Curvatura de l'el·lipse seguint Newton

Agustí Reventós Tarrida
per a J. Girbau

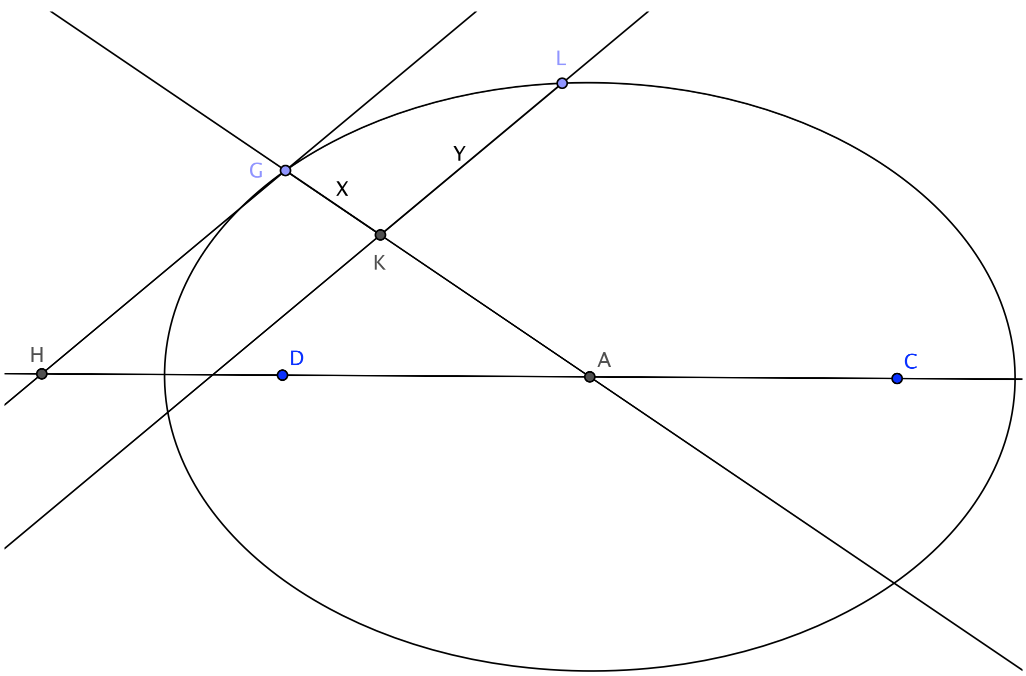
9 de març de 2012

Resum

Segueixo l'article de Josep Casadellà Reig, Butlletí de la SCM, Vol 14, num 2, 1999, pàg 41-61, del qual en vaig ser el referee. Més detallat i amb més explicacions, i desviant-me clarament d'ell en alguns punts.

1 Noves coordenades

Com tothom sap, ja des d'Apoloni, les coordenades naturals (les usades per Apoloni!!) són les dels diàmetres conjugats: S'agafa com origen un punt G de l'el·lipse i com eixos el diàmetre GA i la tangent GH en G. Les coordenades (x, y) del punt L de l'el·lipse són $x = GK$, $y = KL$, sent KL la paral·lela a la tangent a l'el·lilpse per G.



Tot i que Apoloni no ho va fer com ho farem ara, mirem quina és l'equació de l'el·lipse respecte (x, y). Si denotem (u, v) les coordenades cartesianes habituals de $\mathbb{R}^2$, podem pensar l'el·lipse

