Gauss i la geometria

Geodèsia i GNE

AGUSTÍ REVENTÓS

15 febrer 2006

FME UPC

Geometria

- I. Geometria Euclidiana.
- II. Geometria no Euclidiana.
- III. Geodèsia.
- IV. Geometria Diferencial (Superfícies).
- V. GD-GNE.

Geometria

- I. Geometria Euclidiana.
- II. Geometria no Euclidiana. Bolyai
- III. Geodèsia.
- IV. Geometria Diferencial (Superfícies).
- V. GD-GNE.

Geometria

- I. Geometria Euclidiana.
- II. Geometria no Euclidiana. Bolyai
- III. Geodèsia.
- IV. Geometria Diferencial (Superfícies).
- V. GD-GNE. Bolyai

I. Geometria Euclidiana

1796

- 29 de Març de 1796. Disset costats.

- Carta a Gerling 1819.

  Va ser el 29 *de març de* 1796*, en unes vacances a Brunswick (Braunschweig), sense la més mínima participació de la casualitat, ja que va ser fruit d'esforçades meditacions;*

1796

- 29 de Març de 1796. Disset costats.

- Carta a Gerling 1819.

  el matí d'aquell dia, abans d'aixecar-me, vaig tenir la sort de veure amb gran claredat tota aquesta correlació, de manera que allà mateix i immediatament vaig aplicar a l'heptadecàgon la corresponent confirmació numèrica.

El diari

- L'endemà, el 30 de Març de 1796, comença el diari, un mes abans de complir 19 anys.

Les entrades [1],[3],[55],[65],[66],[116], fan referència a polígons.

Braunschweig

Göttingen

II. Geometria no Euclidiana

1792

- Carta a Schumaker (28 – 09 – 1846)

  El que Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatchevski anomena geometria imaginària. Saps que durant 54 *anys [*1792*] he compartit els mateixos punts de vista.*

1792

- Carta a Schumaker $(28 - 09 - 1846)$

El que Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatchevski anomena geometria imaginària. Saps que durant 54 *anys [*1792*] he compartit els mateixos punts de vista.*

Tenia 15 anys!

1794

- Carta a Gerling $(10 - 10 - 1846)$

  El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de $360°$ *per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

1794

- Carta a Gerling $(10 - 10 - 1846)$

  El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de 360° *per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

  Tenia 17 anys!

El diari

- 28 de Juliol de 1797.

[72] *He demostrat la possibilitat del pla.*

El diari

- Setembre de 1799.

[99] *Hem fet excepcionals progressos en els principis de la Geometria.*

Teoria de les paral·leles

- Escrits inacabats i no publicats del 1831.
- Coneixem el que pensava sobre aquest tema per les seves cartes.
- No obstant, tots els resultats de geometria *astral* que apareixen en aquestes cartes es poden deduir directament de l'*analogia de Lambert*.

Lambert (1728-1777)

- Lambert suggereix que la geometria de l'angle agut correspon a la geometria sobre una esfera de radi imaginari.

- Gauss consulta l'obra de Lambert a la biblioteca de Göttingen el 24-oct-1795 i el 2-gener-1797.

- Va ser desenvolupada per Taurinus $(1794 - 1874)$.

Analogia

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}.$

Defecte

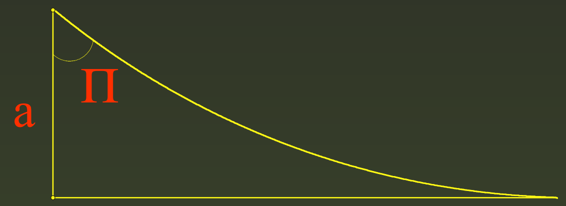
Estenent l'analogia a la trigonometria:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}$$

Per tant $\alpha < \pi/3$.

- $\alpha + \alpha + \alpha < \pi$

Angle de paral·lelisme



$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R}$$

$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

Algunes cartes

Carta a Farkas Bolyai $(17 - 12 - 1799)$

- *Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no! És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.*

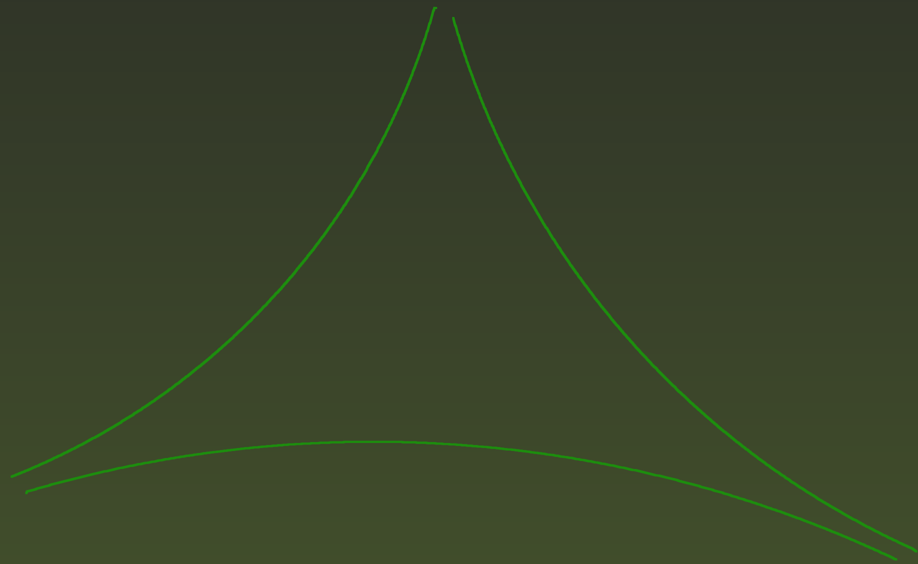
Carta a Gerling $(11 - 04 - 1816)$

- *De fet, seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, ja que llavors tindríem una mesura universal a priori, per exemple, podríem assumir com unitat de l'espai el costat del triangle equilàter amb angle* $= 59°59'59''.99999$.

Mateixa carta

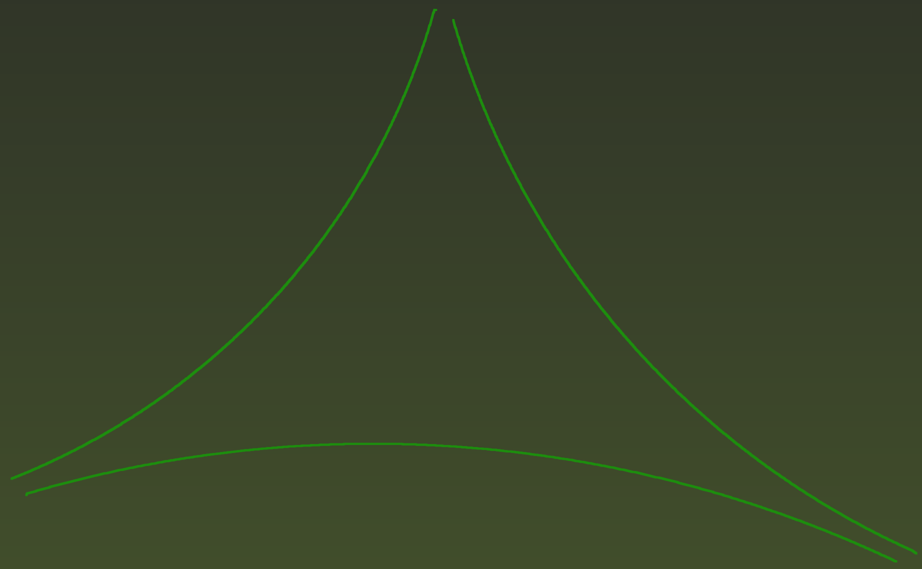
- *El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de* $180°$ *és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a ella, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.*

Mateixa carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Mateixa carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \mathrm{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Carta a Schumaker (17 – 05 – 1831)

- *Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria, però, que això morís amb mi.*

Mateixa carta

- En aquesta carta dóna també la longitud d'una circumferència de radi r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

i comenta que perquè les mesures coincideixin amb l'experiència k hauria de ser infinitament gran.

Mateixa carta

- En aquesta carta dóna també la longitud d'una circumferència de radi r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

i comenta que perquè les mesures coincideixin amb l'experiència k hauria de ser infinitament gran.

- Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

Carta a **Gerling** (14 – 02 – 1832)

- *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.*

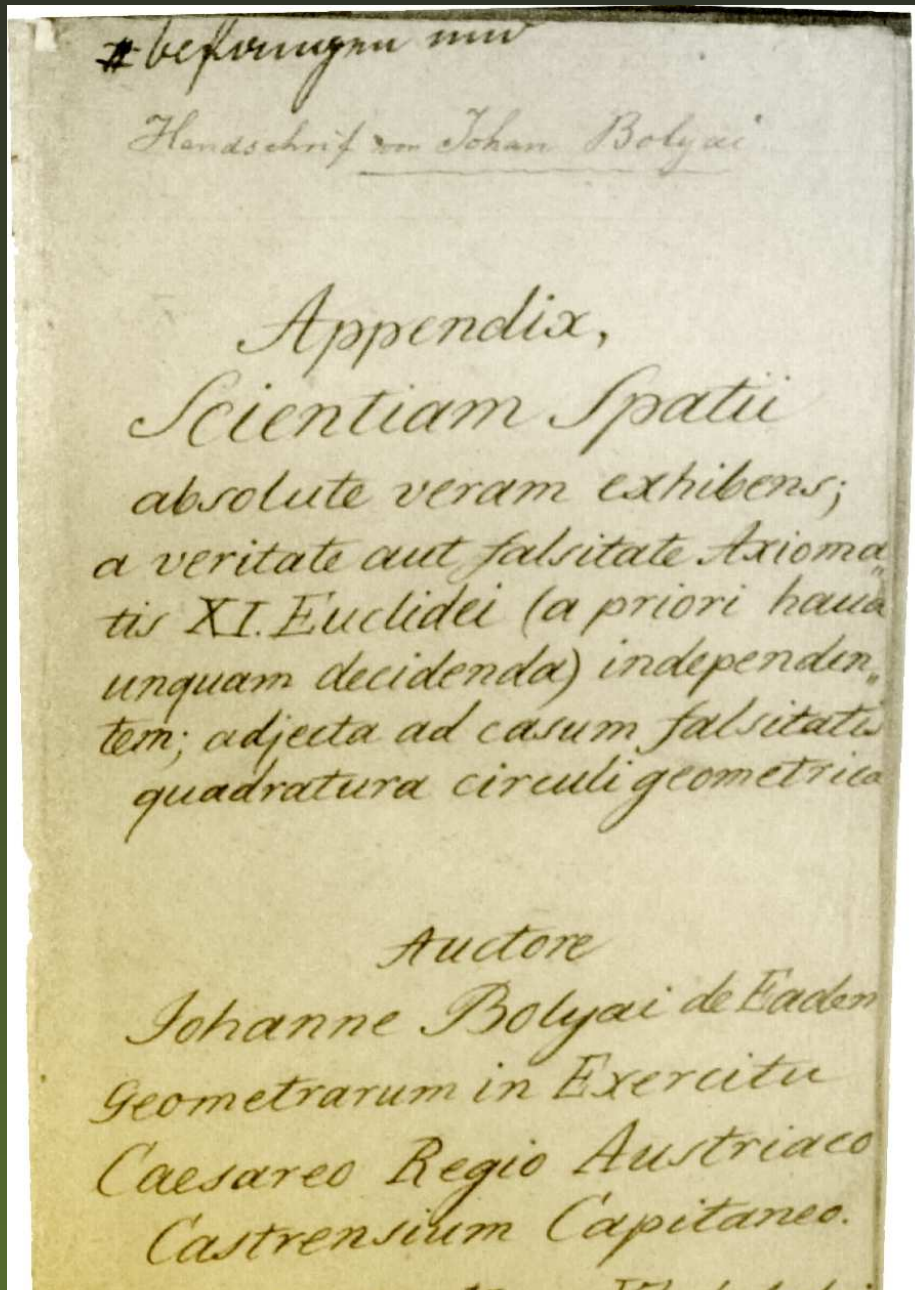
Carta a Gerling (14 – 02 – 1832)

- *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.*

- *L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

János Bolyai (1802 – 1860)

Tentamen



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Carta a Farkas Bolyai ($6 - 03 - 1832$)

- *És, per tant, una agradable sorpresa per mi, i estic molt satisfet, que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.*

Carta a Farkas Bolyai (6 – 03 – 1832)

- *És, per tant, una agradable sorpresa per mi, i estic molt satisfet, que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.*
- Quant hagués pogut canviar aquesta història si Gauss hagués fet publica la seva molt bona opinió del treball de János Bolyai!

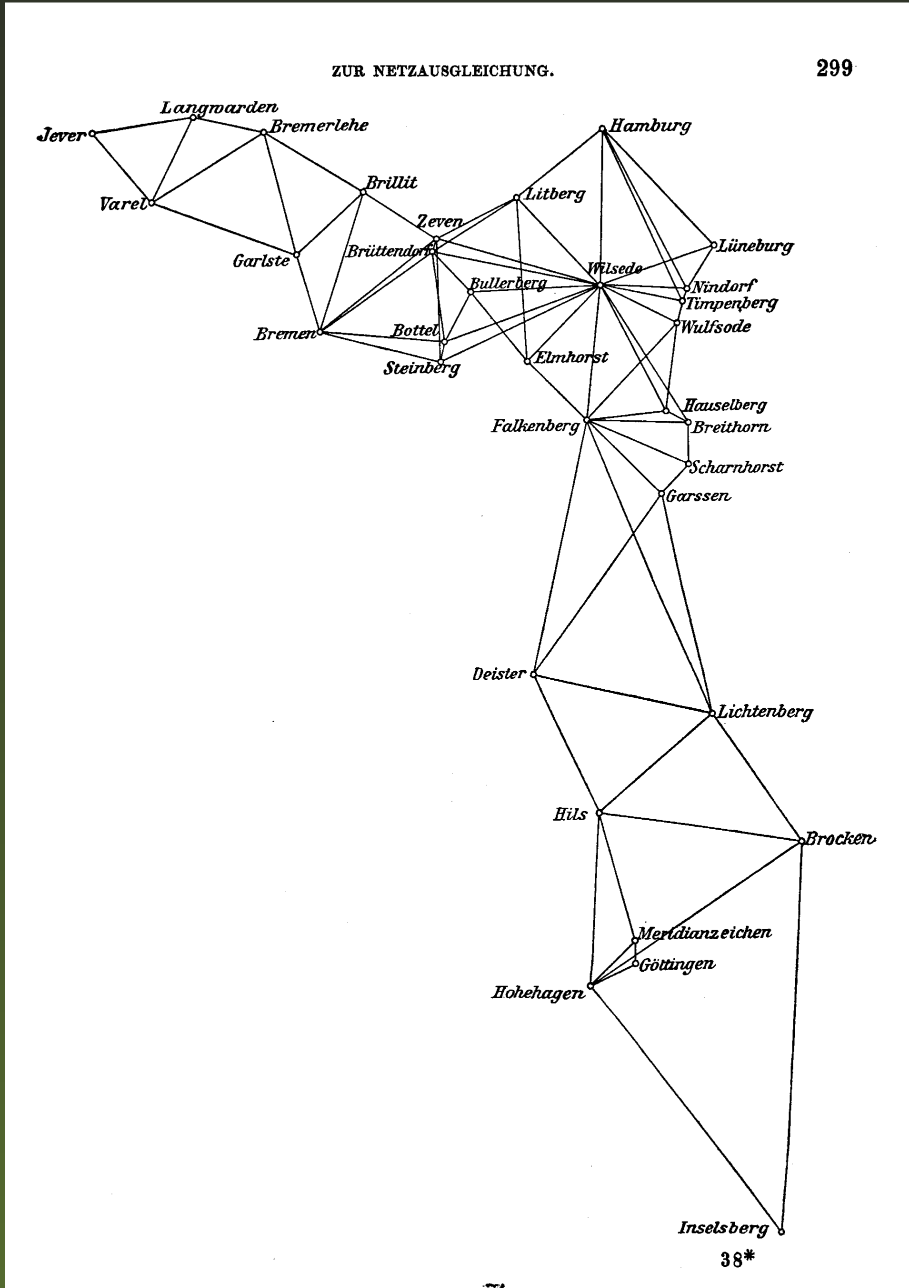
III. Geodèsia

Hannover

El 1818 se li encarrega de triangular el regne de Hannover.

- Hi dedicarà uns 8 anys.
- Utilitza mínims quadrats.
- Inventa l'heliotrop.
- Resultats no massa satisfactoris (línia base).
- Gauss es preguntava sovint si no hagués fet millor de dedicar-se a altres ocupacions.

Hannover


ZUR NETZAUSGLEICHUNG.
299
Langwarden
Jever
Bremerlehe
Hamburg
Brillit
Litberg
Varel
Zeven
Lüneburg
Garlste
Brüttendorf
Wilsede
Bullerberg
Nindorf
Timpenberg
Wulfsode
Bremen
Bottel
Steinberg
Elmhorst
Hauselberg
Falkenberg
Breithorn
Scharnhorst
Garssen
Deister
Lichtenberg
Hils
Brocken
Meridianzeichen
Göttingen
Hohehagen
Inselsberg
38*

Hannover

[3.]

[Zusammenstellung der beobachteten Dreiecke und ihrer Widersprüche.]

Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess
	1	115° 58′ 47,″435			8	23° 11′ 52,″206			12	27° 27′ 12,″046	
1	2	48 19 36, 048		10.	9	99 14 52, 452		19	13	148 10 28, 108	
	3	15 41 35, 239			10	57 33 19, 258			15	4 22 19, 354	
		179 59 58, 722	0,″158			180 0 3, 916	4,″245			179 59 59, 508	0,″321
		−1, 436				−0, 329				−0, 813	
	2	119 37 29, 268			9	87 32 16, 986			13	34 25 46, 752	
2	3	42 31 25, 667		11	10	21 0 11, 004		20	14	109 38 36, 566	
	4	17 51 7, 707			11	71 27 33, 968			15	35 55 37, 227	
		180 0 2, 642	1, 348			180 0 1, 958	0, 758			180 0 0, 545	1, 295
		+1, 294				+1, 200				−0, 750	
	3	52 29 10, 876			10	22 10 9, 986			14	80 10 54, 559	
3	4	84 40 26, 895		12	11	64 11 24, 606		21	15	15 24 48, 626	
	5	42 50 30, 659			12	93 38 25, 839			16	84 24 15, 820	
		180 0 8, 430	6, 568			180 0 0, 431	0, 759			179 59 59, 005	0, 349
		+1, 862				−0, 328				−1, 344	
	3	86 13 58, 366			10	8 0 47, 395			15	7 35 56, 089	
4	5	53 6 45, 642		13	12	28 17 42, 299		22	16	96 37 6, 464	
	6	40 39 30, 165			13	143 41 29, 140			17	75 46 59, 128	
		180 0 14, 173	14, 853			179 59 58, 834	0, 202			180 0 1, 681	0, 176
		−0, 680				−1, 368				+1, 505	

Hannover

1. $0 = -0{,}718 + 3(1) - (2)$
2. $0 = +0{,}647 - (1) + 3(2) + (3)$
3. $0 = +0{,}931 + (2) + 3(3) - (4) - (5)$
4. $0 = -0{,}340 - (3) + 3(4)$
5. $0 = -0{,}331 - (3) + 3(5) - (6)$
6. $0 = -0{,}032 - (5) + 3(6) - (7) - (8)$

(7. $0 = +0{,}233.5 - (6) + 3(7) + (8) + (9) - (10)$)

8. $0 = +0{,}510.5 - (6) + (7) + 3(8) - (9) + (10)$
9. $0 = -0{,}442 + (7) - (8) + 3(9) + (10) - (11)$
10. $0 = -0{,}164.5 - (7) + (8) + (9) + 3(10) - (11)$
11. $0 = +0{,}600 - (9) - (10) + 3(11) - (12)$
12. $0 = -0{,}164 - (11) + 3(12) - (13) - (14)$

(13. $0 = -0{,}684 - (12) + 3(13) + (14) - (15) - (16) - (19)$)

14. $0 = -0{,}569.5 - (12) + (13) + 3(14) + (16) + (17) - (18) + (19)$

(15. $0 = +0{,}886.5 - (13) + 3(15) + (16) - (17) + (20)$)

16. $0 = +0{,}521 - (13) + (14) + (15) + 3(16) + (17) - (18) - (19) - (20)$
17. $0 = -0{,}740.5 + (14) - (15) + (16) + 3(17) - (18) + (20) - (21)$
18. $0 = -0{,}918.5 - (14) - (16) - (17) + 3(18) - (27) - (28)$
19. $0 = -0{,}406.5 - (13) + (14) - (16) + 3(19) + (20)$
20. $0 = -0{,}375 + (15) - (16) + (17) + (19) + 3(20) - (21)$
21. $0 = -0{,}672 - (17) - (20) + 3(21) - (22) - (23)$
22. $0 = +0{,}752.5 - (21) + 3(22) + (23) - (24) - (25) + (38)$
23. $0 = -0{,}228 - (21) + (22) + 3(23) + (25) + (26) - (29) - (38)$
24. $0 = +0{,}660 - (22) + 3(24) + (25) - (26) + (39)$
25. $0 = +0{,}108 - (22) + (23) + (24) + 3(25) + (26) - (29) + (38) - (39)$
26. $0 = -0{,}688.5 + (23) - (24) + (25) + 3(26) - (29) + (39)$
27. $0 = -1{,}577.5 - (18) + 3(27) + (28) - (29) + (30) + (31)$
28. $0 = -0{,}914 - (18) + (27) + 3(28) - (32) + (33)$
29. $0 = -0{,}600.5 - (23) - (25) - (26) - (27) + 3(29) - (30) - (31)$
30. $0 = -0{,}378 + (27) - (29) + 3(30) + (31) - (32) - (34) + (35) - (40)$
31. $0 = -0{,}900 + (27) - (29) + (30) + 3(31) - (35) - (37) + (40)$
32. $0 = +0{,}290 - (28) - (30) + 3(32) \ldots$

Hannover

[8.]

Ausgleichungswerthe.

Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten	Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten
	1	115° 58′ 47″,885	4,221 7939		7	66° 1′ 19″,251	4,780 5184
1	2	48 19 36, 540	4,141 3507	7	8	66 39 58, 719	4,782 6578
	3	15 41 35, 731	3,700 2059		9	47 18 48, 840	4,686 0435
	2	119 37 28, 959	4,674 4426		7	55 34 15, 737	4,848 5425
2	3	42 31 25, 063	4,565 1592	8	8	89 51 50, 793	4,932 1822
	4	17 51 7, 328	4,221 7939		10	34 34 2, 142	4,686 0435
	3	52 29 10, 229	4,741 3374		7	10 27 3, 514	4,449 6103
3	4	84 40 26, 275	4,840 0752	9	9	146 33 41, 664	4,932 1822
	5	42 50 30, 066	4,674 4426		10	22 59 17, 205	4,782 6579
	3	86 13 58, 691	5,025 2012		8	23 11 52, 074	4,449 6103
4	5	53 6 45, 967	4,929 1248	10	9	99 14 52, 824	4,848 5425
	6	40 39 30, 195	4,840 0752		10	57 33 19, 347	4,780 5184
	4	49 57 23, 197	4,627 7548		9	87 32 16, 652	4,472 3562
5	5	46 6 58, 284	4,601 5606	11	10	21 0 10, 563	4,027 1430
	7	83 55 42, 791	4,741 3374		11	71 27 33, 545	4,449 6103

Hannover

Hannover

Representacions conformes

Representacions conformes

- Carta a Schumaker $(5 - 07 - 1816)$.

  He pensat un problema interessant [per posar en una competició]: *en el cas general, projectar (aplicar) una superfície donada sobre una altra, també donada, de manera que la imatge i la original siguin infinitessimalment similars. Un cas especial esdevé quan la primera superfície és una esfera i la segona un pla. Llavors les projeccions estereogràfica i de Mercator són solucions particulars.*

Representacions conformes

- Es publica aquesta pregunta el 1821 (Societat Cientifica de Copenhagen).
- Ell mateix la contesta el $11-12-1822$.

Isotermals

- L'endemà, $12-12-1822$, escriu a les seves notes privades: *L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies.*

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

Isotermals

- L'endemà, $12 - 12 - 1822$, escriu a les seves notes privades: *L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies.*

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$. No apareix (explícitament) en el Disquisicions.

Isotermals

- L'endemà, $12-12-1822$, escriu a les seves notes privades: *L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies.*

$$k=-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\log m}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2=m(du^2+dv^2)$. No apareix (explícitament) en el Disquisicions.
- *La curvatura pren el mateix valor sota totes les transformacions de la superfície que deixen l'element de línia* $m(du^2+dv^2)$ *invariant.*

Representacions conformes

- La resposta a la pregunta del 1821, donada el 1822, no es publica fins el 1825 a Astronomische Abhandlungen, Altona:

  Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird.

Representacions conformes

- La resposta a la pregunta del 1821, donada el 1822, no es publica fins el 1825 a Astronomische Abhandlungen, Altona:

  Una solució general al problema d'aplicar una superfície donada sobre una altra superfície de manera que la imatge i la superfície aplicada siguin infinitessimalment similars.

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Pla
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Pla
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Igualem a zero i aïllem
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u})$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Pla
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Igualem a zero i aïllem
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u})$
- Integrem
- $t \pm i \log \cot \frac{u}{2} = constant$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Pla
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Igualem a zero i aïllem
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u})$
- Integrem
- $t \pm i \log\cot\frac{u}{2} = constant$
- $p = t, \;\; q = \log\cot\frac{u}{2}$
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u (dp^2 + dq^2)$

