Àlgebra lineal i equacions diferencials

Agustí Reventós

Notes del curs impartit a primer de Química
Facultat de Ciències, UAB, 2009.

Índex

Capítol 1

Nombres complexos

1.1 Nota històrica

Els[1] nombres irracionals, negatius i complexos tenen una història fascinant. Els grecs definien els nombres com agregats d'unitats, és a dir, parlaven de nombres més grans que 1. Els primers Pitagòrics varen estendre aquesta noció per poder-hi incloure quocients de nombres positius, és a dir, els racionals positius. Tenien una creença mística de que aquest nombres eren la base sobre la que s'havia construït la Natura. Es diu que un matemàtic anomenat Hipassus va descobrir la irracionalitat mentre estava embarcat en una nau i que, quan va comunicar el descobriment, el varen llançar a l'aigua.

En els *Elements* d'Euclides el nombres irracionals es manipulen basant l'àlgebra en segments lineals, en lloc de en nombres, de manera que el producte de dos nombres era una àrea, el producte de tres nombres era un volum i el producte de quatre nombres era impossible.

El matemàtic Alexandrí Heron, del primer segle de la nostra era, va donar la fórmula

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

per a calcular l'àrea d'un triangle de costats a, b, c i perímetre $2p$. Aquest va ser un dels primers forats en el dic Grec que protegia la idea de que les fórmules no es podien utilitzar sense una conceptualització geomètrica del significat de les seves operacions.

[1] Traduit de http://www.math.psu.edu/melvin/logic/node8.html

Afortunadament cap noi grec va poder tapar el forat; el que va començar com un petit doll d'aigua es va convertir en una inundació. L'àlgebra es va convertir en un joc on es manipulaven símbols els quals es consideraven sense sentit.

♡ ♢ ♠ ♣

El primer ús conegut dels nombres negatius va ser fet pel matemàtic Indi Brahmagupta, al voltant de l'any 628. El gran matemàtic Indi Bhaskara, va dir, després de donar 50 i -5 com solucions d'una equació: *El segon valor no s'ha de considerar, ja que és inadequat; la gent no aprova solucions negatives.* No obstant, els nombres negatius es continuaven utilitzant inclús per aquells que els consideraven símbols mancats de significat.

Quan es varen incorporar al sistema numèric es varen poder manipular usant les lleis de l'àlgebra, i aquestes operacions semblaven consistents inclús quan els propis objectes eren símbols sense significat.

Antoine Arnauld, un amic de Pascal, va qüestionar que $-1 : 1 = 1 : -1$, ja que, deia ell, -1 és menor que $+1$; per tant, com pot ser el més petit al més gran com el més gran al més petit? Si poguéssim reescriure aquest argument, em sembla que està dient que, ja que els nombres satisfan l'axioma $\forall x \forall y (x < y \Rightarrow x/y < y/x)$, no poden haver-hi nombres negatius perquè no satisfan aquest axioma.

d'Alembert (1717-1783) va escriure en el seu famós diccionari que *un problema que porta a una solució negativa significa que alguna part de la hipòtesi era falsa però se suposava vertadera.* Leibnitz considerava que hi havia quelcom d'estrany amb els negatius i els imaginaris, però argumentava que es podia treballar amb ells, perquè la seva forma era correcta.

Les objeccions als nombre negatius no foren res comparades amb la controvèrsia sobre els nombres complexos. El 1545, Cardano, en el seu llibre *Ars Magna*, considera el problema de trobar dos nombres que sumin 10 i que el seu producte sigui 40. Resol l'equació $x(10-x) = 40$ i obté les solucions, i llavors diu *aquestes són quantitats sofisticades, que encara que enginyoses, són inútils.* La solució de Cardano de l'equació cúbica requeria prendre arrels cúbiques d'expressions que contenien arrels quadrades. Alguns cops aquestes arrels quadrades eren imaginàries, inclús quan la solució última fos un nombre real.

La solució[2] de

$$x^3 + px + q = 0$$

es

$$x = \sqrt[3]{((-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}))} + \sqrt[3]{((-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}))}$$

De nou, encara que la gent continuava manipulant nombres complexos formalment, hi havia una intranquil·litat considerable sobre el seu ús. Segons Leibnitz, *l'esperit diví va trobar una sublim sortida en aquesta meravella de l'anàlisi, aquest portent del món ideal, aquest amfibi entre el ser i no-ser, el qual anomenem arrel imaginària de la unitat negativa.* Descartes rebutjava les arrels complexes i va encunyar el terme despectiu "imaginari" per descriure-les.

♡ ♢ ♠ ♣

Argand[3] és famós per la seva interpretació geomètrica dels nombres complexos, on i s'interpreta com una rotació de 90 graus. El concepte de mòdul d'un nombre complex també es deu a Argand però Cauchy, que va usar el terme posteriorment, és qui habitualment s'emporta la fama de creador d'aquest concepte. El diagrama d'Argand[4] s'ensenya a la majoria d'escolars que estudien matemàtiques i el nom d'Argand perdurarà en la història de la matemàtica per aquest important concepte. No obstant, el fet que aquest nom

[2] De fet, aquesta fórmula és de Scipion del Ferro, començaments del segle XV, professor de la universitat de Bologna, que la va mantenir en secret fins al final dels seus dies que la va comunicar al seu gendre Annibal della Nave i al seu alumne Antonio Maria Fiore. El 1543, Cardano i el seu alumne Ludovico Ferrari viatgen a Bolonia per tal de que del Ferro els hi mostri la fórmula. A la seva obra Ars Magna, Cardano diu que publica el mètode de del Ferro, però Tartaglia diu que és el seu mètode i que Cardano li havia tret amb una mentira i amb la promesa de no publicar-ho.

Niccolò de Cusa o Niccolo Fontana, conegut com Tartaglia (tartamut) la va redemostrar en una competició contra del Fiore el 1535, tot i que sabia que Fiore la coneixia. La tartamudesa fou a causa d'una ferida de ganivet que li causà un soldat francès durant la massacre a la catedral de Brescia de 1512. Cada participant dipòsitava una suma de diners davant notari i proposava trenta problemes per al seu oponent. Qui, en trenta dies, resolgués més problemes s'emportava els diners. En menys de dues hores Tartaglia va resoldre tots els problemes plantejats per Fiore. Llavors és quan Cardano enreda a Tartaglia, prometent-li recomanar-lo al governador de Milà, i li treu la fórmula.

[3] Va publicar aquest treball sense signar-lo. Un altre matemàtic, en llegir-lo, va demanar que l'autor es donés a conèixer.

[4] $\mathbb{C} = \{z; z = x + iy = (x, y)\}$.

s'associï amb la interpretació geomètrica dels nombres complexos és només una conseqüència d'una estranya successió d'esdeveniments.

El primer en publicar aquesta interpretació geomètrica dels nombres complexos fou Caspar Wessel. La idea apareix en un treball de Wessel de 1787 però no es va publicar fins que Wessel va sotmetre aquest article a la Reial Acadèmia Danesa de Ciències el 10 de mars de 1797. L'article fou publicat el 1799 però va passar inadvertit a la comunitat matemàtica.

La controvèrsia no es va acabar de tancar fins a inicis del segle 19 quan Gauss, Hamilton, i altres resolen el problema a través de l'abstracció. Per a la matemàtica moderna, la pregunta no és si hi ha ideals platònics que corresponen a certes paraules, sinó si és consistent i útil usar aquestes paraules. Es tracta llavors de saber si hi ha un sistema algebraic en el qual -1 tingui arrel quadrada i en en el qual es compleixin la majoria de les lleis de l'àlgebra. Veurem que aquest objecte existeix construint el *cos dels nombres complexos.*

$\heartsuit \qquad \diamondsuit \qquad \spadesuit \qquad \clubsuit$

1.2 Nombres racionals i nombres reals

Els nombres racionals es poden pensar com fraccions o com decimals periòdics. Veiem aquestes dues presentacions.

El conjunt dels nombres racionals és el conjunt

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

amb el conveni de que

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{si i només si} \quad pq' = p'q.$$

En aquests moments la notació $\frac{p}{q}$ no vol dir p dividit per q, sinó que és tan sols una manera de referir-nos a la parella ordenada (p, q), de manera que també haguéssim pogut escriure

$$\mathbb{Q} = \{(p, q);\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

amb el conveni de que

$$(p, q) = (p', q') \quad \text{si i només si} \quad pq' = p'q.$$

Però perquè aquest conjunt $\mathbb{Q}$ sigui realment el que els matemàtics anomenen el *cos del nombres complexos*, ens cal dir com sumem i com multipliquem els elements de $\mathbb{Q}$. Ho farem així:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} &= \frac{pq' + p'q}{qq'} \\ \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} &= \frac{pp'}{qq'} \end{aligned}$$

Teorema 1.2.1 *Els nombres racionals són els decimals periòdics*

L'algorisme d'Euclides ens diu que donats dos nombres enters D (dividend) i d (divisor), existeixen dos únics nombres enters q (quocient) i r (residu) tals que

$$\boxed{D = dq + r, \quad r < d}$$

Dividint per d obtenim

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}, \quad r < d.$$

Això ens dóna la idea d'identificar el nombre racional $(D, d) = \frac{D}{d}$ amb el decimal periòdic $q + \frac{r}{d}$.

La fracció $\frac{r}{d}$ és més petita que 1 i per tant, quan realitzem la divisió r/d usant l'algorisme d'Euclides obtenim un número del tipus $0, abc\ldots$ I $q + \frac{r}{d}$ és doncs del tipus $q, abc\ldots$

Per exemple, calculem 3/7.

$$\begin{array}{llllll|l} 3 & & & & & & 7 \\ \cline{7-7} 2 & 0 & & & & & 0,428571 \\ & 6 & 0 & & & & \\ & & 4 & 0 & & & \\ & & & 5 & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 3 & \end{array}$$

La observació fonamental és que quan s'obté un residu que ja havia sortit abans (el número 3 en el nostre cas) no cal continuar, ja que ara s'anirien repetint els càlculs com al començament.

Ara bé, com els possibles restos són números més petits que 7 és clar que el quocient podrà tenir com a molt set xifres decimals diferents, ja que a partir d'un cert moment s'aniran repetint.

En el nostre cas

$$\frac{3}{7} = 0,428571\overline{428571}\ldots$$

És a dir, obtenim un decimal periòdic de període 428571.

Més exemples:

$$\begin{aligned}
\frac{3448}{990} &= 3,482\overline{82}\ldots \\
\frac{3}{5} &= 0,6 \quad \text{periòdica de període zero} \quad 0,6 = 0,60\overline{0}\ldots \\
\frac{1}{3} &= 0,3\overline{3}\ldots
\end{aligned}$$

Observem, per exemple en el primer cas, com en efectuar la divisió usant l'algorisme d'Euclides, el residu es repeteix.

$$\begin{array}{cccccccc|l}
3 & 4 & 4 & 8 & & & & & 990 \\ \cline{9-9}
 & 4 & 7 & 8 & 0 & & & & 3,482 \\
 & & 8 & 2 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 2 & 8 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 8 & 2 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Recíprocament, donat un decimal periòdic, sempre podem obtenir dos nombres enters que al dividir-los ens doni aquest decimal periòdic. Veiem un exemple.

Exemple 1.2.2 *Trobeu dos nombres enters D, d tals que* $\frac{D}{d} = 34,56789\overline{789}$

Solució. Posem

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7, & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \\
- & & & & 3 & 4, & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline
 & 3 & 4 & 5 & 3 & 3, & 3 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

És a dir, el número que ens donen el restem d'ell mateix però desplaçat cap a l'esquerra de manera que els períodes coincideixin. En el nostre cas la resta que estem fent és $1000a - a$ amb $a = 34,56789\overline{789}$.

Tenim doncs

$$999a = 34533,33$$

o, equivalentment
$$a = \frac{34533,33}{999} = \frac{3453333}{99900}.\Diamond$$

Ara que tenim controlats els decimals periòdics, és lògic pensar en què són els decimals no periòdics.

Definició 1.2.3 *Els nombres reals són els decimals periòdics i no periòdics.*

El nombre real, no racional, més famós és probablement el nombre π. Sabem que $\pi = 3,1415\ldots$, i que els decimals van apareixent sense que es formi mai un període que es vagi repetint.

La observació important és que $3,14 < \pi < 3,142$, és a dir, que tot i que no sabem encara ben bé què és π sí que veiem que és un valor que està entre dos racionals. I com més decimals donem, més el podem acotar entre dos racionals. Per exemple, la meva calculadora diu $\pi = 3,14159265359$, això vol dir que
$$3,14159265358 < \pi < 3,14159265360.$$

El que volem dir amb això és que en donar un decimal no periòdic estem donant un valor no racional però que el podem aproximar tant com vulguem per racionals.

$\sqrt{2}$

Ja sabeu que la primera demostració que es va fer usant el mètode conegut com *reducció a l'absurd* va ser demostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. És a dir, no hi ha cap nombre racional que elevat al quadrat doni 2.

La repetim tot i que que és molt estandard. Té més de dos mil anys! Es basa en la observació que en elevar al quadrat un nombre parell obtenim un nombre parell i que en elevar al quadrat un nombre imparell obtenim un nombre imparell.

En efecte, $(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ i $(2k+1)^2 = 2(2k^2+k)+1$.

Suposem que hi ha un nombre racional $\frac{p}{q}$ tal que
$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podem suposar que p i q no són tots dos parells. En efecte, és clar que anant dividint per dos successivament podem escriure $p = 2^a p'$ i $q = 2^b q'$ amb p' i q' imparells. Llavors

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a p'}{2^b q'} = \frac{2^{a-b} p'}{q'}, \quad \text{si } a \geq b$$

$$\frac{p}{q} = \frac{2^a p'}{2^b q'} = \frac{p'}{2^{b-a} q'}, \quad \text{si } a \leq b$$

En ambdós casos tenim un nombre racional amb numerador o denominador imparell.

Suposem doncs

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

amb p, q no parells a la vegada.

Llavors $p^2 = 2q^2$, que implica p^2 parell, i per tant p *parell*. Posem $p = 2k$. Llavors $p^2 = 4k^2 = 2q^2$. Per tant $q^2 = 2k^2$, d'on q *és parell*. Contradicció.

Teorema 1.2.4 *La diagonal no és commensurable amb el costat.*

Això vol dir que no hi ha una unitat de mesura u tal que $d = nu$ i $D = mu$, amb $m, n \in \mathbb{N}$, on D és la diagonal d'un quadrat de costat d.

Com que pel teorema de Pitàgores sabem que $D^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$, tenim

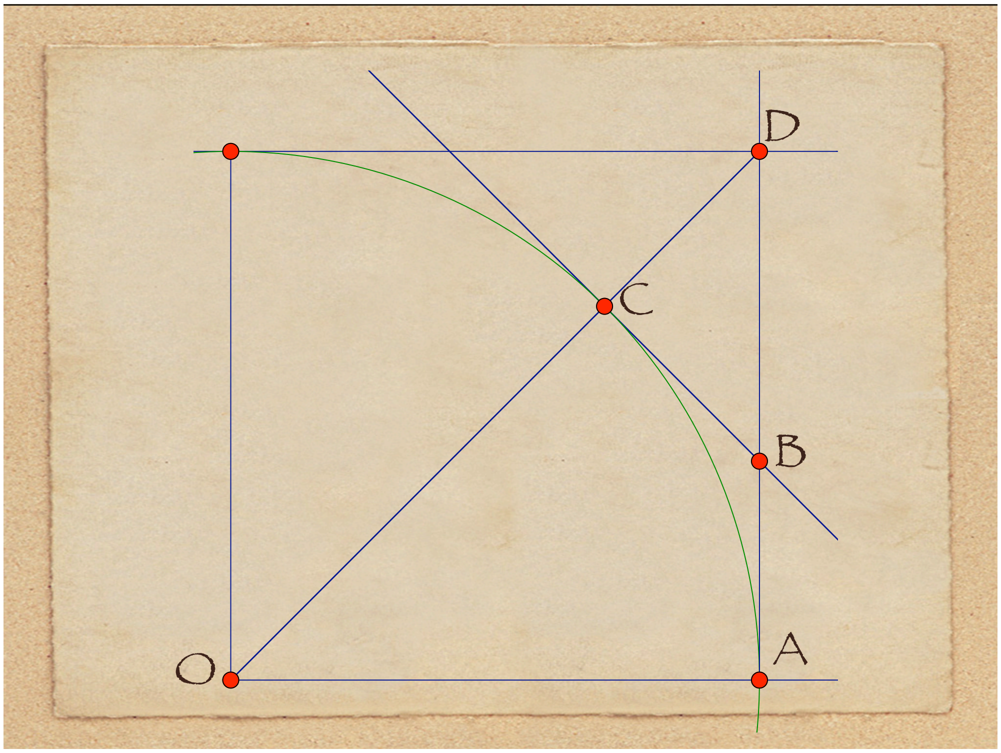
$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = 2.$$

Si la diagonal fos commensurable amb el costat tindríem

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{mu}{nu}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

i tindríem un número racional que elevat al quadrat donaria dos.

El següent dibuix demostra, amb una elegància infinita, que la Diagonal no és commensurable amb el costat, i per tant, que $\sqrt{2}$ no és racional.



En efecte,

1. Tracem l'arc de circumferència de centre O i radi OA.

2. Aquest arc talla la diagonal del quadrat en el punt C.

3. Tracem la perpendicular a la diagonal OD per C. Equival a traçar la tangent a la circumferència anterior per C.

4. Sigui B el punt on aquesta tangent talla el costat AD.

5. Els triangles $\triangle OAB$ i $\triangle OBC$ són iguals, per ser rectangles, compartir la hipotenusa i ser $OC = OA$. En particular, $AB = BC$.

6. El triangle DCB és isòsceles, ja que l'angle CDB val 45 graus, i per tant l'angle CBD ha de valer també 45 graus. En particular $CD = BC$.

7. Tenim doncs, $AB = BC = CD$.

8. $BC < DB$. Per tant $AB < BD$, que implica $AB + AB < AB + BD$. És a dir, $AB < \frac{1}{2}AD$, o $BC < \frac{1}{2}AD$.

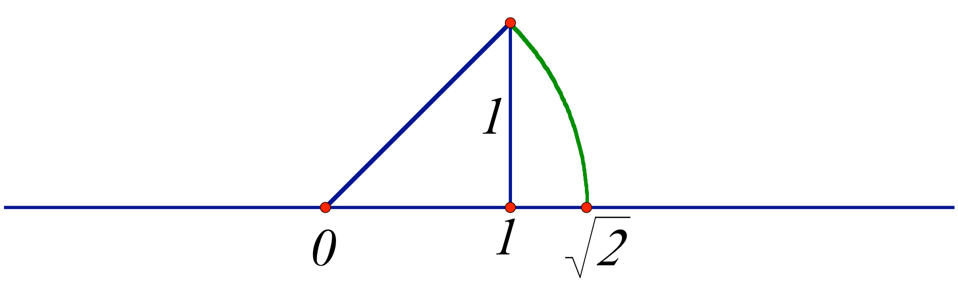
9. La construcció que hem fet en el triangle rectangle isòsceles $\triangle OAD$ la repetirem en el triangle rectangle isòsceles $\triangle BCD$. Aquest dos triangles són semblants i, pel punt anterior, el factor de proporcionalitat és estrictament més petit que $1/2$. En particular, comparant les hipotenuses, tenim $BD < \frac{1}{2}OD$.

10. Si la unitat de mesura u cap un nombre enter de vegades al costat $OA = OC$ i a la diagonal OD, també cap un nombre enter de vegades en la seva diferència $OD - OC = CD$. Per tant, cap un nombre enter de vegades a $AB = CD$. I per tant, cap un nombre enter de vegades a $AD - AB = BD$.

11. Resumint, la unitat de mesura cap un nombre enter de vegades en el catet BC i en la hipotenusa BD del triangle BCD. Tindríem $u < \frac{1}{2}OD$.

12. Repetint aquest procés, a partir ara del triangle $\triangle BCD$, (en lloc del $\triangle OAD$) obtindríem finalment $u < (\frac{1}{2})^n OD$. Com que n és qualsevol, tindríem $u = 0$, el que és una contradicció.

Si representem els racionals sobre una recta de seguida veiem que hi ha punts de la recta que no són racionals. Només cal abatre sobre la recta la diagonal del quadrat de costat 1.



Exponencial

Què vol dir 2^π?

Recordem que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, llavors

$$a^n = a \cdots a, \quad n \text{ vegades}$$

Observem també que si $m \in \mathbb{N}$ llavors

$$(a^n)^m = a^{mn}. \tag{1.1}$$

Això suggereix una notació molt adequada per denotar l'arrel n-èssima d'un nombre real. En efecte, l'arrel n-èssima de a és, per definició, un altre nombre real b tal que $b^n = a$. Si escrivim $b = a^{\frac{1}{n}}$ tenim (usant (1.1))

$$b^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

Tenim doncs

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Anàlogament, el significat natural per a $a^{\frac{m}{n}}$ és el de ser l'arrel n-èssima de a^m. En efecte (usant novament (1.1)),

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

D'aquesta manera *sabem elevar un nombre real positiu a un nombre racional*. Com que els nombres reals es poden aproximar per racionals (simplement quedant-nos amb un nombre finit de les seves infinites xifres decimals) podem definir a^r per a tot nombre real r.

Per exemple, per calcular 2^π, calcularem $2^{3,1}$, $2^{3,14}$, $2^{3,141}$, $2^{3,1415}$, etc. fins tenir una aproximació adequada per als nostres propòsits. Per exemple, la calculadora del meu ordinador només em deixa introduir quinze decimals, de manera que dir que $2^\pi \simeq 8,824977827076$ és una bona aproximació.

Valor absolut

El valor absolut $|x|$ del nombre real x es defineix per

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Per exemple, $|5| = 5$ perquè $5 > 0$ i $|-5| = -(-5) = 5$ perquè $-5 < 0$.

Es pot veure fàcilment que

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \tag{1.2}$$

Per parlar dels nombres reals situats entre dos nombres reals donats, com ara ha passat al considerar els $x \in \mathbb{R}$ que estan entre $-a$ i a, fem servir la notació següent:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.5 *Trobeu els nombres reals x tals que $|3x-2| < 5$*

Solució. Aplicant (1.2) tenim

$$|3x-2| \leq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 \leq 3x-2 \leq 5$$

Sumant 2 a cadascun dels tres termes i dividint-los per 3 obtenim

$$-1 < x < \frac{7}{3}.$$

La resposta és doncs que x compleix la desigualtat donada si i només si $x \in (-1, \frac{7}{3})$. $\diamondsuit$

Aquesta manipulació de desigualtats que acabem de fer suggereix recordar les propietats següents:

$$\begin{aligned}
a > b; c > 0 &\Longrightarrow ac > bc \\
a > b; c < 0 &\Longrightarrow ac < bc \\
a > b > 0 &\Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

1.3 Nombres complexos

Quan, sobre el conjunt $\mathbb{N}$ del nombres naturals,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ens trobem l'equació

$$x + 2 = 1$$

hem de dir: *aquesta equació no té solució.* I problema acabat.

Però, pot ser més interessant plantejar aquesta equació sobre el conjunt $\mathbb{Z}$ del nombres enters

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$$

i dir que la solució de $x + 2 = 1$ és $x = -1$.

Observem que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Així, doncs, amb aquest exemple tant senzill veiem que la frase *aquesta equació no té solució*, és ambigua i que el correcte és dir *aquesta equació no té solució a* $\mathbb{N}$ o bé *aquesta equació sí que té solució a* $\mathbb{Z}$.

Anàlogament, quan, sobre el conjunt $\mathbb{Z}$ del nombres enters, ens trobem l'equació

$$2x = 1$$

hem de dir:*aquesta equació no té solució.* I problema acabat.

Però, pot ser més interessant plantejar aquesta equació sobre el conjunt $\mathbb{Q}$ del nombres racionals

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

i dir que la solució de $2x = 1$ és $x = \frac{1}{2}$.

Observem que[5]

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Anàlogament, quan, sobre el conjunt $\mathbb{Q}$ del nombres racionals, ens trobem l'equació

$$x^2 = 2$$

hem de dir:*aquesta equació no té solució.* I problema acabat.

Però, pot ser més interessant plantejar aquesta equació sobre el conjunt $\mathbb{R}$ del nombres reals $\mathbb{R}$ i dir que la solució de $x^2 = 2$ és $x = \sqrt{2}$.

Observem que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Anàlogament quan, sobre el conjunt $\mathbb{R}$ del nombres reals, ens trobem l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

[5]Quan diem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ és per que estem identificant el nombre enter p amb el nombre racional $\frac{p}{1}$.

hem de dir:*aquesta equació no té solució.* I problema acabat.

Però, per analogia amb tot el que estem dient, és més lògic pensar que hi ha un conjunt més gran que $\mathbb{R}$ on aquesta equació sí que té solució. Efectivament, aquest conjunt serà el conjunt dels nombres complexos, que definirem a la secció següent, i que denotarem per $\mathbb{C}$, de manera que tindrem

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.}$$

El que és increïble, és que aquest conjunt $\mathbb{C}$ pensat especialment per a què l'equació $x^2 + 1$ tingui solució, serà tal que en ell tota equació de segon grau tindrà solució!!

1.4 Definició i operacions elementals. Forma polar

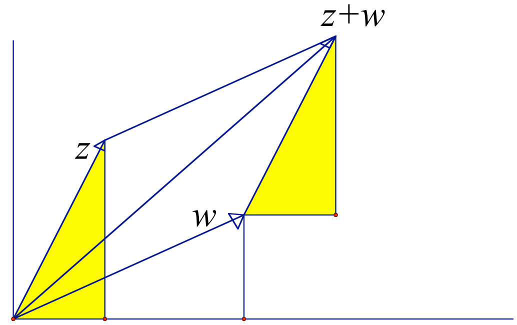
Així com hem pensat $\mathbb{Q}$ com parelles d'enters amb una suma i un producte concret, vegeu pàgina 9, pensarem $\mathbb{C}$ com parelles de reals amb una suma i un producte especials. Concretament

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

amb la suma i el producte següents:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Observem que la suma es realitza per la llei del paral·lelogram: Com que els triangles sombrejats de la figura són iguals, si $z = (a, b)$ i $w = (c, d)$, el vèrtex del paral·lelogram oposat a l'origen és $(a + c, b + d)$.



Quan escrivim $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es perquè estem identificant el nombre real a amb el nombre complex $(a, 0)$. Observem que llavors el producte anterior és el producte usual de nombres reals:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0).$$

El mateix passa amb la suma.

Observem que com a conjunt de punts $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, però amb la suma i el producte anteriors.

Quan multipliquem un número real λ per un nombre complex (a, b) tenim[6]

$$\lambda(a, b) := (\lambda, 0) \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

és a dir, hem multiplicat per λ cada component de (a, b)

Com a conseqüència d'aquesta observació tenim

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

expressió molt simple que dóna gran importància als dos nombres complexos $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Tot nombre complex és *combinació lineal* de $(1, 0)$ i $(0, 1)$.

Donem-los un nom:

$$\begin{aligned} (1,0) &= 1, \quad \text{ja que s'identifica amb el nombre real 1} \\ (0,1) &= i. \end{aligned}$$

D'aquesta manera tot nombre complex (a, b) s'escriu com

$$(a, b) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi.$$

En particular, el producte de complexos es pot recordar molt bé pensant els complexos com polinomis de grau 1 en la variable i i el producte de complexos com el producte de polinomis:

$$\begin{array}{c} a + bi \\ c + di \\ \hline ac + cbi + adi + bdi^2 = ac - bd + (ad - bc)i \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$

[6]La notació := vol dir *igual, per definició.*

Calculem i^2.

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Per tant, l'equació $x^2+1=0$ que no tenia solució a $\mathbb{R}$, sí que té solució a $\mathbb{C}$: $x=\pm i$.

A l'exemple 2.2.7 es veu que no únicament $x^2+1=0$ té solució a $\mathbb{C}$, sinó que qualsevol polinomi de grau 2, $ax^2+bx+c=0$, té solució a $\mathbb{C}$.

Invers d'un nombre complex

Així com tot nombre real diferent de zero té un invers, també és cert que tot nombre complex diferent de zero te invers.

Donat (a,b) busquem (x,y) tals que

$$(a,b)(x,y) = (1,0).$$

Només hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ ay + bx &= 0 \end{aligned}$$

Obtenim que l'invers del nombre complex (a,b) és el nombre complex

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

La manera més còmode de trobar l'invers es la següent:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Només ha calgut multiplicar numerador i denominador pel *conjugat*[7] del nombre complex que volíem invertir.

Forma polar

El *mòdul* $|z|$ del nombre complex $z=a+bi$ es defineix per

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

[7]Vegeu la definició de *conjugat* a la pàgina 29.

i l'argument α de z és l'angle determinat per la condició

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}$$

i tal que

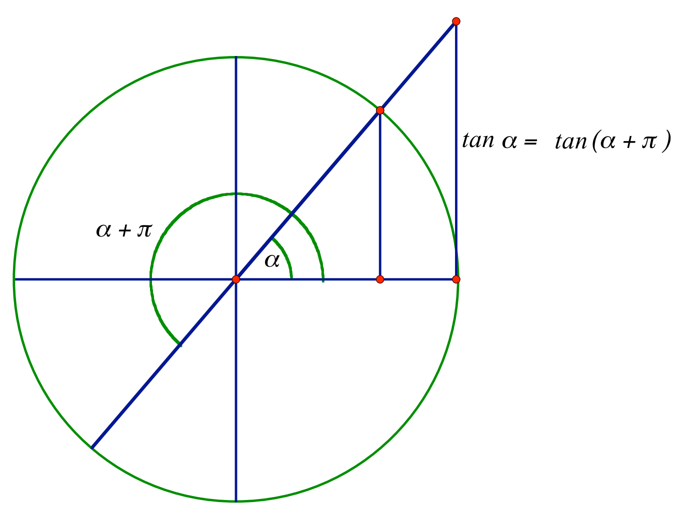
- està en el primer quadrant ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) si $a \geq 0$ i $b \geq 0$.
- està en el segon quadrant ($\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$) si $a \leq 0$ i $b \geq 0$.
- està en el tercer quadrant ($\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$) si $a \leq 0$ i $b \leq 0$.
- està en el quart quadrant ($\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$) si $a \geq 0$ i $b \leq 0$.

