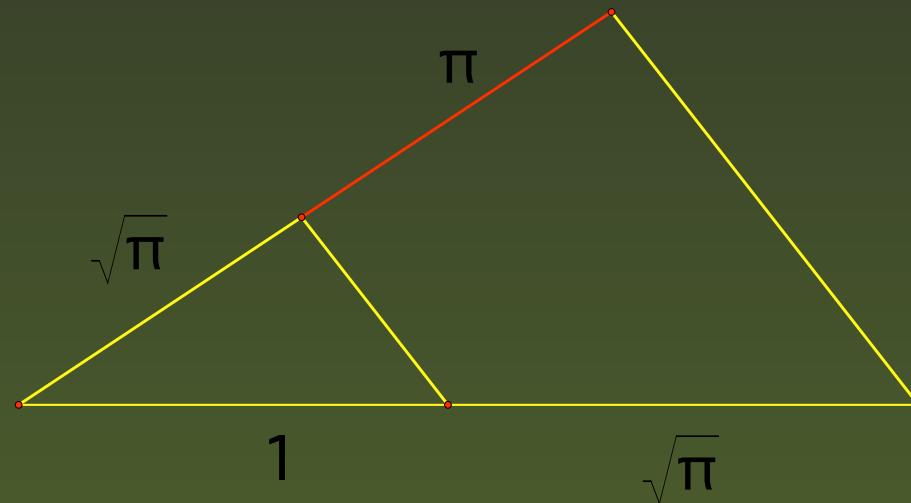
Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle),
podríem construir π .



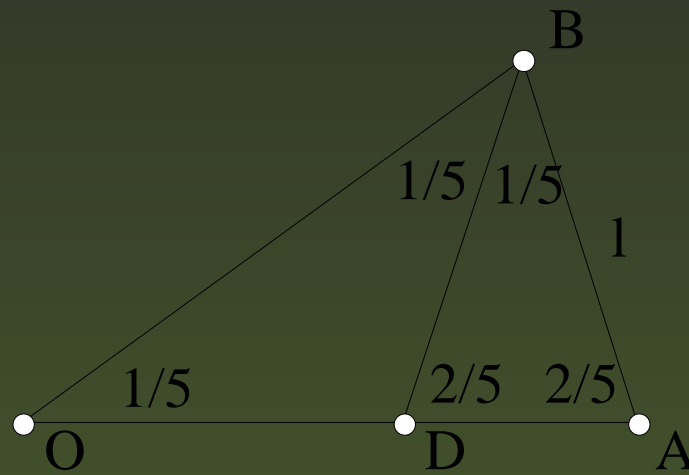
Quadratura del cercle

Si poguéssim construir $\sqrt{\pi}$ (quadrar el cercle),
podríem construir π .



Contradicció

Decàgon

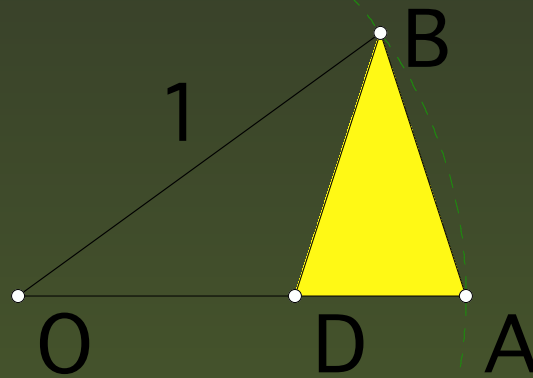


Decàgon

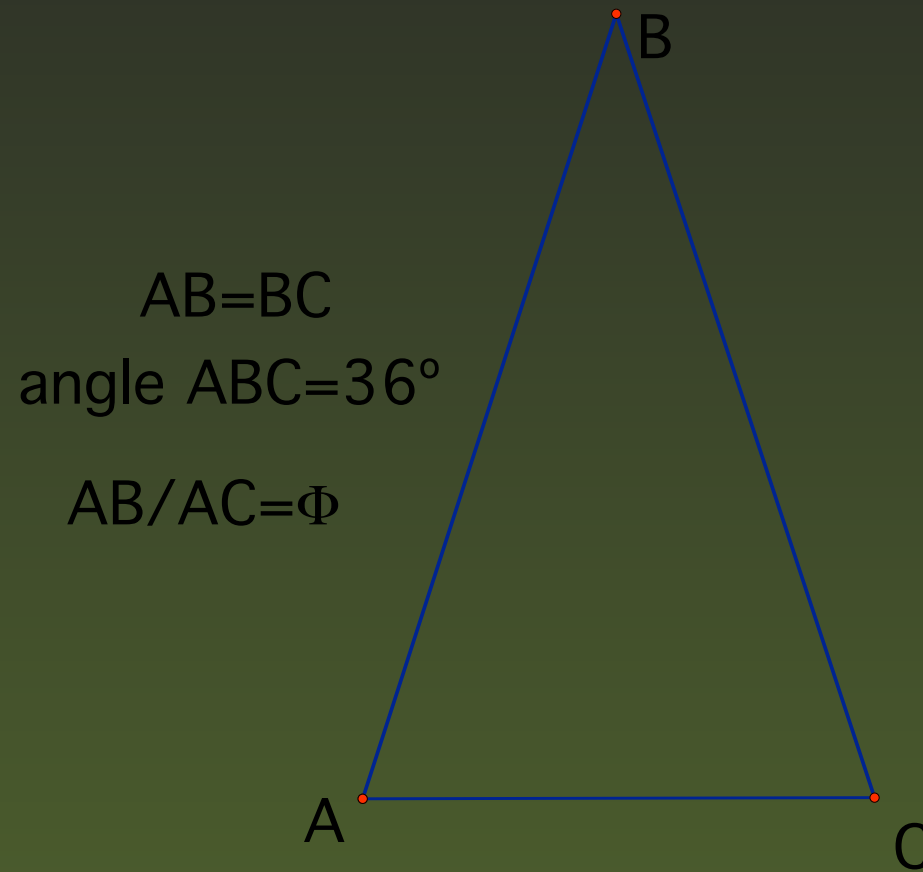
Triangles OAB i
BDA semblants

$$\frac{1}{AB} = \frac{AB}{1-AB}$$

$$AB = \Phi^{-1}$$



Triangle d'or



- Triangles centrals dels decàgon.

Fibonacci. Problema Obert

- Hi ha infinits nombres primers a la successió de Fibonacci?
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...