Ab his via sternitur ad maiora

$$P+iQ=f(p+iq)$$

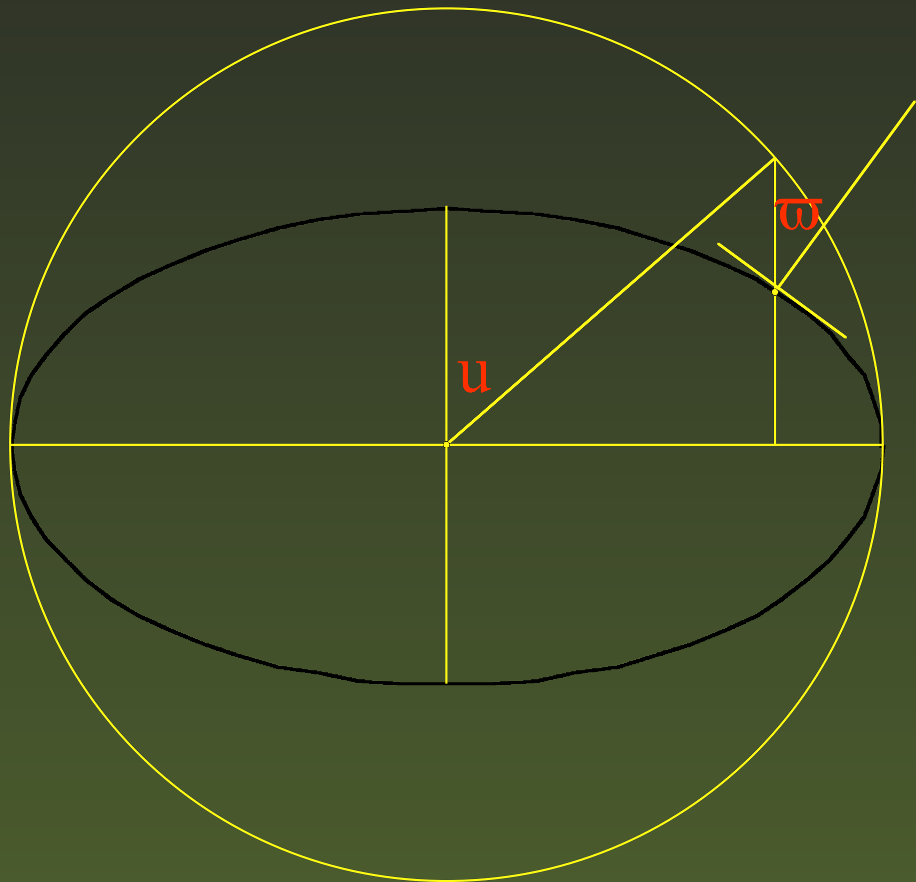
Ab his via sternitur ad maiora

- El·lipsoide $\longrightarrow$ Esfera

$$T + i\log\cot\frac{U}{2} = f(t + i\log(\cot\frac{\omega}{2}\cdot(\frac{1-e\cos\omega}{1+e\cos\omega})^{\frac{e}{2}}))$$

- T i $90-U$ longitud i latitud a l’esfera.
- t i $90-\omega$ longitud i latitud a l’el·lipsoide.

Ab his via sternitur ad maiora



$$\tan\omega = \frac{b}{a}\tan u$$

Geodèsia avançada

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie. I, II.

1844 i 1847 a *Abhanlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*

Geodèsia avançada

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie. I, II.

1844 i 1847 a *Abhanlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*

- I. El·lipsoide $\longrightarrow$ Esfera.
- II. Trigonometria El·lipsoide.

Geodèsia avançada I

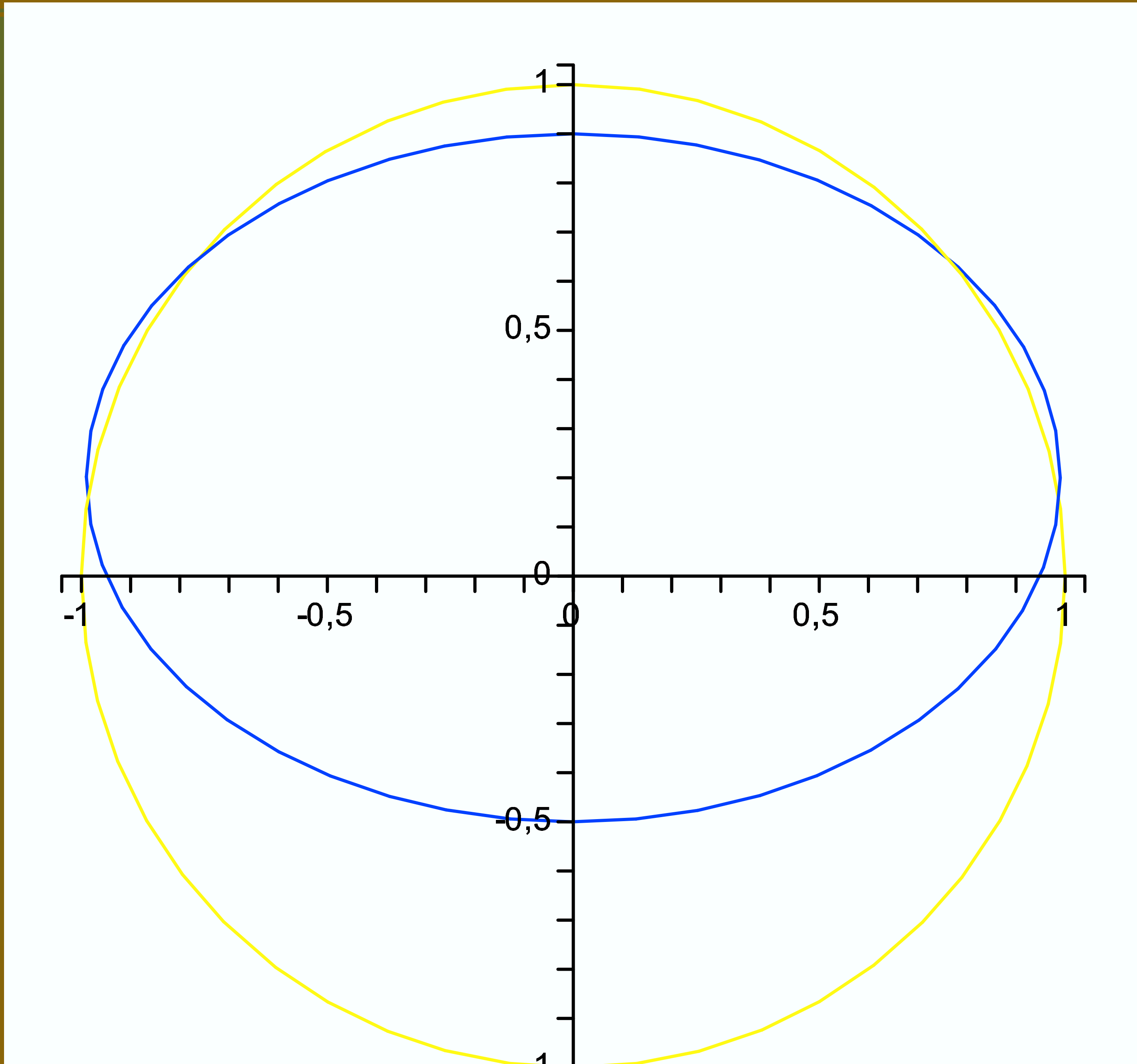
- Pren com aplicació holomorfa $f(z) = \alpha z - i \log k$.
- Ajusta α, k i A (radi esfera), per tenir isometria ($m = 1$) sobre el paral·lel mitjà de Hannover.
  $Q = 52^o\ 40'\ 0''$.

Geodèsia avançada I

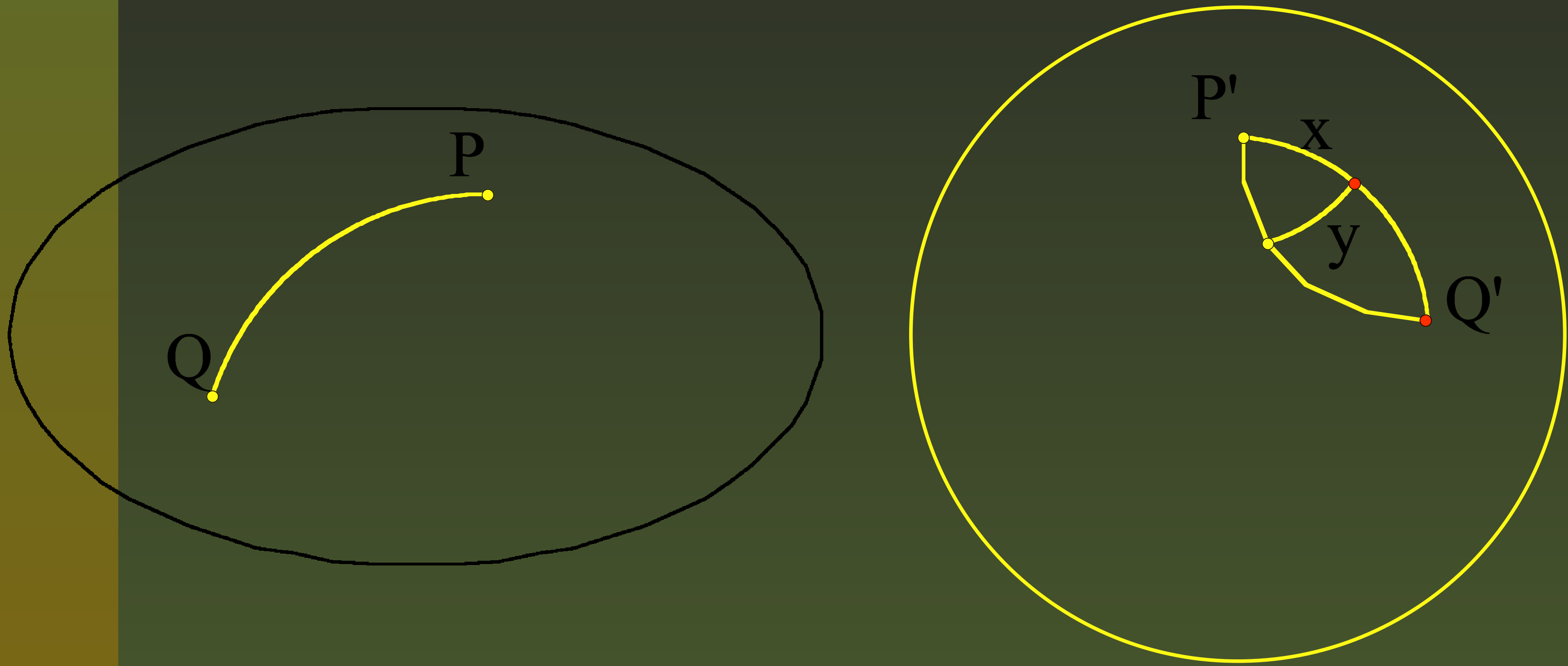
- Pren com aplicació holomorfa $f(z) = \alpha z - i \log k$.
- Ajusta α, k i A (radi esfera), per tenir isometria ($m = 1$) sobre el paral·lel mitjà de Hannover. $Q = 52^o\ 40'\ 0''$.

