L’Esfera Imaginària

Comentaris al

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

C.F.Gauss.

AGUSTÍ REVENTÓS, CARLOS RODRÍGUEZ

14 juny 2004

Societat Catalana de Matemàtiques

C. F. Gauss, 1777 – 1855

Algunes dates

- 1796 Disset costats.
- 1799 Tesis. TFA.
- 1801 Disquisitiones Arithmeticae.
- 1809 Theoria motus corporum coelestium.

C. F. Gauss, 1803

Algunes dates

- 1813 Carta a Farkas Bolyai.
- 1816 Carta a Schumacher.
- 1824 Carta a Taurinus.
- 1827 Disquisitiones generales circa superficies curvas.
- 1831 Carta a Farkas Bolyai: *.. alabar el teu fill seria com alabar-me a mi mateix..*
- 1831 Carta a Schumacher: *.. no voldria que això es morís amb mi..*

C. F. Gauss, 1828

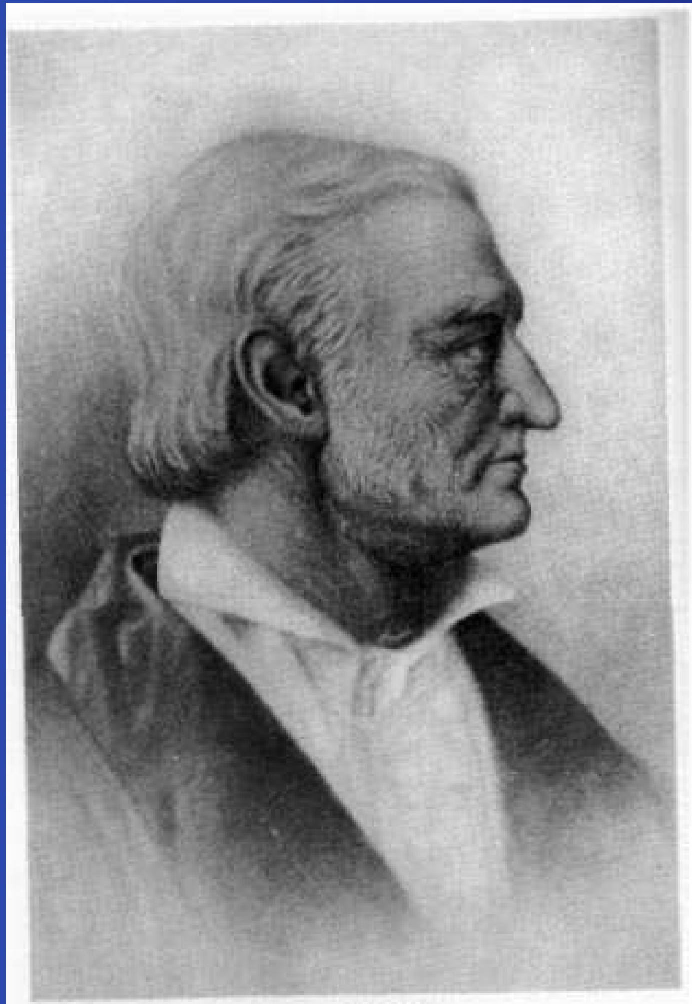
Algunes dates

- 1849 Quarta demostració del TFA. (Jacobi, Dirichlet)
- 1854 Tesis de Riemann.