  Per exemple, $|1+i| = \sqrt{2}$ i $\tan\alpha = 1$. Com que estem en el primer quadrant, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

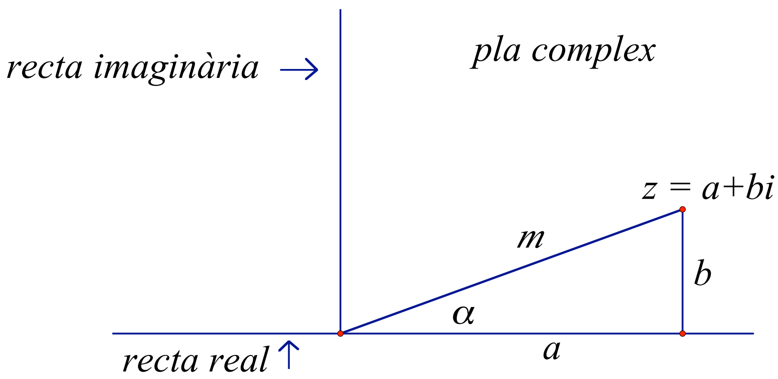
  En canvi, $|-1-i| = \sqrt{2}$ i $\tan\alpha = 1$. Com que estem en el tercer quadrant, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

Aquesta distinció per quadrants es fa justament perquè, com acabem de veure, el fet de conèixer la tangent no és suficient per conèixer l'angle. De fet tenim, per tot α,

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha+\pi).$$



Ara, tal com es veu en el dibuix següent,



entre les components a, b del nombre complex $z = a+bi$, el seu mòdul $m = |z|$ i el seu argument α tenim la relació següent:

$$\begin{array}{rcl} a & = & m\cos\alpha \\ b & = & m\sin\alpha \end{array}$$

De manera que

$$\boxed{z = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

Aquesta manera d'escriure z es coneix com *forma trigonomètrica*. Observem que $z\cos\alpha + i\sin\alpha$ és un complex de mòdul 1.

A vegades, per referir-nos al nombre complex de mòdul m i argument α escriurem simplement

$$\boxed{z = m_\alpha}$$

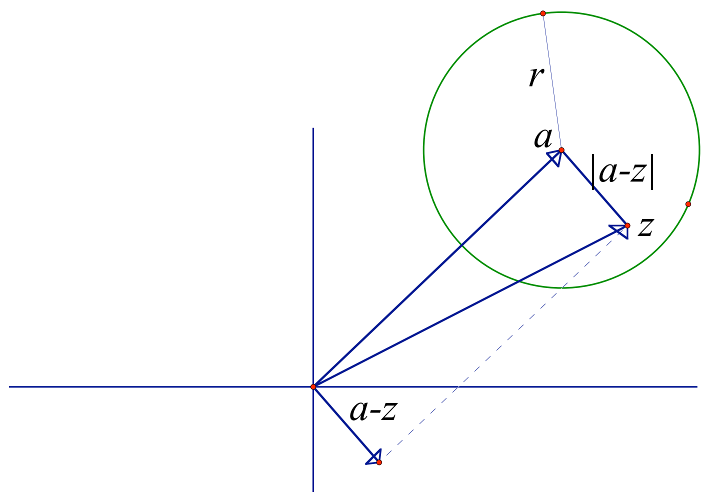
i direm que z està escrit en *forma polar*.

Observem que

$$m_\alpha = \bar{m}_{\bar{\alpha}} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m & = & \bar{m} \\ \alpha & = & \bar{\alpha} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Exemple 1.4.1 *Trobeu els nombres complexos z tal que $|z-a| < r$, on a és un altre nombre complex donat i $r \in \mathbb{R}$.*

Solució. Només cal observar que $|z-a| = d(z,a)$, on $d(z,a)$ vol dir la distància entre els punts $z \in \mathbb{R}^2$ i $a \in \mathbb{R}^2$. Per tant, els punts $z \in \mathbb{R}^2$ que compleixen $|z-a| < r$ són els punts que disten menys que r de a: són els punts interiors a la circumferència de centre a i radi r.



Producte en forma polar

Observem que

$$
\begin{array}{c}
\cos\alpha + i\sin\alpha \\
\cos\beta + i\sin\beta \\
\hline
\cos\alpha\cos\beta + i\cos\beta\sin\alpha + i\cos\alpha\sin\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta = \\
\cos\alpha\cos\beta + i(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta) - \sin\alpha\sin\beta = \\
\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)
\end{array}
$$

Per tant, si $z = m_\alpha = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $w = n_\beta = n(\cos\beta + i\sin\beta)$, tenim

$$zw = mn(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = mn(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

ès a dir,

$$zw = (mn)_{\alpha+\beta}$$

És a dir, per multiplicar complexos en forma polar només hem de multiplicar el mòduls (el mòdul del producte és el producte de mòduls) i sumar els arguments.

En particular, *multiplicar per un complex de mòdul* 1 *i argument* β *és girar un angle igual a* β. En efecte,

$$m_\alpha 1_\beta = m_{\alpha+\beta}$$

1.5 Arrels n-èssimes de nombres complexos

Suposem que el nombre complex z tingui mòdul m i argument α.

Llavors les arrels n-èssimes de $z = m_\alpha$ estan donades per

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{m})_{\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

És a dir, el mòdul de l'arrel n-èssima de z és l'arrel n-èssima del mòdul de z i l'argument és l'argument de z (més $2k\pi$) dividit per n.

En efecte, observem que

$$(m_\alpha)^2 = m_\alpha m_\alpha = (mm)_{\alpha+\alpha} = (m^2)_{2\alpha}.$$

Anàlogament

$$(m_\alpha)^n = (m^n)_{n\alpha}.$$

Així doncs, si donat $w = \bar{m}_{\bar{\alpha}}$ busquem la seva arrel n-èssima, és a dir busquem un complex $z = m_\alpha$ tal que $z^n = w$ ha de ser

$$\begin{aligned} m^n &= \bar{m} \\ n\alpha &= \bar{\alpha} + 2k\pi \end{aligned}$$

És a dir,

$$\begin{aligned} m &= \sqrt[n]{\bar{m}} \\ \alpha &= \frac{\bar{\alpha} + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Observem que el nombre complex que obtenim amb $k = 0$ i $k = n$ és el mateix. En efecte, obtenim $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{n}$ i $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{n} + 2\pi$. El valor de α canvia, però els complexos

$$m_{\frac{\bar{\alpha}}{n}} \quad \text{i} \quad m_{\frac{\bar{\alpha}}{n}+2\pi}$$

són iguals.

El mateix passa si comparem els complexos que obtenim amb $k = 1$ i $k = n + 1$, i en general amb $k = j$ i $k = j + n$. De manera que per calcular arrels n-èssimes aquesta $k \in \mathbb{Z}$ que apareix només la farem variar des de 0 fins a $n - 1$. Posarem $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. A partir d'aquí els valors que obtenim ja són repetits. En particular, *tot nombre complex té n arrels n-èssimes diferents.*

Exemple 1.5.1 *Trobeu*

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Solució. El mòdul del nombre complex -8 és $m = 8$, i l'argument és $\alpha = \pi$. Per tant

$$\sqrt[3]{-8} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\dfrac{\pi + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si $k = 0$,

$$\sqrt[3]{-8} = (2)_{\dfrac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Si $k = 1$,

$$\sqrt[3]{-8} = (2)_{\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2.$$

Si $k = 2$,

$$\sqrt[3]{-8} = (2)_{\dfrac{5\pi}{3}} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}. \quad \Diamond$$

Exemple 1.5.2 *Trobeu*

$$\sqrt[3]{i}.$$

Solució. El mòdul del nombre complex i és $m = 1$, i l'argument és $\alpha = \pi/2$. Per tant

$$\sqrt[3]{i} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si $k = 0$,

$$\sqrt[3]{i} = (1)_{\dfrac{\pi}{6}} = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Si $k=1$,

$$\sqrt[3]{i}=(1)_{\frac{5\pi}{6}}=(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

Si $k=2$,

$$\sqrt[3]{i}=(1)_{\frac{9\pi}{6}}=(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=-i.\quad\lozenge$$

Exemple 1.5.3 *Trobeu*

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}.$$

Solució. Primer trobem el mòdul i l'argument de $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

$$m^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1,\quad \tan\alpha=\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Com que z està en el tercer quadrant,

$$\alpha=\pi+\pi/6=7\pi/6.$$

Per tant,

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=(1)_{\frac{7\pi/6+2k\pi}{3}},\quad k=0,1,2.$$

Si $k=0$,

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=(1)_{\frac{7\pi/6}{3}}=\cos(\frac{7\pi}{18})+i\sin(\frac{7\pi}{18})\simeq 0,3420+0,9396\,i.$$

Si $k=1$,

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=(1)_{\frac{7\pi/6+2\pi}{3}}=\cos(\frac{19\pi}{18})+i\sin(\frac{19\pi}{18})\simeq -0,9848-0,1736\,i.$$

Si $k=2$,

$$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=(1)_{\frac{7\pi/6+4\pi}{3}}=\cos(\frac{31\pi}{18})+i\sin(\frac{31\pi}{18})\simeq 0,6427-0,7660\,i.\quad\lozenge$$

1.6 Fórmula d'Euler

Calcular el sinus i el cosinus d'un angle és molt difícil. Només observem que les fórmules que donen aquestes funcions són respectivament

$$\cos\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Nota: La notació $\cos\alpha$ vol dir cosinus d'un angle de α radians. No vol dir cosinus d'un angle de α graus!!

Hi ha una altre fórmula similar a les anteriors que ens dóna el valor de la funció exponencial e^x, on $e = 2,71727459..$ és la base dels logaritmes neperians.

Concretament tenim

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

que, en particular ens dóna, per a $x = 1$ el valor del nombre e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!}$$

Observem també que les potències de i es van repetint amb període 4:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ \\ i^8 &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

És a dir: $(i)^{2n} = (-1)^n$ i $(i)^{2n+1} = i(-1)^n$

Això permet calcular e^{ix}:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{(n)!}$$

Ara descomponem aquesta suma amb els termes parells i els termes imparells.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{(n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

La fórmula d'Euler és doncs

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x.}$$

Observem que per $x = \pi$ obtenim una de les fórmules més espectaculars de la matemàtica:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

En particular, a partir de l'expressió trigonomètrica d'un nombre complex z tenim

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

on α és l'argument de z.

I el fet de que al multiplicar complexos se sumen les arguments (pàgina 23) és ara trivial:

$$zw = |z|e^{i\alpha}|w|e^{i\beta} = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$$

A més, ara podem definir l'*exponencial complexa* fàcilment.

Primer definim

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi}.$$

Ja sabem, doncs, elevar el nombre e a un complex. Fent la trampa estàndard d'escriure $y = e^{\log y}$, tenim, per a tot $c \in \mathbb{R}$,

$$c^{(a+bi)} = e^{\log c^{(a+bi)}} = e^{(a+bi)\log c},$$

i ja sabem elevar qualsevol número real a un nombre complex. Què vol dir z^w quan $z, w \in \mathbb{C}$?

El conjugat d'un nombre complex

El conjugat del nombre complex $z = a + bi$ és el nombre complex $\bar{z} = a - bi$. És a dir, el conjugat de z és el simètric de z respecte de l'eix real. En particular, el conjugat d'un nombre real és ell mateix. És a dir,

$$z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Les propietats més importants de la conjugació són les següents:

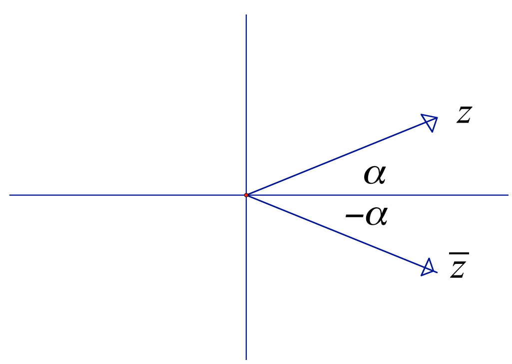
$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w} \\ z\bar{z} &= |z|^2 \end{aligned}$$

Les dues primeres ens diuen que conjugar "es porta bé" amb la suma i el producte: el conjugat de la suma és la suma de conjugats i el conjugat del producte és el producte de conjugats. Es deixa la comprovació com a exercici.

La tercera es demostra fàcilment:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Observem finalment que si usem la notació exponencial $z = |z|e^{i\alpha}$ llavors $\bar{z} = |z|e^{-i\alpha}$, ja que conjugar no canvia el mòdul i canvia α per $-\alpha$.



Capítol 2

Polinomis

2.1 Introducció

Un polinomi de grau 1 és una expressió de la forma

$$a_0 + a_1 x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R},$$

on x és només un símbol. Suposem $a_1 \neq 0$.

Un polinomi de grau 2 és una expressió de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

on x, x^2 són només símbols. Suposem $a_2 \neq 0$.

I en general, un polinomi de grau n és una expressió de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

on $x, x^2, \ldots x^n$ són només símbols. Suposem $a_n \neq 0$.

Interpretant x com una variable real els polinomis es poden pensar com funcions, és a dir, com aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Per exemple

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2+3x \end{array}$$

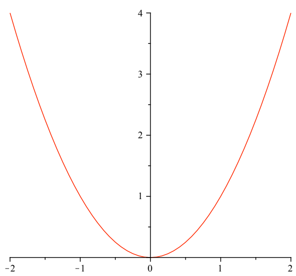
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2+3x+x^2 \end{array}$$

on ara, x^2 ja no és només un símbol, sinó que vol dir, com sempre $x \cdot x$.

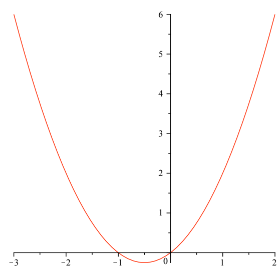
Per tant té sentit parlar de la gràfica d'un polinomi. Vol dir la gràfica de la funció $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Si $n = 1$ sabem que aquesta gràfica és una recta, si $n = 2$ és una paràbola d'eix paral·lel a l'eix de les y, etc.

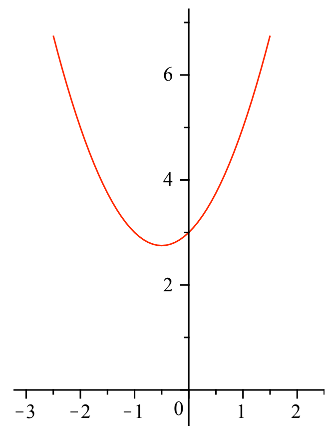
Per exemple



$y = x^2$



$y = x^2 + x$



$y = x^2 + x + 3$

Definició 2.1.1 *Direm que $c \in \mathbb{R}$ és un* zero*, o una arrel, del polinomi $p(x)$ si $p(c) = 0$.*

Per exemple, $x = 3$ és un zero del polinomi $p(x) = 6x - 18$, ja que $p(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$. També tenim que $x = 2$ és un zero de $p(x) = x^2 - 5x + 6$ ja que $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$.

Des del punt de vista de la gràfica de la funció els zeros són les abscisses dels punts en que la gràfica talla l'eix de les x.

En els tres dibuixos anteriors tenim doncs que $y = x^2$ té un zero en $x = 0$ (que diem que és un zero doble), $y = x^2 + x$ té dos zeros, en $x = 0$ i $x = -1$ respectivament, i $x^2 + x + 3$ no té cap zero.

2.2 Factorització de polinomis

Teorema 2.2.1 (Teorema fonamental de l'àlgebra) *Tot polinomi de grau n, amb coeficients reals o complexos, té n arrels complexes (contades amb multiplicitat).*[1]

[1] La tesi doctoral de C. F. Gauss, un dels més grans matemàtics de tots els temps, va consistir justament en donar una demostració d'aquest teorema. Posteriorment, al llarg

Per exemple x^2+1 té les arrels complexes $\pm i$ cadascuna d'elles amb multiplicitat 1; en canvi el polinomi de grau 6, $(x^2+1)^3$ té l'arrel i amb multiplicitat 3 i l'arrel $-i$ també amb multiplicitat 3.

En canvi no és cert que un polinomi de grau n amb coeficients reals tingui n arrels reals, com posa de manifest l'anterior exemple x^2+1.

Teorema 2.2.2 *Les arrels enteres d'un polinomi amb coeficients enters són divisors del terme independent.*

Demostració. Considerem el polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, amb $a_i \in \mathbb{Z}$. Sigui c una arrel entera de $p(x)$, és a dir, $c \in \mathbb{Z}$ i $p(c) = 0$. Així

$$a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n = 0,$$

i per tant

$$a_0 + c(a_1 + a_2c + \cdots + a_nc^{n-1}) = 0,$$

o, equivalentment,

$$a_0 = -c(a_1 + a_2c + \cdots + a_nc^{n-1}).$$

Com el terme entre parèntesi és un número enter, a_0 és un múltiple de c, o, el que és el mateix, c divideix a_0. □

Exemple 2.2.3 *Trobeu les arrels enteres de* $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

Solució. Els divisors de -8 són $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$.

$$\begin{aligned}
p(1) &= 0 \\
p(-1) &= 10 \\
p(2) &= -8 \\
p(-2) &= 0 \\
p(4) &= 0 \\
p(-4) &= \\
p(8) &= \\
p(-8) &=
\end{aligned}$$

de la seva vida, va donar encara un parell de demostracions més. De fet, la primera demostració de Gauss, de 1799, tenía un petit problema topològic que va ser notat per Ostrowski el 1920 i estudiat per Smale el 1981. Però Gauss va donar dues proves diferents més el 1826 i una altre versió de la seva prova original el 1849.

Els últims tres valors $p(-4), p(8), p(-8)$ no cal calcular-los ja que hem trobat ja tres arrels enteres, $1, -2, 4$ i sabem, pel teorema fonamental de l'àlgebra que no n'hi pot haver més. $\Diamond$

Exemple 2.2.4 *Trobeu les arrels enteres de* $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Solució. Els divisors de -1 són ± 1. $p(1) = 0$ i $p(-1) = -4$. Per tant, aquest polinomi només té una arrel entera. Això vol dir que les altres dues arrels que té aquest polinomi són reals o complexes. $\Diamond$

Teorema 2.2.5 *Si el nombre complex z és arrel d'un polinomi amb coeficients reals $p(x)$, llavors $\bar{z}$ (el conjugat de z) també és arrel de $p(x)$.*

Demostració. Només cal recordar que el conjugat de la suma de complexos és igual a la suma dels conjugats ($\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$), i el conjugat del producte de complexos és igual al producte dels conjugats ($\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$). Recordem també que el conjugat d'un nombre real és ell mateix (el conjugat de $z = a+bi$ és $\bar{z} = a - bi$, i si z és real és que $b = 0$).

Així, conjugant la igualtat $p(z) = 0$, obtenim

$$\begin{aligned}
\overline{p(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\bar{z} + \overline{a_2}\overline{z^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{z^n} \\
&= a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \cdots + a_n\bar{z}^n \\
&= p(\bar{z}) = \bar{0} = 0.
\end{aligned}$$

Així doncs, les arrels complexes dels polinomis amb coeficients reals estan aparellades: si apareix una, apareix també la seva conjugada.

Sabem que hi ha polinomis de grau parell i coeficients reals (per exemple, $x^2 + 1$) que no tenen cap arrel real. No obstant tenim:

Corol·lari 2.2.6 *Tot polinomi amb coeficients reals i de grau imparell té almenys una arrel real.*

Per exemple, si tenim un polinomi de grau tres i coeficients reals, i aquest polinomi té l'arrel complexa z, també té l'arrel $\bar{z}$. Si z no és real ($z = a + bi$ amb $b \neq 0$), $\bar{z}$ tampoc ho és.

Però com que el polinomi ha de tenir tres arrels complexes, i de moment en tenim dues (z i $\bar{z}$), forçosament la que falta ha de ser real (si fos complexa i no real, tindríem també la seva conjugada i el polinomi de grau tres tindría 4 arrels).

De fet, en un polinomi de grau tres (mateix argument per a qualsevol grau imparell) és clar que el terme x^3 creix molt més ràpid que els termes en x^2 i x, de manera que quan x tendeix a infinit el polinomi també tendeix a infinit, i quan x tendeix a menys infinit, el polinomi també tendeix a menys infinit. Així, un polinomi de grau tres (qualsevol grau imparell) pren valors positius (quan x és gran i positiu) i negatius (quan x es gran però negatiu), per tant ha de prendre entre mig el valor zero. Això és una altre demostració del corol·lari 2.2.6.

Observació 2.2.7 *Observeu que per a polinomis de grau dos el teorema 2.2.5 és evident, ja que les arrels del polinomi $p(x) = ax^2 + bx + c$ són*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, aquest polinomi té una arrel real doble.
Si $b^2 - 4ac > 0$, aquest polinomi té dues arrels reals diferents.
Si $b^2 - 4ac < 0$, aquest polinomi té les dues arrels complexes conjugades

$$\frac{-b}{2a} \pm i\frac{m}{2a}, \quad \textit{on} \quad b^2 - 4ac = -m^2. \quad \Diamond$$

L'expressió de x en funció dels coeficients es dedueix fàcilment usant el mètode de completació de quadrats. Concretament

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0.$$

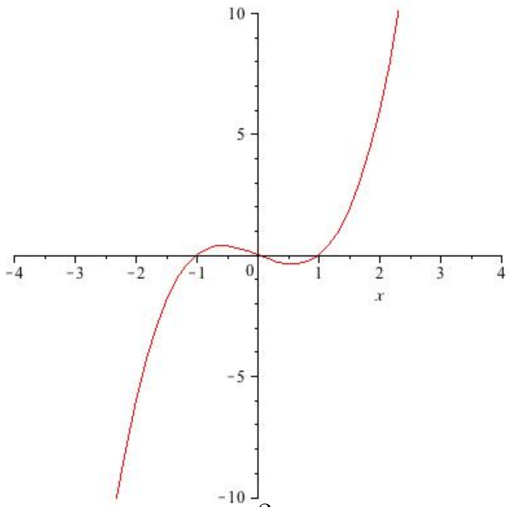
Per tant,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

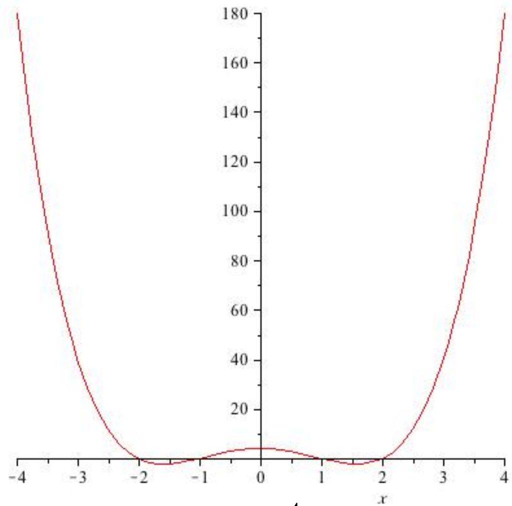
Per tant

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

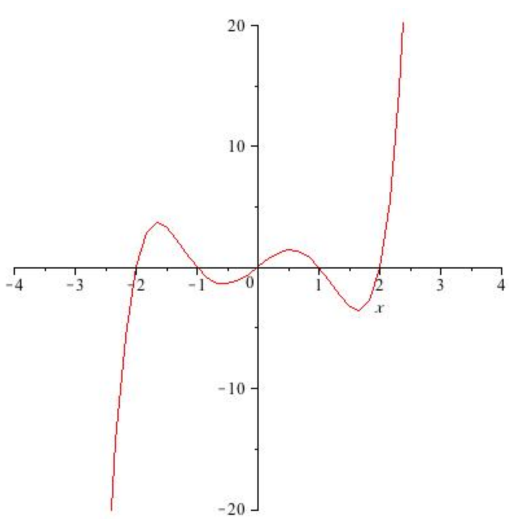
A les següents figures es veu com els polinomis de grau 3 i 5, encara que es traslladin amunt o avall, sempre tallaran a l'eix de les x, en canvi, els polinomis de grau 4 i 6, si es desplaçant cap amunt suficientment deixen de tallar l'eix de les x.



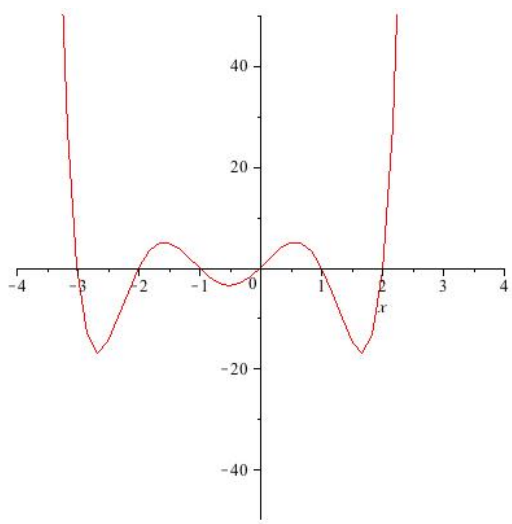
grau 3



grau 4



grau 5



grau 6

Teorema 2.2.8 (Algorisme d'Euclides) *Donats dos polinomis $D(x)$ (dividend) i $d(x)$ (divisor), amb* $\text{grau}\, D(x) \geq \text{grau}\, d(x)$*, existeixen dos únics polinomis $q(x)$ (quocient) i $r(x)$ (residu) amb* $\text{grau}\, r(x) < \text{grau}\, d(x)$ *tals que*

$$\boxed{D(x) = d(x)q(x) + r(x)}$$

Si, en aquesta fórmula $r(x) = 0$, diem que $D(x)$ és *divisible* per $d(x)$.

Exemple 2.2.9 *Dividiu* $D(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 25$ *entre* $d(x) = x - 3$

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & +4x^2 & -11x & -25 & \underline{|\ x-3 \qquad\quad} \\
\underline{-x^3} & \underline{+3x^2} & & & x^2+7x+10 \\
 & 7x^2 & -11x & & \\
 & \underline{7x^2} & \underline{+21x} & & \\
 & & 10x & -25 & \\
 & & \underline{-10x} & \underline{+30} & \\
 & & & 5 &
\end{array}
$$

Per tant $q(x) = x^2 + 7x + 10$ i $r(x) = 5$. Tenim doncs

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 25 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10) + 5$$

Observem que $D(3) = 5$.

Com que el residu és diferent de zero es diu que aquest dos polinomis no són divisibles. $\Diamond$

Exemple 2.2.10 *Dividiu* $D(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *entre* $d(x) = x - 3$

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -6x^2 & +11x & -6 & \underline{|\ x-3 \qquad\quad} \\
\underline{-x^3} & \underline{+3x^2} & & & x^2-3x+2 \\
 & -3x^2 & +11x & & \\
 & \underline{3x^2} & \underline{-9x} & & \\
 & & 2x & -6 & \\
 & & \underline{-2x} & \underline{+6} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Per tant $q(x) = x^2 - 3x + 2$ i $r(x) = 0$. Tenim doncs

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 3)(x^2 - 3x + 2)$$

Observem que $D(3) = 0$.

Com que el residu és zero es diu que aquest dos polinomis són divisibles. $\Diamond$

Teorema 2.2.11 *El polinomi $p(x)$ és divisible pel polinomi $x-a$ si i només si $p(a)=0$.*

Demostració. L'algorisme d'Euclides aplicat als polinomis $p(x)$ (dividend) i $x-a$ (divisor) diu que

$$p(x) = (x-a)q(x) + r(x), \quad \text{amb } \operatorname{grau} r(x) < \operatorname{grau}(x-a).$$

Com que el grau de $x-a$ és 1, això vol dir que $r(x)$ té grau zero, és a dir és una constant, que denotarem per r. Així tenim

$$p(x) = (x-a)q(x) + r.$$

Substituint x per a tenim

$$p(a) = (a-a)q(a) + r = r.$$

Per tant, $p(a)=0$ si i només si el residu r de dividir $p(x)$ per $x-a$ és zero. $\square$

Per exemple, $x^{45}+x^{12}+x^2-3$ és divisible per $x-1$ ja que $1^{45}+1^{12}+1^2-3 = 0$.

Teorema 2.2.12 *Tot polinomi de grau n i coeficients complexos (en particular, enters, racionals o reals), factoritza com a producte de n polinomis de grau 1 amb coeficients complexos. És a dir,*

$$p(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\dots\cdot(x-a_n),$$

amb $a_i \in \mathbb{C}$. Aquests a_i no són forçosament diferents entre ells.

Demostració. Pel teorema fonamental de l'àlgebra sabem que $p(x)$ té n arrels. Siguin aquestes arrels $a_1,\dots,a_n$. Pel teorema 2.2.11 sabem que $p(x)$ és divisible per $(x-a_1)$. Tindrem doncs,

$$p(x) = (x-a_1)q(x).$$

Com que $p(a_2)=0$, ha de ser $q(a_2)=0$, i per tant, pel mateix teorema 2.2.11,

$$q(x) = (x-a_2)t(x).$$

En particular

$$p(x) = (x-a_1)(x-a_2)t(x).$$

Repetint el procés amb $a_3, a_4, \ldots$ obtenim el resultat. $\square$

Per exemple

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$
$$x^3 - ix^2 + x - i = (x - i)(x - i)(x + i)$$

Teorema 2.2.13 *Tot polinomi de grau n i coeficients reals, factoritza com a producte d'uns quants polinomis de grau 1 amb coeficients reals i uns quants polinomis de grau 2 amb coeficients reals. És a dir,*

$$p(x) = (x - a_1) \cdot \cdots \cdot (x - a_k) \cdot ((x - b_{k+1})^2 + c_{k+1}^2) \cdot \cdots \cdot ((x - b_{k+r})^2 + c_{k+r}^2)$$

amb $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Aquests a_i, b_i, c_i no són forçosament diferents entre ells.

Demostració. Només cal observar que si a_i és arrel de $p(x)$, llavors $\overline{a_i}$ també ho és. Així, el termes complexos que apareixen en la factorització del $p(x)$ donada pel teorema 2.2.12 es poden agrupar de dos en dos (si apareix l'arrel $z = b + ci$ també apareix l'arrel $\bar{z} = b - ci$) i tenim productes de tipus

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - b - ci)(x - b + ci) = (x - b)^2 + c^2. \quad \square$$

Observem que $k + 2r = n$.