$$
\begin{aligned}
\log a &= 6.5148235337 \quad \text{Toise} \\
\log e &= 8.9122052079 \\
P &= 52^o\ 42'\ 2.53251'' \\
\log \frac{1}{k} &= 0.0016708804 \\
\log \alpha &= 0.0001966553 \\
\log A &= 6.5152074703 \quad \text{Toise}
\end{aligned}
$$

Geodèsia avançada I



Geodèsia avançada I



$$d(P,Q) = \frac{d(P',Q')}{\sqrt{m_p m_Q}}$$

IV. Geometria diferencial

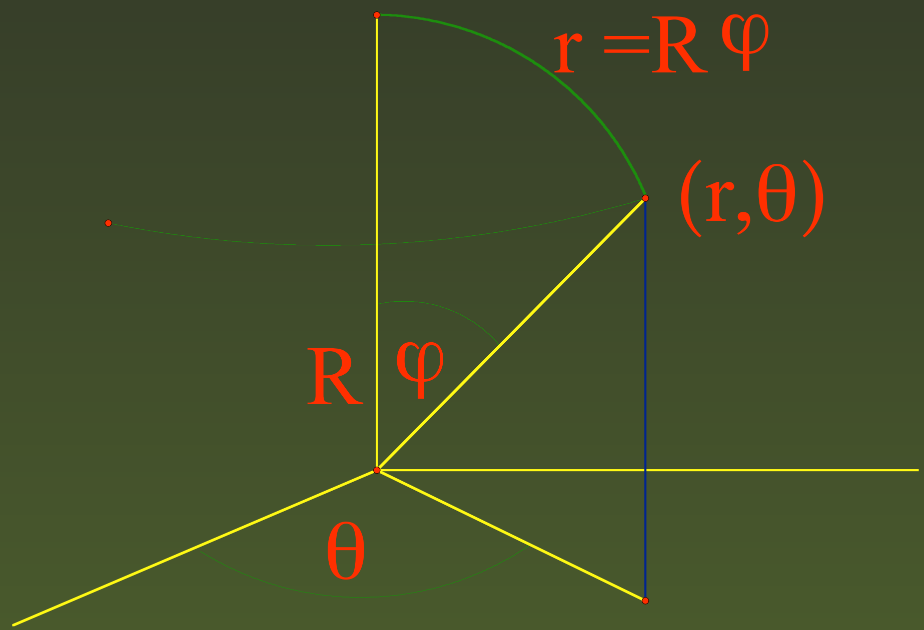
Conjectura

- Gauss podria haver estès l'analogia de Lambert al terreny de la geometria diferencial, amb la idea de trobar una superfície que representés l'esfera imaginària. Per tant, de curvatura constant negativa.

- Podria ser aquest el camí diferent que havia emprés per tal de demostrar el cinquè postulat, i al qual es refereix Gauss en la seva carta a Shumaker de 1846? Va ser escrit el Disquisicions [en part] amb aquesta idea?

Element de longitud

- $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$



Objectiu ambiciós

- Trobar una superfície amb

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

8 octubre 1827

Carta a **Schumaker** ($21 - 11 - 1825$)

- *Recentment he reprès part de les meves investigacions sobre superfícies corbes, que hauran de formar la base del meu projectat assaig en geodèsia avançada.*

Carta a **Schumaker** $(21 - 11 - 1825)$

- *Recentment he reprès part de les meves investigacions sobre superfícies corbes, que hauran de formar la base del meu projectat assaig en geodèsia avançada.*

- *Desafortunadament, em trobo que haig d'anar molt enrera en l'exposició perquè inclús el que és conegut, ha de ser desenvolupat d'una manera diferent, adequada a les noves investigacions.*

Disquisitiones Generales

- 40 pàgines; 29 seccions.
- 5 nous (?) conceptes; 10 teoremes.
- Només cita Euler (§8), i Legendre (§27).
- La única superfície que apareix és l'esfera.

Projecte inacabat (?)

- *Hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa d'aquestes figures...* §6
- *L'estudi d'aquestes propietats obra a la geometria un camp nou i fèrtil...* §13
- *La consideració del triangle rectilini de costats iguals és d'una gran utilitat...* §26

Projecte inacabat (?)

- *Hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa d’aquestes figures...* §6
- *L’estudi d’aquestes propietats obra a la geometria un camp nou i fèrtil...* §13
- *La consideració del triangle rectilini de costats iguals és d’una gran utilitat...* §26
- No troba l’esfera imaginària.

Nous conceptes

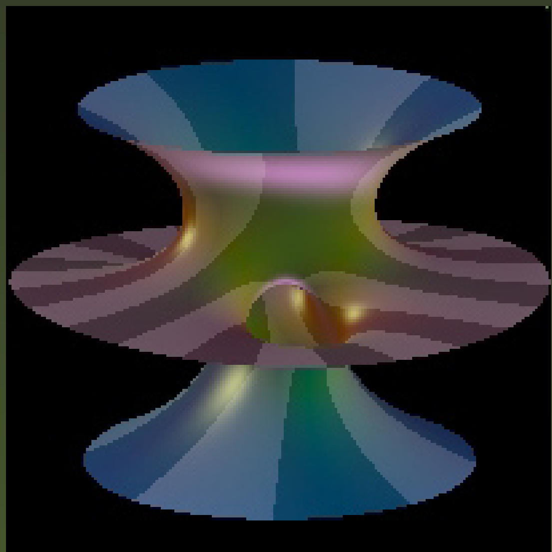
- Aplicació de Gauss (el zenit). §6
- Curvatura de Gauss. §6
- Curvatura total. §6
- Transport paral·lel (variació angular). §17
- Cartes locals abciso-geodèsiques ortogonals. §19

Nous resultats

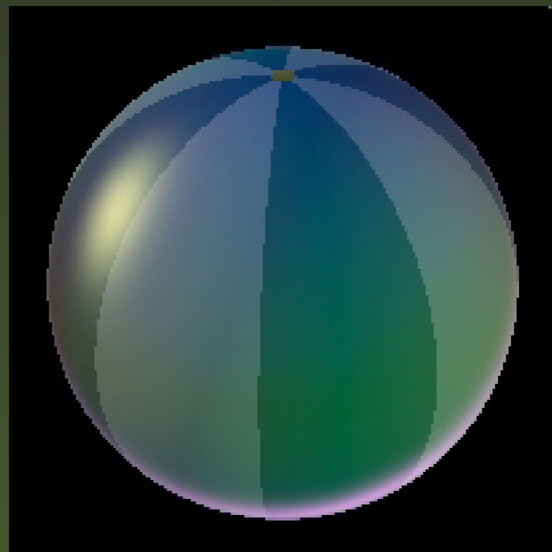
- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema Egregi. §12
- Lema de Gauss. §16
- $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. §19
- Teorema del defecte. §20
- $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$. §27

Curvatura. §6

$\gamma : S \longrightarrow S^2$ Aplicació de Gauss.



$\longrightarrow$



$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}$$

Curvatura d'Euler. §8

TEOREMA. *La mesura de curvatura a qualsevol punt de la superfície és igual a una fracció que té per numerador la unitat, i per denominador el producte dels dos radis de curvatura extrems de les seccions per plans normals.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Curvatura d'Euler. §8

TEOREMA. *La mesura de curvatura a qualsevol punt de la superfície és igual a una fracció que té per numerador la unitat, i per denominador el producte dels dos radis de curvatura extrems de les seccions per plans normals.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Just abans diu: *Aquestes conclusions contenen quasi tot el que l'il·lustre Euler fou el primer de provar sobre curvatura de superfícies corbes.*

Olinde Rodrigues $(1794 - 1851)$

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, Vol 3, pag.$162 - 182$, 1815.

Olinde Rodrigues $(1794 - 1851)$

- Aplicació de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

Olinde Rodrigues $(1794 - 1851)$

- Aplicació de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

- Gauss coneixia els 3 primers punts abans de 1813 (no publicat).