C. F. Gauss, 1850

Gauss about 1850

C. F. Gauss, 1854



Gauss in 1854

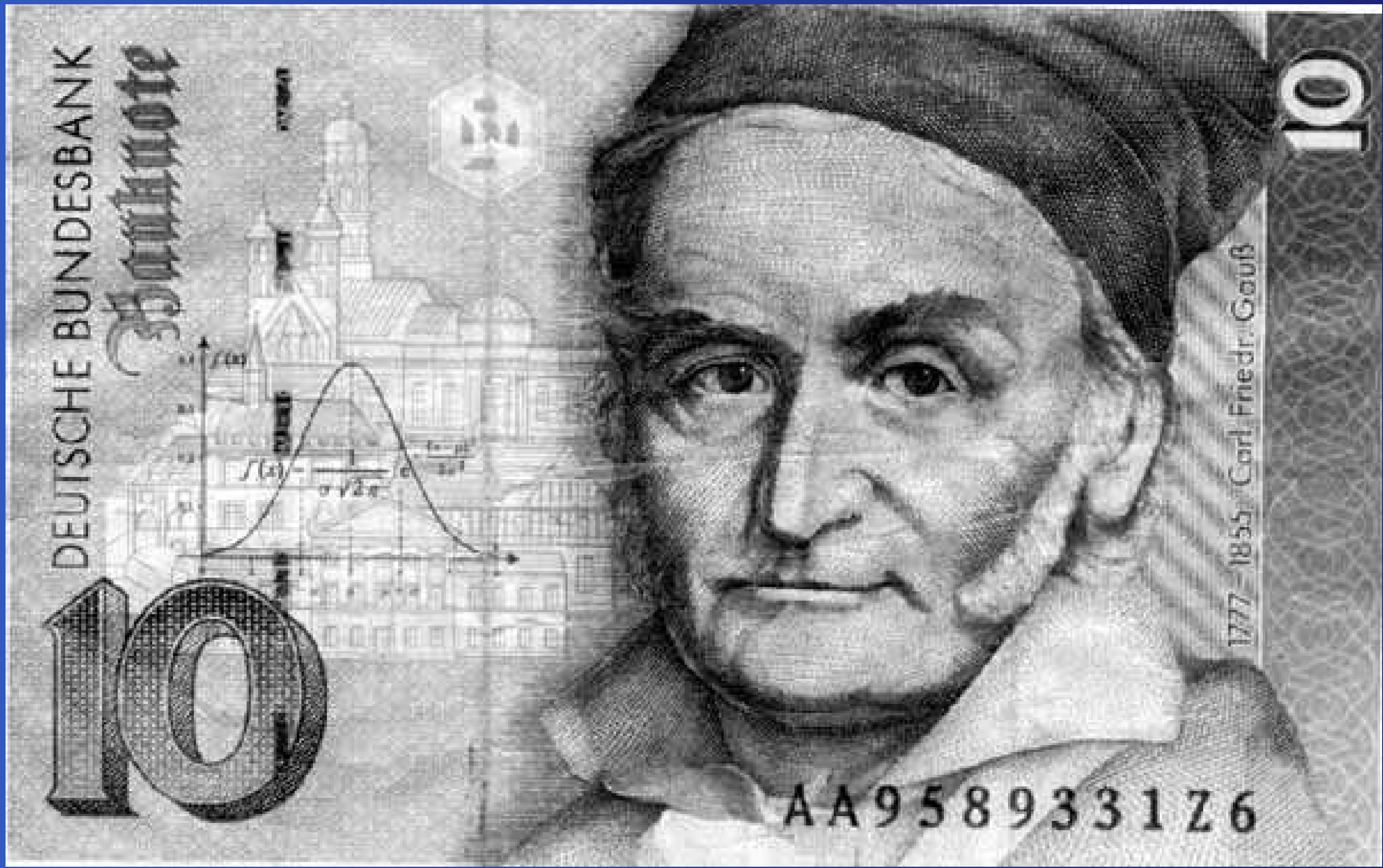
C. F. Gauss

Ritmüller's portrait of Gauss on the terrace of the observatory

C. F. Gauss

C. F. Gauss

C. F. Gauss


DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
10
AA9589331Z6

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas
8 octubre 1827

Disquisitiones Generales

- 40 pàgines; 29 seccions.
- 5 nous conceptes; 10 teoremes.

- Projecte inacabat?

Disquisitones Generales. Conceptes

- Aplicació de Gauss. (El zenit). §6
- Curvatura de Gauss. §6
- Curvatura total. §6
- Transport paral·lel. (Variació angular) §17

Disquisitones Generales. Teoremes

- $K = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema Egregi. §12
- Lema de Gauss. §16
- Gauss-Bonnet (triangles). §20

Teorema Egregi. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.

Disquisitones Generales

- Veurem el Disquisitiones Generales com un intent de construir la geometria hiperbòlica.
- En contrast amb Spivak pensem que la secció §2 és fonamental. Intent de fer geometria esfèrica analítica.
- Spivak: *This section may be skipped entirely.*

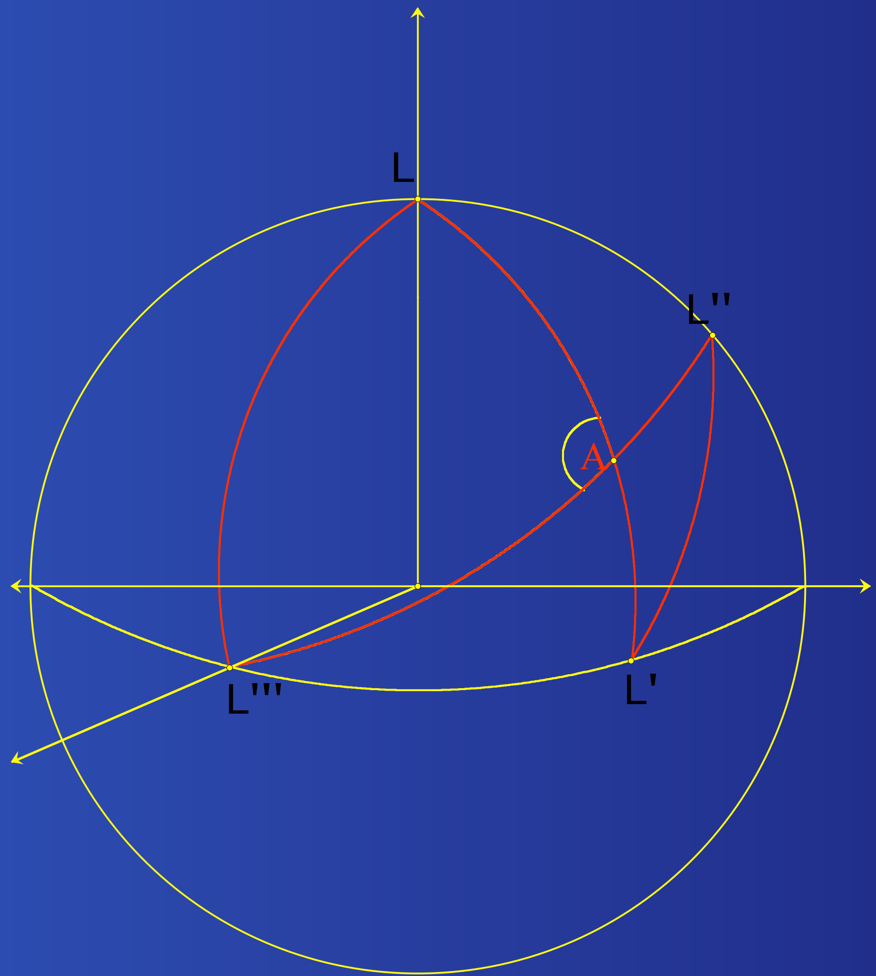
§2

Teorema 1. *Si* L, L', L'', L''' *denoten quatre punts de l'esfera, i* A *denota l'angle entre els arcs* LL', $L''L'''$ *en el seu punt d'intersecció, tindrem*