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

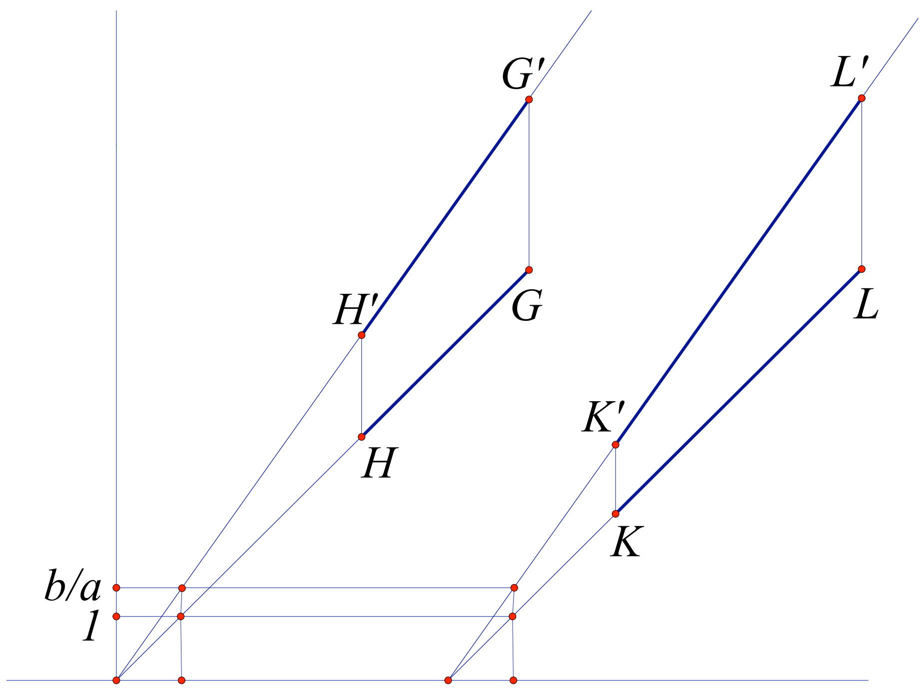
com la imatge per l'aplicació $f(u, v) = (u, \frac{b}{a}v)$ de la circumferència $u^2 + v^2 = 1$

Teorema 1.1 *Si els segments HG i KL són paral·lels, llavors*

$$\frac{HG}{KL} = \frac{H'G'}{K'L'}$$

amb $H' = f(H)$,$G' = f(G)$, $K' = f(K)$, $L' = f(L)$.

Demostració. O bé analíticament o pel Teorema de Tales com mostra el dibuix.