Exemple 2.2.14 *Factoritzeu sobre els reals i sobre els complexos el polinomi $x^4 + 1$.*

Solució. Trobem les seves arrels. Hem de resoldre $x^4 + 1 = 0$, és a dir

$$x = \sqrt[4]{-1}.$$

Com que -1 té mòdul $m = 1$ i argument $\alpha = \pi$, tenim

$$\sqrt[4]{1_\pi} = 1_{\frac{\pi + 2k\pi}{4}}.$$

$$k = 0. \qquad \sqrt[4]{1_\pi} = 1_{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

$$k = 1. \qquad \sqrt[4]{1_\pi} = 1_{3\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i).$$

$$k = 2. \qquad \sqrt[4]{1_\pi} = 1_{5\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i).$$

$$k = 3. \qquad \sqrt[4]{1_\pi} = 1_{7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Així

$$\begin{aligned} x^4+1 &= (x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))\cdot(x-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)) \\ &\quad (x+\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i))\cdot(x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)), \end{aligned}$$

que és la factorització de x^4+1 com a producte de 4 polinomis de grau 1 i coeficients complexos. Agrupant les arrels conjugades, és a dir, multiplicant el primer factor amb el quart i el segon amb el tercer, tenim

$$\begin{aligned} x^4+1 &= \left((x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}\right)\left((x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}\right) \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \quad \Diamond \end{aligned}$$

Exemple 2.2.15 *Factoritzeu sobre els reals i sobre els complexos el polinomi* $p(x)=x^3-2x^2+4x-8$.

Solució. Trobem les seves arrels. Comencem per mirar si aquest polinomi té alguna arrel entera. Si és així, ha de ser un divisor del terme independent, és a dir $\pm1, \pm2\pm4, \pm8$. Tenim $p(2)=0$, i per tant $x=2$ és arrel entera d'aquest polinomi. Els valors $p(1), p(-1), p(-2), p(4), p(-4), p(8), p(-8)$ són tots diferents de zero, de manera que aquest polinomi no té més arrels enteres. Les dues que falten són doncs reals o imaginàries.

Sabem, pel teorema 2.2.11, que $p(x)$ és divisible per $(x-2)$. Fem aquesta divisió amb l'algorisme standard.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \underline{|0} \end{array}$$

Això vol dir $x^3-2x^2+4x-8=(x^2+4)(x-2)$.

Així, les arrels de $p(x)$ són $x=2$ i les arrels de x^2+4, que són $x=\pm2i$.

Factorització sobre $\mathbb{R}$:

$$p(x)=(x^2+4)(x-2)$$

Factorització sobre $\mathbb{C}$:

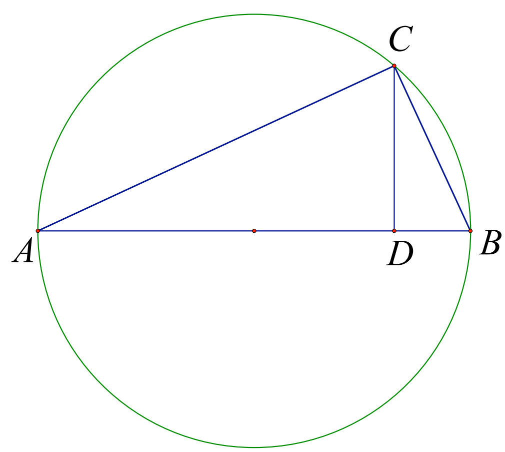
$$p(x)=(x-2i)(x+2i)(x-2) \quad \Diamond$$

Exemple 2.2.16 *Construïu un polinomi que tingui les arrels* $1, 2, 3$ *amb multiplicitat* 1 *i* 4 *amb multiplicitat* 7.

Solució. $p(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^7$, on a és qualsevol constant. $\Diamond$

2.3 Solució de l'equació de segon grau amb regla i compàs

Utilitzarem el teorema de l'altura, que diu que *l'altura d'un triangle rectangle, es mitja proporcional entre els dos segments que determina sobre la hipotenusa.* Òbviament es refereix a l'altura perpendicular ala hipotenusa. En el dibuix l'angle recte és l'angle en el vèrtex C, $\angle ACB$, ja que un angle inscri en una circumferència val la mitat de l'arc que abraça, i aquest abraça $180°$, ja que AB és un diàmetre.



Es compleix

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$$

De fet, el primer quocient és la tangent de l'angle $\angle CAD$ i el segon es la tangent de l'angle $\angle DCB$. Però aquesta angles són iguals perquè tenen els costats respectivament perpendiculars.

Volem resoldre l'equació de segon grau

$$x^2 - px + q = 0, \quad p, q \geq 0.$$

Si les arrels són x_1 i x_2 tenim

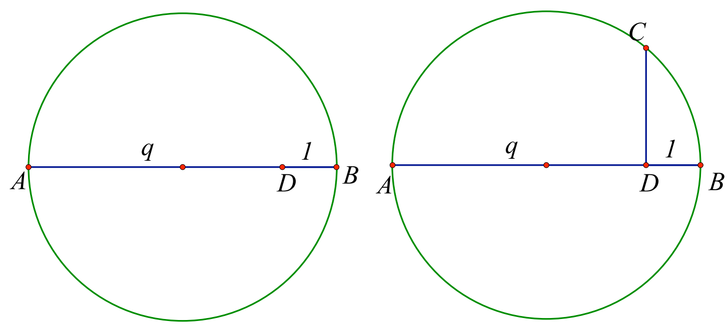
$$x^2 - px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

i per tant

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned}$$

De fet, aquestes dues condicions caracteritzen les arrels.

Primer observem que podem construir fàcilment $\sqrt{q}$. En efecte, només cal posar la unitat al costat de q i considerar la circumferència de diàmetre $q + 1$.



Tindrem $AD = q$, $DB = 1$. Tracem la perpendicular a AB per D fins tallar la circumferència. Aplicant el teorema de l'altura tenim

$$\frac{CD}{q} = \frac{1}{CD},$$

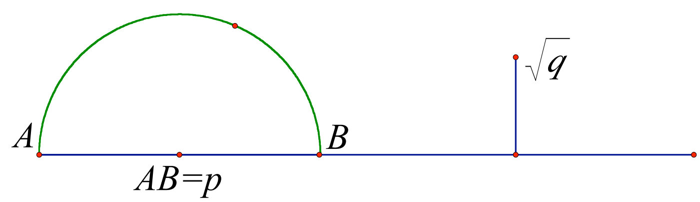
és a dir

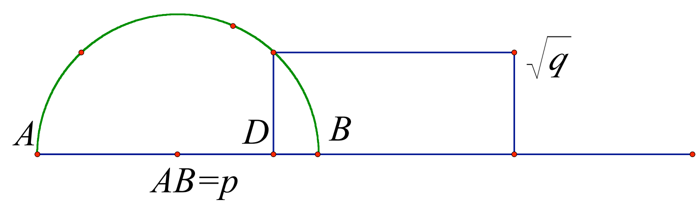
$$CD \cdot CD = q,$$

o, equivalentment

$$CD = \sqrt{q}.$$

Ara ja podem resoldre $x^2 - px + q = 0$. Construïm un semicercle de diàmetre p i perpendicular a ell, en qualsevol punt, hi coloquem el segment $\sqrt{q}$. Vegeu la primera part del dibuix.





A continuació tracem la paral·lela al diàmetre AB, a distància $\sqrt{q}$. Des del punt on aquesta paral·lela talla la circumferència baixem la perpendicular a AB. Obtenim així un punt D. Les dues arrels de l'equació donada són $x_1 = AD$ i $x_2 = DB$.

En efecte, $x_1 + x_2 = p$ i $x_1 x_2 = q$.

Capítol 3

Sistemes lineals i matrius

3.1 Sistemes d'equacions lineals. El mètode del pivot

L'objectiu és resoldre sistemes del tipus

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

Operacions elementals. Són operacions sobre aquestes equacions que no modifiquen la solució del sistema. En considerarem tes:

1. Podem permutar equacions.
2. Podem multiplicar qualsevol de les equacions per un número real diferent de zero.
3. Podem canviar una de les equacions per ella mateixa més un múltiple qualsevol d'una de les altres.

Això vol dir que el sistema donat i, per exemple, els sistemes

$$\begin{aligned} x - 4y + 5z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 9 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

(obtingut permutant dues equacions),

$$\begin{aligned}
2x - 3y + z &= 9 \\
100x - 400y + 500z &= 200 \\
5x - 6y - z &= 1
\end{aligned}$$

(obtingut multiplicant una equació per un número), i

$$\begin{aligned}
2x - 3y + z &= 9 \\
x - 4y + 5z &= 2 \\
5x - 6y - z + 4(x - 4y + 5z) &= 1 + 4 \cdot 2
\end{aligned}$$

(obtingut sumant a la tercera equació un múltiple de la segona), tenen les mateixes solucions.

Que les operacions elementals 1 i 2 no canvien les solucions del sistema és evident. Per veure clar que la operació 3 tampoc les canvia podem esquematitzar el sistema (passant el terme independent a l'esquerra i denotant per E_i l'equació i) com

$$\begin{aligned}
E_1 &= 0 \\
E_2 &= 0 \\
E_3 &= 0
\end{aligned}$$

i el sistema que obtindríem amb la tercera operació elemental seria

$$\begin{aligned}
E_1 &= 0 \\
E_2 &= 0 \\
E_3 + \lambda E_2 &= 0
\end{aligned}$$

Escrit així es veu evident que qualsevol solució del primer sistema ho és del segon i recíprocament.

Una manera simplificada de recordar el sistema donat és escriure simplement

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 1 & 9 \\
1 & -4 & 5 & 2 \\
5 & -6 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

3.2 Matrius esglaonades

Les matrius són caixes de números com la que acabem d'escriure. Una matriu $m \times n$ és una caixa de números amb m files i n columnes.

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 89 \end{pmatrix}$$

és una matriu 2×2,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -8 \\ 10 & 90 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

és una matriu 4×2, i

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

és una matriu 3×1.

Una manera útil d'escriure les matrius és

$$A = (a_{ij})$$

on a_{ij} és el terme que està a la fila i, columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definició 3.2.1 *Una matriu està esglaonada quan a sota del primer element no nul de cada fila, i sota dels anteriors, tots els termes són zero. El primer terme no nul de cada fila es diu* pivot.

Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 89 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

són matrius esglaonades.

També

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

és esglaonada, en canvi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

no és esglaonada.

Quan una matriu està esglaonada, podem "baixar l'escala" formada pels pivots:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aquesta escala pot tenir replans, com per exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La gràcia de les matrius esglaonades es que quan la matriu associada a un sistema està esglaonada el sistema es resol trivialment començant per la última fila.

Per exemple, el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + z &= 0 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

té solució (començant per la última equació): $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

La matriu associada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

està esglaonada.

Mètode per resoldre un sistema d'equacions. Donat un sistema d'equacions li associarem una matriu. A continuació l'esglaonarem. Els sistema associat a aquesta matriu esglaonada té les mateixes solucions que l'inicial (esglaonar no canvia les solucions) però té l'avantatge que es resol trivialment començant per la darrera equació.

Exemple 3.2.2 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

Matriu associada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

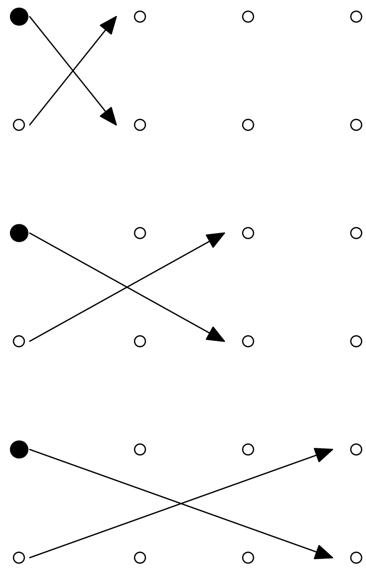
Primer pas. Mirem si el terme a_{11} és diferent de zero. En aquest cas $a_{11} = 2$. Com que és diferent de zero l'agafem com a pivot. Això vol dir de moment només que fiquem el 2 dins un quadradet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

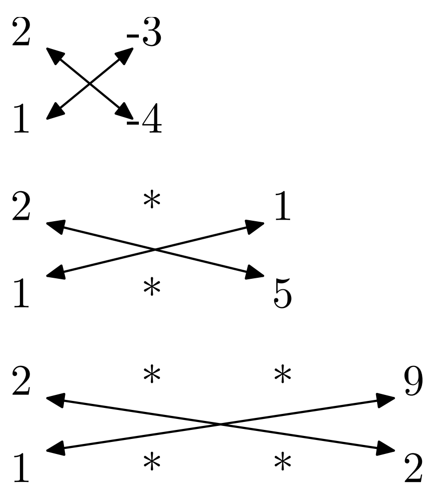
Segon pas. Posem zeros a sota el pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Tercer pas. Canviem cada element pel determinant determinat per ell i el pivot, seguint l'esquema següent



En el nostre cas



Així, on hi havia el -4 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = 2(-4) - 1(-3) = -5.$

On hi havia el 5 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 9.$

On hi havia el 2 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = -5.$

Observem que el que hem fet es canviar la segona fila F_2 per $a_{11}F_2 - a_{21}F_1 = 2F_2 - 1F_1$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

I ara canviem la tercera fila, pivotant també amb el $\boxed{2}$:

On hi havia el -6 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = 2(-6) - 5(-3) = 3$.

On hi havia el -1 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 5 = -7$.

On hi havia el 1 ara hi va $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 9 \cdot 5 = -43$.

Tenim doncs,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -7 & -43 \end{array}\right)$$

Observem que el que hem fet es canviar la tercera fila F_3 per $a_{11}F_3 - a_{31}F_1 = 2F_3 - 5F_1$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

Repetim tot el procés però agafant ara com a nou pivot el -5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -7 & -43 \end{array}\right)$$

Posem 0 a sota del pivot i canviem el -7 per $\begin{vmatrix} \boxed{\text{-5}} & 9 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 8$, i canviem el -43 per $\begin{vmatrix} \boxed{\text{-5}} & -5 \\ 3 & -43 \end{vmatrix} = 230$. Tenim doncs

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 230 \end{array}\right).$$

Observem que el que hem fet es canviar la tercera fila F_3 per $a_{22}F_3 - a_{32}F_2 = -5F_3 - 3F_2$. Això vol dir que la matriu que hem obtingut s'obté de la inicial per operacions elementals.

Per tant, el sistema donat és equivalent a

$$\begin{aligned} 2x-3y+z &= 9 \\ -5y+9z &= -5 \\ 8z &= 230 \end{aligned}$$

que es resol trivialment començant per la darrera fila: $z=\frac{230}{8}, y=\frac{211}{4}, x=\frac{277}{4}$. $\Diamond$

Exemple 3.2.3 *Estudieu, segons els valors del paràmetre a, el sistema*

$$\begin{aligned} 3x-2y+z &= 1 \\ 3x-5y+7z &= -2 \\ 3x-y+(11-3a^2)z &= a+4 \end{aligned}$$

Solució. La matriu associada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 11-3a^2 & a+4 \end{array}\right)$$

Com que el terme a_{11} és 3, que és diferent de zero, l'agafem com a pivot, i tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

i ara trovem els termes $*$ pel mètode del pivot. Obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 3 & 30-9a^2 & 3a+9 \end{array}\right)$$

Com que el terme a_{22} és diferent de zero (-9) pivotem agafant-lo a ell com a nou pivot. Obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 81a^2-324 & -81a^2+54a+432 \end{array}\right)$$

Si $81a^2 - 324 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 2$, tenim tres pivots i per tant podem resoldre fàcilment a partir de la tercera equació. Es diu que el sistema és *compatible determinat*, ja que té una única solució.

Si $a = 2$, la última fila de la última matriu és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 216 \end{pmatrix}$, que corresppon a l'equació $0x + 0y + 0z = 216$. Com no hi ha valors x, y, z que compleixin aquesta equació, el sistema inicial tampoc té solució. Es diu que el sistema es *incompatible*.

Si $a = -2$, la última fila de la última matriu és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que corresppon a l'equació $0x+0y+0z = 0$. Aquesta equació no imposa restriccions a x, y, z i podem, doncs, prescindir d'ella. El sistema es redueix a

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ -9y + 18z &= -9 \end{aligned}$$

que es resol fàcilment començant per la segona equació i pensant que z pot prendre qualsevol valor. Obtenim $y = 1 + 2z$, que substituint a la primera equació dóna $x = 1 + z$. Es diu que el sistema és *compatible indeterminat*, ja que té moltes solucions (una per a cada valor de z). $\diamondsuit$

Teorema 3.2.4 *Tota matriu es pot esglaonar, usant operacions elementals.*

Demostració. Permutant si cal les files sempre podem arribar a tenir la matriu escrita amb el terme $a_{11} \neq 0$. Pel mètode del pivot que acabem de veure, arribarem a una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots \\ 0 & * & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots \end{pmatrix}$$

i ara continuarem el procés agafant com a nou pivot el nou terme a_{22}. Com que aquesta matriu és més petita que la inicial en número finit de passos acabem. $\square$

Teorema 3.2.5 (Rouché-Frobenius) *Sigui $(A|B)$ la matriu associada a un sistema d'equacions (A és la matriu dels coeficients de les incògnites i B és la columna dels termes independents). Sigui $(A'|B')$ la matriu que obtenim esglaonant $(A|B)$.*

- *Si el número de files no nul·les de A' és igual al número de files no nul·les de $(A'|B')$ el sistema és compatible amb $n-r$ graus de llibertat, on $n =$ número de incògnites i $r =$ número de pivots.*

- *Si el número de files no nul·les de A' és diferent al número de files no nul·les de $(A'|B')$ el sistema és incompatible.*

Demostració. Només cal imaginar-se la darrera fila no nul·la de $(A'|B')$. Si té l'aspecte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & a \end{array}\right), \quad a \neq 0$$

el sistema és clarament incompatible. Si és de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \bullet & * & \dots & * & b \end{array}\right), \quad b \in \mathbb{R}$$

on $\bullet$ és el pivot, és clar que totes les variables coresponents als $*$ queden lliures. Per contar quants $*$ hi ha, observem que $n =$número de variables $=$ columnes de $A =$ columnes de A'. I termes davant dels $*$ n'hi ha tants com pivots. Per tant hi ha $n-r$ variables lliures. $\Box$

Per exemple, si tenim

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t + 5u &= 6 \\ y + z + t + u &= 8 \end{aligned}$$

que és un sistema ja esglaonat amb darrera fila

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \bullet & * & * & * & b \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

tenim $n = 5$ variables, $r = 2$ pivots (el coeficient de la x de la primera equació i el coeficient de la y de la segona), i per tant $n - r = 3$ graus de llibertat. Correspon a dir que les variables z, t, u són lliures (poden prendre qualsevol valor) i llavors

$$\begin{aligned} x &= 6 - 2y - 3z - 4t - 5u \\ y &= 8 - z - t - u \end{aligned}$$

3.3 Producte de matrius

Les matrius es multipliquen *multiplicant files per columnes*. Aquest producte de files per columnes es fa com com el producte escalar de vectors.

Recordem que el producte escalar es defineix com

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad \text{a } \mathbb{R}^2$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \quad \text{a } \mathbb{R}^3$$

etc.

Per exemple, per multiplicar les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{matrix}} & \begin{matrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{matrix} & \begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 16 = 84.$$

A continuació posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{matrix}} & \begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & \bullet & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 17 = 90.$$

A continuació posarem

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 13 \\ 16 \end{matrix} & \begin{matrix} 11 \\ 14 \\ 17 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & \bullet \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

i

$$\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = 1 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 18 = 96.$$

I ara repetiríem el procés per a les files dues i tres.

En general, *el terme a_{ij} de la matriu producte (és a dir, el terme que està a la fila i columna j) sobté multiplicant la fila i de la primera matriu amb la columna j de la segona.*

Per exemple el terme a_{33} de la matriu pructe val

$$a_{33} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = 366.$$

Finalment obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 342 & 366 \end{pmatrix}$$

Propietats del producte de matrius

Només destaquem que *no és commutatiu* i que *no es pot simplificar.*

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

en canvi

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

I podem tenir $AB = AC$ amb $B \neq C$ (no podem simplificar). Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una altra observació important és que cada columna de la matriu producte s'obté multiplicant la matriu de l'esquerra per la corresponent columna de la matriu de la dreta.

Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ho recordarem així (per a matrius $n \times n$):

$$AB = A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{pmatrix}$$

on B_i representa la columna i-èssima de la matriu B. Utilitzarem aquesta propietat en la justificació del mètode per trobar la inversa d'una matriu, pàgina 59.

Matrius i sistemes

Utilitzant el producte de matrius que acabem de definir ens adonem que, per exemple, el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 9 \\ x - 4y + 5z &= 2 \\ 5x - 6y - z &= 1 \end{aligned}$$

es pot escriure simplement com

$$AX = B$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si fóssim capaços de trobar una matriu, diguem-li A^{-1}, tal que $A^{-1}A = I$ on I es la matriu identitat, és a dir

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podríem multiplicar la igualtat $AX = B$ als dos costats per A^{-1} i tindríem

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}B$$

i ja tenim solucionat el sistema.

Això és el que dóna tanta importància al càlcul d'aquesta matriu A^{-1}, que es diu *matriu inversa* de la matriu A.

3.3.1 Matrius elementals

Les matrius que s'obtenen de la matriu identitat per una (i només una) transformació elemental es diuen matrius elementals. Per exemple, en dimensió dos les matrius elementals són:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La gracia d'aquestes matrius es que realitzen, quan multipliquem per elles, transformacions elementals. Per exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

(hem permutat les files),

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(hem multiplicat la primera fila per λ),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{pmatrix}$$

(hem sumat a la segona fila un múltiple de la primera).

Per tant, quan a una matriu A li fem successivament diverses transformacions elementals, per exemple quan esglaonem, la matriu A' a la que arribem finalment es pot escriure com

$$A' = PA$$

on P és la matriu que obtenim com producte de totes les matrius elementals que hem anat aplicant en cada pas de la transformació.

És a dir, prenem A i fem una transformació elemental. Obtenim E_1A on E_1 és una matriu elemental. Fem una segona transformació elemental. Obtenim E_2E_1A on E_2 és una matriu elemental. Això és el que escrivim com PA amb $P = E_2E_1$ producte d'elementals. I anar seguint.

Les matrius elementals 3×3 són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Càlcul de la inversa

Per calcular la inversa de la matriu A usarem el següent mètode:

1. Escriurem la matriu identitat a la dreta de la matriu A. Tindrem

$$(A|I)$$

2. Efectuarem transformacions elementals fins arribar a tenir la matriu identitat en el lloc on estava la matriu A. Sabem que el resultat equival

a multiplicar aquesta matriu per diverses matrius elementals. Tindrem (recordeu la propietat del producte de matrius, pàgina 57),

$$P(A|I) = (PA|P)$$

3. La matriu P, que està on hi havia la matriu identitat és la inversa de A. En efecte, ens hem aturat quan $PA = I$, per tant $P = A^{-1}$.

Exemple 3.3.1 *Calculem la inversa de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Posem la identitat a la dreta de A:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Esglaonem pel mètode del pivot.
Primer pas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Segon pas. Tots els pivots han de ser iguals a 1, ja que volem obtenir la matriu identitat. Dividim per -2 la darrera fila.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ara pivotem sobre el pivot de la segona fila per obtenir zeros a sobre d'aquest pivot (no a sota, com habitualment). Posarem un zero a sobre del pivot i canviarem els demés termes de la primera fila pel determinant corresponent *canviat de signe!*.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & \clubsuit & \spadesuit \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\clubsuit = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{1} & 3/2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\spadesuit = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \boxed{1} & -1/2 \end{vmatrix} = 1$$

Per tant

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

i

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.3.2 *Calculem la inversa (si és que en té) de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posem

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pivotem sobre el terme a_{11}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquem la segona fila per 1/2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pivotem sobre el terme a_{22}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15/2 & 5/2 & -9/2 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquem la tercera fila per $-2/15$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Pivotem de cap per avall (canviar signe del determinant) sobre el terme a_{33}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 5/3 & -6/5 & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Pivotem de cap per avall (canviar signe del determinant) sobre el terme a_{22}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{array}\right)$$

Per tant

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & 1/5 & 1/15 \\ -1/3 & 3/5 & -2/15 \end{pmatrix} \quad \diamondsuit$$

Repetim l'exercici sense aplicar mecànicament el mètode del pivot, sinó controlant les operacions amb les files en cada pas.

Exemple 3.3.3 *Calculem la inversa (si és que en té) de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 9F_2]{F_1 \to F_1 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -\frac{2}{15}F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 - \frac{5}{2}F_3]{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{15} \end{array}\right).$$

Per tant,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

Observem però que *hi ha matrius que no tenen inversa.* En efecte, el mètode anterior funciona sempre que podem obtenir la matriu identitat a base de transformacions elementals. Però a vegades no es pot, per exemple, si tenim

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i pivotem sobre el terme a_{11} tenim

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

i ja no podem obtenir la matriu identitat a l'esquerra. Només hi ha un pivot diferent de zero i en necessitem dos.

3.4 Determinants

El determinant d'una matriu 2×2 es defineix per

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

Utilitzarem la notació habitual

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

El determinant d'una matriu 3×3 es defineix per

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Es diu que s'ha obtingut *desenvolupant per la primera columna,* ja que cada terme de l'anterior suma és un element de la primera columna multiplicat pel determinant de la matriu que queda al suprimir la fila i la columna del corresponent terme.

Així, a_{11} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la primera fila i la primera columna a la matriu donada. a_{21} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la segona fila i la primera columna a la matriu donada. a_{31} està multiplicat pel determinant de la matriu que queda en suprimir la tercera fila i la primera columna a la matriu donada.

El determinant que multiplica a a_{ij} es diu l'*adjunt* de a_{ij}.

Per fer aquests desenvolupaments tenim en compta sempre la regla dels signes. Les matrius les hem de pensar així:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

El signe $+$ vol dir que el terme que està en aquell lloc s'ha de multiplicar per 1 i el signe $-$ vol dir que el terme que està en aquell lloc s'ha de multiplicar per -1.

Així com els determinants 3×3 s'han definit a partir dels determinants 2×2, els determinants $n \times n$ es defineixen a partir dels determinants $(n-1) \times (n-1)$, aquests a partir dels $(n-2) \times (n-2)$, etc, de manera que per recurrència hem definit determinant de qualsevol matriu quadrada.

Acceptarem sense demostració el resultat següent.

Teorema 3.4.1 *Per calcular el determinant d'una matriu podem desenvolupar per qualsevol fila o columna.*

Per exemple, l'anterior determinant també és igual a (desenvolupant per la tercera fila)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

I també és igual (desenvolupant per la segona columna),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Comprovem-ho en un exemple numèric. Calculem de dues formes diferents el determinant de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolupant per la primera columna tenim

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -49.$$

I, desenvolupant per la segona columna,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -49.$$

Propietats dels determinants

1. Si multipliquem una fila d'una matriu per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número. Per exemple, si multipliquem per λ la primera fila de la matriu

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   i calculem el determinant, obtenim

   $$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. Si una fila es pot pensar com suma de dues files (cada terme de la fila es pensa com suma de dos termes), el determinant és suma de determinants, cadascun amb una d'aquests files. Per exemple,

   $$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

3. Si permutem dues files el determinant canvia de signe. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

i

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

4. Si un determinant té dues files iguals, el determinant és zero. Conseqüència immediata de l'anterior propietat, ja que si permutem dues files iguals per una part el determinant no canvia i per l'altre canvia de signe. Això només pot passar si aquest determinant és zero. Aquest fet permet calcular en un moment determinants com aquest:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 6 & 9 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 3 & 10 & 12 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 12 & -46 \\ 6 & 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 20 \\ 6 & 8 & 78 & 12 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 & 6 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si canviem una fila d'una matriu per ella mateixa més un múltiple d'una altre, el determinant no canvia. Conseqüència dels punts 1, 2 i 4. Per exemple, si sumem a la segona fila de la matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un múltiple de la primera tenim

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

6. $\det A = \det A^t$. La notació A^t vol dir la matriu transposta de la matriu A. La matriu transposta d'una matriu donada és la que s'obté en canviar files per columnes.

   Per exemple, si
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   llavors
$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
   Si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 88 & 99 & 100 \end{pmatrix}$$
   llavors
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 88 \\ 3 & 4 & 99 \\ 5 & 6 & 100 \end{pmatrix}$$

7. Tot el que s'ha dit fins aquí per a files val per columnes. Només cal observar que les files de A són les columnes de A^t i recíprocament.

8. El determinant d'una matriu esglaonada és el producte dels pivots. Això es veu evident desenvolupant per columnes. Així, per exemple
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 50 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 23 = 345.$$

9. $\det(AB) = \det A \det B$. El determinant del producte és el producte de determinants. Comprovem-ho per a matrius 2×2.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$
   Prenent determinants,
$$\begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix}$$

La primera i la quarta tenen files proporcionals i per tant el seu determinant és zero. El segon determinant val $eh(ad - bc)$ i el tercer $-fg(ad - bc)$. Per tant la suma val

$$eh(ad - bc) - fg(ad - bc) = (ad - bc)(eh - fg)$$

com volíem veure.

10. Una matriu A és invertible si i només si $\det A \neq 0$. Que si és invertible, el determinant és diferent de zero, és conseqüència del punt anterior. En efecte, que A sigui invertible vol dir que hi ha una matriu A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Prenent determinants tenim,

$$\det A^{-1} \cdot \det A = \det I = 1,$$

i per tant ha de ser $\det A \neq 0$. El recíproc també és cert, però no el demostrem.

De fet, un dels mètodes típics per calcular inverses de matrius implica dividir pel determinant, cosa que només podem fer si aquest és diferent de zero.

Recordem, sense justificar-lo, aquest mètode.

Segon mètode per calcular la inversa d'una matriu.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

3. Apliquem la regla dels signes (vegeu la matriu de signes (3.1)).

4. Dividim pel determinant.

Exemple 3.4.2 *Calculem la matriu inversa de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Apliquem la regla dels signes.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dividim pel determinant.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.4.3 *Calculem la matriu inversa de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució.

1. Canviem files per columnes (i.e. transposem).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Canviem cada element pel seu adjunt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Apliquem la regla dels signes.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Dividim pel determinant.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Capítol 4

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$

L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ és el conjunt $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ amb la suma donada per

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

i el producte per escalars donat per

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

4.1 Subespais vectorials

Definició 4.1.1 *Un subconjunt E de $\mathbb{R}^n$ és un* subespai vectorial *de $\mathbb{R}^n$ si és tancat per la suma i el producte per escalars, és a dir, compleix que*

(1) Si $u, v \in E$ llavors $u + v \in E$.