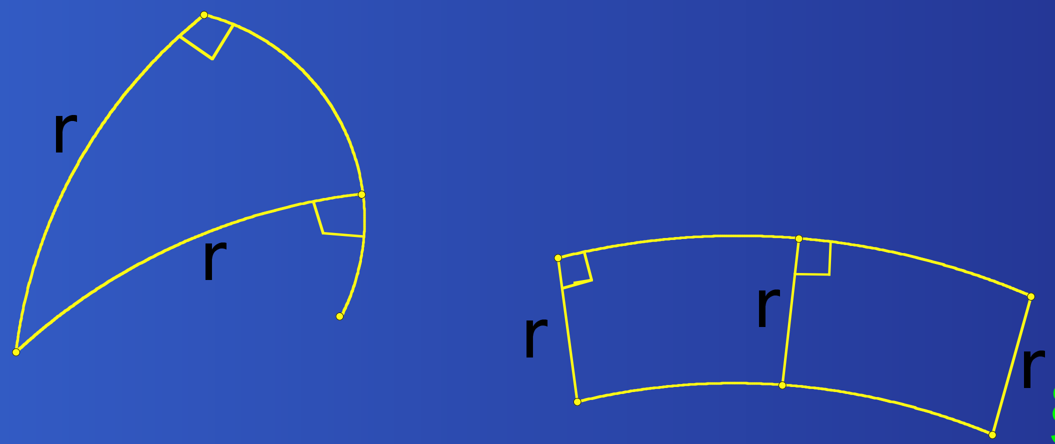
$$\begin{aligned}\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \\ \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A\end{aligned}$$

- Engloba totes les fórmules de la trigonometria esfèrica.

§2



Tractament analític



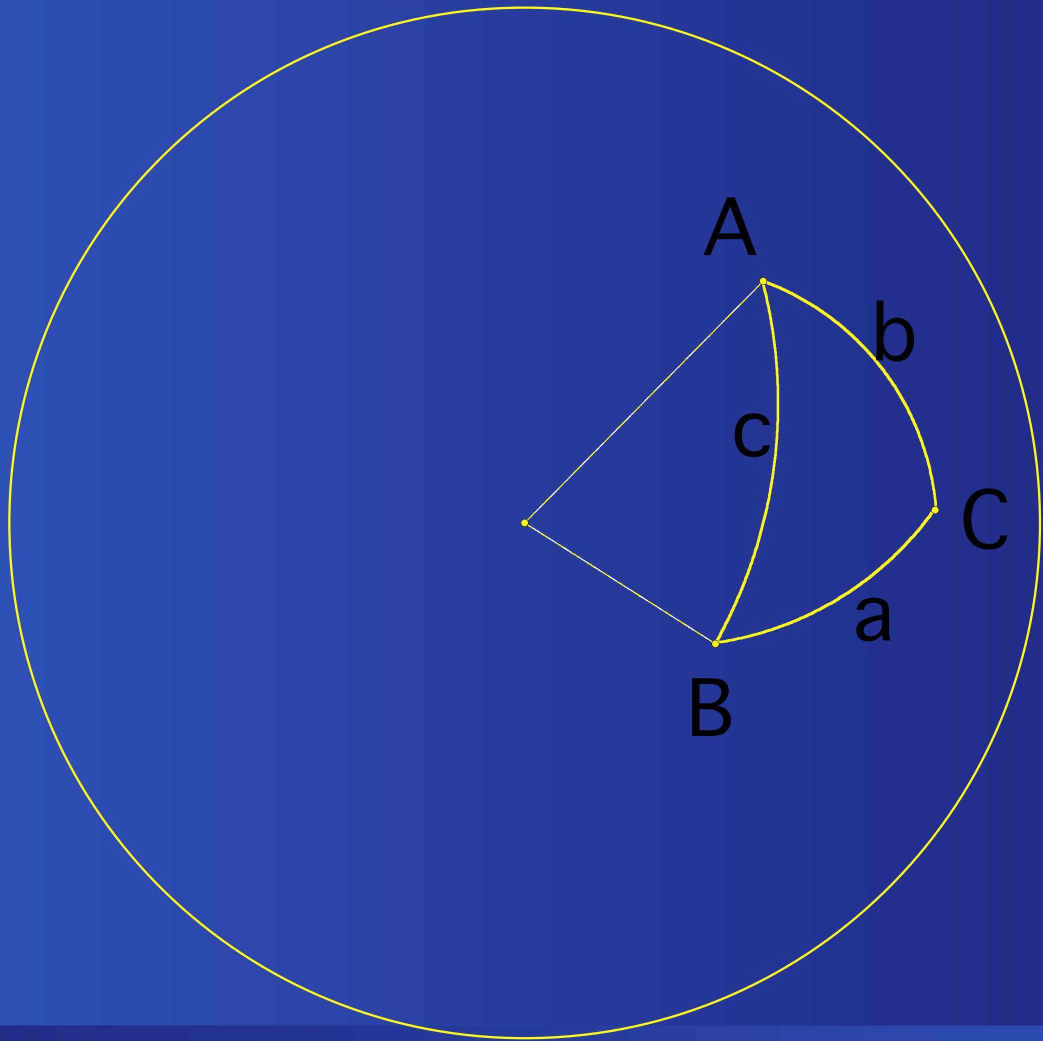
§15

...també aquí, consideracions geomètriques podrien prendre el paper de l'anàlisis, però no ho fem, ja que són suficientment òbvies.