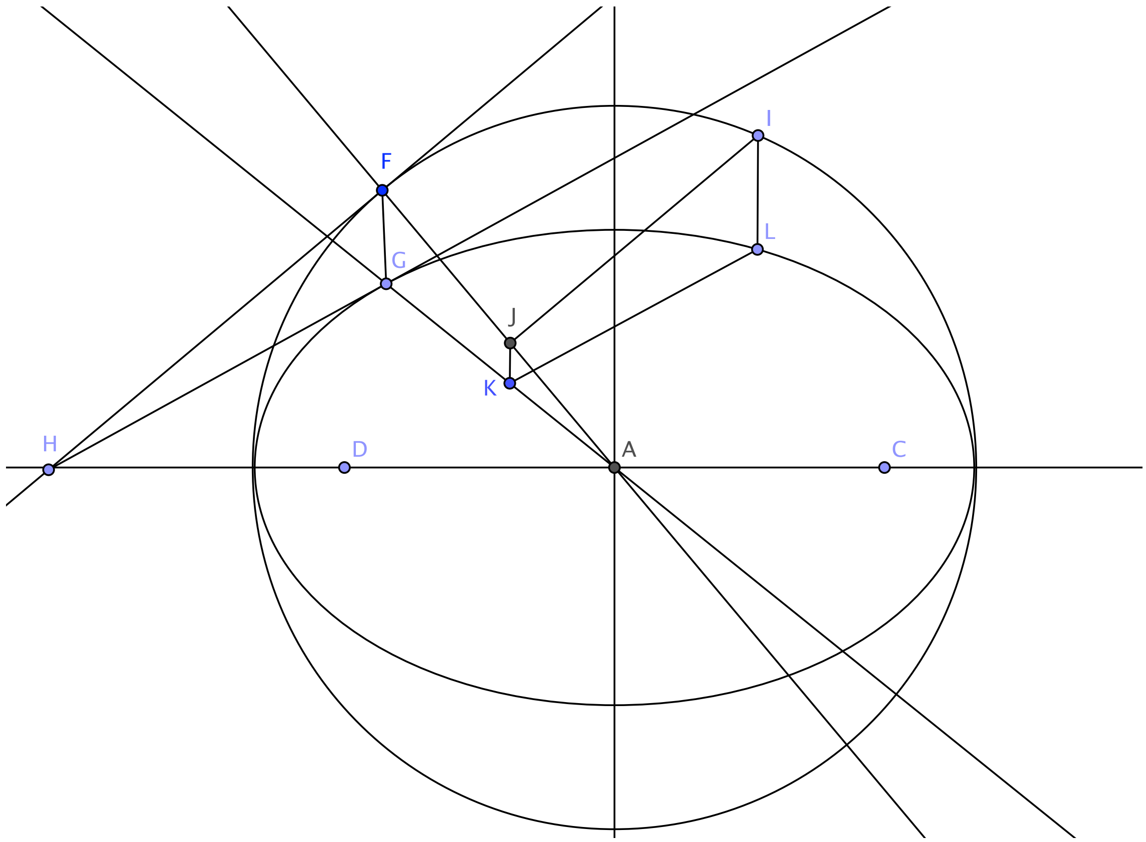
□

2 Equació de l'el·lipse

Observem ara el dibuix següent. La el·lipse es transforma en la circumferència per l'aplicació $f(u, v) = f(u, \frac{a}{b}v)$ (suposem a eix major i b eix menor). Les coordenades d'Apoloni del punt L de la el·lipse són $x = GK$, $y = KL$. Com que per construcció KL és paral·lel a GH també IJ és paral·lel s HF (teorema anterior). En particular, IJ és perpendicular a FJ.

Observem $I = f(L)$, $J = f(K)$, $F = f(G)$.

Denotem $FJ = s$, $IJ = t$, $AG = l$.



Pel teorema 1.1 tenim

$$\frac{HF}{HG} = \frac{JI}{KL}$$

és a dir

$$\frac{HF}{HG} = \frac{t}{y},$$

o bé, posant $\lambda = \frac{HF}{HG}$,

$$t = \lambda \cdot y. \tag{1}$$

I per Tales

$$\frac{s}{x} = \frac{a}{l},$$

es a dir

$$s = \frac{a}{l} \cdot x \tag{2}$$

Pel teorema de l'altura

$$t^2 = s \cdot (2a - s)$$

Substituint (1) i (2) en aquesta expressió tenim

$$y^2\lambda^2 = \frac{a}{l}x(2a - \frac{a}{l}x).$$

El *diàmetre conjugat* del AG és el diàmetre per A paral·lel a la tangent en G. El punt on aquest diàmetre talla l'el·lipse (un dels punts) té coordenades (l, q).

La relació entre l i q és doncs

$$q^2\lambda^2 = \frac{a}{l}l(2a - \frac{a}{l}l) = a^2.$$

Podem escriure doncs l'equació de l'el·lipse (fent jugar el diàmetre conjugat) com