(2) Si $u \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda \cdot u \in E$.

Proposició 4.1.2 *Un subconjunt E de $\mathbb{R}^n$ és subespai vectorial si i només si per a tot $u, v \in E$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es compleix*

$$\alpha u + \mu v \in E.$$

Demostració. Es deixa al lector. $\square$

Exemples

1. El propi espai vectorial $\mathbb{R}^n$ i el conjunt format únicament pel vector zero $\{\overrightarrow{0}\}$ són dos exemples trivials de subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$.

2. Sigui $E = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. És clar que si sumem vectors de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul obtenim un vector de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul; i que si multipliquem per un escalar un vector amb tercer component nul obtenim un vector de $\mathbb{R}^3$ amb tercer component nul. Per tant E és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. D'aquesta manera, identificant E amb $\mathbb{R}^2$, podem pensar $\mathbb{R}^2$ com a subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

3. *Les solucions d'un sistema homogeni.* Considerem una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Sigui

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Llavors E és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. En efecte, si $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, i denotem

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenim

$$A(X + Y) = AX + AY = O + O = O, \quad A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda O = O,$$

és a dir, $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \in F$ i $\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in E$, i per tant E és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Si $m = 1$ el sistema té una sola equació. L'espai de solucions es diu *hiperplà per l'origen* de $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es parla de rectes per l'origen i si $n = 3$ es parla de plans per l'origen. Per exemple $2x + 35y = 0$, que amb la notació matricial anterior s'escriu com

$$\begin{pmatrix} 2 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

és una recta per l'origen de $\mathbb{R}^2$ i $x+y+x=0$ és un pla per l'origen de $\mathbb{R}^3$. Si tallem dos plans de $\mathbb{R}^3$ obtenim una recta de $\mathbb{R}^3$. Per exemple, les solucions del sistema homogeni

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x-3y-76z &= 0 \end{aligned}$$

formen una recta per l'origen de $\mathbb{R}^3$. Matricialment s'escriu com

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Les matrius.* Podem identificar el conjunt de totes les matrius $m \times n$ i coeficients reals amb $\mathbb{R}^{m+n}$. Simplement a cada matriu (a_{ij}) $i = 1, \ldots, m$, $n = 1, \ldots, n$ li associem el vector de $\mathbb{R}^{n+m}$

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}),$$

obtingut posant una fila a continuació de l'altra.

5. *Les matrius simètriques.* Considerem

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}.$$

Llavors E és un subespai vectorial de l'espai vectorial de les matrius $n \times n$, identificant $M_n(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{n^2}$.

En efecte, si $A, B \in F$ llavors

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B, \quad (\lambda \cdot A)^t = \lambda A^t = \lambda A,$$

és a dir, $A + B \in E$ i $\lambda A \in E$ i per tant E és subespai vectorial.

Si $n = 2$, i identifiquem les matrius 2×2 amb $\mathbb{R}^4$ posant una fila a continuació de l'altre, les matrius simètriques s'identifiquen amb

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z\},$$

ja que són de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$, i identifiquem les matrius 3×3 amb $\mathbb{R}^9$ posant una fila a continuació de l'altre, les matrius simètriques s'identifiquen amb

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \in \mathbb{R}^9 \mid x_4 = x_2, x_7 = x_3, x_8 = x_6\},$$

ja que són de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}$$

6. *Els polinomis de grau més petit o igual a r.* Considerem[1]

$$E = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grau } p(x) \leq r\}.$$

Aquest conjunt es pot identificar amb $\mathbb{R}^{r+1}$ ja que el polinomi

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r$$

s'identifica amb el vector de $\mathbb{R}^{r+1}$

$$(a_0, \ldots, a_r).$$

Sumar polinomis o multiplicar polinomis per números reals correspon en aquesta identificació exactament a la suma i producte per escalars de $\mathbb{R}^{r+1}$.

4.2 Dependència i independència lineal

Siguin $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$. Una *combinació lineal* de $u_1, \ldots u_r$ és una expressió de la forma

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$$

amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$. Es diu també que el vector

$$w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$$

és una combinació lineal de $u_1, \ldots, u_r$.

Donat un conjunt de vectors $u_1, \ldots, u_r$ denotarem per $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals d'aquests vectors:

$$\boxed{\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}}$$

[1] Denotem per $\mathbb{R}[x]$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients reals.

Proposició 4.2.1 *Siguin* $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$. *Llavors* $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ *és un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *anomenat* subespai vectorial generat per $u_1, \ldots, u_r$. *De fet, és el subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *més petit que conté els vectors* $u_1, \ldots, u_r$.

Demostració. És clar que la suma de combinacions lineals i el producte d'un escalar per una combinació lineal és una nova combinació lineal. Per tant $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Que és el més petit és també evident ja que si F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ que conté $u_1, \ldots, u_r$, també conté les seves combinacions lineals i per tant $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq F$. $\square$

Exemples

1. Estudiem el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat per $(1, 2, 0)$ i $(-1, 2, 0)$. Tenim que

$$\begin{aligned} \langle (1,2,0), (-1,2,0) \rangle &= \{\lambda(1,2,0) + \mu(-1,2,0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda - \mu, 2\lambda + 2\mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Però, per a tot (x, y) el sistema

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \end{cases}$$

   té solució única, de manera que

$$\begin{aligned} E = \langle (1,2,0), (-1,2,0) \rangle &= \{(\lambda - \mu, 2\lambda + 2\mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \end{aligned}$$

   Diem que $z = 0$ és l'*equació cartesiana* de E, ja que aquesta condició caracteritza els elements de E.

2. Estudiem el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^3$ generat per $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ i $(1, 1, 4)$. Un vector $(x, y, z) \in E$ si i només si

$$(x, y, z) = \lambda(1, -1, 2) + \mu(0, 1, 1) + \nu(1, 1, 4),$$

   per a certs $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. És a dir

$$\begin{cases} x = \lambda + \nu \\ y = -\lambda + \mu + \nu \\ z = 2\lambda + \mu + 4\nu \end{cases}$$

Per estudiar aquest sistema esglaonem la seva matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right),$$

on hem fet les transformacions $F_2 \to F_2 + F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$. A continuació,

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-3x-y \end{array}\right),$$

on hem fet la transformació $F_3 \to F_3 - F_2$. El sistema és compatible si i només si

$$z - 3x - y = 0.$$

Per tant

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 3x - y = 0\} = \{(x,y,3x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Observem que

$$(x,y,3x+y) = x(1,0,3) + y(0,1,1)$$

de manera que també

$$E = \langle (1,0,3),(0,1,1) \rangle.$$

Diem que $z - 3x - y = 0$ és l'*equació cartesiana* de E, ja que aquesta condició caracteritza els elements de E.

3. Estudiem el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat per $(1,-1,2,0)$, $(5,0,1,1)$. Un vector $(x,y,z,t) \in E$ si i només si

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,-1,2,0) + \mu(5,0,1,1).$$

És a dir

$$\begin{cases} x = \lambda + 5\mu \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases}$$

Per estudiar aquest sistema esglaonem la seva matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{lr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

on hem fet les transformacions $F_2 \to F_2 + F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$. A continuació,

$$\left(\begin{array}{lr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ll|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & 0 & -x+9y+5z \\ 0 & 0 & -x-y+5t \end{array}\right)$$

on hem fet la transformació $F_3 \to 5F_3+9F_2, F_4 \to 5F_4-F_2$. El sistema és doncs compatible si i només si

$$\left\{ \begin{array}{r} -x+9y+5z=0 \\ -x-y+5t=0 \end{array} \right.$$

Per tant

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+9y+5z=0, -x-y+5t=0\} \\ &= \left\{ \left(x, y, \frac{x-9y}{5}, \frac{x+y}{5} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Observem que

$$\left(x, y, \frac{x-9y}{5}, \frac{x+y}{5} \right) = x\left(1, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + y\left(0, 1, \frac{-9}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

de manera que també

$$E = \left\langle \left(1, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{-9}{5}, \frac{1}{5}\right) \right\rangle.$$

Diem que el sistema d'equacions $-x+9y+5z=0, -x-y+5t=0$ són les *equacions cartesianes* de E, ja que aquestes condicions caracteritzen els elements de E. $\Diamond$

Definició 4.2.2 *Direm que els vectors* $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ *són* linealment independents *si i només si* $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$ *amb* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *implica* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Dit d'una altra manera, $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si no hi ha cap combinació lineal d'ells igual a zero (llevat de la trivial, en la que tots els escalars són zero).

En cas contrari es diu que $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ són *linealment dependents.*

Proposició 4.2.3 *Els vectors* $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ *són linealment independents si i només si cap d'ells és combinació lineal dels altres.*

Demostració. Suposem primerament que són linealment independents. Si un d'ells, per exemple el primer, és combinació lineal dels altres tindríem

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

i per tant

$$v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$$

seria una combinació lineal dels $v_1, \ldots, v_r$ igual a zero amb no tots els escalars iguals a zero (el coeficient de v_1 és 1), en contra de la hipòtesi de que són linealment independents.

Suposem ara que cap d'ells és combinació lineal dels altres i escrivim $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$. Si alguna λ_j fos diferent de zero el corresponent vector v_j seria combinació lineal dels altres

$$v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \cdots \hat{j} \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_j} v_r$$

en contra de la hipòtesi. La notació $\hat{j}$ vol dir que el terme j-èsim no hi és. Per tant, per a tot $j = 1, \ldots, r$ ha de ser $\lambda_j = 0$ i els vectors són linealment independents. □

Sempre que agafem tres (o més) vectors a $\mathbb{R}^2$, aquests són linealment dependents. O quatre (o més) a $\mathbb{R}^3$, etc. De fet tenim,

Lema 4.2.4 *Siguin* $u_1, \ldots, u_m$, m *vectors de* $\mathbb{R}^n$ *amb* $m > n$. *Llavors* $u_1, \ldots, u_m$, *són linealment dependents.*

Demostració. Fem el cas $r = 2$, $m = 3$. És a dir, suposem que tenim 3 vectors, u_1, u_2, u_3, a $\mathbb{R}^2$. Escrivim

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{21}) \\ u_2 &= (a_{12}, a_{22}) \\ u_3 &= (a_{13}, a_{23}) \end{aligned}$$

Suposem

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}. \tag{4.1}$$

Substituint els u_i pels seus valors, tenim

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} &= 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Però això és un sistema homogeni[2] de 2 equacions i 3 incògnites $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Per Rouché-Frobenius, aquest sistema és compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ graus de llibertat. Per tant, hi ha solució no trivial[3] de (4.1) i u_1, u_2, u_3 són linealment dependents.

En el cas general $m > r$, el mateix argument anterior porta a un sistema homogeni de r equacions i m incògnites, que novament per Rouché-Frobenius, és compatible indeterminat amb $m - r$ graus de llibertat. □

Això vol dir que 3 (o més) vectors de $\mathbb{R}^2$ no poden ser linealment independents. Ni 4 (o més) vectors de $\mathbb{R}^3$ poden ser linealment independents, etc.

Exemples

1. Els vectors

   $$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

   són linealment independents. En efecte

   $$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$$

   implica clarament que $\lambda_i = 0$, per a $i = 1, \ldots, n$.

[2] Termes independents iguals a zero.

[3] Diferent de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2. Els polinomis $1, x, x^2, \ldots, x^n$ són linealment independents. En efecte, aquests polinomis corresponen a als vectors de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & (1,0,0,\ldots,0,0) \\ x & = & (0,1,0,\ldots,0,0) \\ & \vdots & \\ x^n & = & (0,0,0,\ldots,0,1) \end{array}$$

També podem pensar que si tenim una combinació lineal d'aquests polinomis igual al polinomi zero

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0 + 0x + \cdots + 0x^n$$

llavors tots els coeficients són zero, $\lambda_i = 0$, per a $i = 1, \ldots, n$, ja que polinomis iguals tenen els coeficients corresponents iguals.

3. Les matrius

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

són linealment independents. En efecte, aquestes matrius corresponen a als vectors de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,0) \\ e_3 & = & (0,0,1,0) \\ e_4 & = & (0,0,0,1) \end{array}$$

També podem pensar que si tenim una combinació lineal d'aquestes matrius igual a la matriu zero

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

totes les λ_i han de ser zero, $\lambda_i = 0$ per a $i = 1, 2, 3, 4$, ja que matrius iguals tenen components corresponents iguals.

4. Els vectors $(1,-1,2),(0,1,1),(1,1,4)$ de $\mathbb{R}^3$ són linealment dependents. En efecte,

$$\lambda(1,-1,2)+\mu(0,1,1)+\nu(1,1,4)=(0,0,0)$$

implica

$$\begin{cases} \lambda+\nu=0 \\ -\lambda+\mu+\nu=0 \\ 2\lambda+\mu+4\nu=0 \end{cases}$$

i aquest sistema admet la solució no trivial $\lambda=-\nu,\mu=-2\nu$. És a dir que l'equació anterior no implica $\lambda=\mu=\nu=0$ sinó que, per exemple, podem agafar $\lambda=1,\mu=2,\nu=-1$ i tenir

$$1(1,-1,2)+2(0,1,1)-1(1,1,4)=(0,0,0)$$

5. Els vectors $(1,2),(3,4),(-1,-8)$ de $\mathbb{R}^2$ són linealment dependents. És conseqüència del lema 4.2.4. De tota manera, si plantegem el sistema

$$x(3,4)+y(-1,-8)=(1,2)$$

obtenim $x=3/10$ i $y=-1/10$.

Així, un és combinació lineal dels altres, o equivalentment hi ha una combinació lineal de ells no trivial igual a zero: Concretament

$$\frac{3}{10}(3,4)-\frac{1}{10}(-1,-8)-(1,2)=(0,0).$$

4.3 Base

Definició 4.3.1 (Generadors) *Direm que els vectors $v_1,\ldots,v_m\in\mathbb{R}^n$ són un* sistema de generadors *del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ si i només si $E=\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$.*

És a dir, $v_1,\ldots,v_m\in\mathbb{R}^n$ són un sistema de generadors de E si i només si tot vector de E és combinació lineal dels vectors $v_1,\ldots,v_m$.

Definició 4.3.2 (Base) *Direm que els vectors $v_1,\ldots,v_m\in\mathbb{R}^n$ són una* base *del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ si i només si són un sistema de generadors de E i a més són linealment independents.*

Exemples

1. Els vectors

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$. En efecte, tot vector $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure com

$$v = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, \dots, 0, 1).$$

2. Els vectors $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$. En efecte, tot vector $(a_1, a_2) \in R^2$ es pot escriure com

$$(a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) + 0(1, 1).$$

3. A l'espai vectorial de matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, les matrius e_{ij} definides com aquelles matrius que tenen tots els seus components nuls llevat del que ocupa el lloc (i, j) (fila i, columna j) que val 1, són un sistema de generadors (de $m \times n$ elements). En efecte, tota matriu $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es pot escriure com

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}.$$

Amb la identificació de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ amb $\mathbb{R}^{m+n}$ aquestes matrius corresponen als vectors $\mathbb{R}^{m+n}$,

$$\begin{aligned} e_{11} &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ e_{12} &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ e_{mn} &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

4. $\mathcal{B}$=((1,0), (0,1)) és una base de $\mathbb{R}^2$. En efecte, com que tot vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'escriu com

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

són un sistema de generadors. A més, és clar que són linealment independents ja que

$$\lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (0, 0)$$

implica $\lambda = \mu = 0$.

5. Generalitzant l'exemple anterior, tenim que

$$\mathcal{B} = ((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$$

   és una base de $\mathbb{R}^n$. Ja hem vist a l'exemple 1 que són un sistema de generadors i a l'exemple 1 de la pàgina 79 que són linealment independents. D'aquesta base se'n diu *base canònica*.

6. $\mathcal{B}$=((1,2), (3,4)) és una base de $\mathbb{R}^2$. En efecte, tot vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'escriu com

$$(a, b) = x(1, 2) + y(3, 4)$$

   ja que el sistema

$$\begin{aligned} a &= x + 3y \\ b &= 2x + 4y \end{aligned}$$

   és compatible determinat ($x = -2a + \frac{3b}{2}, y = a - \frac{b}{2}$). Per tant els vectors $(1, 2), (3, 4)$ són un sistema de generadors. A més, és clar que són linealment independents ja que

$$\lambda(1, 2) + \mu(3, 4) = (0, 0)$$

   implica $\lambda = \mu = 0$.

7. A l'espai vectorial de matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, les matrius e_{ij} definides a l'exemple 3 de la pàgina 82 són una base. Ja hem vist allà mateix que són un sistema de generadors i és fàcil veure que són linealment independents.

8. $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^r)$ és una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}_r[x]$ de polinomis de grau més petit o igual a r. Ja hem vist a l'exemple 2 de la pàgina 80 que són linealment independents i és evident que generen.

   $\Diamond$

Proposició 4.3.3 *Tot subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$ ($E \neq \{\vec{0}\}$) es pot escriure com $E = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, amb $r \leq n$, i aquests vectors linealment independents. En particular, tot subespai admet una base.*

Demostració. Prenem $u_1 \in E$, amb $u_1 \neq \{\vec{0}\}$. Si

$$E = \langle u_1 \rangle$$

hem acabat. En cas contrari, vol dir que hi ha $u_2 \in E$ i $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$. En particular, u_1 i u_2 són linealment independents. Considerem el subespai vectorial $\langle u_1, u_2 \rangle$ generat per aquests dos vectors. Clarament $\langle u_1, u_2 \rangle \subset E$. Si

$$E = \langle u_1, u_2 \rangle$$

hem acabat.

En cas contrari, vol dir que hi ha $u_3 \in E$ i $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle$. En particular, u_1, u_2 i u_3 són linealment independents. Considerem el subespai vectorial $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ generat per aquests tres vectors. Clarament $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset E$. Si

$$E = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

hem acabat. I així successivament.

Com que a $\mathbb{R}^n$ no pot haver-hi un conjunt de més de n vectors linealment independents, al cap de r passos, amb $r \leq n$ tindrem $E = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ amb aquests $u_1, \ldots, u_r$ linealment independents. $\square$

Proposició 4.3.4 *Sigui $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_m)$ una base d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$. Llavors tot vector v de E s'expressa de manera única com a combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}$.*

Demostració. Sigui $u \in E$ i suposem que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n.$$

Restant, tenim

$$(a_1 - b_1)u_1 + \cdots + (a_n - b_n)u_n = 0$$

I, per ser $u_1, \ldots, u_n$ linealment independents, ha de ser

$$a_i - b_i = 0 \quad \text{per a} \quad i = 1, \ldots, n,$$

com volíem demostrar. $\square$

Definició 4.3.5 *Sigui $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_m)$ una base d'un subespai vectorial E de $\mathbb{R}^n$. Les* coordenades *d'un vector $v \in E$ respecte de la base $\mathcal{B}$ són els elements $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tals que $v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$.*

Per exemple, el vector $u = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ té coordenades $(1, 2, 3)$ respecte de la base canònica $e_1 = (1, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0), e_1 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Però té coordenades $(1, 0, 0)$ respecte de la base $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 5, 8)$ de $\mathbb{R}^3$.

El lema 4.2.4 es pot enunciar ara per a subespais vectorials.

Lema 4.3.6 *Sigui $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ una base d'un subespai vectorial E. Siguin $u_1, \ldots, u_m$, m vectors de E amb $m > r$. Llavors $u_1, \ldots, u_m$, són linealment dependents.*

Demostració. Fem el cas $r = 2$, $m = 3$. És a dir, considerem 3 vectors en un subespai vectorial E que admet una base formada per 2 vectors. Escrivim

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ u_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \\ u_3 &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 \end{aligned}$$

Suposem

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}. \tag{4.2}$$

Substituint els u_i pels seus valors, i tenint en compte que els e_1 i e_2 són linealment independents, tenim

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} &= 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Però això és un sistema homogeni[4] de 2 equacions i 3 incògnites $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Per Rouché-Frobenius, aquest sistema és compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ graus de llibertat. Per tant, hi ha solució no trivial[5] de (4.2) i u_1, u_2, u_3 són linealment dependents.

En el cas general $m > r$, el mateix argument anterior porta a un sistema homogeni de r equacions i m incògnites, que novament per Rouché-Frobenius, és compatible indeterminat amb $m - r$ graus de llibertat. □

Observem que si $E = \mathbb{R}^n$ aquest lema coincideix amb 4.2.4.

Teorema 4.3.7 (De la base) *Sigui $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_m)$ una base d'un subespai vectorial E. Llavors qualsevol altra base de E té també m elements.*

[4] Termes independents iguals a zero.

[5] Diferent de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Demostració. Sigui $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_r)$ una segona base de E.

Si $r > m$, pel lema anterior, $v_1, \ldots, v_r$ seríen linealment dependents, el que és una contradicció.

Si $r < m$, pel lema anterior, $u_1, \ldots, u_m$ seríen linealment dependents, el que és una contradicció.

Per tant, $r = m$. $\square$

Definició 4.3.8 (Dimensió) *Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. La* dimensió *de E és el nombre d'elements d'una base.*

Denotarem la dimensió del subespai vectorial E per $\dim E$.

Així, doncs, $\mathbb{R}^n$ té dimensió n (exemple 5 de la pàgina 83); $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ té dimensió $m \times n$ (exemple 6 de la pàgina 83); $\mathbb{R}_r[x]$ té dimensió $r+1$ (exemple 7 de la pàgina 83).

Exemple 4.3.9 *Trobeu la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$*

$$F = \langle (1,2,3,4), (7,10,13,16), (5,6,7,8), (14,16,18,20) \rangle$$

Solució. Posem els vectors com files d'una matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

i esglaonem.

Obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que el procés d'esglaonament consisteix essencialment en fer combinacions lineals de les files, aquest procés no canvia el subespai general per les noves files de la matriu. De manera que podem dir que

$$F = \langle (1,2,3,4), (0,-4,-8,-12) \rangle$$

i, com que aquests dos vectors són clarament linealment independents, $\dim F = 2$. $\Diamond$

Exemple 4.3.10 *Trobeu la dimensió i una base del subespai vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *que té per equacions cartesianes*

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x-z &= 0 \end{cases}$$

Solució. La segona equació ens diu directament $x = \frac{z}{2}$. I de la primera deduïm $y = -z - x = -z - \frac{z}{2} = -\frac{3z}{2}$. La solució dels sistema és doncs

$$(\frac{z}{2}, -\frac{3z}{2}, z) = z(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1).$$

Per tant, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$ (o qualsevol múltiple no nul d'ell) és la base buscada. La dimensió és, doncs, 1. $\Diamond$

Proposició 4.3.11 *Sigui* E *un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensió* k*. Llavors* k *és el nombre màxim de vectors de* E *linealment independents i és també el nombre mínim de generadors de* E*.*

Demostració. Que k és el nombre màxim de vectors de E linealment independents és conseqüència directa del lema 4.3.6. Si $E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, amb $m < k$, podríem extreure d'aquí, de manera semblant a com ho hem fet a la proposició 4.3.3,[6] una base de E amb menys de k elements, contradicció. $\square$

Proposició 4.3.12 *Sigui* E *un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$*. Llavors tota família de vectors de* E*, linealment independents, es pot ampliar a una base de* E*.*

Demostració. Sigui $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de E i siguin $u_1, \dots, u_m$ vectors linealment independents. Farem un procés recurrent.

Si e_1 és combinació lineal de $u_1, \dots, u_m$ no fem res. Si e_1 no és combinació lineal de $u_1, \dots, u_m$ considerem $\langle u_1, \dots, u_m, e_1 \rangle$.

Si e_2 és combinació lineal de $u_1, \dots, u_m, e_1$ no fem res. Si e_2 no és combinació lineal de $u_1, \dots, u_m$ considerem $\langle u_1, \dots, u_m, e_1, e_2 \rangle$.

I així successivament. Al final del procés (quan arribem a e_n) obtindrem una base formada pels vectors $u_1, \dots, u_m$ i per aquells e_k de la base que hi hàgim afegit al llarg del procés. $\square$

Observeu que en particular, tota família de vectors linealment independents de $\mathbb{R}^n$ es pot ampliar a una base de $\mathbb{R}^n$.

[6] Si un v_i és combinació lineal del altres el traiem del sistema de generadors, fins deixar-hi només els linealment independents.

Proposició 4.3.13 *Sigui E un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. De tot sistema de generadors de E se'n pot extreure una base.*

Demostració. Suposem $E = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$. Si un d'ells, per exemple u_1 és combinació lineal del altres, clarament tenim

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle = \langle u_2, \ldots, u_m \rangle$$

Si un d'aquests $m-1$ vectors, per exemple u_2, és combianció lineal dels altres, tenim

$$E = \langle u_2, u_3, \ldots, u_m \rangle = \langle u_3, \ldots, u_m \rangle$$

I així successivament, fins que els generadors que quedin siguin linealment independents, i per tant base. □

Exemple 4.3.14 *Completeu* $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 4, -3, 10)$ *a una base de* $\mathbb{R}^4$.

Primer mètode. Sigui e_1, e_2, e_3, e_4 la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

Seguint la teoria, ens preguntem primer si e_1 és combinació lineal de u_1, u_2.

Per a això posem

$$(1, 0, 0, 0) = \lambda_1(1, 2, 3, 4) + \lambda_2(2, 4, -3, 10)$$

Les dues primeres components porten al sistema incompatible

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 + 4\lambda_2. \end{aligned}$$

Així, e_1 no és combinació lineal de u_1, u_2.

Considerem, doncs,

$$\langle u_1, u_2, e_1 \rangle.$$

Ens preguntem ara si e_2 és combinació lineal de u_1, u_2, e_1.

Per a això posem

$$(0, 1, 0, 0) = \lambda_1(1, 2, 3, 4) + \lambda_2(2, 4, -3, 10) + \lambda_3(1, 0, 0, 0).$$

Aquest sistema és incompatible, i per tant u_1, u_2, e_1, e_2 són linealment independents i, en particular, base de $\mathbb{R}^4$

Segon mètode. Considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

El menor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

és diferent de zero. El completem amb zeros

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & & \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & & \end{pmatrix}$$

i posem la matriu identitat a la resta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu és diferent de zero, i per tant, les 4 columnes són linealment independents, i en particular base de $\mathbb{R}^4$. $\Diamond$

Nota 4.3.15 *Que els dos mètodes donin solucions diferents no és estrany, ja que la manera de completar uns quants vectors linealment independents a una base no és pas única.*

Exemple 4.3.16 *Completeu* $u_1 = (1,2,0,0), u_2 = (5,6,0,0)$ *a una base de* $\mathbb{R}^4$*.*

Primer mètode. Sigui e_1, e_2, e_3, e_4 la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

Seguint la teoria, ens preguntem primer si e_1 és combinació lineal de u_1, u_2.

Per a això posem

$$(1,0,0,0) = \lambda_1(1,2,0,0) + \lambda_2(5,6,0,0).$$

Tenim el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + 5\lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 + 6\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2. \end{aligned}$$

que és compatible determinat ($\lambda_1 = -3/2, \lambda_2 = 1/2.$)

Per tant e_1 és combinació lineal de u_1, u_2.

No fem res i passem a preguntar-nos si e_2 és combinació lineal de u_1, u_2.

Per a això posem

$$(0,1,0,0) = \lambda_1(1,2,0,0) + \lambda_2(5,6,0,0).$$

Tenim el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + 5\lambda_2, \\ 1 &= 2\lambda_1 + 6\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2. \end{aligned}$$

que és compatible determinat ($\lambda_1 = -5/4, \lambda_2 = -1/4.$)

Per tant e_2 és combinació lineal de u_1, u_2.

No fem res i passem a preguntar-nos si e_3 és combinació lineal de u_1, u_2.

Per a això posem

$$(0,0,1,0) = \lambda_1(1,2,0,0) + \lambda_2(5,6,0,0).$$

Tenim el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + 5\lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 + 6\lambda_2, \\ 1 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2. \end{aligned}$$

que és incompatible.

Considerem, doncs,

$$\langle u_1, u_2, e_3 \rangle.$$

Ens preguntem ara si e_4 és combinació lineal de u_1, u_2, e_3.

Per a això posem

$$(0,0,0,1) = \lambda_1(1,2,0,0) + \lambda_2(5,6,0,0) + \lambda_3(0,0,1,0).$$

Tenim el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + 5\lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 + 6\lambda_2, \\ 0 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2, \\ 1 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2. \end{aligned}$$

que és incompatible.

Per tant u_1, u_2, e_3, e_4 són linealment independents i, en particular, base de $\mathbb{R}^4$

Segon mètode. Considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El menor

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

és diferent de zero. El completem amb zeros

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

i posem la matriu identitat a la resta

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu és diferent de zero, i per tant, les 4 columnes són linealment independents, i en particular base de $\mathbb{R}^4$. $\Diamond$

Exemple 4.3.17 *Extragueu una base de* $\mathbb{R}^2$ *del sistema de generadors* $u = (1,2), v = (3,4), w = (-1,-6)$

Tenim $\mathbb{R}^2 = \langle u, v, w\rangle$. Com que u és combinació lineal de v i w ($u = \frac{2}{7}v - \frac{1}{7}w$), tenim $\mathbb{R}^2 = \langle v, w\rangle$. Com que v i w són linealment independents, ja hem acabat. $\diamondsuit$

Corol·lari 4.3.18 *Siguin* E, F *subespais vectorials de* $\mathbb{R}^n$*. Suposem* $F \subset E$*. Llavors* $\dim F \leq \dim E$*. A més,* $\dim F = \dim E$ *si i només si* $F = E$*.*

Demostració. Que $\dim F \leq \dim E$ es dedueix directament del corol·lari 4.3.12 aplicat a una base de F.

Si $\dim F = \dim E$ i $F \subset E$, volem veure $E = F$. És a dir, volem veure la inclusió contrària $E \subset F$. Prenem $e \in E$ i considerem els $(k+1)$ vectors $u_1, \ldots, u_k, e$, on $k = \dim F = \dim E$ i $u_1, \ldots, u_k$ és una base de F. Pel lema 4.3.6, aquests vectors són linealment dependents. Existeix doncs una combinació lineal

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \mu e = \vec{0}$$

amb algun coeficient no nul. Si $\mu = 0$, tindríem una combinació lineal dels u_i igual a zero, i per tant totes les λ_i han de ser zero. Com això no pot ser, ha de ser $\mu \neq 0$ i per tant podem escriure e com a combinació lineal dels u_i. Concretament

$$-\lambda_1/\mu u_1 - \cdots - \lambda_k/\mu u_k = e.$$

Per tant $e \in F$ i, com e és arbitrari, $E = F$. $\square$

En particular, si un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ té dimensió n, és que és tot $\mathbb{R}^n$. El resultat següent ens estalvia feina a l'hora de demostrar que un

cert conjunt de vectors, continguts en un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ del qual coneixem la seva dimensió, formen una base.