Trigonometria esfèrica

$$S^2(1)$$

Triangle esfèric



Trigonometria

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \tag{1}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \tag{2}$$

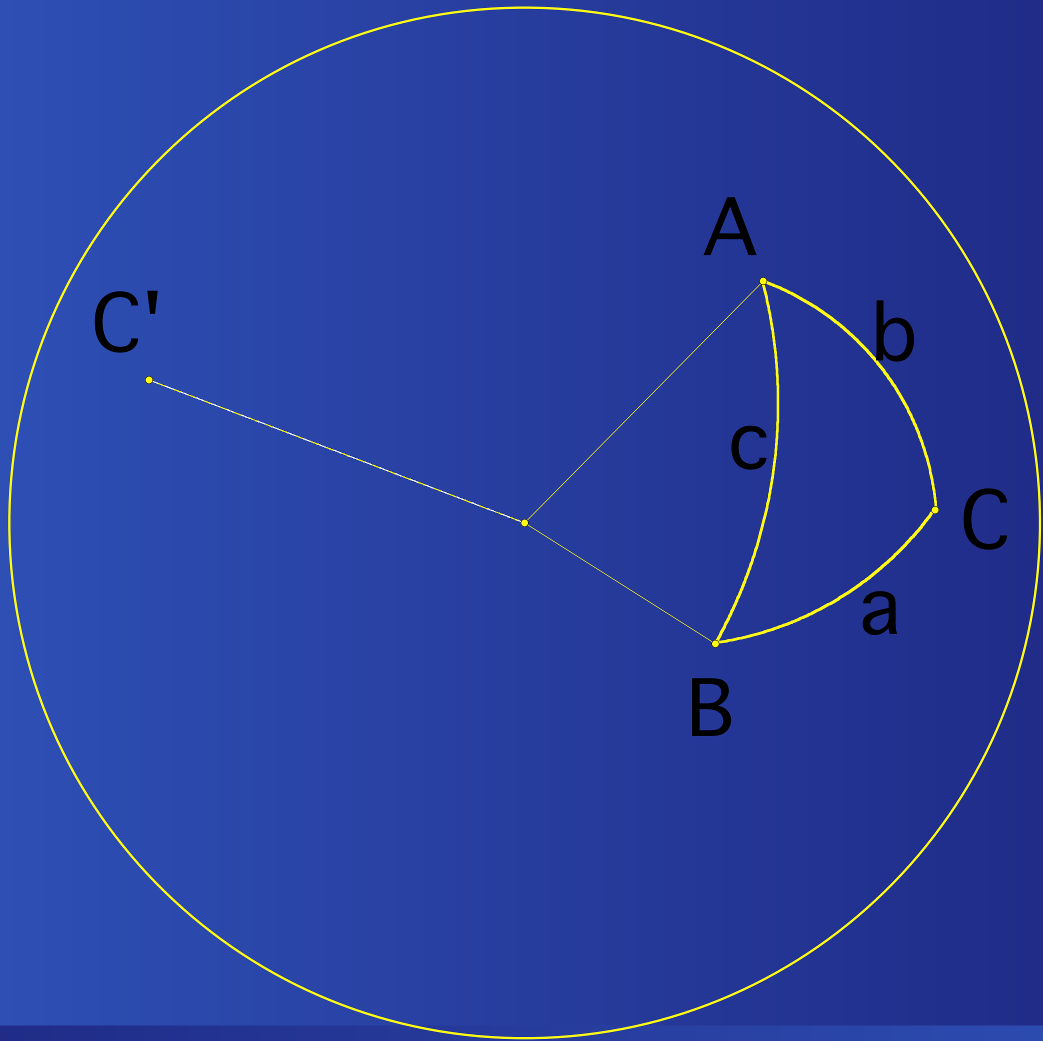
$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \tag{3}$$

Observem que la fórmula (2), correspon a la fórmula (3) aplicada al triangle polar esfèric corresponent.

Triangle polar

- El triangle polar $A'B'C'$ del triangle esfèric ABC és el triangle esfèric determinat pels normals unitaris (pols) dels plans OBC, OAC, OAB. En cada cas s'agafa la normal que deixa el triangle a l'altre costat del pla.
- $a' = \pi - \alpha, \quad \alpha' = \pi - a$.
- $b' = \pi - \beta, \quad \beta' = \pi - b$.
- $c' = \pi - \gamma, \quad \gamma' = \pi - c$.

Triangle polar



Teorema de Pitàgores

Apliquem

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

al triangle rectàngle d'hipotenusa a i catets b, c.

- $$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

$$S^2(R)$$

Trigonometria

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma}$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}$$

Teorema de Pitàgores

Aplicant la segona fórmula al triangle rectàngle d'hipotenusa a i catets b, c.

- $$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$$

Teorema de **Pitàgores** $(R \to \infty)$

Triangle rectàngle d'hipotenusa a i catets b, c.

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} \sim \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right)$$

- $a^2 = b^2 + c^2$

$$S^2(Ri)$$

Lambert, Taurinus

- Lambert (1728-1777) suggereix que la geometria de l’angle agut correspon a la geometria sobre una esfera de radi imaginari.
- Taurinus (1794-1874) desenvolupa aquesta idea arribant a l’angle de paral·lelisme.