Teorema Egregi. §11

$$
\begin{aligned}
4 \quad & (EG - FF)^2 \, k = E\left(\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) \\
+ \quad & F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) \\
+ \quad & G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) \\
- \quad & 2(EG - FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp \cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right).
\end{aligned}
$$

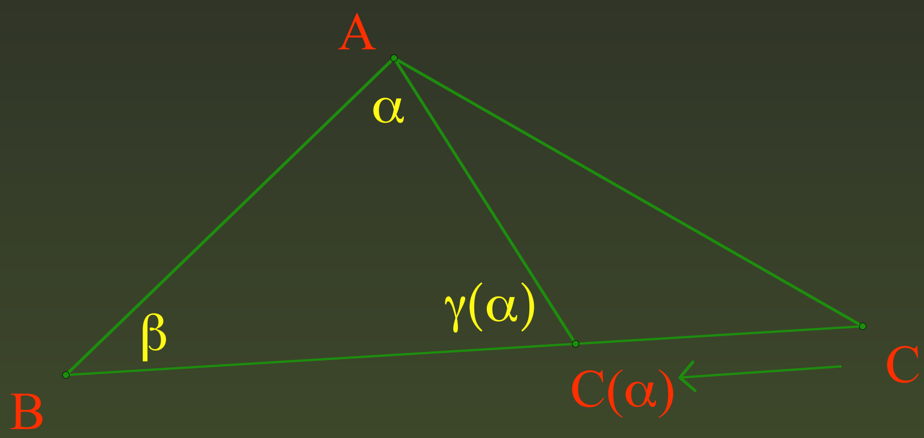
Teorema Egregi. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.*

Angle d'inclinació

Variació de l'angle en el **pla**

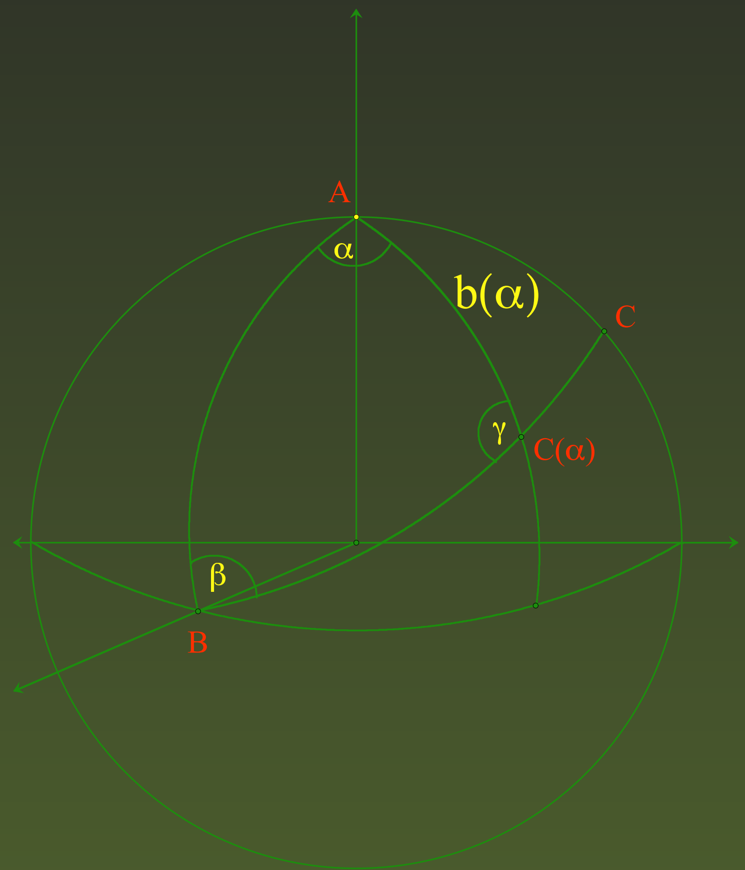


α+β+γ=π; 1+γ' =0

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1}$$

- Observem $\gamma(0) = \pi - \beta$.

Variació de l'angle a l'esfera



$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{b(\alpha)}{R}}$$

Àrea d'un triangle a $S^2(R)$

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} R \sin \frac{r}{R} dr d\theta \\ &= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R} d\theta \end{aligned}$$

Àrea d'un triangle a $S^2(R)$

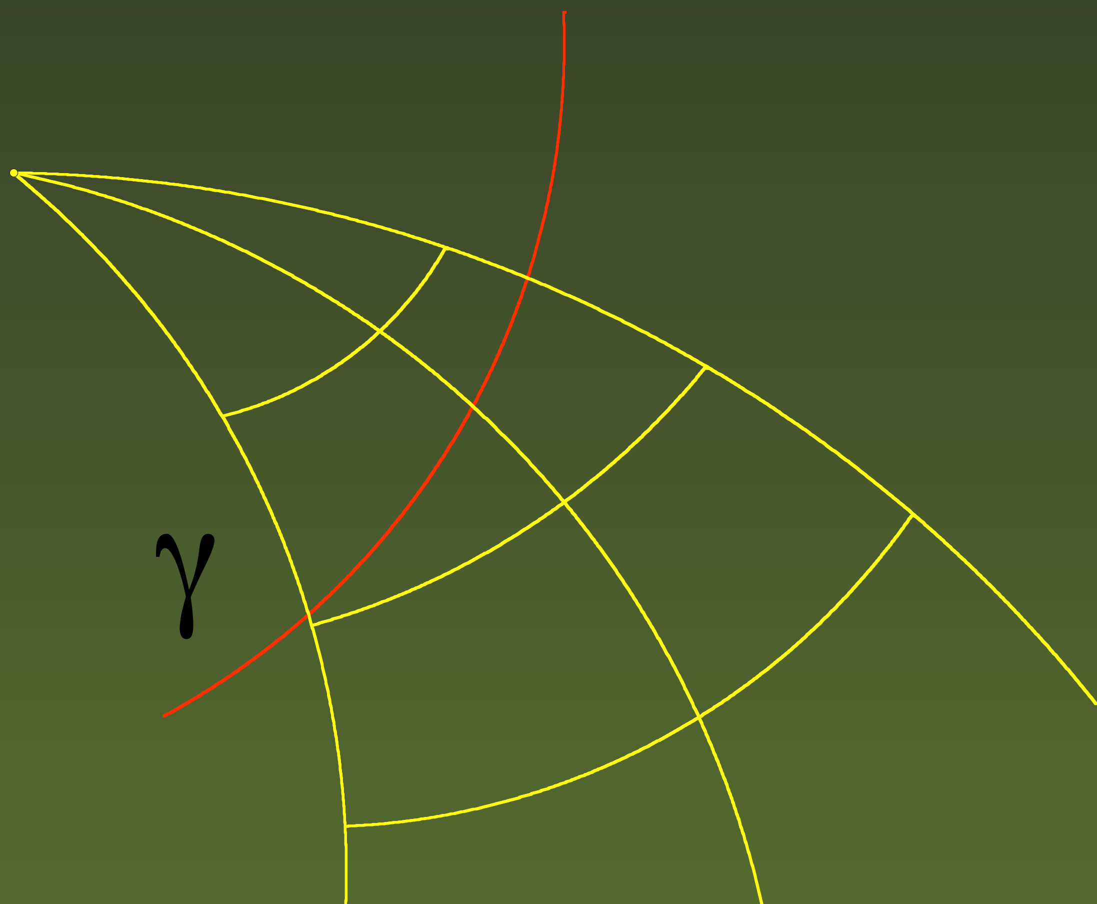
$$\begin{aligned}
\text{Àrea} &= \int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} R \sin \frac{r}{R} dr d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R} d\theta \\
&= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha) - \gamma(0)) \\
&= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\
&= R^2 \cdot \text{Excés}.
\end{aligned}$$

Continuem amb el Disquisitiones

Angle d'inclinació. §19

Element de longitud en abciso-geodèsiques ortogonals:

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$$



Angle d'inclinació. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

Angle d'inclinació. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

- Polars al pla: $G = r^2$; $\qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -1$
- Polars a l'esfera: $G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$; $\qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -\cos \frac{r}{R}$

Curvatura. §19

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Implica el teorema egregi.

Teorema del defecte. §20

- Partim de

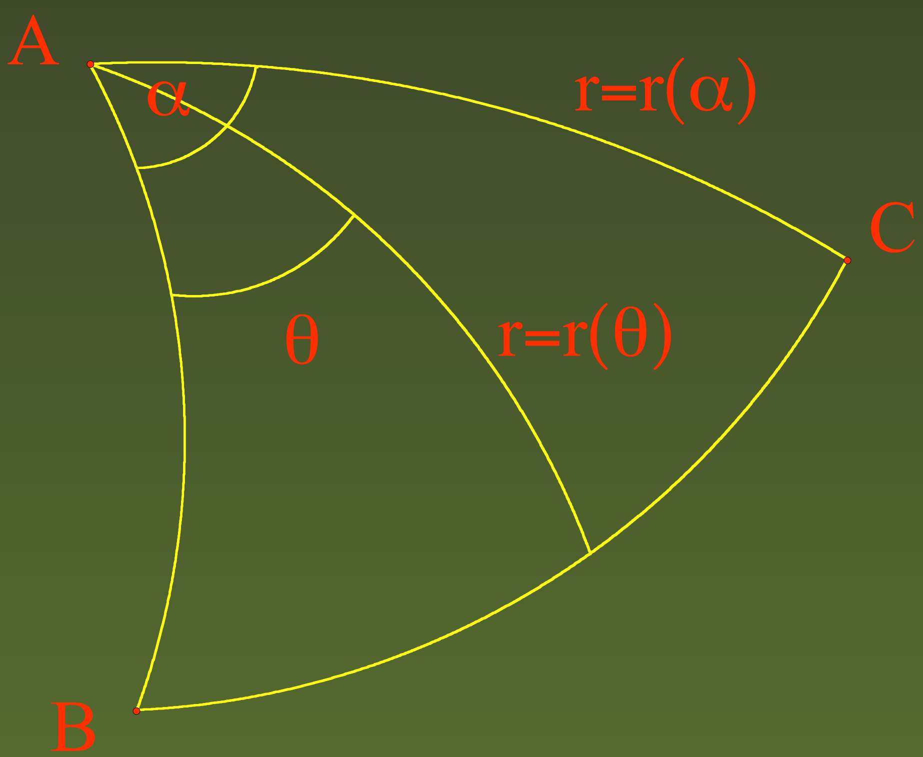
$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

Teorema del defecte. §20

- Partim de

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Integrem sobre el triangle



Teorema del defecte. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$

Teorema del defecte. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

Teorema del defecte. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema del defecte. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T k dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema del defecte. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T k dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Curvatura total = Àrea imatge esfèrica = Defecte

1825

- Versió no publicada.
- Demostra $\text{àrea}(\nu(T)) = \text{defecte}(T)$ i diu

  Aquesta prova necessitarà explicació i algún canvi en la seva forma.