$$y^2 = \frac{2q^2}{l}\, x - \frac{q^2}{l^2}\, x^2$$

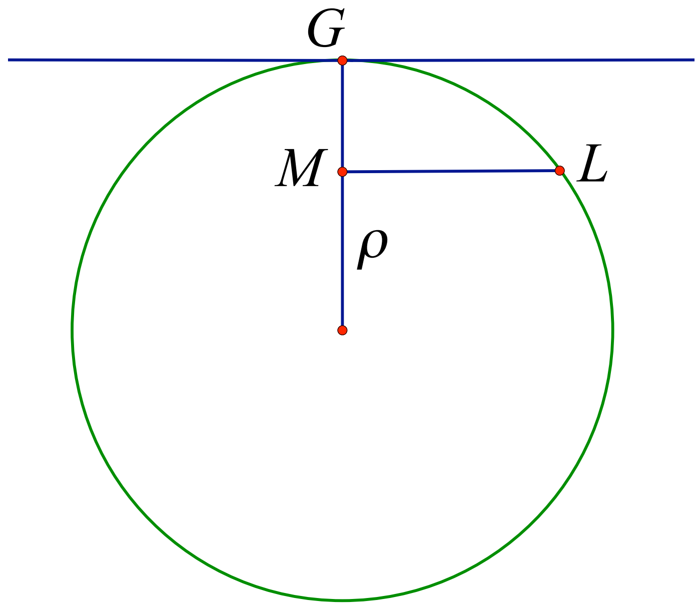
La descripció, en paraules, d'aquesta fórmula interpretada com que l'àrea d'un quadrat és igual a la diferència d'àrees de dos rectangles és la propietat que Apoloni veu en la secció d'un con. [1]

3 Curvatura

Newton introdueix el radi de curvatura d'aquesta manera evident:

[1] La Laura Salvo ho escriu així:

Teorema 6 *Tallant un con per un pla que passi per l'eix i per un altre no paral·lel ni en sentit contrari, que talli els costats del triangle que passa per l'eix, si la intersecció del pla secant amb el de la base del con és perpendicular a la del triangle o a la seva prolongació, el quadrat de tota recta traçada des de la secció del con paral·lelament a tal intersecció fins el diàmetre de la secció, equival a una àrea aplicada segons una certa recta que guarda una raó amb el diàmetre igual que el quadrat de la paral·lela al diàmetre des del vèrtex del con fins la base del triangle guarda amb el rectangle format per les rectes que aquesta última recta determina en els costats del triangle, la altura de la qual és la part del diàmetre separada per la primera recta, del costat del vèrtex de la secció, disminuït en una figura semblant i semblantment disposada al rectangle limitat pel diàmetre i el paràmetre. Anomenarem el·lipse a tal secció.*