Lambert (1728-1777)

Esfera imaginària $S^2(Ri)$

Formalment substituïm R per Ri i recordem

$$\cos ix = \cosh x, \ \sin ix = i \sinh x.$$

Trigonometria a $S^2(Ri)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sin \alpha} &= \frac{\sinh \frac{b}{R}}{\sin \beta} = \frac{\sinh \frac{c}{R}}{\sin \gamma} \\
\cosh \frac{a}{R} &= \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos \alpha \\
\cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh \frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

Conseqüències:

(I) Teorema de Pitàgores

Segona fórmula amb $\alpha = \pi/2$ (hipotenusa a i catets b, c).

- $$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$$

(II) Defecte

Segona fórmula per a triangles equilàters:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}$$

Per tant $\alpha < 60°$.

- $\alpha + \alpha + \alpha < \pi$

(III) Angle de paral·lelisme

Tercera amb $\gamma = \pi/2$: $\cos\alpha = \sin\beta\cosh\frac{a}{R}$

Si $A \to \infty$, $\alpha \to 0$ i tenim

$$1 = \sin\beta(a)\cosh\frac{a}{R}$$

- $$\beta(a) = 2\arctan e^{-a/R}$$

(IV) Rectes infinites

Permutació circular de la tercera amb $\gamma = \pi/2$:

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

Quan $\alpha \to 0$, $\beta \to$ angle paral·lelisme $< \pi/2$

- $b \to \infty$

Càlculs sobre l’esfera

Àrea d'un triangle.
(Primera versió)

Arquimedes

Coneixia Arquimedes el teorema de Gauss-Bonnet? Donem la demostració de Harriot (1603)

Arquimedes

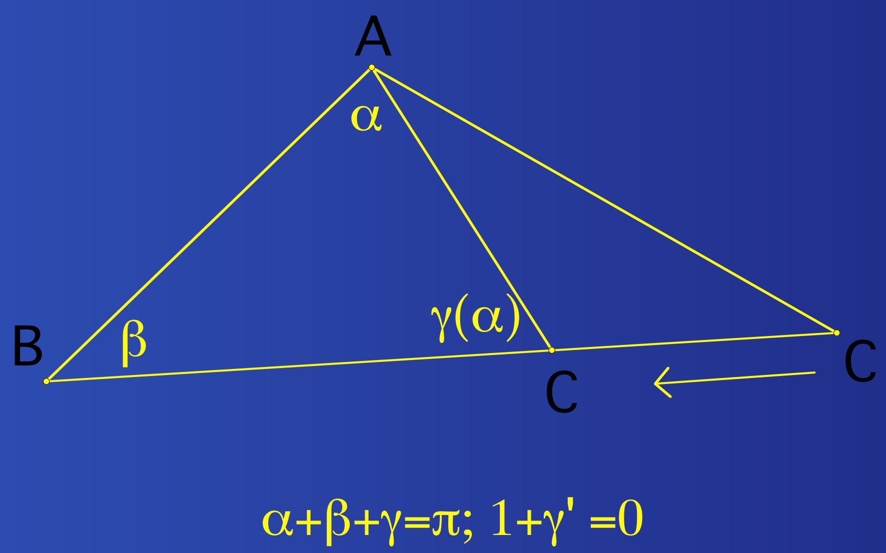
Arquimedes

- Àrea del triangle esfèric: A
- Àrea d'un fus esfèric d'angle α: $2R^2\alpha$
- Denotem $A_\alpha = 2R^2\alpha - A$
- Observem
  - $A + (A_\alpha + A_\beta + A_\gamma) = 2\pi R^2$
  - $3A + (A_\alpha + A_\beta + A_\gamma) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)$
- Àrea $= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot$ Excés

Àrea d’un triangle.

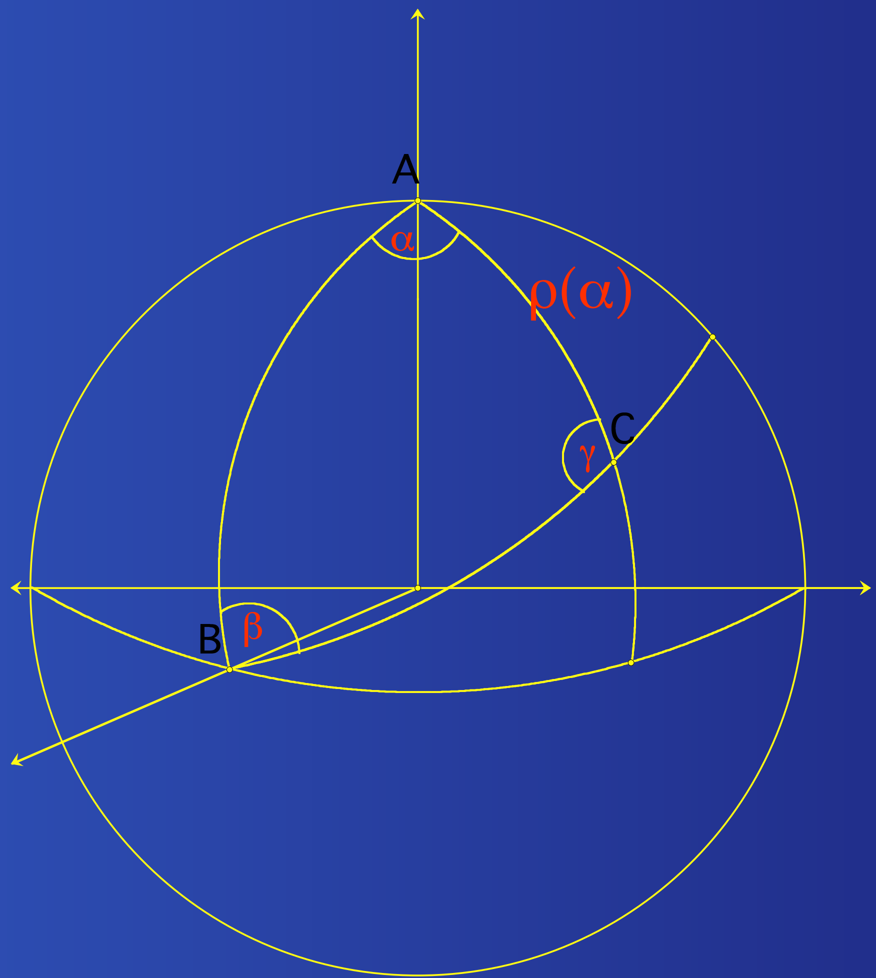
(Segona versió)