1825

- Versió no publicada.
- Demostra $\text{àrea}(\nu(T)) = \text{defecte}(T)$ i diu

  Aquesta prova necessitarà explicació i algún canvi en la seva forma.

- En dedueix el teorema egregi.

1825

- Versió no publicada.
- Demostra $\text{àrea}(\nu(T)) = \text{defecte}(T)$ i diu

  Aquesta prova necessitarà explicació i algún canvi en la seva forma.

- En dedueix el teorema egregi.
- Defecte $\longleftrightarrow$ Egregi

Últimes seccions

Teoremes de comparació. §26

Excepte termes de quart ordre:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

Teoremes de comparació. §26

Excepte termes de quart ordre:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

  - $\sigma =$ àrea ABC.
  - $k(A) =$ curvatura en A.
  - $A^* =$ angle del triangle euclidià de costats d'igual longitud que els costats del triangle sobre la superfície.

Sobre l'esfera §27

- Conegudes per Legendre $(1752-1833)$ sobre l'esfera.

  $A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$

Sobre l'esfera §27

- Conegudes per Legendre $(1752 - 1833)$ sobre l'esfera.

  $A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$

- Sumant, obtenim el teorema del defecte.

  $\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}$

BHI §28

Si BHI estigués sobre una esfera

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

BHI §28

Si BHI estigués sobre una esfera

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

A l'el·lipsoide terrestre *el càlcul ha donat*

- Hohehagen $-4''.95113$
- Brocken $-4''.95104$
- Inselsberg $-4''.95131$

BHI §28

Carta a Olbers (Març 1827).

> *A la pràctica, aquesta diferència* [entre usar les fórmules de Legendre o les de Gauss] *no és en absolut important, ja que és negligible per als més grans triangles de la terra que es poden mesurar; no obstant la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturalesa d'aquesta desigualtat.*

BHI. pàg. 314, Vol IX. 1823

El triangle pla amb aquests costats

$$\begin{aligned} HI &= 84942.45328 \\ IB &= 105974.4570 \\ BH &= 69195.07749 \end{aligned}$$

té angles

$$\begin{aligned} B^* &= 53^o\ \ 6'\ 41.009760'' \\ H^* &= 86^o\ 13'\ 53.763480'' \\ I^* &= 40^o\ 39'\ 25.227360'' \end{aligned}$$

BHI. pàg. 314**, Vol IX.** 1825

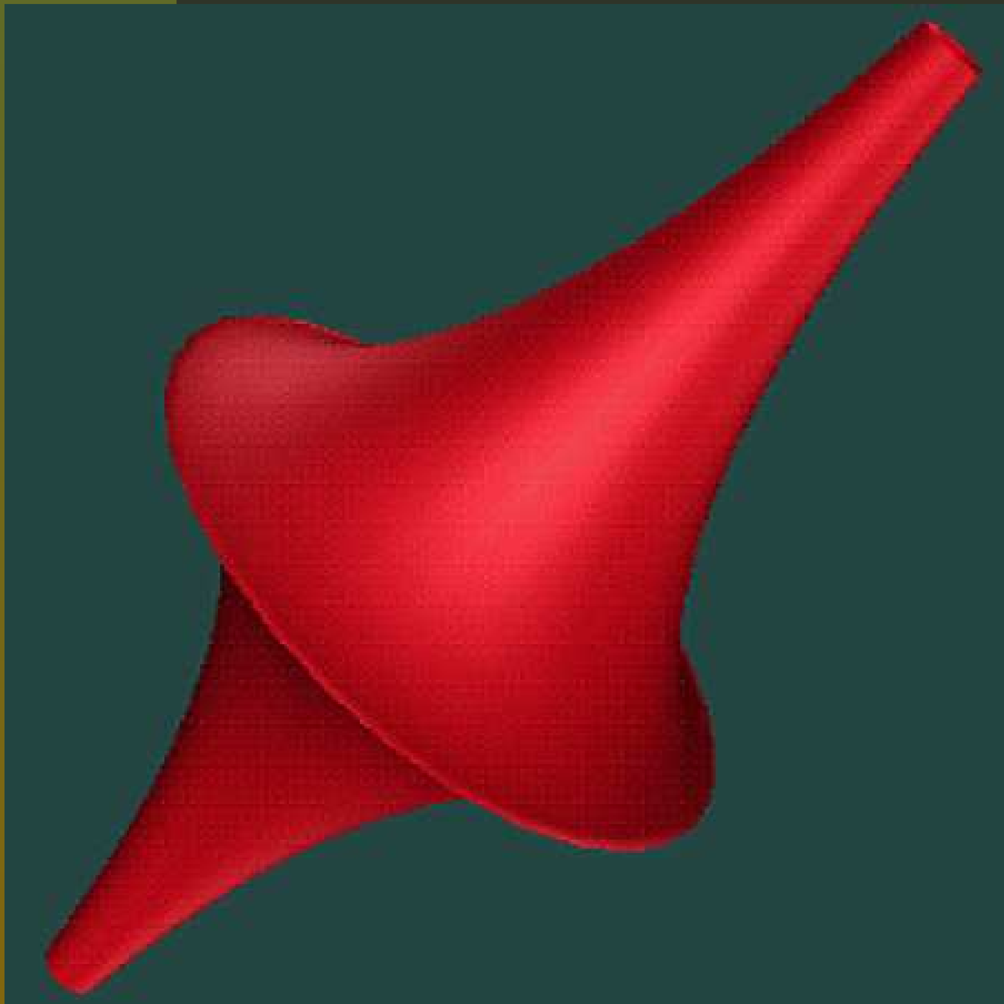
L'excés BHI $14.8523''$ es reparteix així:

$$\begin{aligned} H - H^* &= 4.9275 \\ B - B^* &= 4.9572 \\ I - I^* &= 4.9676 \end{aligned}$$

V. GD-GNE.

Trobem l’esfera imaginària

Pseudoesfera. F. Minding 1840



Tractriu

- Corba amb subtangent 1.
- $y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

Pseudoesfera

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

$x =$ angle de rotació; $y = e^\tau$ on $\tau =$ distància sobre la tractriu.

En polars geodèsiques

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Pseudoesfera

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

$x =$ angle de rotació; $y = e^\tau$ on $\tau =$ distància sobre la tractriu.