Corol·lari 4.3.19 *Sigui* E *un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *dimensió* k*. Llavors* k *vectors de* E *linealment independents són base de* E *i* k *vectors que siguin generadors de* E *són base de* E*.*

Demostració. Siguin $u_1, \ldots, u_k$, k vectors de E linealment independents. El subespai

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$$

està contingut a E i té dimensió k. Per tant, pel corol·lari 4.3.18,

$$E = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$$

i aquests vectors són una base de E.

Això prova la primera part del corol·lari.

Suposem ara que $u_1, \ldots, u_k$ són un sistema de generadors de E. Si un fos combinació lineal dels altres tindríem un sistema de generadors de E amb menys de k elements. Però de tot sistema de generadors se'n pot extreure una base, proposició 4.3.13, i així tindríem una base de E amb menys de k elements. Per tant, $u_1, \ldots, u_k$ han de ser linealment independents. $\square$

En particular, *n vectors linealment independents de $\mathbb{R}^n$ són base i n vectors que siguin generadors de $\mathbb{R}^n$ són base.*

4.4 Canvi de base

Siguin $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ i $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ dues bases de E.

La matriu $A = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ que té per columna i-èssima les coordenades de u_i respecte de $\mathcal{B}$ es diu *matriu del canvi de base.*

Així, si

$$u_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n, \tag{4.3}$$

tenim

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pregunta. Si un vector w té coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$ respecte de $\mathcal{B}$, quines coordenades té respecte de $\mathcal{B}'$?

Per respondre aquesta pregunta només cal escriure

$$w = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n$$

i mirar quina relació hi ha entre les x_i i les y_j.

Remplaçant cada u_i per l'expressió (4.3) tenim

$$\begin{aligned}
&x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \\
&y_1(a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n) + \\
&\vdots \\
&y_n(a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n)
\end{aligned}$$

Igualant els coeficients de cada e_i tenim

$$x_i = y_1a_{i1} + \cdots + y_na_{in}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aquestes n igualtats es poden escriure matricialment com

$$\boxed{X = AY, \quad \text{on} \quad A = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}'), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},}$$

que es coneixen com les equacions del canvi de base.

Exemple 4.4.1 *Calculeu les coordenades del vector* $w = (3,5) \in \mathbb{R}^2$ *respecte de la base* $\mathcal{B}' = (u,v)$ *amb* $u = (-2,8)$ *i* $v = (10,20)$.

Primer mètode. Escrivim

$$w = (3,5) = y_1u + y_2v = y_1(-2,8) + y_2(10,20).$$

Per tant

$$\begin{aligned}
3 &= -2y_1 + 10y_2 \\
5 &= 8y_1 + 20y_2
\end{aligned}$$

Resolent el sistema obtenim que les coordenades de w respecte de $\mathcal{B}'$ són $y_1 = -1/12, y_2 = 17/60$.

Observem que quan escrivim $w = (3,5)$ volem dir $w = 3(1,0) + 5(0,1)$, és a dir que w ens l'han donat implícitament respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

Segon mètode. Aplicant la fórmula (4.4) del canvi de base i tenint en compte que ara $\mathcal{B}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^2$ tenim

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/12 \\ 1/15 & 1/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/12 \\ 17/60 \end{pmatrix}. \quad \diamondsuit$$

Exemple 4.4.2 *Quina relació hi ha entre les coordenades (x', y') respecte de la base $\mathcal{B}' = ((1,2),(3,4))$ de $\mathbb{R}^2$ i les coordenades (x'', y'') respecte de la base $\mathcal{B}'' = ((5,0),(1,6))$?*

Primer mètode. La primera columna de la matriu del canvi de base està formada per les coordenades de $(5,0)$ respecte de $\mathcal{B}'$.

Resolent el sistema $(5,0) = x(1,2) + y(3,4)$ obtenim $x = -10, y = 5$.

La segona columna de la matriu del canvi de base està formada per les coordenades de $(1,6)$ respecte de $\mathcal{B}'$.

Resolent el sistema $(1,6) = x(1,2) + y(3,4)$ obtenim $x = 7, y = -2$.

Per tant

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Així

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

És a dir,

$$\begin{aligned} x' &= -10x'' + 7y'' \\ y' &= 5x'' - 2y''. \end{aligned}$$

Segon mètode. Ho referim tot a la base canònica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$M(\mathcal{B}'', \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \quad \Diamond$$

Exemple 4.4.3 *Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ en la que el pla $\Pi : x + 2y - z = 0$ tingui equació $z' = 0$.*

Busquem una base de $\mathbb{R}^3$ *adaptada* al pla, és a dir, tal que els dos primers vectors pertanyin al pla. D'aquesta manera el pla estarà caracteritzat pels vectors amb tercera coordenada zero.

Resolem $x + 2y - z = 0$ i obtenim $x = z - 2y$. Els punts del pla són, doncs, de la forma $(z - 2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. És a dir

$$\Pi = \langle(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle.$$

Completem aquests dos vectors a una base (per exemple, pel mètode explicat a la pàgina 89[7]) afegint el vector $(0, 0, 1)$.

Aquesta és la base buscada.

Comprovació.

La relació entre les coordenades (x, y, z) respecte de la base canònica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ i les coordenades (x', y', z') respecte de la nova base $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ està donada per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Com que l'equació de Π es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0,$$

[7] O fent el seu producte vectorial.

és a dir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -z' = 0,$$

com volíem. $\Diamond$

4.5 Rang d'una matriu

Definició 4.5.1 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. El* rang *de A és la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat per les files de A.*

Observeu que estem pensant els n elements d'una fila $\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ com un element $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ de $\mathbb{R}^n$.

Per exemple, el *rang* de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

és 2, ja que

$$\dim\langle(1,2,3),(4,5,6),(5,7,9)\rangle = 2.$$

Si denotem per $F_i, i = 1, \dots, m$ les files de A tenim que el rang per files de A és

$$r_F(A) = \dim\langle F_1, \dots, F_m\rangle.$$

Si una matriu està esglaonada, és clar que les seves files no nul·les són linealment independents (ara veurem un exemple), de manera que tenim

Proposició 4.5.2 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriu esglaonada per files. El* rang *de A és el número de files no nul·les.*

Exemple 4.5.3 *Comproveu que el rang de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és 4.

Solució. Hem de veure que els vectors $(1,2,3,4), (0,1,2,3), (0,0,1,2)$, $(0,0,0,1)$ són linealment independents. Plantegem

$$\lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(0,1,2,3) + \lambda_3(0,0,1,2) + \lambda_4(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

i obtenim el sistema

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &= 0, \end{aligned}$$

d'on $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. $\diamondsuit$

Exemple 4.5.4 *Comproveu que el rang de la matriu*

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amb a, b, c diferents de zero[8]*, és tres.*

Solució. Hem de veure que els vectors $(a,*,*), (0,b,*), (0,0,c)$ són linealment independents. Plantegem

$$\lambda(a,*,*) + \mu(0,b,*) + \nu(0,0,c) = (0,0,0).$$

En igualar la primera coordenada obtenim $\lambda a = 0$, i per tant $\lambda = 0$. En igualar la segona coordenada (sabent ja que $\lambda = 0$) obtenim $\mu b = 0$, i per tant $\mu = 0$. En igualar la tercera coordenada (sabent ja que $\lambda = \mu = 0$) obtenim $\mu c = 0$, i per tant $\mu = 0$. $\diamondsuit$

El mateix argument funciona per a dimensions arbitràries.

Teorema 4.5.5 *El rang d'una matriu no varia durant el procés d'esglaonament. És a dir, el rang de A és igual al número de files no nul·les de la matriu que obtenim en esglaonar A.*

[8] Com sempre, el signe $*$ vol dir que en aquella posició pot haver-hi qualsevol element.

Demostració. En el procés d'esglaonament per files (és a dir, quan apliquem el mètode del pivot) la única cosa que fem és substituir files per elles mateixes (o múltiples) més combinacions lineals d'altres files, i això no canvia la dimensió de l'espai generat per les files.

Per exemple, en pivotar sobre el terme a_{11} el que fem és canviar la fila F_i per la fila $F_i' = a_{11}F_i - a_{i1}F_1$ i és clar que $\langle F_1, F_i\rangle = \langle F_1, F_i'\rangle$. D'aquí es dedueix fàcilment que $\langle F_1, F_2, \ldots, F_n\rangle = \langle F_1, F_1', \ldots, F_n'\rangle$.

Aquesta és la situació en cadascun dels passos del procés i per tant la dimensió de l'espai generat per les files no varia.

4.6 El rang a partir dels menors

Definició 4.6.1 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Un* menor *d'ordre r de A és la matriu que s'obté en seleccionar r files i r columnes de la matriu A.*

Observem que aquesta definició només té sentit si $r \leq \min\{m, n\}$.

De fet, podem pensar que el que fem és primer construir una nova matriu seleccionant r files de A i a continuació construïm una nova matriu seleccionant r columnes d'aquesta matriu.

Per exemple, donada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

si elegim les files 2 i 3 i les columnes 1 i 2 obtenim el menor

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

i si elegim les files 1 i 2 i les columnes 3 i 4 obtenim el menor

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.6.2 (Rang per menors) *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. El rang de A és igual a r si i només si r és l'ordre més gran dels menors de A amb determinant diferent de zero.*

Demostració. Estudiem la situació sobre una matriu esglaonada. Per exemple

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & c & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

amb a, b, c diferents de zero. Té tres files no nul·les, per tant el rang és 3.

Mirem els menors.

El menor format per les files i columnes del pivots, que en aquest cas és el format per les tres primeres files i les tres primeres columnes, té determinant diferent de zero, ja que

$$\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0$$

Ara bé, qualsevol altre menor 4×4 contindrà o bé una tros de la fila 4 o bé un tros de la fila cinquena. En ambdós casos aquest determinant 4×4 tindrà una fila de zeros i per tant serà zero. És a dir, hem trobat menors 3×3 diferents de zero, però qualsevol menor 4×4 és zero. Això vol dir que el rang de la matriu donada, que ja sabíem que era 3, coincideix amb l'ordre del menor més gran amb determinant diferent de zero.

Això demostra el teorema quan A està esglaonada. Si A no està esglaonada, s'esglaona, s'aplica l'anterior argument a A esglaonada, i s'observa que si seguim el procés d'esglaonament al revés (és a dir, de A esglaonada fins a A) el menor determinat pels pivots es transforma en un menor de A. Com en el procés d'esglaonament el determinant d'aquest menor no canvia, o com a molt queda multiplicat per un escalar no nul, tenim el resultat.[9] $\square$

Es diu que el rang de A, r, és l'*ordre del major menor no nul.*

[9] Si en el procés d'esglaonament sempre fem transformacions del tipus $F_i \to F_i + \lambda F_j$, el determinant no canvia. Peró quan apareixen pivots diferents de 1, llavors al pivotar estem fem transformacions del tipus $F_i \to \mu F_i + \lambda F_j$, on μ és el pivot, de manera que el determinant queda llavors multiplicat per μ.

Exemple 4.6.3 *Trobeu el rang de la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. El rang de A és 2, ja que el menor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

té determinant diferent de zero, i qualsevol altre menor 3×3 o 4×4 és zero.

També és clar que hi ha dues files (la primera i la quarta) linealment independents (rang per files és 2) i dues columnes (la primera i la quarta) linealment independents (rang per files és 2). $\Diamond$

Exemple 4.6.4 *Trobeu el major menor no nul de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 11 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Solució. Esglaonem.

$$\text{Pivotem sobre el terme } a_{11} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pivotem sobre el terme } a_{23}{}^{10} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Permutem les files res i quatre} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[10] Observeu que el que estem fent és $F_3 \to 2F_3 - 2F_2$ i $F_4 \to 2F_4 - 4F_2$.

El menor no nul de la matriu esglaonada és el menor determinat pels pivots, és a dir, el que obtenim en seleccionar les tres primeres files i les columnes $1, 3$ i 5. Concretament:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Si ara desfem el procés d'esglaonament pas per pas, fins arribar de la matriu esglaonada fins a la matriu original, veiem que les columnes del pivots no les hem tocat, sempre han estat la $1, 3$ i 5. Però les files tres i quatre les hem permutat a l'últim pas, de manera que el menor que busquem a la matriu inicial està format per les columnes $1, 3, 5$ i les files $1, 2, 4$. Concretament

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 14 \\ 1 & 7 & 14 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Corol·lari 4.6.5 *Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Llavors $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^t$. En particular, el $\operatorname{rang} A$ és igual a la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat per les columnes de A.*

Demostració. En transposar una matriu, qualsevol menor queda també transposat, i per tant el seu determinant no canvia. Així, el major menor no nul de A es transforma en el major no nul de A^t, i per tant A i A^t tenen el mateix rang.

La segona part de l'enunciat és conseqüència de que les files de A^t són les columnes de A.

□

Exemple 4.6.6 *El menor format per les files 1 i 2 i les columnes 4 i 5 de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es transforma en el menor format per les columnes 1 i 2 i les files 4 i 5 de

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

les dues matrius tenen rang 2.

En particular la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^5$ generat per les files de A,

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \rangle$$

és igual a la dimensió del subespai de $\mathbb{R}^4$ generat per les files de A^t (columnes de A),

$$\langle \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\diamondsuit$

Exemple 4.6.7 *Trobeu les equacions cartesianes del subespai vectorial de* $\mathbb{R}^4$ *generat per* $u = (1, 2, 3, 4)$ *i* $v = (5, 6, 7, 8)$.

Solució. Si (x, y, z, t) pertany a aquest subespai, el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 2 & 6 & y \\ 3 & 7 & z \\ 4 & 8 & t \end{pmatrix}$$

ha de ser 2, ja que la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres. Esglaonant tenim primerament

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & -8 & z - 3x \\ 0 & 12 & t - 4x \end{pmatrix}$$

i a continuació

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & 0 & -4x + 8y - 4z \\ 0 & 0 & -8x + 12y - 4t \end{pmatrix}$$

Com que les dues files d'aquesta matrius són linealment independents les dues últimes han de ser zero (perquè el rang sigui 2). Per tant, les equacions cartesianes buscades són

$$\begin{aligned} -4x + 8y - 4z &= 0 \\ -8x + 12y - 4t &= 0. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4.7 Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 4.7.1 (Rouché-Frobenius homogeni) *Considerem el sistema homogeni $AX = O$ on $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors el conjunt de solucions és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $d = n - r$ on $r = r(A)$.

Demostració. Per veure que el conjunt de solucions és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ hem de veure que és tancat per la suma i el producte per escalars.

1. Si X, Y són solucions, llavors $X + Y$ és solució. En efecte $A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$.

2. Si X és solució i $\lambda \in \mathbb{R}$ llavors λX és solució. En efecte, $A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda 0 = 0$.

Sigui A' la matriu que obtenim en esglaonar A. Sabem que té r files no nul·les, i per tant r pivots. Sabem que el sistema es resol fàcilment començant per l'equació corresponent a la darrera fila de A'. Però la darrera fila de A' és de la forma

$$\underbrace{(\underbrace{0, \dots, 0, \bullet,}_{r} *, \dots, *,}_{n} \mid 0)$$

on $\bullet$ representa el pivot i $*$ elements arbitraris. Per tant hi ha $n-r$ variables, les corresponents als $*$, que poden prendre el valor que vulguem. Tenim $n-r$ graus de llibertat. $\square$

Exemple 4.7.2 *Trobeu la solució del sistema*

$$\begin{aligned} x + t + 2u + 9w &= 0 \\ y + 3t + u + v + 5w &= 0 \\ z + 3t + v + 2w &= 0 \\ 3t + 7u + 9w &= 0 \end{aligned}$$

Solució. En aquest cas $n = 7$, ja que les variables són x, y, z, t, u, v, w, i $r = 4$ ja que la matriu dels sistema

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

està esglaonada, i per tant les 4 files són linealment independents. Pel teorema de Rouché-Frobenius, sabem que la dimensió del subespai de solucions és $n - r = 7 - 4 = 3$. Però anem a trobar-lo explícitament.

La última fila correspon a l'equació

$$3t + 7u + 0v + 9w = 0,$$

i per tant

$$t = -(7/3)u - 3w.$$

Les tres $(n - r = 7 - 4 = 3)$ variables u, v, w queden lliures.

De la tercera fila obtenim

$$z = -3t - v - 2w = 7u - v + 7w.$$

De la segona fila obtenim

$$y = -3t - u - v - 5w = 6u - v + 4w.$$

De la primera fila obtenim

$$x = -t - 2u - 9w = (1/3)u - 6w.$$

La solució és doncs qualsevol punt de la forma

$$((1/3)u - 6w, 6u - v + 4w, 7u - v + 7w, -(7/3)u - 3w, u, v, w),$$

que podem escriure com

$$u(1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0) + v(0, -1, -1, 0, 0, 1, 0) + w(-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1)$$

Per tant, el conjunt de solucions del sistema és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle (1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0), (0, -1, -1, 0, 0, 1, 0), (-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1) \rangle,$$

que, tal com sabíem per Rouché-Frobenius, té dimensió 3. $\Diamond$

Teorema 4.7.3 *Els vectors $v_1, \dots, v_r$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents si i només si* $\operatorname{rang} A = r$*, on A és la matriu formada per les components d'aquests r vectors.*

Demostració. Escrivim aquests vectors en coordenades (o, equivalentment respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^n$),

$$v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}).$$

Llavors

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{r1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{rn} \end{pmatrix}.$$

Suposem que tenim una combinació lineal d'aquests vectors igual a zero:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} v_{r1} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Això és un sistema *homogeni* de n equacions amb r incògnites (les λ_i) i la seva matriu associada és justament A. Recordem que els sistemes homogenis admeten sempre com a mínim la solució $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Per Rouché-Frobenius sabem que aquesta és la única solució (i que per tant els vectors són linealment independents) si i només si *el número de variables menys el rang de la matriu* (el número de graus de llibertat) és zero. És a dir, si i només si $r = \operatorname{rang} A$. $\square$

Corol·lari 4.7.4 *Els vectors $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ són base de $\mathbb{R}^n$ si i només si* $\det A \neq 0$*, on A és la matriu formada per les components d'aquests n vectors.*

Demostració. Sabem que n vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independents, són base (corol·lari 4.3.19). I és clar que $\operatorname{rang} A = n$ si i només si $\det A \neq 0$. $\square$

Exemple 4.7.5 *Demostreu que els vectors $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 1, 3, 6)$, $w = (5, 3, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$ són linealment independents.*

Solució. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang 3, ja que hi ha un menor 3×3 diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

(I en aquesta matriu no hi ha menors 4×4). Pel teorema anterior, aquests vectors són linealment independents. $\Diamond$

Exemple 4.7.6 *Demostreu que els vectors* $u = (1, 2, 3, 4)$*,* $v = (0, 1, 3, 6)$*,* $w = (2, 7, 15, 28)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *no són linealment independents.*

Solució. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & 26 \end{pmatrix}$$

té rang 2, ja que tots els menors 3×3 són iguals a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 26 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & 26 \end{vmatrix} = 0.$$

En canvi, hi ha menors 2×2 diferents de zero. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per tant, el rang és dos, i, pel teorema anterior, aquests vectors són linealment dependents. $\Diamond$

Teorema 4.7.7 (Rouché-Frobenius, cas general) *Considerem el sistema* $AX = B$*, on* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El sistema té solució si i només si $r(A) = r(A|B)$*. En aquest cas tota solució* Z *és de la forma*

$$Z = X_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i X_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

on X_0 *és una solució particular de* $AX = B$ *i* $X_i, i = 1, \ldots, n-r$ *és una base de l'espai de solucions del sistema homogeni* $AX = O$*.*

Demostració. Que el sistema té solució si i només si $r(A) = r(A|B)$ és conseqüència del teorema 3.2.5 i la invariància del rang en el procés d'esglaonament.

La segona part és només la observació de que si X_0 i Z són solució del sistema $AX = B$, llavors $Z - X_0$ és solució del sistema homogeni $AX = 0$, ja que

$$A(Z - X_0) = AZ - AX_0 = B - B = 0.$$

Per tant, $Z - X_0$ és combinació lineal d'una base de l'espai de solucions del sistema homogeni.

Exemple 4.7.8 *Trobeu la solució del sistema* $AX = B$ *amb*

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 9 & 40 \end{array}\right)$$

Solució. La solució del sistema homogeni $AX = 0$ està donada a l'exemple anterior 4.7.2. Per trobar una solució particular del no homogeni podem fer, per exemple, $u = v = w = 0$ i obtenim (començant per la darrera fila),

$$\begin{aligned} t &= 40/3 \\ z &= -10 \\ y &= -20 \\ x &= -10/3 \end{aligned}$$

De manera que la solució general de $AX = B$ és

$$\begin{aligned} Z &= (-10/3, -20, -10, 40/3, 0, 0, 0) + u(1/3, 6, 7, -7/3, 1, 0, 0) \\ &= v(0, -1, -1, 0, 0, 1, 0) + w(-6, 4, 7, -3, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

podent prendre, u, v, w qualsevol valor. $\Diamond$

4.8 Cramer

El sistema $AX = B$ es diu de Cramer quan A és una matriu quadrada amb $\det A \neq 0$.

Denotem per A_i la columna i de A. Llavors

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k A_k = B.$$

És a dir, la columna B és combinació lineal de les columnes de A, essent els coeficients x_i una solució del sistema.

Considerem

$$\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_i, \dots, A_n)$$

és a dir el determinant de la matriu que s'obté en substituir en A la seva i-èssima columna A_i per B.

$$\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k A_k, A_i, \dots, A_n)$$

Però com que el determinant és lineal sobre les columnes i el determinant de matrius que tenen dues columnes iguals és zero, tenim

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_i, \dots, A_n) &= x_i \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_i, \dots, A_n) \\ &= x_i \det(A) \end{aligned}$$

O, equivalentment

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_i, \dots, A_n)}{\det(A)}}$$

Exemple 4.8.1 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

Solució.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 28/5, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -22/5.$$

Observem que aquest sistema es pot escriure com

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

En particular

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 3x + 2y \\ 1 & x - y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3x \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2y \\ 1 & -y \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= y \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si ara aïllem la y obtenim la fórmula de Cramer.

També

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3x + 2y & 2 \\ x - y & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3x & 2 \\ x & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2y & 2 \\ -y & -1 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

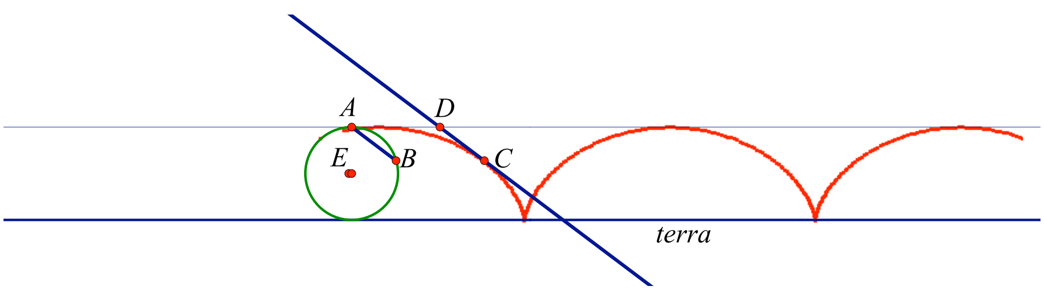
Si ara aïllem la x obtenim la fórmula de Cramer.

Capítol 5

Derivades i integrals

Un dels problemes fonamentals que va donar lloc al naixement del càlcul diferencial va ser el càlcul de tangents a diverses corbes. La més fonamental va ser la cicloide, és a dir la corba descrita per un punt d'una roda quan aquesta gira sobre un terra pla. Per exemple la trajectòria descrita per la vàlvula d'una roda de bicicleta.

Per exemple, molt abans dels creadors del càlcul diferencial (Newton i Leibnitz), se sabia (Wren 1670) que la tangent a la cicloide en el punt C es traçava de la manera següent: Tracem la paral·lela al terra per C. Aquesta talla la roda (en la seva posició inicial) en el punt B. A continuació unim el punt més alt de la roda, A, amb B. Doncs bé, la tangent a la cicloide per C és la recta per C paral·lela a AB.



També van ser capaços de demostrar, sense derivades ni integrals, que la longitud de la cicloide entre els punts A i C és justament $2DC$.

Aquests dos resultats tan elegants i sorprenents ja fan veure que els matemàtics pre-Newtonians havien treballat a fons la cicloide. Però els mètodes usats per a la cicloide no els ajudaven gaire per a resoldre el mateix tipus de problema sobre una altra corba.

La gràcia del càlcul diferencial va ser, entre d'altres, la unificació de problemes aparentment diferents en un sol problema: el càlcul de derivades (o integrals).

Això va simplificar de tal manera els problemes que va fer que qualsevol matemàtic podés resoldre problemes que abans tan sols podien resoldre els grans matemàtics: es va democratitzar el Càlcul.

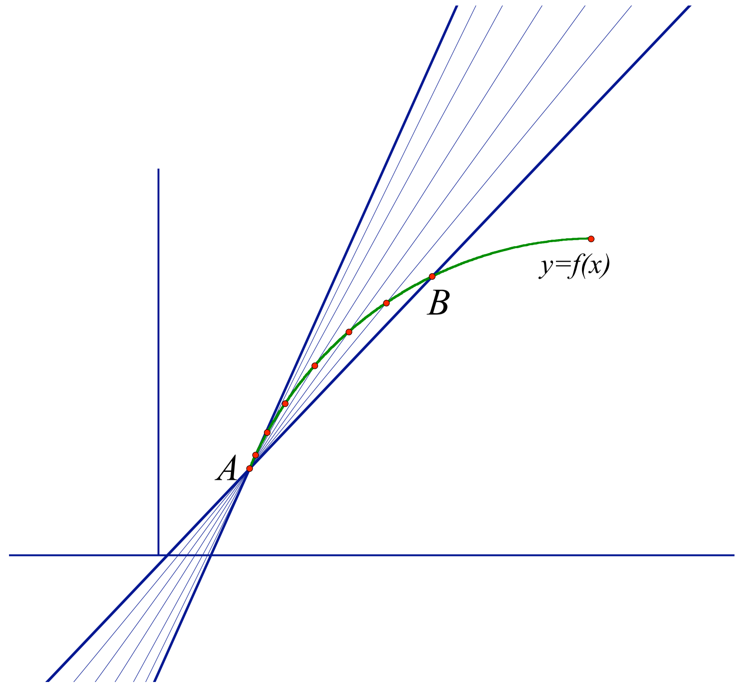
És un procés semblant al que va passar amb la introducció de coordenades a la geometria: es va posar la geometria sintètica a l'abast de tothom.

Però es va pagar un preu: cap matemàtic actual[1] coneix les corbes una per una com les coneixien els nostres precursors!. Derivar i integrar és com usar un mena de caixa negra en la que entra un problema i surt la solució, però si no s'analitza detalladament, no se saps molt bé què ha passat. L'exemple anterior de la cicloide és paradigmàtic: avui tothom sap calcular la longitud AC però quasi ningú s'adona que el resultat numèric que obté integrant és $2DC$.

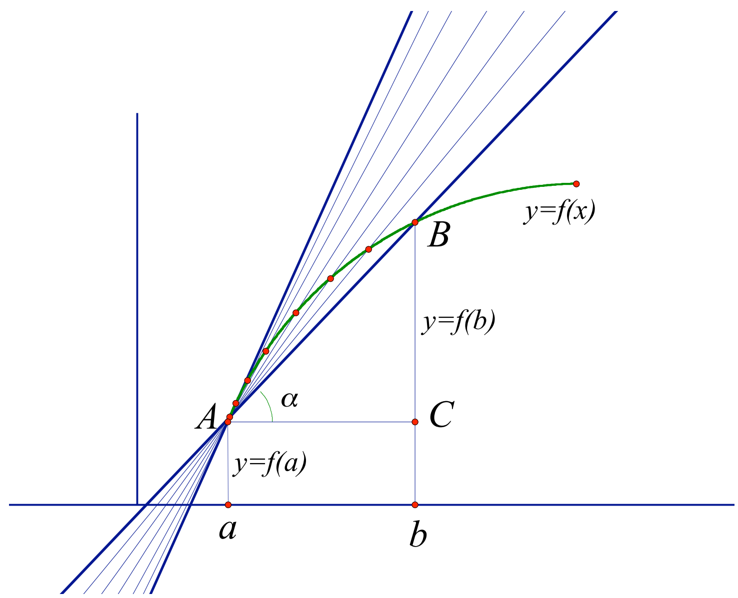
5.1 Tangent a una gràfica

La tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ en el punt A és la recta que s'obté com posició límit de les rectes AB, on B és un punt sobre la corba que es va apropant a A.

[1] Potser exagero una mica, però no massa.



Si denotem per a l'abscissa del punt A, i per b l'abscissa del punt B, és a dir $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$, el pendent de la recta AB val



$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Per tant, el penent de la tangent a la gràfica en el punt A val

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es diu que $f'(a)$ és la derivada de la funció $y = f(x)$ en el punt A.

També és usual denotar $h = b - a$ de manera que també tenim

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

5.2 Velocitat mitjana

Si ens desplacem en cotxe entre dues ciutats distants entre si 100 km i triguem 1 hora, diem que la nostra velocitat mitjana ha estat de 100 km/h. Estem usant la definició de velocitat que ens diu

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}}$$

Denotem per $s(t)$ l'espai recorregut pel cotxe quan fa t hores que ha sortit de la primera ciutat. Així $s(0) = 0$ i $s(1) = 100$.

Quina velocitat mitjana hem portat entre els instants t_0 i $t_1 = t_0 + h$?

Novament

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A quina velocitat anàvem justament quant $t = t_0$? Aquest és el concepte de *velocitat instantània*. La idea és que la velocitat instantània en $t = t_0$ és la velocitat mitjana entre $t = t_0$ i $t = t_1$ quan t_1 és molt i molt pròxim a t_0.