Pel teorema de l'altura

$$ML^2 = MG(2\rho - MG)$$

per tant, quan L tendeix a G, tenim

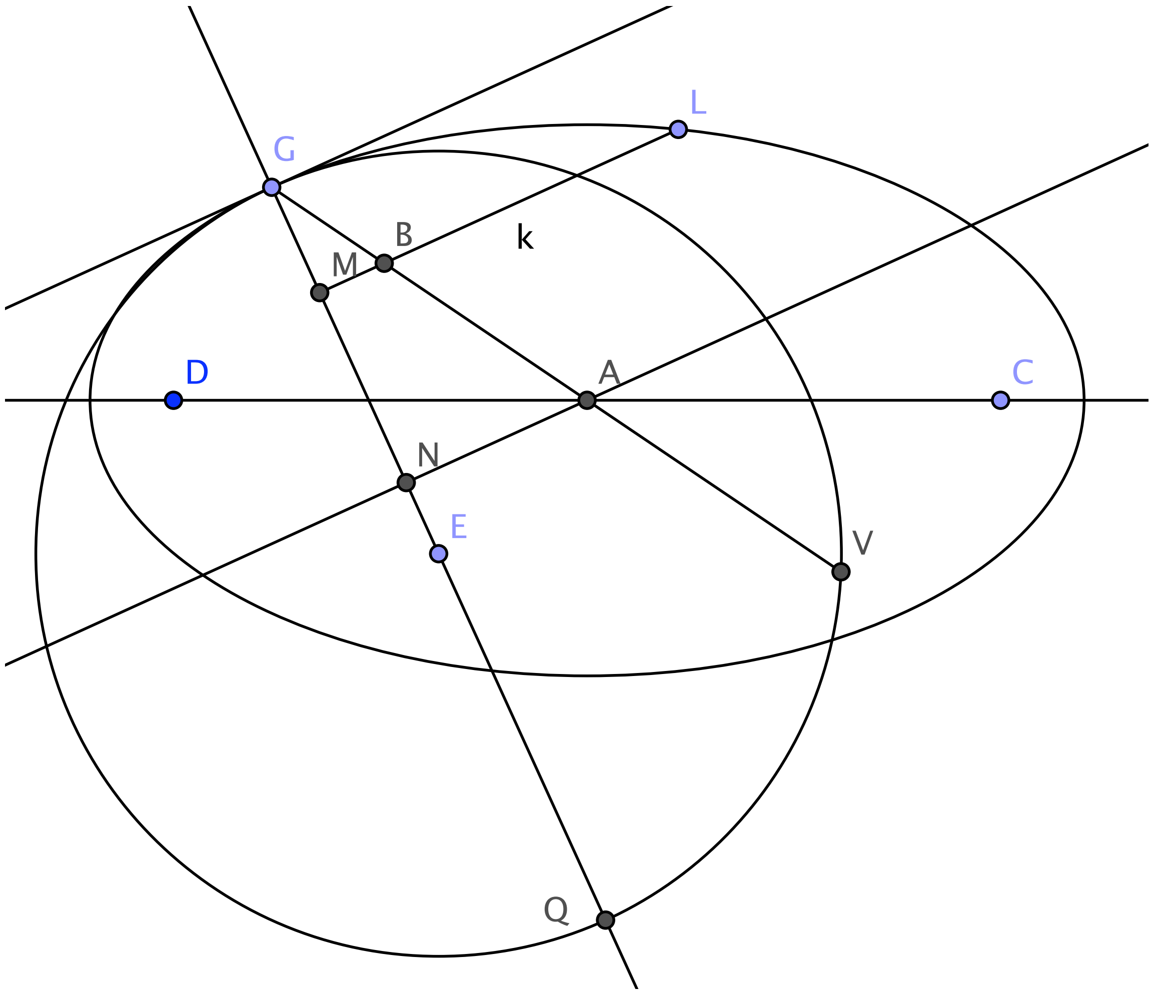
$$\lim_{L \to G} \frac{ML^2}{MG} = 2\rho. \tag{3}$$

Intuïtivament està dient que la circumferència osculatriu aproxima bé la corba en el sentit de que no importa que L s'acosti a G per sobre de la corba que per sobre de la circumferència.

Teorema 3.1 *La curvatura de l'el·lpse en un punt G està donada per*

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{n}{q^2},$$

on n és la distància entre la tangent per G i el diàmetre paral·lel a ella, i $2q$ és la longitud d'aquest diàmetre.



Amb la notació de la figura, el radi de curvatura ρ en el punt G és $\rho = GE$. Es diu que E és el centre de curvatura.

Observem que les coordenades (x, y) de L són $x = GB$, $y = BL$. També tenim $GA = l$ i $GN = n$.

Tenim, per (3),

$$2\rho = \lim_{x \to 0} \frac{(y + BM)^2}{GM} = \lim_{x \to 0} \frac{y^2}{GM}$$

La darrera igualtat es dedueix de que el quocient $\frac{BM}{GM}$ és constant (quan L tendeix a G, és a dir, quan x tendeix a zero).

Per semblança de triangles

$$\frac{GN}{GA} = \frac{n}{l} = \frac{GM}{x}$$

Substituint el valor de GM a l'expressió del radi de curvatura tenim

$$2\rho = \lim_{x\to 0} \frac{y^2\, l}{n\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x}\frac{l}{n} = \frac{2q^2}{l}\cdot\frac{l}{n} = \frac{2q^2}{n}$$

Per tant

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{n}{q^2}. \quad \square$$

Teorema 3.2 *La secant GV de la circumferència osculatriu a l'el·lipse en el punt G, que passa pel centre de l'el·lipse, està donada per*

$$GV = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x} \tag{4}$$

Demostració. Per semblança de triangles

$$\frac{GM}{x} = \frac{GV}{2\rho}$$

Així

$$2\rho = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x}\cdot\frac{2\rho}{GV}$$