Variació de l'angle en el pla



Observem $\gamma(0) = \pi - \beta$

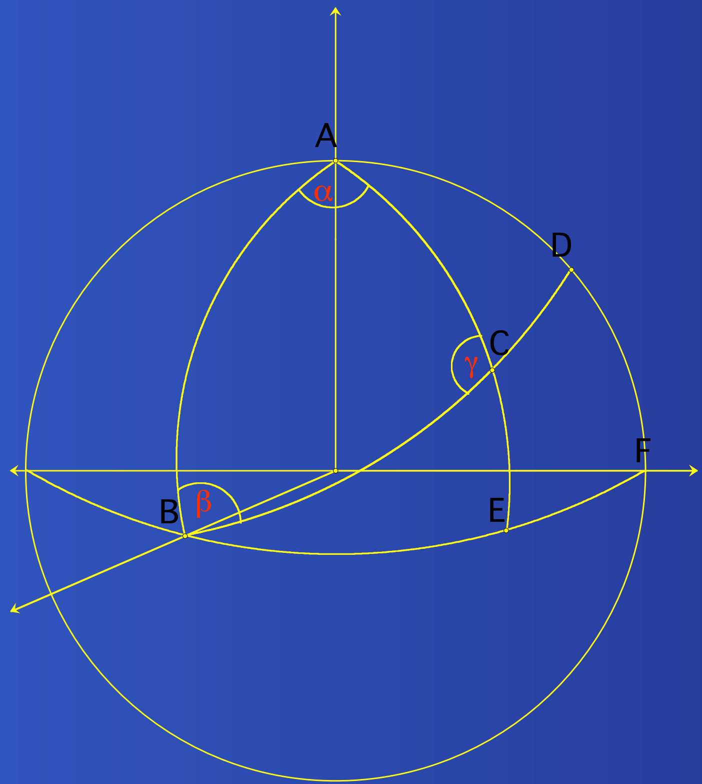
Variació de l’angle a l’esfera

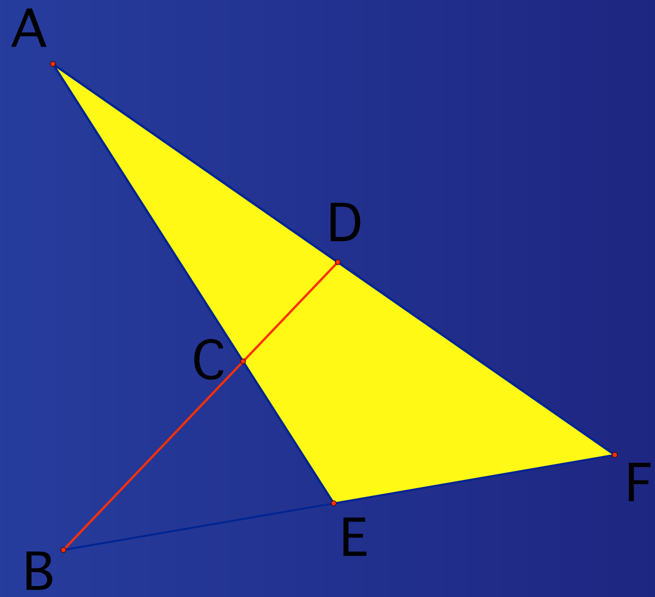


Eclíptica

Saturn, Mart i Mercuri

Menelaus (70 – 130) **Sphaerica**





(AEC)(EFB)(FAD)=-1

Càlcul de $\dot{\gamma}$

Tercera fórmula amb $\frac{c}{R} = \frac{\pi}{2}$:

- $$\cos\gamma = -cos\alpha\cos\beta$$

Derivant respecte α:

$$-\sin\gamma\cdot\dot{\gamma} = \sin\alpha\cos\beta$$

Càlcul de $\dot{\gamma}$

Pel teorema del sinus

$$\dot{\gamma} = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}}\cos\beta = -\sin\frac{a}{R}\cos\beta$$

Segona fórmula amb $\frac{c}{R} = \frac{\pi}{2}$,

- $$\dot{\gamma} = -\cos\frac{b}{R}$$

Àrea d'un triangle $S^2(R)$

- Element d'àrea de l'esfera: $dA = R\sin\frac{r}{R}drd\theta$
- Triangle en polars geodèsiques en el vèrtex A.

$0 \leq \theta \leq \alpha$.
$0 \leq r \leq r(\theta) =$ long. meridià entre A i BC.

$$\text{Àrea} \;=\; \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}drd\theta$$

Àrea d'un triangle $S^2(R)$

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\ &= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \end{aligned}$$

Àrea d'un triangle $S^2(R)$

$$\begin{aligned}
\text{Àrea} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \\
&= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha)-\gamma(0)) \\
&= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\
&= R^2\cdot\text{Excés}.
\end{aligned}$$

Àrea d'un triangle $S^2(Ri)$

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= (Ri)^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2 \cdot (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \\ &= R^2 \cdot \text{Defecte}. \end{aligned}$$

Objectiu

Calcular $\dot{\gamma}$ en una superfície arbitrària.