Escriurem

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Equivalentment

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}}$$

Així doncs, la *velocitat instantània és la derivada de l'espai respecte del temps.*

Tenim definida dons una funció t, $v(t)$, anomenada velocitat instantània o simplement velocitat, donada per

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

5.3 Derivades i integrals d'algunes funcions

En aquesta secció recordem breument i sense demostració les derivades i integrals d'algunes funcions d'ús freqüent.

Taula 1	Funció	Derivada
	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \sin x$	$y' = \cos x$

Usant la regla de la cadena, que recordem en el peu de pàgina de la pàgina 127, tenim que si $f(x)$ és una funció de x derivable, llavors

Taula 2	Funció	Derivada
	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)e^{f(x)}$
	$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
	$y = \sin f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$

La primitiva (o integral) d'una funció $f(x)$ és una altra funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Així que per trobar primitives de funcions només hem de llegir les dues taules anteriors de dreta a esquerra: les primitives de les funcions que apareixen a la dreta són les respectives funcions que apareixen a l'esquerra.

La primitiva de $f(x)$ es denota per $F(x) = \int f(x)dx$. Potser la notació $F(x) = \int f(x)$ sembla més adequada en aquest moment, però per diverses raons, entre elles raons històriques usem la notació anterior, que es llegeix *integral de $f(x)$ diferencial de x.*

Taula 3	Funció	Primitiva
	$y = nx^{n-1}$	$\displaystyle\int nx^{n-1}\,dx = x^n + C$
	$y = e^x$	$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
	$y = \frac{1}{x}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
	$y = \cos x$	$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Observem que la integral de la primera fila s'escriu també com

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C,$$

fórmula vàlida per a tot $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$. Per això la tercera fila de la taula no és un cas particular de la primera.

Funció	Primitiva
$y = nf(x)^{n-1}f'(x)$	$\int nf(x)^{n-1}f'(x)\ dx = f(x)^n + C$
$y = f'(x)e^{f(x)}$	$\int f'(x)e^{f(x)}\ dx = e^{f(x)} + C$
$y = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln f(x) + C$
$y = f'(x)\cos f(x)$	$\int f'(x)\cos f(x)\ dx = \sin f(x) + C$

Taula 4

Observem que la integral de la primera fila s'escriu també com

$$\int f(x)^{n-1}f'(x)\ dx = \frac{f(x)^n}{n} + C,$$

fórmula vàlida per a tot $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$. Per això la tercera fila de la taula no és un cas particular de la primera.

A la última columna hi hem sumat a cada funció una constant ja que la derivada d'una constant és zero. El fet de que una funció tingui una única derivada però moltes primitives jugarà un paper important més endavant en l'estudi de les equacions diferencials.

Hi ha molts mètodes per calcular primitives que no explicarem aquí. La majoria es basen en transformar el problema en el càlcul d'alguna de les quatre primitives anteriors.

Programes com Mapple calculen força bé primitives elementals. Però el mètode més potent que els enginyers i científics en general han de saber és el mètode PAMA.[2]

[2] *Pregunta al matemàtic adequat.* Fins al moment els matemàtics, a diferència de la majoria de professions, no cobren pels seus coneixements, es consideren ben pagats pel repte que representa per a ells resoldre un problema. Si us donen les gràcies per haver proposat un càlcul tan interessant només heu de dir: *de res.*

Exemple 5.3.1 *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$

Solució. Mirem si aquesta funció apareix a la columna de la dreta de la taulea 4. Posem $f(x) = 2x+1$, de manera que $f'(x) = 2$. Llavors

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int f(x)^{1/2}\, dx$$

Comparant amb

$$\int n f(x)^{n-1} f'(x)\, dx$$

que apareix a la taula 4, escrivim

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1}\, dx &= \int f(x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{3}[\int \frac{3}{2} f(x)^{1/2} f'(x)\, dx] \\ &= \frac{1}{3} f(x)^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

5.4 Mètode del canvi de variable

Observem que podem passar de la taula 4 a la taula 3 de la manera següent: Posem

$$\begin{aligned} f(x) &= t \\ f'(x)dx &= dt \end{aligned}$$

La segona fila s'obté derivant la primera igualtat respecte de x:

$$f'(x) = \frac{dt}{dx}$$

però que escrivim com $f'(x)dx = dt$, és a dir, manipulem el signe de derivació $\frac{dt}{dx}$ com si fos un quocient. Aquest és el motiu d'usar la notació $\int f(x)\, dx$ en lloc de $\int f(x)$.

Amb aquest canvi de variable transformem la segona columna de la taula 4 en la segona columna de la taula 3.

$$\int n f(x)^{n-1} f'(x)\, dx = \int n t^{n-1} dt = t^n + C = f(x)^n + C$$

$$\int f'(x) e^{f(x)}\, dx = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln f(x) + C$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin f(x) + C$$

Exemple 5.4.1 *Trobeu una primitiva de* $\sqrt{2x+1}$

Solució. Posem

$$\begin{aligned} 2x+1 &= t \\ 2\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int (2x+1)^{1/2}dx = \int t^{1/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

◊

Exemple 5.4.2 *Trobeu una primitiva de* xe^{x^2}*.*

Solució. Posem

$$\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

◊

Exemple 5.4.3 *Trobeu una primitiva de* $\tan x$*.*

Solució. Posem

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int tanx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C.$$

◊

Exemple 5.4.4 *Trobeu una primitiva de* $\cos(3x+1)$.

Solució. Posem

$$\begin{aligned} 3x+1 &= t \\ 3\,dx &= dt \end{aligned}$$

i substituïm

$$\int \cos(3x+1)\,dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + C.$$

$\Diamond$

En canvi, petites modificacions de les funcions anteriors, com ara $\sqrt{2x^2+1}$, $\cos(3x^2+1)$, $\tan x^2$, e^{x^2}, donen lloc a funcions difícilment integrables. La última d'elles fa més de cent anys que es va demostrar que la seva integral no és expressable per funcions elementals. Mireu com de nerviós es posa el Mapple quan li fem fer aquestes integrals!

> $int(tan(x \cdot x), x);$

$$-\mathrm{I}\,x - \mathrm{I}\int -\frac{2}{\left(e^{(\mathrm{I}x^2)}\right)^2+1}\,dx \qquad (1)$$

> $int(exp(x \cdot x), x);$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\mathrm{I}\,x) \qquad (2)$$

> $int(cos(3 \cdot x \cdot x + 1), x);$

$$\frac{1}{6}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{3}\left(\cos(1)\,\mathrm{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,x}{\sqrt{\pi}}\right) - \sin(1)\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)\right) \qquad (3)$$

> $int(\mathrm{sqrt}(2x\string^2 + 1), x);$

$$\frac{1}{2}\,x\sqrt{2\,x^2+1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{2}\,x\right) \qquad (4)$$

>

Si voleu anar més lluny, és un bon moment per usar el mètode PAMA.

Capítol 6

Equacions diferencials de primer ordre

6.1 Definició i teorema d'existència i unicitat

Una expressió del tipus
$$y' = f(x, y)$$
on f és una funció diferenciable de dues variables (que anomenem x, y) es diu que és una equació diferencial de primer ordre. De moment y' és només un símbol.

Per exemple,

$$\begin{aligned} y' &= x \\ y' &= x + y \\ y' &= y^2 + \sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

són equacions diferencials de primer ordre.

Resoldre una equació diferencial de primer ordre $y' = f(x, y)$ vol dir trobar totes les funcions $y = y(x)$ tals que en substituir la variable y per $y(x)$, la variable y' per $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, obtinguem una identitat certa per a tots els valors de x. És a dir, s'ha de complir

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Així, resoldre les anteriors equacions diferencials vol dir trobar funcions $y = y(x)$ tals que

$$\begin{aligned} y'(x) &= x \\ y'(x) &= x + y(x) \\ y'(x) &= y^2(x) + \sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per exemple, $y = e^x$ és una solució de l'equació diferencial

$$y' = y,$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$. De fet, qualsevol funció del tipus $y = ke^x$ és solució de $y' = y$.

També, $y = \frac{1}{2}x^2$ és una solució de l'equació diferencial

$$y' = x,$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2) = x$. De fet, qualsevol funció del tipus $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ és solució de $y' = x$.

Aquests dos exemples ens fan pensar que les equacions diferencials tenen moltes solucions. Tenim concretament el resultat següent.

Teorema 6.1.1 (Existència i unicitat) *L'equació diferencial de primer ordre $y' = f(x, y)$ té infinites solucions, però només una $y = y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$.*

Comentaris. Hem de suposar que la funció de dues variables $f(x, y)$ és *prou bona*. Podem pensar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, però podria no estar definida sobre tot $\mathbb{R}^2$. Per exemple, $f(x, y) = \frac{y}{x}$ no està definida quan $x = 0$.

Suposarem que és derivable respecte cadascuna de les dues variables, i,e, si fixem x és derivable respecte y, i si fixem y és derivable respecte x.

A més el valors x_0, y_0 que apareixen a la condició inicial han de pertànyer al domini de definició de f.

Tampoc especifiquem quin és el domini de definició de la funció solució $y(x)$.

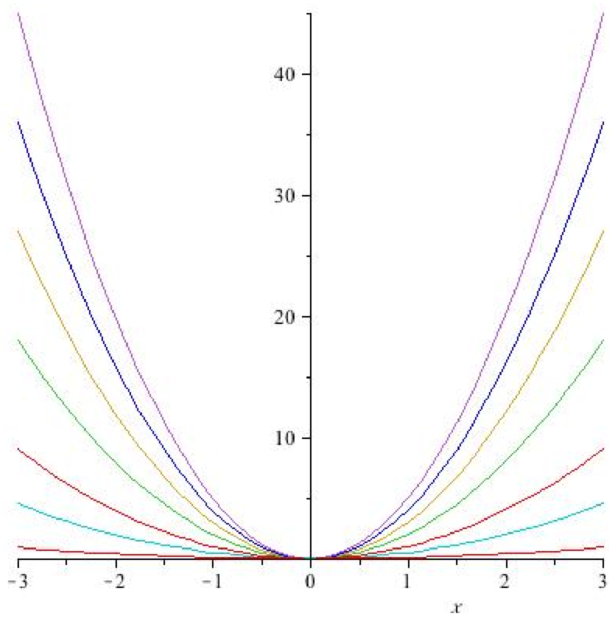
Identificant la funció $y = y(x)$ amb la seva gràfica, el teorema diu que hi ha infinites corbes del pla que són solucions de l'equació diferencial $y' = f(x, y)$, però per cada punt (x_0, y_0) del pla n'hi passa només una.

Per exemple, l'equació diferencial

$$y' = \frac{2y}{x}$$

admet les infinites solucions $y(x) = kx^2$ (comproveu-ho). Infinites perquè n'hi ha una per a cada valor de k. Però és clar que per cada punt (x_0, y_0) del pla passa una única paràbola. Per exemple, si volem que passi pel punt $(4, 32)$ hem d'imposar $32 = k4^2$. Tenim $k = 2$, és a dir $y(x) = 2x^2$ és la única solució de l'equació diferencial $y' = \frac{2y}{x}$ tal que $y(4) = 32$.

Queda exclòs d'aquest comentari tot punt del pla amb $x = 0$ (l'eix de les x) ja que aquest eix no pertany al domini de definició de la funció $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ que determina l'equació diferencial. Observeu en el dibuix com pel punt $(0, 0)$ passen infinites paràboles. Sembla que això vagi en contra de la *unicitat* però no és així, pel que estem dient.



6.2 Interpretació geomètrica

Ja hem vist que resoldre una equació diferencial és trobar una funció $y = y(x)$ que compleixi la condició $y'(x) = f(x, y(x))$

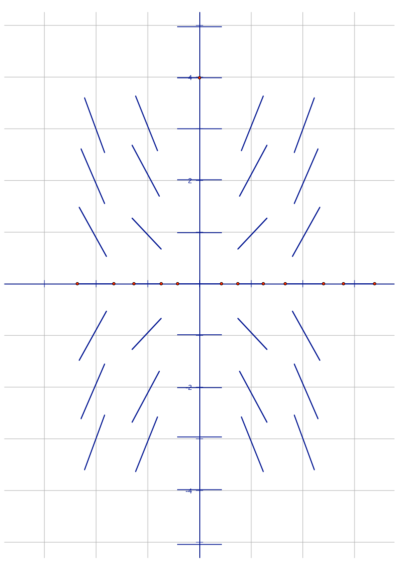
Si identifiquem les funcions amb les seves gràfiques, sabem que $y'(x_0)$ és el pendent de la gràfica de $y = y(x)$ en el punt d'abscissa $x = x_0$. O, equivalentment, en el punt $(x_0, y(x_0))$.

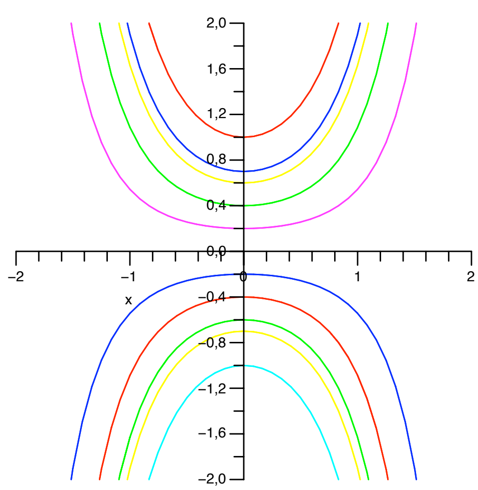
> *Per tant, trobar una solució de* $y' = f(x, y)$ *que compleixi la* condició inicial $y(x_0) = y_0$ *vol dir trobar una corba del pla* $\mathbb{R}^2$*, parametritzada per* x*,* $(x, y(x))$*, (és a dir, la gràfica d'un funció) tal que en el punt* (x_0, y_0) *tingui pendent donada per* $f(x_0, y_0)$*.*

Per exemple, resoldre l'equació diferencial $y' = xy$, amb la condició inicial (x_0, y_0), vol dir trobar corbes $(x, y(x))$ tals que la seva pendent en el punt (x_0, y_0) valgui x_0y_0.

Per exemple, si $x_0 = 0$, sigui qui sigui y_0, les corbes que busquem tenen pendent $0.y_0 = 0$ en $(0, y_0)$. És a dir, tallen l'eix de les $y's$ amb pendent zero. Si $x_0 = 1$, sigui qui sigui y_0, les corbes que busquem tenen pendent $1.y_0 = y_0$ en $(1, y_0)$. És a dir, tallen la recta $x = 1$ amb pendents iguals a la ordenada del punt de tall. Si dibuixem una quadrícula de $\mathbb{R}^2$ i en cada punt (x_0, y_0) de la quadrícula hi dibuixem un petit segment de pendent x_0y_0 ens fem una idea de com han de ser les corbes solució.

A la figura es veu primer aquest esquema i a continuació la veritable solució d'aquesta equació diferencial, formada per les infinites corbes $y = ke^{x^2/2}$, vegeu l'exercici 6.3.1.



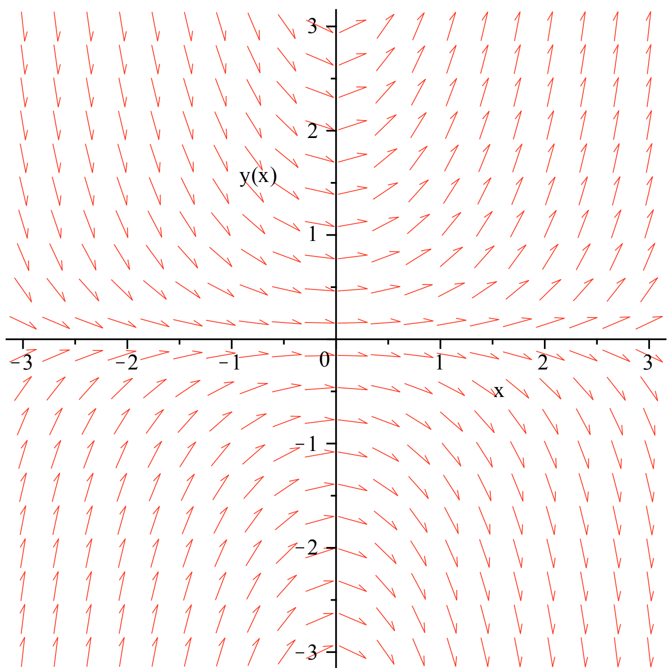


O directament amb Maple

```
> with(DEtools):
> equacio := diff(y(x), x) = x·y(x);
```

$$equacio := \frac{d}{dx} y(x) = x\, y(x) \tag{1}$$

```
> DEplot(equacio, y(x), x=-3..3, y=-3..3);
```




```
>
```

6.3 Equacions de variables separables

En el cas particular de que la funció $f(x, y)$ que defineix l'equació diferencial, sigui producte (o quocient[1]) de dues funcions, una de x i una altre de y, l'equació és pot resoldre fàcilment per l'anomenat *mètode de separació de variables*.

Suposem

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Resoldre aquesta equació diferencial vol dir trobar una funció $y = y(x)$ tal que

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))},$$

és a dir

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x).$$

Simplement comparant amb la regla de la cadena[2] veiem que el primer terme és la derivada de la funció composta $H(y(x))$ on $H = H(y)$ és una

[1]El quocient de dos nombres es pot pensar com el producte d'un d'ells per l'nvers de l'altre, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

[2]La *regla de la cadena* diu que si tenim una funció d'una variable $H(y)$

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & H(y) \end{array}$$

però la variable y depèn al seu torn d'una altre variable x, $y = y(x)$, llavors la derivada de la funció composta $H(y(x))$ està donada per

$$\boxed{(H \circ y)'(x) = H'(y(x)) \cdot y'(x).}$$

Més concretament

$$\frac{d(H(y(x)))}{dx} = \frac{dH}{dy}(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}.$$

La notació $\dfrac{dH}{dy}(y(x))$ vol dir derivar H respecte de y i a continuació substituir en el resultat y per $y(x)$. Abusant de la notació la regla de la cadena s'escriu com

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

fàcil de recordar ja que només "multipliquem" i "dividim" per dy.

primitiva de $h(y)$, i.e. $H'(y) = h(y)$ o

$$H(y) = \int h(y)dy.$$

Tenim doncs

$$\frac{H(y(x))}{dx} = g(x)$$

Per tant, llevat de constant tenim

$$H(y(x)) = \int g(x)dx.$$

Equivalentment

$$\left(\int h(y)dy\right)(x) = \int g(x)dx$$

La notació de l'esquerra vol dir calcular $\int h(y)dy$ i a la funció que obtinguem substituir y per $y(x)$.

Si tornem a l'equació inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

veiem que tractant el primer terme com un quocient de diferencials (i no com un signe únic de derivació $\frac{d}{dx}$) l'anterior igualtat dóna

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

que integrant a cada costat (i canviant y per $y(x)$) ens dóna el mateix resultat que l'obtingut rigorosament usant la regla de la cadena.

Per resoldre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

posarem a un costat les y i dy i a l'altre les x i dx,

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

i integrarem a cada costat

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

Exemple 6.3.1 *Resoleu l'equació diferencial $y' = xy$.*

Solució. Escrivim
$$\frac{dy}{dx} = xy$$
i separem variables
$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$
Integrant als dos costats, tenim
$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1; \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$
Per tant
$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_3, \qquad C_3 = C_2 - C_1,$$
d'on
$$|y| = C_4\,e^{x^2/2}, \qquad C_4 = e^{C_3}.$$
Observem que C_4 és sempre positiva. Però el que busquem és y, i no $|y|$. Com que la diferència està només en el signe podem escriure (canviant com sempre y per $y(x)$)
$$y(x) = ke^{x^2/2}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$
$\Diamond$

Exemple 6.3.2 (Refredament d'un cos) *Suposem que la temperatura de l'aula és de* 20 *graus. Situem un petit objecte sobre la taula a* 100 *graus (amb una planxa de ferro a sota per no cremar la taula i evitar així que el degà s'enfadi). Suposem que al cap de* 20 *minuts la temperatura de l'objecte és de* 60 *graus. Trobeu la temperatura del cos al cap de* 30 *minuts. Quant trigarà en estar a* 30 *graus?*

Informació addicional. *La llei de Newton de refredament d'un cos diu que* un cos es refreda a una velocitat proporcional a la diferència de temperatura entre el propi cos i l'ambient.

Solució. Sigui $T(t)$ la temperatura del cos a l'instant t. La llei de Newton diu
$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - 20), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Separant variables
$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt.$$
Integrant
$$\ln(T-20) = kt + C,$$
equivalentment
$$T(t) = 20 + ae^{kt}, \quad a = e^C.$$

Tenim dues constants desconegudes: a i k. La k depèn del material, ja que hi ha materials que es refreden més ràpid que altres, i a és una constant que ha aparegut en integrar.

Per tal de determinar-les usarem tota la informació que ens dóna el problema.

La temperatura del cos en el moment de introduir-lo a l'aula és de 100 graus. Això vol dir

$$T(0) = 100 = 20 + ae^{k0} = 20 + a,$$

i per tant $a = 80$.

Al cap de 20 minuts la temperatura del cos és de 60 graus. Això vol dir

$$T(20) = 60 = 20 + 80e^{20k}.$$

Per tant
$$e^{20k} = \frac{1}{2}$$
D'aquí deduïm directament
$$k = \frac{\ln 0.5}{20},$$
però és millor no aïllar k sinó e^k que és el que ens farà falta més endavant. Com que
$$e^{20k} = (e^k)^{20}$$
tenim que
$$e^k = (0.5)^{\frac{1}{20}}$$

Així

$$T(t) = 20 + 80e^{kt} = 20 + 80(e^k)^t = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{t}{20}}$$

Observem que quan t es fa molt gran, $(0.5)^{\frac{t}{20}}$ es fa molt petit, i la temperatura del cos tendeix a 20 graus, és a dir, tendeix a igualar-se amb la temperatura de l'aula, com era de preveure sense necessitat de fer cap càlcul.

La temperatura del cos al cap de 30 minuts és

$$T(t) = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{30}{20}} \simeq 48,28 \text{ graus.}$$

Finalment, perquè sigui $T(t) = 30$ ha de ser

$$30 = 20 + 80\,(0.5)^{\frac{t}{20}}$$

és a dir

$$\frac{1}{8} = (0.5)^{\frac{t}{20}}.$$

Prenent logaritmes obtenim finalment

$$t = 60 \text{ minuts.}$$

$\Diamond$

Exemple 6.3.3 (Mort del forense) *La sala de dissecció es manté a una temperatura constant de* 5 *graus. El forense es queda sol treballant per la nit. L'endemà a les* 10 *del matí, l'ajudant del forense arriba a la sala i es troba el forense mort. Comprova que el cadàver està a* 23 *graus.*

A les 12 *arriben els mossos d'esquadra i comproven que el cadàver està a* 18.5 *graus. A quina hora va morir el forense?*

Informació addicional. *Suposarem que el forense estava a* 37 *graus de temperatura just abans de morir.*

Solució. Sigui $T(t)$ la temperatura del cos del forense a l'instant t. Comencem a contar el temps en el moment de la mort, de manera que tindrem $T(0) = 37$. Si entre la mort i les 10 del matí passa un temps (encara desconegut per nosaltres) t_0, tenim $T(t_0) = 23$ i $T(t_0 + 2) = 18.5$.

Per la llei de Newton del refredament d'un cos tenim

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 5)$$

Separant variables

$$\frac{dT}{T-5} = k\,dt.$$

Integrant
$$\ln(T-5) = kt + C,$$
equivalentment
$$T(t) = 5 + ae^{kt}, \quad a = e^C.$$
Com que $T(0) = 37$, tenim $37 = 5 + ae^0$, és a dir, $a = 32$. Així

$$\begin{array}{rcl} T(t_0) & = & 23 \ = 5 + 32e^{kt_0} \\ T(t_0+2) & = & 18.5 \ = 5 + 32e^{k(t_0+2)} \end{array}$$

Sistema de dues equacions amb dues incògnites, t_0 i k.

De la primera deduïm
$$e^{kt_0} = \frac{9}{16}$$
i de la segona
$$13.5 = 32 \cdot \frac{9}{16} \cdot e^{2k}$$
Aïllant obtenim
$$k = -0.1438$$
Per tant,
$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{18}{32} = 4.00$$
És a dir, el forense va morir a les 6 del matí. $\Diamond$

Exemple 6.3.4 (Elements radioactius) *Suposem que inicialment tenim* 100 *grams d'una substància radioactiva. Al cap de* 6 *hores la mostra ha disminuït un* 4%. *De quin material es tracta? Quina quantitat de material tindrem al cap de* 24 *hores?*

Informació addicional. *Hauríem de tenir a ma una taula amb la vida mitja dels materials radioactius.*

Solució. Sigui $x(t)$ la quantitat de material a l'instant t, de manera que $x(0) = 100$ grams. Com que els materials radioactius disminueixen a una velocitat proporcional a la quantitat de material existent en cada moment tenim
$$x'(t) = kx(t),$$

equació diferencial de variables separables

$$\frac{dx}{dt} = kx(x)$$

que es pot escriure com

$$\frac{dx}{x} = k\,dt,$$

que integrant dóna

$$\ln(x(t)) = kt + b, \quad b \text{ una constant.}$$

Per tant,

$$x(t) = e^{kt+b} = ce^{kt}, \quad c = e^b \text{ una constant positiva.}$$

Per calcular c posem

$$100 = x(0) = ce^{k0} = c.$$

Per calcular k posem

$$96 = x(6) = ce^{6k} = 100e^{6k}.$$

Aquesta última equació expressa que al cap de 6 hores ($t = 6$) la matèria a disminuït un 4%, i.e. $x(6) = 100 - 4\%(100) = 96$. Així,

$$k = \frac{1}{6}\ln\frac{96}{100}$$

Com que el logaritme neperià d'un número més petit que 1 és negatiu, la constant k és negativa.

Està molt bé conèixer la k, però si som una mica previsors veurem que més que necessitar conèixer k el que realment necessitem és conèixer e^k. Com que

$$\frac{96}{100} = e^{6k}$$

tenim

$$e^k = (\frac{96}{100})^{1/6} = \sqrt[6]{\frac{96}{100}}$$

Així l'equació $x(t) = ce^{kt}$ s'escriu com

$$\boxed{x(t) = 100(e^k)^t = 100(\tfrac{96}{100})^{t/6}.}$$

Per tant, al cap de 24 hores tindrem una quantitat de material igual a

$$x(24) = 100(\frac{96}{100})^4 = 84,93 \text{ grams}$$

I la vida mitja T és el temps que triga en reduïr-se a la meitat. És a dir,

$$x(T) = 100(\frac{96}{100})^{T/6} = \frac{1}{2}100.$$

Deduïm,

$$2(\frac{96}{100})^{T/6} = 1.$$

$$\frac{T}{6}\ln(\frac{96}{100}) = \ln\frac{1}{2}.$$

I per tant,

$$T = 6\ \frac{-0.6931}{-0.0408} = 101,92 \text{ hores} \simeq 4 \text{ dies i unes hores.}$$

Un material que té una vida mitja de quasi 4 dies és el *radon* 222. Per tant, és molt probable que el nostre material inicial sigui *radon* 222. Hauríem de saber si hi ha altres materials amb una semblant vida mitja. Hi són?

Exemple 6.3.5 (Datació) [3]*L'any* 1950 *es va comprovar que el* C_{14} *present al carbó d'alzina usat per pintar les pintures paleolítiques de Lascaux, es desintegrava a raó de* 0.97 *desintegracions per gram i minut. Quants anys tenen aquestes pintures?*

Informació addicional necessària*: 1) El* C_{14} *present a la fusta viva es desintegra a raó de* 6.68 *desintegracions per gram i minut. 2) La vida mitja del* C_{14} *és d'uns* 5568 *anys.*

Solució. Denotem per $x(t)$ la quantitat de carboni 14 present en el carbó d'alzina a l'instant t. Prenem com origen del temps el moment en que es mata la fusta, és a dir, quan es fa el carbó, que identificarem amb el moment en que es dibuixen les pintures de Lascaux.

Com que els materials radioactius es desintegren a una velocitat proporcional a la quantitat de material en cada moment, tenim

$$x'(t) = kx(t).$$

[3]Tret del llibre *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, de M. Braun.

Resolent, obtenim

$$x(t) = ae^{kt}, \quad a, k \in \mathbb{R} \quad \text{constants desconegudes.}$$

La nostra incògnita és el període de temps T transcorregut des de l'inici ($t = 0$) fins el 1950.

Sabem $x'(T) = 0.97$ i $x'(0) = 6.68$ (ja que quan $t = 0$ la fusta encara estava viva.)

Derivant $x(t) = ae^{kt}$ tenim $x'(t) = ake^{kt}$ i per tant

$$\begin{aligned} 0.97 &= ake^{kT} \\ 6.68 &= ak \end{aligned}$$

Dividint tenim

$$\frac{0.97}{6.68} = e^{kT}$$

Així,

$$T = \frac{1}{k} \ln \frac{0.97}{6.68}.$$

Per trobar k hem d'usar la informació sobre la vida mitja:

$$x(5568) = \frac{1}{2} x(0) = \frac{1}{2} a = ae^{5568\,k}.$$

Simplificant a i prenent logaritmes

$$\ln \frac{1}{2} = 5568\,k$$

Per tant

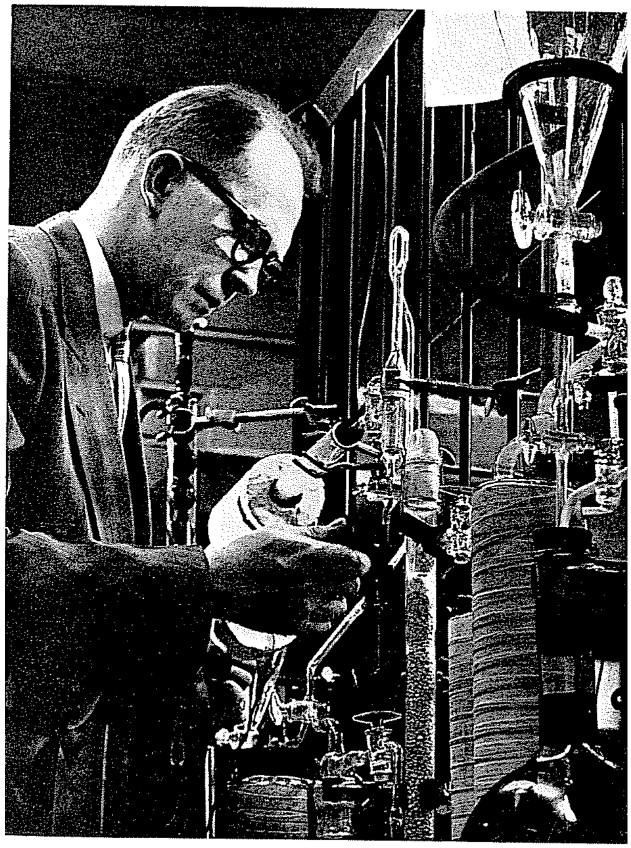
$$\frac{1}{k} = \frac{5568}{-\ln 2}$$

Substituint a (6.1) tenim

$$T = \frac{5568}{-\ln 2} \ln \frac{0.97}{6.68} \simeq 15498 \text{ anys.}$$

$\Diamond$

Nota 6.3.6 El primer d'estudiar la datació per radiocarboni (C_{14}) va ser W. F. Libby. Ell va usar la vida mitja de 5568 anys que es continua usant per raons hitòriques, però és més exacte el valor de 5730.