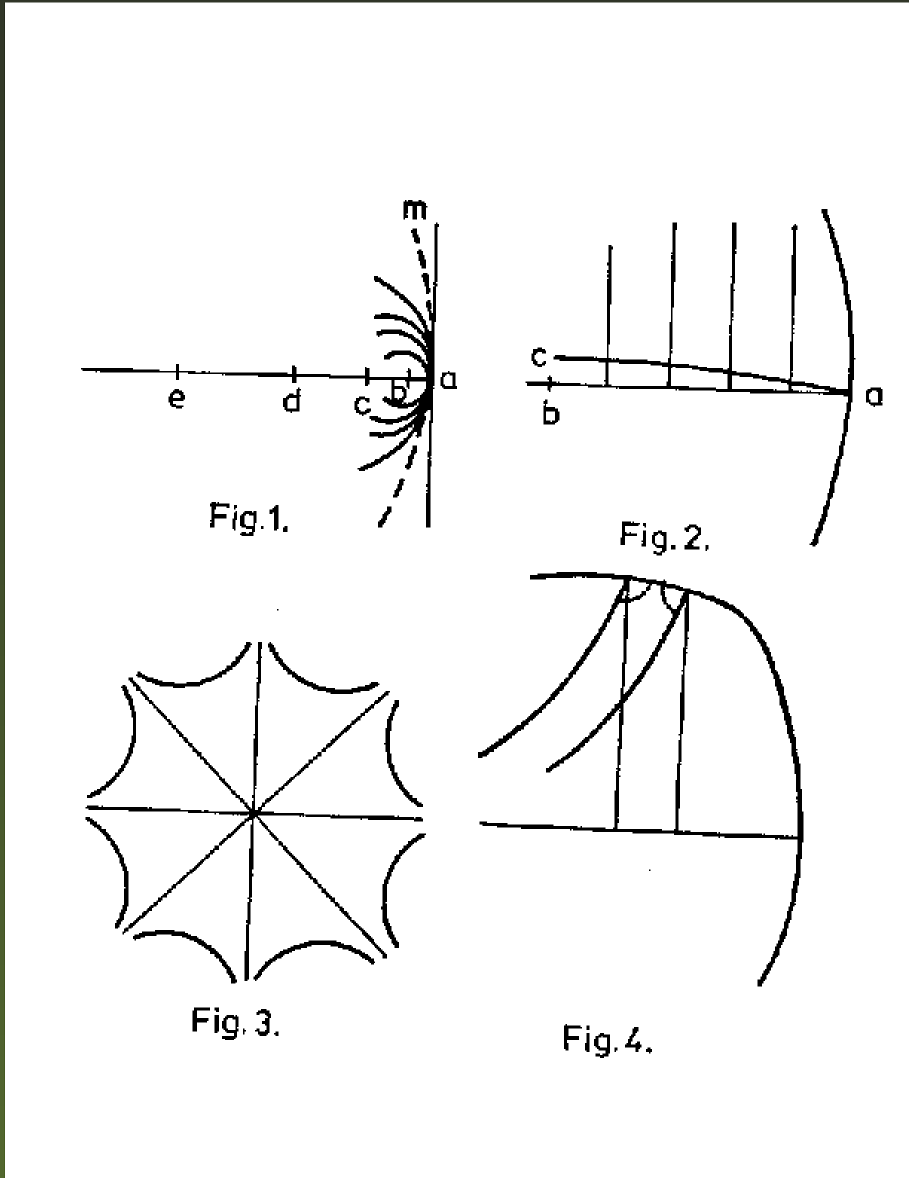
En polars geodèsiques

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

- Local

El més gran geni

János Bolyai

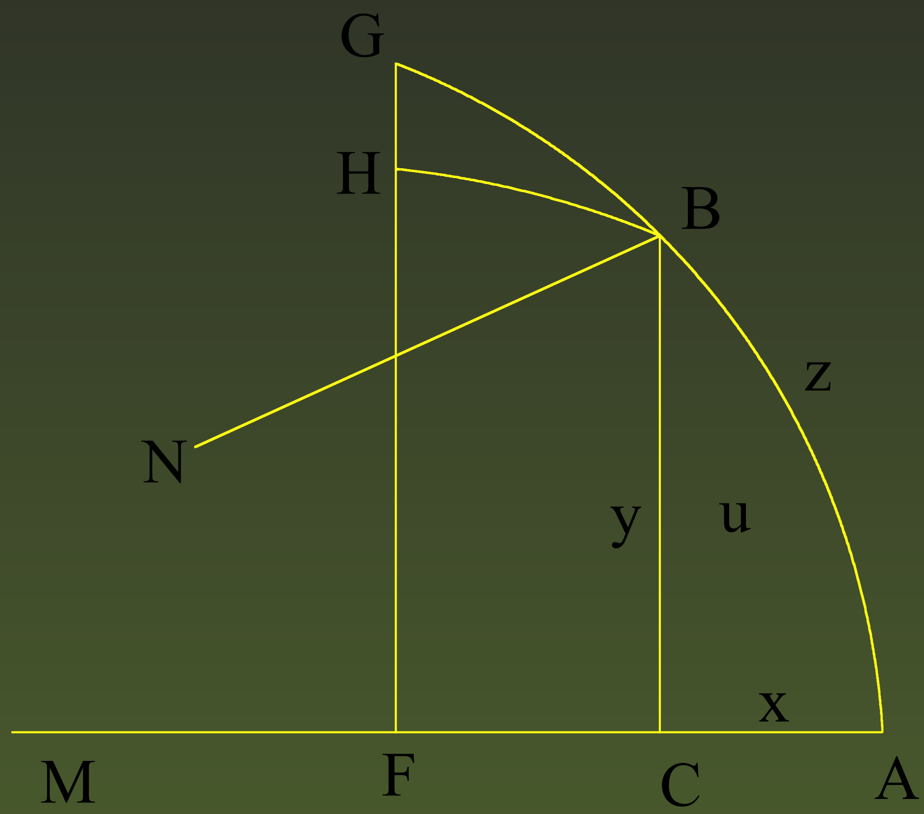


János Bolyai

gatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{\quad}{bh}$, adeoque tang hba: eritque (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

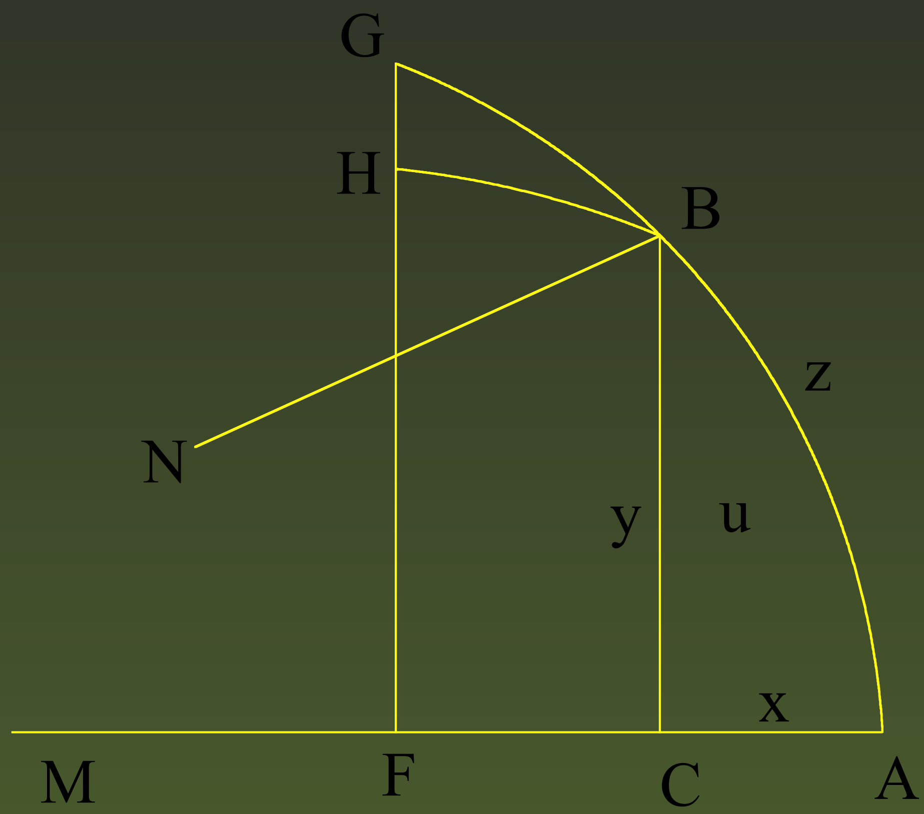
II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$;
Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in S inveniri, e. g. ipsius

János Bolyai



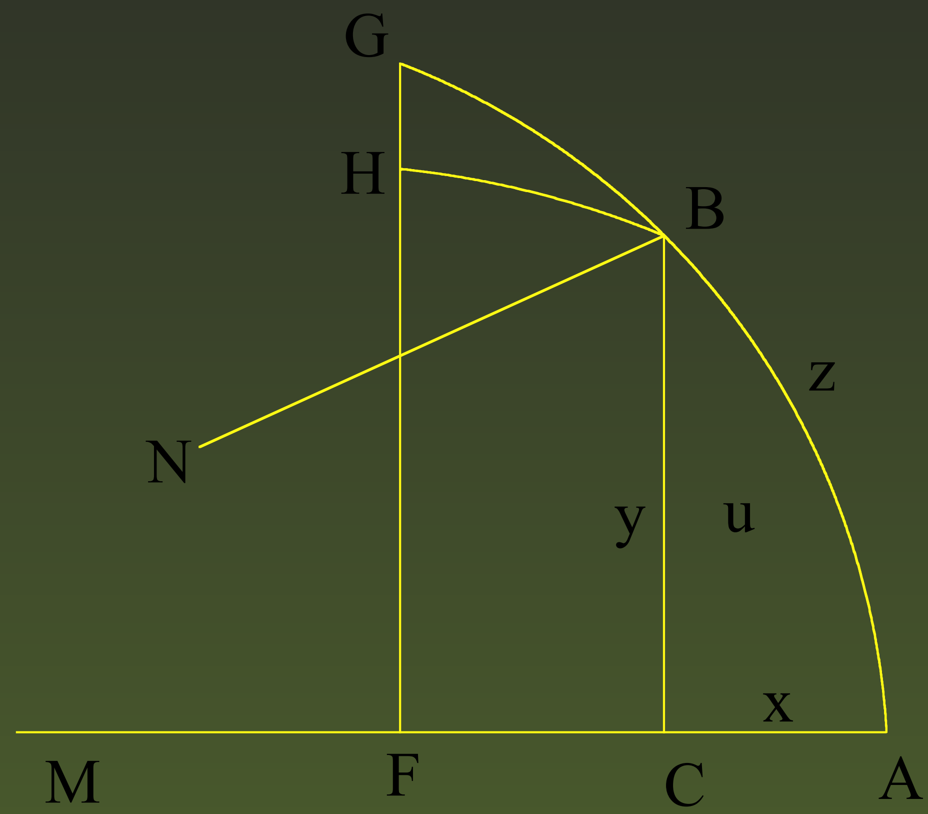
$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$

János Bolyai



$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2$$

János Bolyai



$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Un nou món creat del no-res

Marosvásárhely

Braunschweig