Tornem al Disquisitiones

Ordre en el Disquisitiones §19

Element de longitud en polars geodèsiques

- $$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2$$

Càlcul de $\dot{\gamma}$

- $$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d}{dr}\sqrt{G}.$$

- Pla: $G = r^2$; Esfera $G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$

Ordre en el Disquisitiones §20

- $K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$ Egregi
- Integrarem dos cops.

Ordre en el Disquisitiones §20

- $\int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$
- Gauss-Bonnet

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Gauss-Bonnet

$$\int_T K\,dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Curvatura total = Excés

Ordre de descobriment

- àrea$(T') =$ defecte(T) (T'=N(T))
- 1825 *Aquesta prova necessitarà explicació i algún canvi en la seva forma*
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha+\beta+\gamma)-\pi$
- Derivarem dos cops

Ordre de descobriment

- $\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$ GB

$$(\alpha): \quad \bullet \int_0^{r(\theta)} K\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$$

$$(r): \quad \bullet K\sqrt{G} = -\frac{d^2}{dr^2}\sqrt{G}$$ Egregi

Teorema de Comparació

- Compara la suma d'angles a la superfície amb la suma d'angles al pla Euclidià.

$$\int_T K\, dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Les seccions §21 a §29 del Disquisitiones són sobre teoremes de comparació angle a angle.

Comparació punt a punt

Excepte termes de quart ordre:

- $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2K(A) + K(B) + K(C))$
- $B^* = B - \frac{1}{12}\sigma(K(A) + 2K(B) + K(C))$
- $C^* = C - \frac{1}{12}\sigma(2K(A) + K(B) + 2K(C))$

• $\sigma =$ àrea ABC; • $K(\cdot)$ curvatura en els vèrtexs; • A^*, B^*, C^* vèrtexs del triangle euclidià de costats d'igual longitud que els donats.

Sobre l'esfera §$27,\ 28$

- Conegudes per Legendre $(1752 - 1833)$ sobre l'esfera.
- $A^* = A - \frac{\text{Excés}}{3} = A - 4''.95116$

  Calculat directament:
- Hohehagen $-4''.95113$
- Brocken $-4''.95104$
- Inselsberg $-4''.95131$

Naixement d'una teoria

Secció §26 del Disquisitiones: *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuis latera aequali sunt ipsis a, b, c [costats del triangle sobre la superfície].*

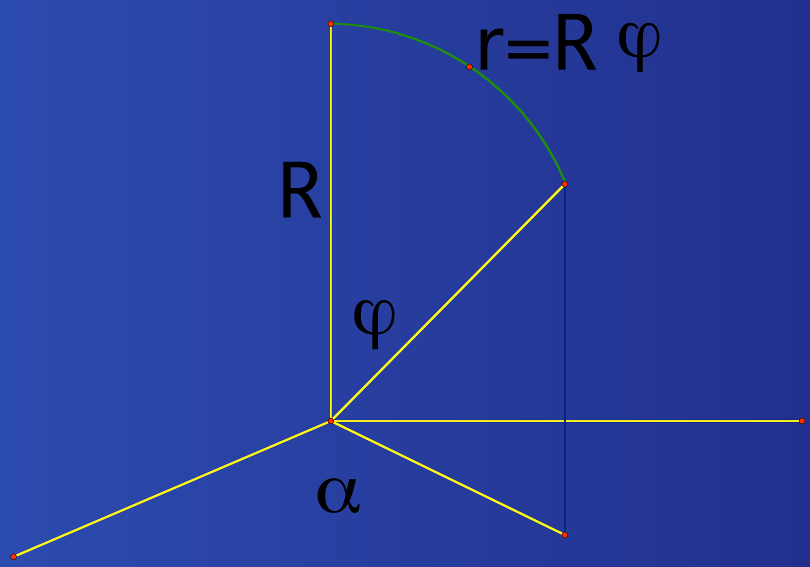
Aleksandrov (1912 – 1999)

Aleksandrov constructed a theory of intrinsic geometry of convex surfaces on that basis. Because of the depth of this theory, the importance of its applications and the breadth of its generality, Aleksandrov comes second only to Gauss in the history of the development of the theory of surfaces.

Geometria diferencial de l’esfera (Euler)

Element d'arc de l'esfera

- Coordenades geodèsiques (r, α).
- $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$



Element d'arc del pla

- Si $R \to \infty$, $\sin \frac{r}{R} \sim \frac{r}{R}$
- Pla: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2$

Element d'arc de l'esfera de radi Ri

- Substituïm R per Ri.
- Esfera Imaginària: $ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$

Problema

Trobar una superfície amb element de longitud en polars

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Realitzem l’esfera imaginària

Pseudoesfera. F. Minding 1840

Tractiu

- Corba amb subtangent 1.
- $y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

Tractiu

- Trajectòria d'un cos situat a $(0,1)$ en ser arrossegat des de $(0,0)$ sobre l'eix de les $x > 0$
- Proposat per Perrault, XVII. Resolt per Huygens.

Mètrica de la Pseudoesfera

- $$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

  amb $x =$ angle de rotació i $y = e^\tau$ on $\tau =$ distància sobre la tractiu.