Doctor Williard F Libby, nacido en el estado de Colorado de Estados Unidos, graduado en la univer sidad de California, premio Nobel de Química, iniciador de la datación radiocarbónica Actualment en el Instituto de Geofísica de la universidad de California, Miembro correspondiente de la Acade mia Nacional de Ciencias de Bolivia.

a — Libby, Dat. radiocar.

Nota 6.3.7 *Informació de la web de la cova*: Las primeras proposiciones cronológicas.

Henri Breuil y Denis Peyrony establecieron una relación con el Gravetiense. Para Breuil, la cronología del arte parietal paleolítico se basaba en la existencia de dos ciclos, uno auriñaciense-perigordiense, otro solutrense-magdaleniense. Puso en relación con Lascaux las figuras pintadas sobre bloques encontrados en estratigrafía -y bien datados- del abrigo de Labattut (Perigordiense) y del abrigo de Blanchard (Auriñaciense). Una evaluación más matizada fue realizada por Annette Laming, quien señaló que esta iconografía mostraba tantos caracteres que podían ser atribuibles tanto al uno como al otro de estos dos grandes ciclos. Para Séverin Blanc, la mayoría de indicios tendían a atribuir a una parte de este arte un origen más bien solutrense-magdaleniense.

Primera datación de radiocarbono. En 1951, un cierto número de fragmentos de carbones de madera que provenían de las excavaciones del Pozo fueron analizados en Chicago, en el laboratorio del Dr. W. Frank Libby, iniciador del método. Los resultados aportaron nuevos argumentos en favor de la última propuesta. La fecha obtenida, en torno a 15.500 años BP, colocaba a Lascaux en la cultura Magdaleniense.

Sala dels torus de Lascaux

André Glory hizo datar nuevas muestras de carbones de madera, tomadas durante las excavaciones en el Pasaje y en el Pozo, que dieron respectivamente 17.190 ± 140 BP y 16.000±500 BP, fechas que confirmaban la atribución de los artefactos a un período antiguo del Magdaleniense. André Leroi-Gourhan, se basó en datos estilísticos; los yacimientos de Fourneau du Diable, en Bourdeilles (Dordoña) y de Roc-de-Sers (Charente), bien datados, sirvieron de elementos de referencia. Le permitieron precisar que Lascaux era Solutrense. Sin embargo, algunos años más tarde, el estudio de la industria lítica y ósea, así como el análisis estratigráfico de los cortes practicados por André Glory, introdujeron modificaciones a este esquema. Los trabajos, dirigidos por Arlette Leroi-Gourhan y Jacques Allain, precisaron y estrecharon la estimación cronológica y el conjunto de Lascaux fue atribuido al Magdaleniense II. André Leroi-Gourhan suscribió esta propuesta. Estos ajustes sucesivos muestran las dificultades encontradas para establecer un diagnóstico preciso, suficientemente argumentado.

1998, 2002, nuevos análisis. En 1998, y más adelante en 2002, dos dataciones radiocarbónicas realizadas a partir de fragmentos de varilla de cuerno de reno hallados en las excavaciones de Henri Breuil y Séverin Blanc, tienden a envejecer las últimas estimaciones, con una edad situada entre 18.600 y 18900 BP, en el límite entre el Solutrense superior y el Badeguliense.El análisis formal de las figuras de Lascaux hace pensar que este arte pertenecería a una tradición solutrense. Obviamente, estas figuras evocan más bien las obras de Fourneau-du-Diable o de Roc-de-Sers, yacimientos perfectamente datados de este período, que cualquier ejemplo magdaleniense. Los signos geométricos participan en la aproximación del arte de Lascaux con el del Solutrense.

Nota 6.3.8 El valor de 6.68 desintegracions per gram i minut em sembla molt petit. Hi ha diverses fustes que es mouen sobre 14 o 15 desintegracions per gram i minut. Per exemple, avet blanc, om, roure, etc. Si repetim els càlculs del problema canviant el 6.68 per un valor entre 14 o 15 obtenim per a T un valor pròxim als 20000 anys (en lloc del 15498 obtinguts). Ens movem dintre dels períodes que trobem a la web de la cova.

Nota 6.3.9 Cada àtom de C_{14} es transforma en un àtom de nitrogen N_{14} i emet una partícula β (de fet, un electró), de manera que quan parlem de *desintegracions* per gram i minut (o gram i segon) ens referim al nombre de partícules β emeses per tots els àtoms de C_{14} que hi ha en un gram (concretament $0,42 \times 10^{23}$ àtoms, ja que aquest nombre s'obté dividint el número d'Avogadro pel pes atòmic del C_{14} que és $14,003$). Per comptar les partícules β es mesura la seva energia amb un comptador Geiger. Cada partícula β produeix una energia de $0,156 MeV$.

L'activitat específica del C_{14}, segons les taules de propietats nuclears dels elements, és de $1,67 \cdot 10^{11} Bq/g$

La notació Bq vol dir Becquerel. Un cos té una activitat específica d'un Becquerel quan emet una radiació per segon. La notació Bq/g vol dir *Becquerels per gram de C_{14}, no per gram de mostra.*

Com que en el problema de Lascaux s'està parlant de 6,68 desintegracions per gram i minut ($0,111$ desintegracions per gram i segon $= 0,111$ Bq per gram) de MOSTRA, això vol dir que que la proporció de Carboni 12 a la mostra és del 66% ja que llavors en un gram de mostra hi ha 0.066 grams de carboni 12, i per tant aproximadament 0.066×10^{-12} grams de C_{14}.

Per tant, cada gram de mostra emet $(1.67 \times 10^{11}) \times 0.66 \times 10^{-12} = 0,11$ Bq que quadra amb la dada del problema.

Exemple 6.3.10 *En unes ruïnes es va trobar carbó vegetal que contenia una relació C_{14}/C_{12} igual a la cinquena part de la que es troba en la materia viva. Calculeu l'edat de las ruïnes.*

Informació addicional necessària*: El quocient C_{14}/C_{12} és constant en els éssers vius.*

Informació addicional no necessària*: El quocient C_{14}/C_{12} és igual a $\frac{1}{10^{12}}$ en els éssers vius.*

Solució. Denotem per $C_{14}(t)$ la quantitat de C_{14} que hi ha a la mostra de carbó vegetal a l'instant t.

La quantitat de C_{14} en els éssers vius és constant. De fet, la velocitat amb que un ésser viu assimila C_{14} de l'atmosfera és igual, però de signe contrari, a la velocitat amb que el perd (per desintegració radioactiva). És a dir, la velocitat global de variació és zero.

Com que el C_{12} no és radioactiu, la seva quantitat en els éssers tan vius com morts és constant, i la denotarem simplement per C_{12}.

Un cop l'organisme mort, sabem que l'element radioactiu C_{14} decau seguint la llei

$$C_{14}(t) = C_{14}(0)e^{kt}$$

on

$$k = -\frac{\ln 2}{5730}, \quad 5730 = \text{vida mitja } C_{14}$$

Per tant

$$\frac{C_{14}(t)}{C_{12}} = \frac{C_{14}(0)e^{kt}}{C_{12}} = \frac{C_{14}(0)}{C_{12}}e^{kt}$$

El problema ens diu que en el moment T de l'estudi tenim

$$\frac{C_{14}(T)}{C_{12}} = \frac{1}{5}(\frac{C_{14}(0)}{C_{12}})$$

Comparant aquestes dues últimes igualtats tenim

$$\frac{1}{5} = e^{kT}$$

Per tant,

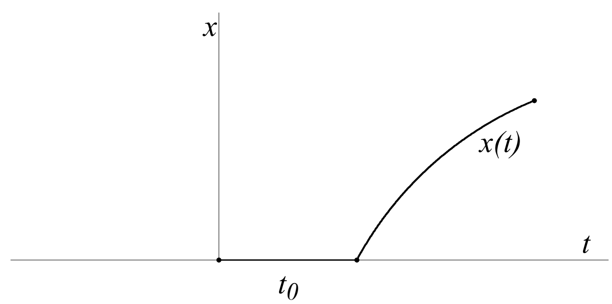
$$T = \frac{1}{k}\ln(\frac{1}{5}) = 8266,642 \cdot 1,6094 = 13304,64$$

Exemple 6.3.11 (Està nevant) [4] *Està nevant amb regularitat. A les* 12 *surt una màquina llevaneus. La primera hora recorre* 2 *km, però la segona només* 1 *km (degut als problemes que té en avançar, per la neu acumulada). A quina hora va començar a nevar?*

Informació addicional necessària. *1) La velocitat de la màquina llevaneus és inversament proporcional a l'altura de la neu acumulada (així traduïm l'expressió* degut als problemes que té en avançar ... *). 2) L'altura de la neu és proporcional al temps que fa que neva (així traduïm l'expressió* Està nevant amb regularitat.*)*

Solució. Sigui $x(t)$ l'espai recorregut per la màquina llevaneus quan han transcorregut t hores des que va començar a nevar.

La gràfica d'aquesta funció serà doncs del tipus



on t_0 és la nostra incògnita: el temps que passa des de que comença a nevar ($t = 0$) fins que surt la màquina llevaneus. Com que la màquina surt a les 12, sabem que va començar a nevar a les $(12 - t_0)$ hores.

Si denotem per $h(t)$ l'altura de la neu acumulada a l'instant t, tenim

$$h(t) = at, \quad a \text{ una constant.}$$

Això és el que diu la frase *L'altura de la neu és proporcional al temps que fa que neva.*

També tenim

$$x'(t) = \frac{b}{h(t)}, \quad b \text{ una constant.}$$

Això és el que diu la frase *La velocitat de la màquina llevaneus és inversament proporcional a l'altura de la neu.*

[4] Tret del llibre *Ecuaciones Diferenciales* de Puig Adam.

Per tant
$$x'(t) = \frac{c}{t}, \quad c \text{ una constant } (c = b/a).$$

Integrant tenim
$$x(t) = c\ln(t) + k, \quad k \text{ una constant.}$$

Per determinar c, k, t_0 necessitem tres equacions. Són les següents:
$$\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & 0 = c\ln(t_0) + k \\ x(t_0+1) & = & 2 = c\ln(t_0+1) + k \\ x(t_0+2) & = & 3 = c\ln(t_0+2) + k \end{array}$$

Observem que $x(t_0{+}2)$ és l'espai recorregut per la màquina dues hores després de sortir. Com que la primera hora avança $2\,km$ i la segona $1\,km$, en dues hores ha avançat $3\,km$.

Aïllant k de la primera equació i substituint-la a les altres dues equacions tenim
$$\begin{array}{rcl} 2 & = & c\ln(t_0+1) - c\ln(t_0) = c\ln\dfrac{t_0+1}{t_0} = c\ln(1+\dfrac{1}{t_0}) \\ 3 & = & c\ln(t_0+2) - c\ln(t_0) = c\ln\dfrac{t_0+2}{t_0} = c\ln(1+\dfrac{2}{t_0}) \end{array}$$

Posem $\tau = \frac{1}{t_0}$. Tindrem
$$\begin{array}{rcl} 2 & = & c\ln(1+\tau) \\ 3 & = & c\ln(1+2\tau) \end{array}$$

Per tant
$$\frac{2}{3} = \frac{\ln(1+\tau)}{\ln(1+2\tau)}$$

Equivalentment,
$$2\ln(1+2\tau) = 3\ln(1+\tau)$$
o bé
$$\ln(1+2\tau)^2 = \ln(1+\tau)^3,$$
i per tant

$$\begin{aligned} (1+2\tau)^2 &= (1+\tau)^3 \\ 1+4\tau+4\tau^2 &= 1+3\tau+3\tau^2+\tau^3 \\ 4+4\tau &= 3+3\tau+\tau^2 \\ \tau^2-\tau-1 &= 0 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618..$$

I[5]

$$t_0 = \frac{1}{\tau} = 0,618..$$

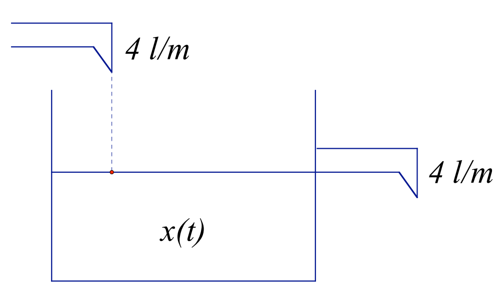
Per tant va començar a nevar a les $12 - 0,618 = 11,382$ hores, i.e. a les 11h 22,8' = 11h 22' 48" aproximadament. $\diamondsuit$

Exemple 6.3.12 (Diposits) *Tenim un dipòsit de* 200 *litres ple d'aigua. Hi tirem* 30 *grams de sal. A continuació obrim una aixeta per la que entra dissolució d'aigua amb sal, que té una concentració de* 1 *gram de sal per litre, a una velocitat de* 4 *litres per minut i obrim al mateix temps una altra aixeta per la que surt el contingut del dipòsit a una velocitat també de* 4 *litres per minut.*

Suposem que la mescla de les dues dissolucions, la del dipòsit i la que entra, es fa de manera instantània.

Estudieu la quantitat de sal que hi ha en el dipòsit en cada moment. En quin moment hi haurà 60 *grams de sal al dipòsit?*

Solució. Sigui $x(t)$ la quantitat de sal dins el dipòsit a l'instant t. En particular, $x(0) = 30$ grams.



[5]Casualment ha sortit que τ és la raó àurea o nombre d'or. Així que ja sabem que val 1.618 i que el seu invers s'obté restant 1, és a dir és igual a $0,618$.

La concentració de la sal al dipòsit (quantitat de sal per litre) és doncs $q(t) = x(t)/200$ grams/litre.

A quina velocitat surt la sal? La dissolució surt a raó de 4 litres/minut, però la dissolució que surt a l'instant t té una concentració de sal $q(t)$, per tant la sal surt a raó de

$$4 \; litres/minut \; \times q(t) \; grams/litre \; = 4q(t) \; grams/minut$$

(veure aclariment més avall).

Ara escrivim que la velocitat de variació de la quantitat de sal dins el dipòsit ($x(t)$) és igual a la velocitat en que entra sal (4 grams/minut) menys la velocitat en que surt ($4q(t)$).

$$x'(t) = 4 - 4q(t) = 4 - 4\frac{x(t)}{200} = 4 - \frac{x(t)}{50}.$$

Separant variables

$$\frac{dx}{4 - \frac{x}{50}} = dt,$$

i per tant

$$-50 \ln(4 - \frac{x}{50}) = t + C.$$

Equivalentment,

$$\ln(4 - \frac{x}{50})^{-50} = t + C,$$

i per tant

$$(4 - \frac{x}{50})^{-50} = e^{t+C}.$$

Elevant a $-1/50$, tenim

$$4 - \frac{x}{50} = ke^{-t/50}, \quad k = e^{-C/50}.$$

$$\boxed{x(t) = 200 - 50\, k\, e^{-t/50}}$$

Observem que aquesta funció és creixent (sempre hi haurà més de 30 grams de sal al dipòsit), i que a la llarga s'estabilitzarà en 200 grams de sal, és a dir 1 gram de sal per litre, cosa raonable ja que aquesta és la concentració de la sal que entra.

Quan diem *a la llarga* volem dir

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 200,$$

ja que $\lim_{t\to\infty} e^{-t/50} = 0$.

Si ara volem saber quan hi haurà 60 grams de sal al dipòsit només hem de posar

$$60 = 200 - 170e^{-t/50}.$$

Per tant $t = 50 \ln \frac{17}{14} = 9,7$ minuts.

$\diamondsuit$

Aclariment. La quantitat de sal que surt entre t_0 i $t_0 + \Delta t$ és igual a $4\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt$. I per tant, la velocitat de sortida de sal a l'instant t és $4q(t)$.

En efecte, en l'interval de temps Δt, surten $4\Delta t$ litres de dissolució. A l'instant t_0 està sortint dissolució amb una concentració $q(t_0)$ i a l'instant $t_0 + \Delta t$ està sortint dissolució amb una concentració $q(t_0 + \Delta t)$.

La idea intuïtiva és que com Δt és molt petit podem suposar $q(t)$ constant en aquest petit interval. Però precisem-ho millor.

Posem

$$Q(t_0, \Delta t) = \text{Quantitat de sal que surt entre } t_0 \text{ i } t_0 + \Delta t.$$

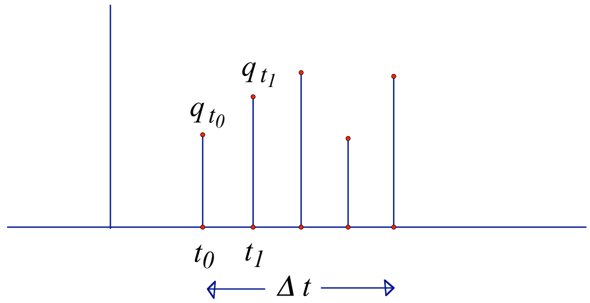
Si dividim l'interval $[t_0, t_0+\Delta t]$ en n parts iguals i considerem $q(t)$ constant en aquests petits intervals tindrem

$$\begin{aligned} Q(t_0, \Delta t) &\simeq \sum_{i=1}^{n} \text{quantitat de sal que surt durant l'interval } [t_{i-1}, t_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 4\frac{\Delta t}{n}\, q(t_i), \qquad t_i = t_0 + i\frac{\Delta t}{n} \end{aligned}$$

Per canviar el signe $\simeq$ per $=$ només hem de fer que n tendeixi a infinit. Així

$$\begin{aligned} Q(t_0, \Delta t) &= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t}{n} \sum_{i=1}^{n} q(t_i) \\ &= 4 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt. \end{aligned}$$

(La última igualtat és la definició d'integral.)



Si denotem per $y(t)$ la sal que ha sortit al cap de t minuts, la velocitat de sortida de la sal és

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{quantitat de sal que surt entre } t_0 \text{ i } t_0 + \Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} q(t)dt}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t q(\xi)}{\Delta t}, \quad \xi \in (t_0, t_0 + \Delta t) \\ &= 4q(t_0). \end{aligned}$$

$\Diamond$

6.4 Equacions diferencials lineals de primer ordre

Reben aquest nom les equacions diferencials del tipus

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

on $p(x), q(x)$ són funcions arbitràries.

Per exemple

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y' + xy &= e^x \\ y' + \sin(x)y &= \cos(x) \\ & etc \end{aligned}$$

El que fa senzilles aquestes equacions és que en el cas particular $q(x) = 0$ l'equació que tenim, $y' + p(x)y = 0$, és de variables separables. Es diu que $y' + p(x)y = 0$ és l'equació diferencial *homogènia* associada a $y' + p(x)y = q(x)$.

Que la homogènia és de variables separables és fàcil de veure ja que

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

i per tant

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

i ja tenim les variables separades. Integrant,

$$\ln y = -\int p(x)dx + C,$$

és a dir

$$y(x) = ke^{-\int p(x)dx}$$

Denotem per $P(x)$ una primitiva de $p(x)$ (en cada cas particular tindrem el problema de calcular explícitament aquesta primitiva $P(x)$), i posem

$$y(x) = ke^{-P(x)}.$$

Es diu que $y(x) = ke^{-P(x)}$ és la *solució general* de l'equació diferencial homogènia $y' + p(x)y = 0$. Pel teorema d'unicitat, *tota solució és d'aquesta forma*, per a un valor adequat de la constant k que es determina a partir de les condicions inicials.

És a dir, que si sabéssim que una certa funció $y = f(x)$ és solució de $y' + p(x)y = 0$, calcularíem $f(x_0)$, per a un cert valor x_0, i posaríem $y_0 = f(x_0)$. A continuació buscaríem k per tal de que

$$y(x_0) = ke^{-P(x_0)}, \quad \text{i.e.} \quad k = y(x_0)e^{P(x_0)}$$

Llavors $f(x)$ i $y(x) = ke^{-P(x)}$, amb aquesta k que acabem de trobar, són solucions de la mateixa equació diferencial amb la mateixa condició inicial, i per tant són iguals.

Proposició 6.4.1 *Si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són dues solucions de l'equació diferencial lineal $y' + p(x)y = q(x)$, llavors existeix k tal que*

$$y_2(x) = y_1(x) + ke^{-\int p(x)dx}.$$

Demostració. Només cal veure que $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ és solució de l'equació diferencial homogènia $y' + p(x)y = 0$. Però això és clar, ja que

$$(y_2 - y_1)' + p(x)(y_2 - y_1) = (y_2' - p(x)y_2) - (y_1' + p(x)y_1) = q(x) - q(x) = 0.$$

Com que tota solució de la homogènia és de la forma $ke^{-\int p(x)dx}$, tenim

$$y_2(x) - y_1(x) = ke^{-\int p(x)dx},$$

i hem acabat. □

Corol·lari 6.4.2 *La solució general de $y' + p(x)y = q(x)$ és igual a una solució particular de $y' + p(x)y = q(x)$ més la solució general de la homogènia $y' + p(x)y = 0$.*

Demostració. Conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que si coneixem una solució $y_1(x)$ de $y' + p(x)y = q(x)$, la igualtat

$$y_2(x) = y_1(x) + ke^{-\int p(x)dx},$$

ens dóna *qualsevol* solució $y_2(x)$. □

La solució general de la no homogènia és igual a la solució general de la homogènia més una solució particular de la no homogènia.

Per tant, per resoldre $y' + p(x)y = q(x)$ tant sols hem de donar algun mètode que ens permeti trobar una solució particular. Desprès només hi hem de sumar la solució general de la homogènia. Explicarem l'anomenat *mètode de variació de les constants.*

6.4.1 Mètode de variació de les constants.

La idea és que si $ke^{-P(x)}$ és solució de la homogènia, la solució de la no homogènia no serà massa diferent d'aquesta. Podem provar si hi ha alguna solució de la no homogènia que sigui del tipus $k(x)e^{-P(x)}$ per a una certa funció $k(x)$ que s'ha de determinar. Com que el que fem és canviar k per $k(x)$ el mètode es diu de *variació de les constants.*

Posem $y_1(x) = k(x)e^{-P(x)}$. Llavors

$$y_1'(x) = k'(x)e^{-P(x)} - k(x)P'(x)e^{-P(x)} = k'(x)e^{-P(x)} - k(x)p(x)e^{-P(x)},$$

i per tant

$$y_1'(x)+p(x)y_1(x) = k'(x)e^{-P(x)}-k(x)p(x)e^{-P(x)}+p(x)k(x)e^{-P(x)} = k'(x)e^{-P(x)}.$$

Com que volem que $y_1' + p(x)y_1$ sigui igual a $q(x)$ *imposem*

$$k'(x)e^{-P(x)} = q(x),$$

és a dir

$$k'(x) = q(x)e^{P(x)},$$

i per tant podem trobar $k(x)$ simplement integrant (en cada cas particular aquesta integral pot ser difícil de calcular)

$$k(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx$$

Així,

$$y_1(x) = (\int q(x)e^{P(x)}\,dx)e^{-P(x)}$$

és una solució particular de $y' + p(x)y = q(x)$.

Exemple 6.4.3 *Trobeu la solució general de $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ i la solució particular tal que $y(0) = 2$.*

Solució. Resolem primerament l'equació homogènia $y' + 2xy = 0$. Separant variables tenim

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx.$$

Integrant independentment els dos costats d'aquesta igualtat obtenim

$$y = ke^{-x^2}.$$

Ara busquem una solució de $y'+2xy = 2xe^{-x^2}$ que sigui del tipus $y_1(x) = k(x)e^{-x^2}$ (variació de les constants). Derivant tenim

$$y_1'(x) = k'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}k(x),$$

i per tant

$$y_1' + 2xy_1 = k'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}k(x) + 2xk(x)e^{-x^2} = k'(x)e^{-x^2}.$$

Ara imposem que $y_1' + 2xy_1$ sigui igual a $2xe^{-x^2}$. Tenim

$$k'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

i per tant

$$k(x) = x^2.$$

(En aquest cas ens podem oblidar de la constant d'integració.)

Per tant, la solució particular buscada és

$$y_1(x) = x^2e^{-x^2}$$

i la solució general (suma de la particular més la general de la homogènia) és doncs

$$y(x) = x^2e^{-x^2} + ke^{-x^2} = (k + x^2)e^{-x^2}.$$

Per trobar la solució que compleix $y(0) = 2$ substituïm $x = 2$ a la fórmula solució general i obtenim

$$2 = (k + 0^2)e^{-0^2} = k.$$

Per tan la solució particular demanada és

$$y(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 6.4.4 *Sabent que $y(x) = xe^{-x}$ és solució de $y' + y = e^{-x}$, trobeu la solució de $y' + y = e^{-x}$ tal que $y(0) = 1$.*

Solució. La solució general de la homogènia $y' + y = 0$ és $y(x) = ke^{-x}$. Per tan la solució general de la no homogènia és

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x}.$$

Imposem $y(0) = 1$ i obtenim $k = 1$, de manera que la solució particular demanada és

$$y(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 6.4.5 *Trobeu la solució de $y' + y = e^{-x}$ tal que $y(3) = 7$.*

Solució. Resolem la homogènia $y' + y = 0$. Es de variables separables. Obtenim $y(x) = ke^{-x}$.

Per trobar una solució particular fem *variació de les constants*. És a dir, busquem una solució del tipus $y(x) = k(x)e^{-x}$. Com que $y'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$, tenim

$$y' + y = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = k'(x)e^{-x},$$

i ara imposem $y' + y = e^{-x}$ i tenim

$$k'(x)e^{-x} = e^{-x},$$

és a dir, $k'(x) = 1$ i per tant $k(x) = x$ (podem prescindir de la constant d'integració). La solució particular és doncs $y(x) = xe^{-x}$ i la solució general és doncs

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x} = (x + k)e^{-x}.$$

Si imposem $y(3) = 7$ tenim

$$7 = (3 + k)e^{-3},$$

d'on $k = 7e^3 - 3$ i per tant la solució buscada és

$$y(x) = xe^{-x} + ke^{-x} = (x + 7e^3 - 3)e^{-x}.$$

$\Diamond$

Exemple 6.4.6 *Trobeu la solució de $y' + \frac{1}{x}y = x$ tal que $y(6) = 20$.*

Solució. Resolem la homogènia $y' + \frac{1}{x}y = 0$ que és de variables separables. Tenim

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

d'on

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

que integrant dóna

$$\ln y = -\ln x + C = \ln x^{-1} + C = \ln kx^{-1}, \quad C = \ln k.$$

Per tant

$$y(x) = \frac{k}{x}.$$

Per trobar una solució particular fem *variació de les constants*. És a dir, busquem una solució del tipus

$$y(x) = \frac{k(x)}{x}.$$

Com que $y'(x) = k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}$ tenim

$$y' + \frac{1}{x}y = k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{k(x)}{x} = k'(x)\frac{1}{x},$$

i ara imposem $y' + \frac{1}{x}y = x$ i tenim

$$k'(x)\frac{1}{x} = x,$$

és a dir

$$k'(x) = x^2$$

i per tant $k(x) = \frac{x^3}{3}$ (podem prescindir de la constant d'integració). La solució particular és doncs

$$y(x) = \frac{\frac{x^3}{3}}{x},$$

i la solució general és doncs

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}.$$

Si imposem $y(6) = 20$ tenim

$$20 = \frac{6^2}{3} + \frac{k}{6},$$

d'on $k = 48$ i per tant la solució buscada és

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x}.$$

$\Diamond$

Capítol 7

Equacions diferencials de segon ordre

7.1 Definició i teorema d'existència i unicitat

Una expressió del tipus

$$y'' = f(x, y, y')$$

on f és una funció diferenciable de tres variables (que anomenem x, y, y') es diu que és una equació diferencial de segon ordre. De moment y'' és només un símbol.

Per exemple,

$$\begin{aligned} y'' &= x \\ y'' &= x + y + y' \\ y'' &= y^2 + \sin(y) \\ &\vdots \end{aligned}$$

són equacions diferencials de segon ordre.

Resoldre una equació diferencial de segon ordre $y'' = f(x, y, y')$ vol dir trobar totes les funcions $y = y(x)$ tals que en substituir la variable y per $y(x)$, la variable y' per $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, i el símbol y'' per $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ obtinguem una identitat certa per a tots els valors de x. És a dir, s'ha de complir

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)).$$

La notació $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$ vol dir $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(y(x))$, i es llegeix *derivada segona de* $y(x)$.

Així, resoldre les anteriors equacions diferencials vol dir trobar funcions $y = y(x)$ tals que

$$\begin{aligned} y''(x) &= x \\ y''(x) &= x + y(x) + y'(x) \\ y''(x) &= y^2(x) + \sin(y(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per exemple, $y = e^x$ és una solució de l'equació diferencial

$$y'' = \frac{1}{2}(y + y'),$$

ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$, i $y''(x) = \frac{d^2e^x}{dx^2} = e^x$, i per tant

$$y''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^x).$$

També, $y = \frac{1}{6}x^3$ és una solució de l'equació diferencial

$$y'' = x,$$

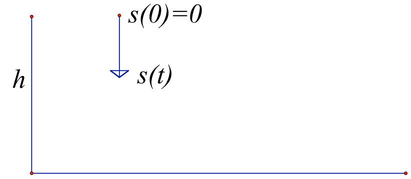
ja que $y'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{6}x^3) = \frac{1}{2}x^2$, i $y''(x) = \frac{d^2(\frac{1}{6}x^3)}{dx^2} = x$, i per tant

$$y''(x) = x.$$

Exemple 7.1.1 (Caiguda d'un cos) *Suposem que deixo caure un guix des d'una altura de dos metres. Quant triga a caure? Quina velocitat porta quan toca el terra?*

Informació addicional. *Suposarem que no hi ha fregament, és a dir que la única força que actua és el pes del guix.*

Solució. Denotem per $s(t)$ l'espai recorregut pel guix des del moment en que el deixem caure, és a dir $s(0) = 0$.