Simplificant tenim el resultat. $\square$

Comparant l'àrea del rectangle format per 4 tangents en els punts de contacte de diàmetres conjugats amb l'àrea del seu transformat (que sabem queda multiplicada per $\frac{a}{b}$) obtenim que $qn = ab$ de manera que la curvatura també és pot escriure com

$$k = \frac{n^3}{a^2b^2}.$$

4 Paràbola

Teorema 4.1 *Sigui D un punt de la paràbola $y = ax^2$. Hi ha una afinitat que conserva la paràbola $y = ax^2$, porta el vèrtex O a D, i rectes verticals a rectes verticals. Les distàncies verticals es conserven i les horitzontals (les rectes horitzontals van a rectes paral·leles a la tangent per D) queden multiplicades per una constant, concretament per*

$$\sqrt{1+4a^2d^2} = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{DF}, \quad \textit{on } F \textit{ és el focus de la paràbola.}$$

En particular, amb la notació de la figura

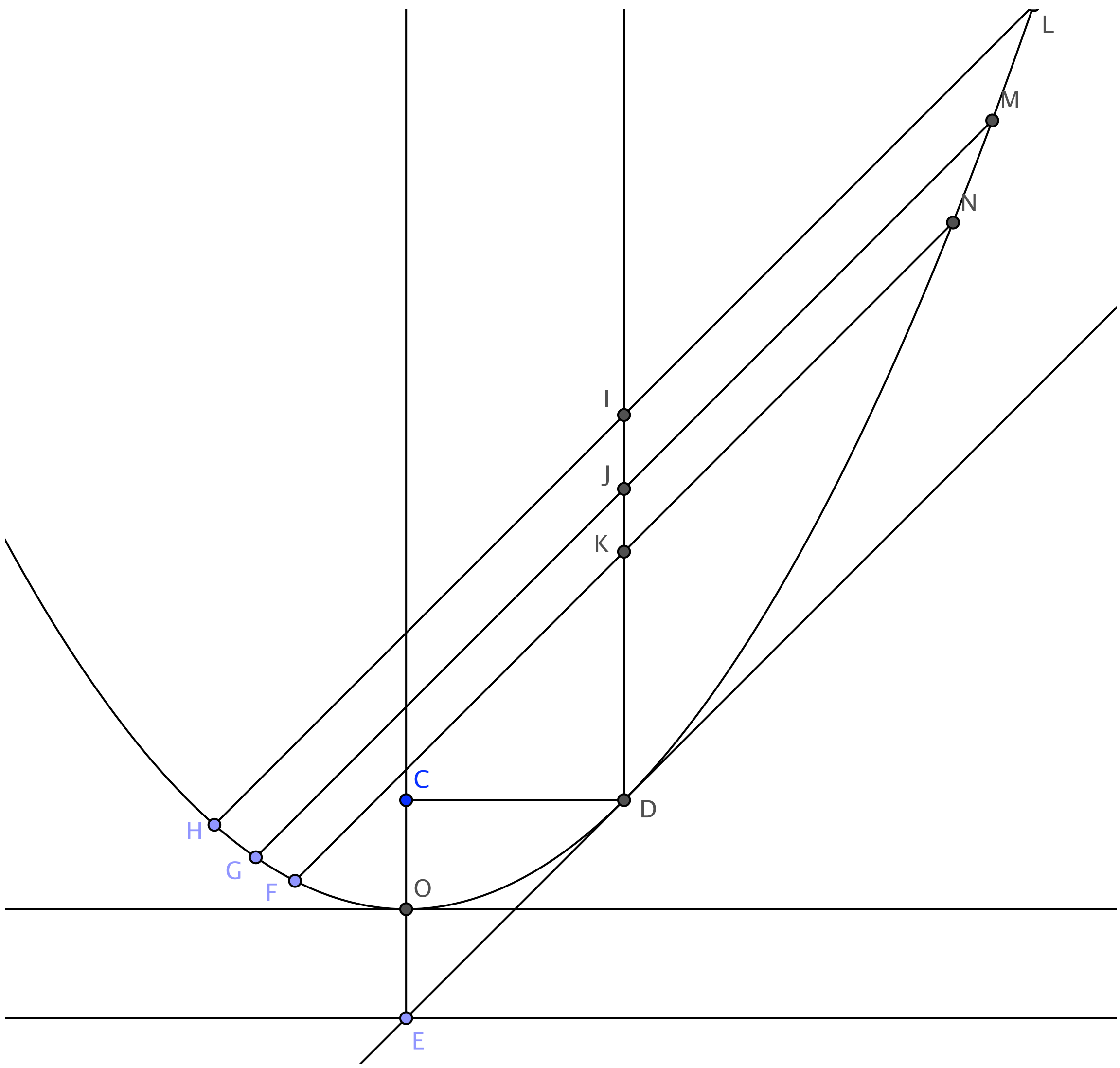
$$\frac{LI^2}{ID} = \frac{JM^2}{JD} = 4\, DF$$