- Reconeixem (avui dia) el semiplà de Poincaré 1881. Curvatura -1.

Complicacions

- No són coordenades normals geodèsiques.
- El semiplà de Poincarè està format per trompetes, però només amb $y > 1$.

Complicacions

- Quina relació hi ha entre

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

i

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2 \quad ?$$

Disc de **Poincaré**

$$0 \leq \rho < R.$$

- Imatge estereogràfica del semiplà.

Disc de Poincaré

- La mètrica del semiplà es transforma en:

$$ds^2 = \frac{4}{(R^2 - \rho^2)^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2).$$

  on ρ, α són coordenades polars euclidianes.
- Fem el canvi

$$\rho = R \tanh \frac{r}{2}$$

Disc de **Poincaré**

- Obtenim

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

- r, α polars geodèsiques.

Resum

LOCALMENT

Pseudosefera $\longrightarrow$ semipla $\longrightarrow$ Disc $\longrightarrow$ $S^2(Ri)$

GLOBALMENT

Model de Beltrami (1868)

Varietats de Riemann

Einstein, el 1949, tot comentant l'estat de les seves investigacions el 1908:...*Perquè es van necessitar encara set anys més per a la construcció de la teoria de la relativitat? La raó principal rau en que no es tan fàcil lliurar-se de la idea de que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat.*

Model Hiperboloide

Lorentz

- Mètrica de Lorentz a R^3:
  $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' - zz'$
- Esfera de radi i:
  $S^2(i) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(x, y, z)|| = i\}$
- $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ Hiperboloide
- La mètrica de Lorentz restringida a l'hiperboloide és de Riemann.

Hiperboloide de dos fulls $S^2(i)$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

Hiperboloide d’un full $S^2(1)$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

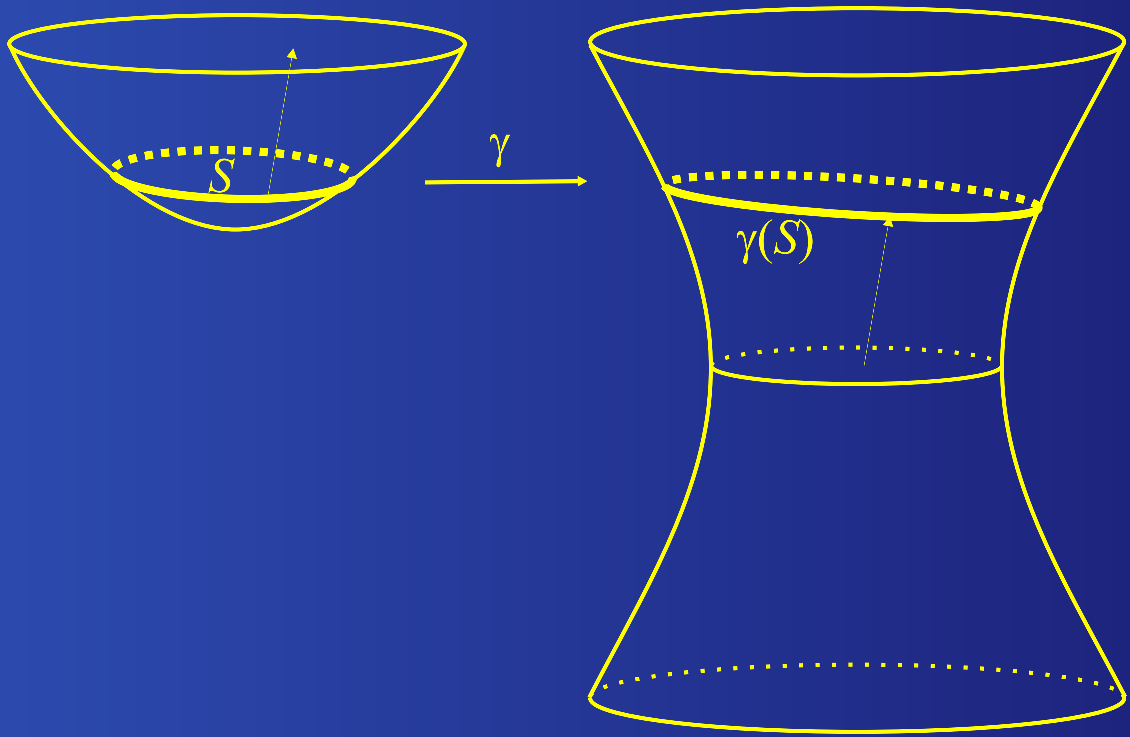
Hiperboloides

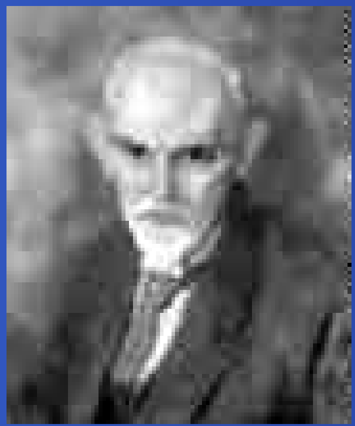
W. de Sitter $1872 - 1934$

- Einstein a De Sitter, Febrer 1917: *I have completely abandoned my views, rightfully contested by you, on the degeneration of the $g_{\mu\nu}$. I am curious to hear what you will have to say about the somewhat crazy idea I am considering now*.
- Controvèrsia famosa entre ells, sobre el model de l'Univers, durant $1916 - 18$ en la que intervenen Felix Klein i Hermann Weyl.

W. de Sitter

El triangle polar d’un triangle hiperbòlic viu a l’esfera de de Sitter.





Punt final