i, I i J són els punts mitjans de les cordes LH i MG respectivament.

Demostració. Considerem l'afinitat

$$\begin{aligned} x' &= x + d \\ y' &= 2adx + y + ad^2 \end{aligned}$$

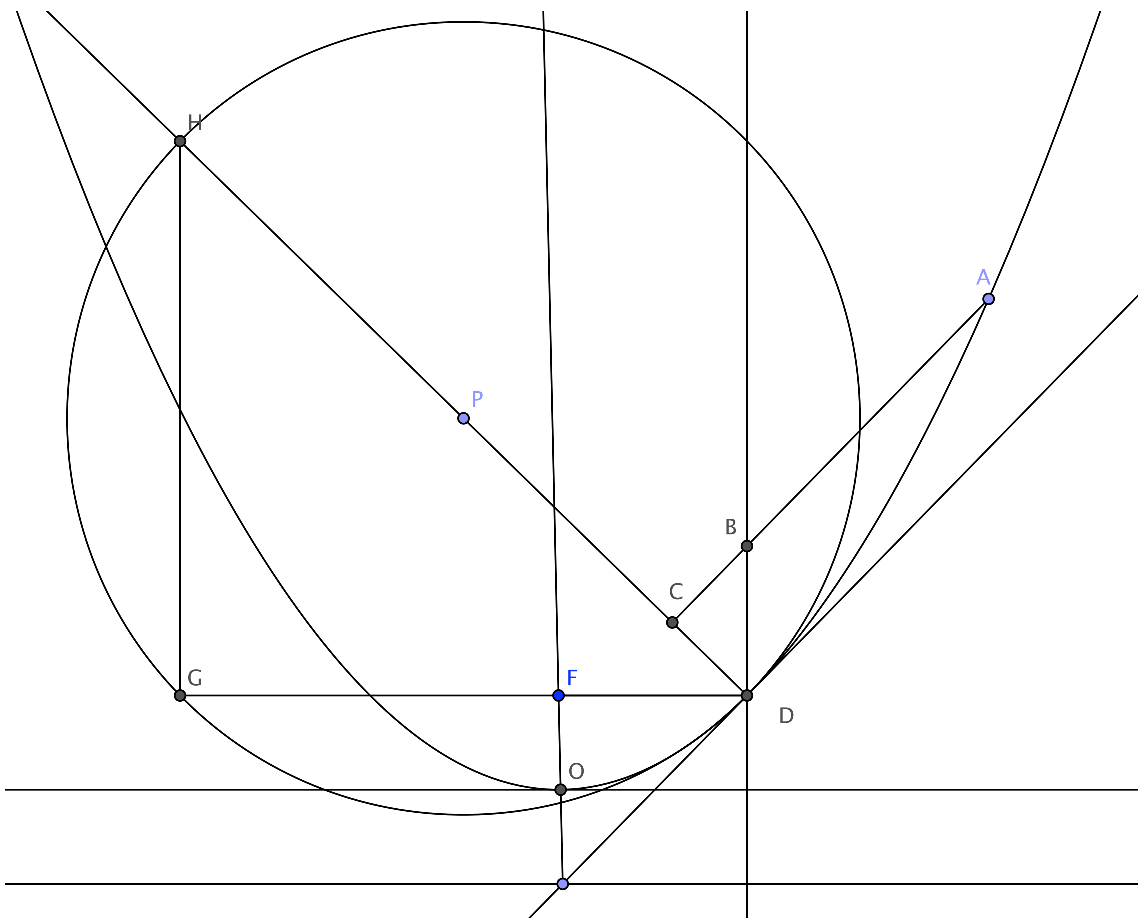
on $D = (d, ad^2)$. $\square$



Recordem que per dibuixar la tangent de la figura nomçes hem d'agafar $CO = OE$. Sense parlar d'afinitats aquest teorema era conegut per Arquimedes però no recordo si apareix a les *Còniques* d'Apoloni. Newton l'utilitza sense comentaris.

5 Curvatura de la paràbola

La calcularem filosòficament igual que en el cas de l'el·lipse: sense fer servir explícitament derivades.



Observem primerament que

$$\frac{BC}{CD} = 2ad$$

ja que aquest quocient és justament el pendent de la tangent en D. Aplicant Pitàgores al triangle BCD tenim

$$BD^2 = CD^2 + 4a^2d^2 \cdot CD^2 = CD^2(1 + 4a^2d^2).$$

Escrivint el darrer parèntesi en funció de la distància focal tenim

$$BD = CD \cdot 2\sqrt{a}\sqrt{DF}.$$

Per calcular la curvatura recordem que

$$2\rho = \lim_{A\to D} \frac{AC^2}{CD},$$

on ρ és el radi de curvatura.

Observem que el numerador es pot escriure com

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\cdot AB\cdot BC$$

El segon i tercer sumands no contribuiran en el càlcul de ρ. En efecte,

$$\frac{BC^2}{CD} = BC\cdot\frac{BC}{CD}$$

i la darrera fracció és la tangent de l'angle $\angle CDB$, que es manté constant quan $A \to D$.

Per tant

$$\lim_{A\to D} \frac{BC^2}{CD} = 0$$

Anàlogament

$$\lim_{A\to D} \frac{2\cdot AB\cdot BC}{CD} = 0$$

Per tant

$$\lim_{A\to D} \frac{AC^2}{CD} = \lim_{A\to D} \frac{AB^2}{CD} = \lim_{A\to D} \frac{AB^2}{BD}\cdot 2\sqrt{a}\sqrt{DF} = 8\sqrt{a}(DF)^{3/2}$$

Que retindrem més fàcilment així

$$\boxed{\rho^2 = 16a\cdot DF^3}$$

Si volem explícitament la curvatura

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4\sqrt{a}(DF)^{3/2}}$$

Teorema 5.1 *Sigui D un punt qualsevol d'una paràbola de focus F. Sigui G el punt en que la corda DF talla el cercle osculador a la paràbola en D. Llavors*

$$DG = 4\cdot FD$$

Demostració. L'angle $\angle GDA$ és igual a l'angle $\angle CDB$. En particular, per Pitàgores,

$$4\rho^2 = DG^2 + GH^2 = DG^2(1 + 4a^2d^2) = DG^2\cdot 4a\cdot DF$$

D'aquí deduïm

$$DG = \sqrt{\frac{64a\cdot DF^3}{4a\cdot DF}} = 4\cdot DF.$$