La llei de la gravitació universal de Newton diu que la relació entre l'acceleració que adquireix un cos de massa m sotmès a una força total F és

$$F = ma.$$

En general és una igualtat vectorial ($\vec{F} = m\vec{a}$) però com que en el nostre cas el problema és unidimensional (el moviment és vertical) podem prescindir de la notació vectorial.

Com que estem acceptant que la única força és la de la gravetat, tenim

$$mg = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

ja que l'acceleració és la derivada segona de l'espai (la derivada primera de la velocitat). Recordem que $g = 9.8m/s^2$.

Hem de reosldre doncs l'equació diferencial de segon ordre

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Una primera integració als dos costats d'aquesta igualtat ens diu

$$\frac{ds}{dt} = gt + C.$$

Si acceptem que el guix el deixem caure, és a dir, no el tirem contra el terra, tindrem que la velocitat inicial $\frac{ds}{dt}_{t=0} = 0$, i per tant l'anterior constant C val zero. Tenim doncs l'equació diferencial de primer ordre

$$\frac{ds}{dt} = gt.$$

Integrant a cada costat obtenim

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C.$$

Novament aquesta constant C queda determinada per la condició inicial $s(0) = 0$. Ha de ser, doncs, $C = 0$, i per tant tenim

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ara ja podem respondre les preguntes del problema. Per saber quant triga a caure posem

$$s(t_0) = h = \frac{1}{2}gt_0^2,$$

i aïllem t. Obtenim

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4}{g}} = 1.13 \text{ segons.}$$

Per saber la velocitat que porta el guix quan arriba a terra, substituïm aquest valor de t a l'expressió de la velocitat. Obtenim

$$v(t_0) = \frac{ds}{dt}_{t_0} = gt_0 = 11.07 \text{ metres/segon.}$$

$\diamondsuit$

Teorema 7.1.2 (Existència i unicitat) *L'equació diferencial de segon ordre $y'' = f(x, y, y')$ té infinites solucions, però només una $y = y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y_0'$.*

Comentaris. Hem de suposar que la funció de tres variables $f(x, y, y')$ és *prou bona*. Podem pensar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, però podria no estar definida sobre tot $\mathbb{R}^3$. Per exemple, $f(x, y, y') = \frac{yy'}{x}$ no està definida quan $x = 0$.

Suposarem que és derivable respecte cadascuna de les tres variables, i,e, si fixem x, y és derivable respecte y', si fixem x, y' és derivable respecte y' i si fixem y, y' és derivable respecte x.

A més el valors x_0, y_0, y_0' que apareixen a la condició inicial han de pertànyer al domini de definició de f.

Observem que y_0' no és en principi la derivada de res, és simplement un valor donat. Posteriorment existeix una funció $y(x)$ tal que la seva derivada en x_0 val justament aquest valor donat y_0'. Potser no és una notació molt afortunada però és la habitual.

Tampoc especifiquem quin és el domini de definició de la funció solució $y(x)$.

7.2 Equacions de segon ordre lineals

La generalització natural de les equacions diferencials lineals de primer ordre a equacions diferencials lineals de segon ordre seria canviar $y' + p(x)y = q(x)$ per $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$. Però com que aquesta última equació pot ser difícil de resoldre en aquest capítol només estudiarem el cas particular en que les funcions $p(x)$ i $q(x)$ són constants. És a dir, estudiarem les equacions del tipus

$$\boxed{y'' + by' + c = q(x), \quad b, c \in \mathbb{R}; \quad q(x) \text{ una certa funció de } x}$$

Proposició 7.2.1 *Si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són dues solucions de l'equació diferencial lineal de segon ordre $y'' + by' + cy = q(x)$, llavors $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ és solució de $y'' + by' + cy = 0$.*

Demostració. En efecte,

$$\begin{aligned}(y_2 - y_1)'' + b(y_2 - y_1)' + c(y_2 - y_1) &= (y_2'' + by_2' + cy_2) - (y_1'' + by_1' + cy_1) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

L'equació diferencial lineal de segon ordre $y'' + by' + cy = 0$ es diu equació *homogènia* associada a $y'' + by' + cy = q(x)$.

Corol·lari 7.2.2 *La solució general de $y'' + by' + cy = q(x)$ és igual a una solució particular de $y'' + by' + cy = q(x)$ més la solució general de la homogènia $y'' + by' + cy = 0$.*

Demostració. Conseqüència immediata de la proposició anterior, ja que si coneixem una solució $y_1(x)$ de $y'' + by' + cy = q(x)$, qualsevol solució $y_2(x)$ és de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) + \text{solució general de la homogènia.} \quad \square$$

La solució general de la no homogènia és igual a la solució general de la homogènia més una solució particular de la no homogènia.

7.3 Solució de la homogènia

Anem a resoldre l'equació homogènia $y'' + by' + cy = 0$.

Observem primerament que la suma de solucions és solució i que el producte d'una solució per un número és també solució.

En efecte, si $y_1(x)$ i $y_2(x)$ són solucions, llavors

$$\begin{aligned} & (y_1(x) + y_2(x))'' + b(y_1(x) + y_2(x))' + c(y_1(x) + y_2(x)) \\ = \; & [y_1(x)'' + by_1(x)' + cy_1(x)] + [y_2(x)'' + by_2(x)' + cy_2(x)] \\ = \; & 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si $y_1(x)$ és solució, llavors $\lambda y_1(x)$ també és solució ja que

$$(\lambda y_1(x))'' + b(\lambda y_1(x))' + c\lambda y_1(x) = \lambda[y_1(x)'' + by_1(x)' + c] = 0.$$

Introduïm ara la notació $D = \frac{d}{dx}$ de manera que l'anterior equació s'escriu com

$$(D^2 + bD + c)y = 0,$$

on, evidentment, D^2 vol dir aplicar dos cops l'operador D:

$$D^2 y = D(D(y)) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y = y''$$

El polinomi $X^2 + bX + c$ es diu polinomi característic de l'equació diferencial $y'' + by' + cy = 0$.

El mètode per resoldre aquesta equació diferencial varia lleugerament segons que el polinomi característic tingui arrels reals simples, una arrel real múltiple o arrels complexes.

Arrels reals simples. Siguin λ, μ les arrels reals diferents. Sabem $X^2 + bX + c = (X - \lambda)(X - \mu)$. Per tant, també tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - \lambda)(D - \mu)y = 0.$$

Si trobem $y = y(x)$ tal que

$$(D - \mu)y(x) = 0$$

també serà

$$(D - \lambda)(D - \mu)y(x) = 0$$

i ja tindrem doncs una solució de l'equació diferencial donada.

Però com que

$$(D-\lambda)(D-\mu)y = (D-\mu)(D-\lambda)y$$

també qualsevol solució de

$$(D-\lambda)y = 0$$

serà solució de l'equació diferencial donada.

Però la solució de $(D-\lambda)y = 0$ és $y(x) = C_1 e^{\lambda x}$ i la solució de $(D-\mu)y = 0$ és $y(x) = C_2 e^{\mu x}$.

Pel comentari que hem fet sobre la suma de solucions i el producte d'un numero per una solució resulta que

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}}$$

és solució de $y'' + by' + cy = 0$ per a qualsevol valor de les constants C_1, C_2.

Es diu que és la *solució general* de l'equació homogènia.

La observació fonamental és que qualsevol altra solució de la homogènia és d'aquest tipus.

En efecte, com a conseqüència del teorema d'unicitat, si tenim una solució amb $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y_0'$ i també tenim una solució del tipus

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}$$

amb aquestes mateixes condicions inicials, aquestes dues solucions han de coincidir. La pregunta és doncs si existeixen valors de C_1 i C_2 que fan que la corresponent solució compleixi les condicions inicials donades.

Concretament hem de tenir

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 e^{\mu x_0} &= y_0 \\ C_1 \lambda e^{\lambda x_0} + C_2 \mu e^{\mu x_0} &= y_0' \end{aligned}$$

Però aquest sistema és de Cramer (té solució única) perquè el determinant

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x_0} & e^{\mu x_0} \\ \lambda e^{\lambda x_0} & \mu e^{\mu x_0} \end{vmatrix}$$

anomenat Wronskià, és diferent de zero. De fet val

$$(\mu - \lambda) e^{(\lambda+\mu)x_0} \neq 0.$$

Per això és fonamental haver-nos restringit al cas $\lambda \neq \mu$.

Arrel real múltiple. Sigui λ l'arrel real doble. Sabem $X^2 + bX + c = (X - \lambda)^2$. Per tant, també tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - \lambda)(D - \lambda)y = 0.$$

Si trobem $y = y(x)$ tal que

$$(D - \lambda)y(x) = 0$$

també serà

$$(D - \lambda)(D - \lambda)y(x) = 0$$

i ja tindrem doncs una solució de l'equació diferencial donada. Concretament $y(x) = C_1 e^{\lambda x}$.

Ara hem de trobar una solució "essencialment" diferent d'aquesta. Volem dir una solució tal que el Wronskià (determinant format per les solucions i les seves derivades) sigui diferent de zero.

Per analogia amb el mètode de variació de les constants assajarem la solució

$$y(x) = xe^{\lambda x}.$$

Tenim

$$\begin{aligned}(D - \lambda)(D - \lambda)(xe^{\lambda x}) &= (D - \lambda)(D(xe^{\lambda x}) - \lambda xe^{\lambda x}) \\ &= (D - \lambda)[e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} - \lambda xe^{\lambda x}] \\ &= (D - \lambda)e^{\lambda x} = 0\end{aligned}$$

Així doncs la solució general en aquest cas està donada per

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 xe^{\lambda x}}$$

Com en el cas anterior aquí estan *totes* les solucions de l'equació diferencial ja que sempre podem ajustar les constants per tenir una condició inicial donada.

En aquest cas el Wronskià val

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

i per tant el sistema a què dóna lloc la condició inicial

$$\begin{aligned} C_1e^{\lambda x_0} + C_2xe^{\lambda x_0} &= y_0 \\ C_1\lambda e^{\lambda x_0} + C_2(e^{\lambda x_0} + \lambda xe^{\lambda x_0}) &= y_0' \end{aligned}$$

té solució única.

Arrels complexes. Suposem que les arrels del polinomi característic són $z = p + iq$ i $\bar{z} = p - iq$. Recordem que han de ser conjugades. Com en el cas d'arrels real diferents tenim

$$(D^2 + bD + c)y = (D - z)(D - \bar{z})y = 0.$$

I també com en el cas real, veiem que qualsevol solució de

$$(D - z)y = 0, \qquad \text{o bé de } (D - \bar{z})y = 0$$

serà solució de l'equació diferencial donada.

Però ara, si plantegem

$$(D - z)y = y' - zy = 0$$

tenim una equació diferencials amb coeficients complexos. No tenim més remei que pensar que $y(x)$ és també una funció complexa

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x),$$

és a dir

$$\begin{aligned} y: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned}$$

Si la resolem com en el cas real tindrem

$$\frac{dy}{dx} = zy$$

que separant variables dóna

$$\frac{dy}{y} = zdx.$$

Integrant[1] als dos costats obtenim

$$\ln y = zx + C$$

[1]El logaritme neperià d'un nombre complex es defineix bé a partir de la notació $z = re^{i\alpha}$ ja que llavors, si volem que es conservin les propietats fonamentals dels logaritmes, ha de ser $\ln z = \ln(re^{i\alpha}) = \ln r + \ln e^{i\alpha} = \ln r + i\alpha$. Observem que amb aquesta definició té sentit parlar del logaritmes de nombres negatius. Per exemple, $\ln(-1) = \pi i$.

i per tant

$$y(x) = ke^{zx}, \qquad k = e^C.$$

En particular, quan $k = 1$, tenim que

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) = e^{zx} = e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

és solució de $(D - z)y = y' - zy = 0$. I per tant, solució de

$$y'' + by' + cy = (D - \bar{z})(D - z)y = 0.$$

De fet, demostrar directament (ara que sabem el resultat!) que $y = e^{zx}$ és solució de $y'' + by' + cy = 0$ és trivial, ja que $y' = ze^{zx}$ i $y'' = z^2e^{zx}$, de manera que

$$y'' + by' + cy = (z^2 + bz + c)e^{zx} = 0$$

ja que z és un zero del característic. Com que estem pensant $y = y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, la igualtat $y'' + by' + cy = 0$ dóna lloc a dues igualtats: una en igualar las parts reals i una altre en igualar les parts imaginàries (el 0 de la dreta és el 0 de $\mathbb{C}$, es a dir, $0 = 0 + i0$)

Com que $b, c \in \mathbb{R}$ tenim $y_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ i $y_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ amb

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{px} \cos qx \\ y_2(x) &= e^{px} \sin qx \end{aligned}$$

D'aquesta manera hem aconseguit dues solucions *reals* de l'equació diferencial donada. A més el Wronskià és diferent de zero, de manera que pels mateixos arguments esgrimits en els casos anteriors podem afirmar que tota solució de $y'' + by' + cy = 0$, quan les arrels del característic són el nombres complexos $p \pm iq$, $q \neq 0$, són

$$y(x) = C_1e^{px} \cos qx + C_2e^{px} \sin qx$$

que escriurem com

$$\boxed{y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)}$$

on C_1 i C_2 són constants reals arbitràries.

El Wronskià val concretament

$$\begin{vmatrix} e^{px} \cos qx & e^{px} \sin qx \\ pe^{px} \cos qx - qe^{px} \sin qx & pe^{px} \sin qx + qe^{px} \cos qx \end{vmatrix} = qe^{2px} \neq 0,$$

ja que estem suposant $q \neq 0$.

Exemple 7.3.1 *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Solució. El polinomi característic $X^2 - 5X + 6$ té dues arrels reals diferents $\lambda = 2$ i $\mu = 3$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 7.3.2 *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Solució. El polinomi característic $X^2 - 6X + 9$ té l'arrel real doble $\lambda = 3$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 7.3.3 *Trobeu la solució general de l'equació* $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Solució. El polinomi característic $X^2 - 4X + 13$ té les arrels complexes $2 \pm 3i$. Per tant, la solució general és

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$\diamondsuit$

Exemple 7.3.4 *Trobeu totes les solucions de l'equació* $y'' - 5y' + 6y = 0$ *tals que* $y(0) = 0$.

Solució. Sabem que la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Imposem

$$y(0) = 0 = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_1(e^{2x} - e^{3x}).$$

complix la condició demanada. $\diamondsuit$

Exemple 7.3.5 *Trobeu totes les solucions de l'equació $y'' - 6y' + 9y = 0$ tals que $y(0) = 0$.*

Solució. Sabem que la solució general és

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Imposem

$$y(0) = 0 = C_1 e^{3 \cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3 \cdot 0} = C_1.$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_2 x e^{3x}$$

complix la condició demanada. $\Diamond$

Exemple 7.3.6 *Trobeu totes les solucions de l'equació $y'' - 4y' + 13y = 0$ tals que $y(0) = 0$.*

Solució. Sabem que la solució general és

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Imposem

$$y(0) = 0 = e^{2 \cdot 0}(C_1 \cos(3 \cdot 0) + C_2 \sin(3 \cdot 0)) = C_1.$$

Per tant, tota solució del tipus

$$y(x) = C_2 e^{2x} \sin 3x$$

complix la condició demanada. $\Diamond$

Exemple 7.3.7 *Trobeu la única solució de l'equació $y'' - 5y' + 6y = 0$ tal que $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$.*

Solució. Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\ y'(x) &= 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = -1$ i $C_2 = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = -e^{2x} + e^{3x}.$$

$\Diamond$

Exemple 7.3.8 *Trobeu la única solució de l'equació* $y'' - 6y' + 9y = 0$ *tal que* $y(0) = 0$ *i* $y'(0) = 1$.

Solució. Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \\ y'(x) &= 3C_1 e^{3x} + C_2(e^{3x} + 3xe^{3x}) \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= 3C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = xe^{3x}.$$

$\Diamond$

Exemple 7.3.9 *Trobeu la única solució de l'equació* $y'' - 4y' + 13y = 0$ *tal que* $y(0) = 0$ *i* $y'(0) = 0$.

Solució. Sabem que la solució general i la seva derivada són

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \\ y'(x) &= 2e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) \end{aligned}$$

Imposant la condició inicial obtenim

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = 0$ i $C_2 = 1/3$, i la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x.$$

$\Diamond$

7.4 Solució particular en el cas no homogeni

La idea intuïtiva per trobar una solució particular de $y'' + by' + cy = q(x)$ és molt senzilla. Si $q(x)$ és un polinomi buscarem una solució que sigui també un polinomi. Si $q(x)$ és una exponencial buscarem una solució que sigui també una funció exponencial, i si $q(x)$ és un sinus o un cosinus buscarem una solució que sigui combinació de sinus i cosinus.

Estudiarem només els casos en que $q(x)$ és una de les funcions de la taula de la pàgina 172: polinomi, exponencial, polinomi per exponencial, exponencial per sinus i cosinus o polinomi per exponencial per sinus i cosinus.

Funcionament de la taula de la pàgina 172. Si $q(x)$ és un polinomi de grau m buscarem una solució que també sigui un polinomi de grau m (primera línia de la taula). Però si dóna la casualitat de que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 1, l'anterior mètode no funciona i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m + 1$ sense terme independent, és a dir x mutiplicat per un polinomi de grau m (segona línia de la taula). Si dóna la casualitat de que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 2, els anteriors mètodes no funcionen i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m + 2$ sense terme independent ni terme lineal, és a dir x^2 mutiplicat per un polinomi de grau m (tercera línia de la taula).

Exemple 7.4.1 *Trobeu una solució particular de $y'' - 5y' + 6y = x^2$.*

Solució. Com que 0 no és arrel del característic busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = ax^2 + bx + c$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + b \\ y''(x) &= 2a \end{aligned}$$

i per tant

$$y'' - 5y' + 6y = 2a - 10ax - 5b + 6ax^2 + 6bx + 6c = x^2$$

Igualant coeficients

$$\begin{aligned} 6a &= 1 \\ -10a + 6b &= 0 \\ 2a - 5b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{18}$ i $c = \frac{19}{108}$. Així, el polinomi

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

Exemple 7.4.2 *Trobeu una solució particular de $y'' + y' = x^2$.*

Solució. Com que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 1 busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

i per tant

$$y'' + y' = 3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b = x^2$$

Igualant coeficients

$$\begin{aligned} 3a &= 1 \\ 2b + 6a &= 0 \\ c + 2b &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$ i $c = 2$. Així, el polinomi

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

Exemple 7.4.3 *Trobeu una solució particular de $y'' = x^2$.*

Solució. Com que 0 és arrel del característic amb multiplicitat 2 busquem una solució que sigui del tipus $y(x) = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$. Tenim

$$\begin{aligned} y'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \\ y''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

i per tant
$$y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$$
Igualant coeficients
$$\begin{aligned} 12a &= 1 \\ 6b &= 0 \\ 2c &= 0 \end{aligned}$$
i per tant $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$ i $c = 0$. Així, el polinomi
$$y(x) = \frac{1}{12}x^4$$
és una solució particular de l'equació donada. $\Diamond$

Funcionament de la taula de la pàgina 172 [continuació]. Si $q(x)$ és un polinomi de grau m multiplicat per una exponencial, $q(x) = p_m(x)e^{\alpha x}$, buscarem una solució que també sigui un polinomi de grau m multiplicat per l'exponencial $e^{\alpha x}$(quarta línia de la taula). Però si dóna la casualitat de que α és arrel del característic amb multiplicitat 1, l'anterior mètode no funciona i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+1$ sense terme independent, és a dir x mutiplicat per un polinomi de grau m, multiplicat per $e^{\alpha x}$ (cinquena línia de la taula). Si dóna la casualitat de que α és arrel del característic amb multiplicitat 2, els anteriors mètodes no funcionen i hem de buscar una solució que sigui un polinomi de grau $m+2$ sense terme independent ni terme lineal, és a dir x^2 mutiplicat per un polinomi de grau m, multiplicat per $e^{\alpha x}$ (sisena línia de la taula).

Exemple 7.4.4 *Trobeu una solució particular de $y'' + y = e^{3x}$.*

Solució. Com que 3 no és arrel del polinomi característic $X^2 + 1$, buscarem una solució del tipus ke^{3x}. Observem que estem aplicant la quarta línia de la taula en el cas de que el polinomi $p_m(x)$ que multiplica a l'exponencial e^{3x} és una constant, és a dir, un polinomi de grau $m = 0$. Tenim
$$\begin{aligned} y(x) &= ke^{3x} \\ y'(x) &= 3ke^{3x} \\ y''(x) &= 9ke^{3x} \end{aligned}$$

Així, $y'' + y = (9k + k)e^{3x} = e^{3x}$ i per tant $k = \frac{1}{10}$. La solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{10}e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 7.4.5 *Trobeu una solució particular de $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$.*

Solució. Com que 3 és arrel del polinomi característic $X^2 - 5X + 6$ amb multiplicitat 1, buscarem una solució del tipus kxe^{3x}. Observem que estem aplicant la cinquena línia de la taula en el cas de que el polinomi $p_m(x)$ que multiplica a l'exponencial e^{3x} és una constant, és a dir, un polinomi de grau $m = 0$, que hem, de multiplicar per x. Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= kxe^{3x} \\ y'(x) &= 3kxe^{3x} + ke^{3x} \\ y''(x) &= 9kxe^{3x} + 3ke^{3x} + 3ke^{3x} \end{aligned}$$

Així, $y'' - 5y' + 6y = 9kxe^{3x} + 6ke^{3x} - 5(3kxe^{3x} + ke^{3x}) + 6kxe^{3x} = e^{3x}$. Simplificant l'exponencial i igualant coeficients tenim

$$\begin{aligned} 9k - 15k + 6k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 6k - 5k = 1 & \end{aligned}$$

Per tant, $k = 1$, i la solució buscada és

$$y(x) = xe^{3x}.$$

$\diamondsuit$

Exemple 7.4.6 *Trobeu una solució particular de $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.*

Solució. Com que 3 és arrel del polinomi característic $X^2 + 1$ amb multiplicitat 2, buscarem una solució del tipus kx^2e^{3x} (sisena línia de la taula).

$$\begin{aligned} y(x) &= kx^2e^{3x} \\ y'(x) &= 3kx^2e^{3x} + 2kxe^{3x} \\ y''(x) &= 9kx^2e^{3x} + 6kxe^{3x} + 2ke^{3x} + 6kxe^{3x} \end{aligned}$$

Així $y''-6y'+9y = 9kx^2e^{3x}+12kxe^{3x}+2ke^{3x}-6(3kx^2e^{3x}+2kxe^{3x})+9kx^2e^{3x}$. Simplificant l'exponencial i igualant coeficients tenim

$$\begin{aligned} 9k - 18k + 9k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 12k - 12k &= 0, \quad \text{que no diu res} \\ 2k &= 1 \end{aligned}$$

Per tant, $k = \frac{1}{2}$, i la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$

$\diamondsuit$

Funcionament de la taula de la pàgina 172 [continuació]. Si $q(x)$ és el producte d'una exponencial $e^{\alpha x}$ per un sinus o un cosinus de βx (o una combinació lineal d'aquests) llavors hem de buscar una solució que sigui exactament d'aquest tipus o d'aquest tipus multiplicat per x, segons que el nombre complex $\alpha \pm i\beta$ sigui o no arrel del característic.

Exemple 7.4.7 *Trobeu una solució particular de $y'' + y = e^x \cos x$.*

Solució. En aquest cas $\alpha = \beta = 1$. Com que $1 \pm i$ no és arrel del característic hem de buscar una solució del tipus

$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) \\ y'(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) \\ y''(x) &= e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) \\ &\quad + e^x(-A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\cos x - B\sin x) \end{aligned}$$

Per tant, $y''+y = e^x((A+2B)\cos x+(-2A+B)\sin x) = e^x\cos x$. Simplificant l'exponencial veiem que la igualtat es compleix quan

$$\begin{aligned} A + 2B &= 1 \\ -2A + B &= 0 \end{aligned}$$

D'aquí deduïm $A = 1/5$ i $B = 2/5$, de manera que la solució buscada és

$$y(x) = e^x(\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x).$$

$\Diamond$

Exemple 7.4.8 *Trobeu una solució particular de* $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$.

Solució. En aquest cas $\alpha = \beta = 1$. Com que $1 \pm i$ és arrel del característic hem de buscar una solució del tipus

$$y(x) = xe^x(A\cos x + B\sin x).$$

Tenim

$$\begin{aligned} y(x) &= xe^x(A\cos x + B\sin x) \\ y'(x) &= e^x\cos x(A + (A+B)x) + e^x \sin x(B + (B-A)x) \\ y''(x) &= e^x(2A + 2B + 2Bx) + e^x \sin x(-2A + 2B - 2Ax) \end{aligned}$$

Per tant $y'' - 2y' + 2y = 2Be^x\cos x - 2Ae^x \sin x$. Deduïm $A = 0$ i $B = 1/2$ de manera que la solució buscada és

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x \sin x.$$

$\Diamond$

Taula per trobar una solució particular de

$$y'' + by' + cy = q(x), \qquad b, c \text{ constants}$$

q(x)	característic=$p_c(x) = x^2 + bx + c$	Solució particular
$p_m(x)$	0 no és arrel de $p_c(x)$	$\tilde{p}_m(x)$
$p_m(x)$	0 és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 1	$x\,\tilde{p}_m(x)$
$p_m(x)$	0 és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 2	$x^2\,\tilde{p}_m(x)$
$p_m(x)e^{\alpha x}$	α no és arrel de $p_c(x)$	$\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$
$p_m(x)e^{\alpha x}$	α és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 1	$x\,\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$
$p_m(x)e^{\alpha x}$	α és arrel de $p_c(x)$ amb multiplicitat 2	$x^2\,\tilde{p}_m(x)e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ no són arrels de $p_c(x)$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ són arrels de $p_c(x)$	$x\,e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(p_n(x)\cos\beta x + q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ no són arrels de $p_c(x)$	$e^{\alpha x}(\tilde{p}_k(x)\cos\beta x + \tilde{q}_k(x)\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(p_n(x)\cos\beta x + q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ són arrels de $p_c(x)$	$x\,e^{\alpha x}(\tilde{p}_k(x)\cos\beta x + \tilde{q}_k(x)\sin\beta x)$

Agustí Reventós

- α i β són nombres reals donats.
- $k =$ max (m, n); $\tilde{p}_k(x)$ i $\tilde{q}_k(x)$ polinomis de grau k que s'han de trobar.
- $p_m(x)$ és un polinomi de grau m donat.
- $\tilde{p}_m(x)$ és un polinomi de grau m que s'ha de trobar.
- c_1 i c_2 constants donades; A i B constants a determinar.

Capítol 8

Sitemes d'equacions diferencials lineals

L'objectiu d'aquest capítol es donar la fórmula general de la solució del sistema d'equacions diferencials $X' = AX$.

8.1 Valors i vectors propis

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definim:

- *Traça* de A= Suma dels elements de la diagonal de A.

  Tindrem, doncs,

  $$\text{traça}(A) = a + d.$$

- *Determinant* de A= Producte dels elements de la diagonal menys producte dels elements de la diagonal secundària.

  Tindrem, docs,

  $$\det(A) = ad - bc.$$

- *Polinomi característic* de A= $p_A(x)$ =det $\begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix}$.

Tindrem, doncs,

$$p_A(x) = x^2 - (\text{traça}A)x + \det A = x^2 - px + q,$$

amb $p = a + d$ i $q = ad - bc$.

- *Valors propis.* Les arrels dels polinomi característic $p_A(x)$ es diuen *valors propis* de A. Per tant, els valors propis λ i μ de A són

  $$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \mu = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

  Si,

  $$\begin{array}{rcll} p^2 - 4q & > & 0 & \text{tenim dos valors propis reals diferents,} \\ p^2 - 4q & = & 0 & \text{tenim un únic valor propi,} \\ p^2 - 4q & < & 0 & \text{tenim dos valors propis complexos conjugats.} \end{array}$$

- *Vectors propis.* Es diu que el vector $u = (u_1, u_2)$, $u \neq \vec{0}$, és un vector propi de A, de valor propi λ, si $Au = \lambda u$.

  Equivalentment $(A - \lambda I)u = \vec{0}$, on

  $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Així, doncs, per trobar u tan sols hem de resoldre el sistema (compatible indeterminat)

  $$\boxed{\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

  Les dues equacions a que dóna lloc aquest sistema són equivalents, i per tant, només cal considerar-ne una de elles, de manera que podem dir que el vector propi de valor propi λ està determinat (llevat d'un escalar) per l'equació

  $$(a - \lambda)u_1 + bu_2 = 0.$$

  Per tant, podem agafar com vector propi de valor propi λ

  $$\boxed{u = (b, \lambda - a)} \tag{8.1}$$

- Observem que la suma dels valors propis de A és la traça de A i que el producte dels valors propis és el determinant.

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= p = \text{traça}(A) \\ \lambda \cdot \mu &= q = \det(A) \end{aligned}$$

Proposició 8.1.1 *Vectors propis de valors propis diferents són linealment independents.*

Demostració. Suposem $Au = \lambda u$ i $Av = \mu v$ amb $\lambda \neq \mu$. Si tenim una combinació lineal d'ells igual a zero:

$$au + bv = 0, \quad a, b, 0 \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$$

llavors, aplicant A a aquesta igualtat tenim

$$a\lambda u + b\mu v = 0.$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned} au + bv &= 0 \\ a\lambda u + b\mu v &= 0 \end{aligned}$$

obtenim $(\mu - \lambda)bv = 0$, i per tant $b = 0$. Això implica $a = 0$, i per tant u i v són linealment independents. □

Exemple 8.1.2 *Trobeu els vectors propis de*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solució. Traça de A: $3 + 7 = 10$.
Determinant de A: 26.
Polinomi característic: $x^2 - 10x + 26$.
Valors propis: $\lambda = 5 + i$, $\mu = 5 - i$.
Vector propi de valor propi λ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3 - 5 - i & 5 \\ -1 & 7 - 5 - i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (5, 2 + i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

Vector propi de valor propi μ: Resolem

$$\begin{pmatrix} 3-5+i & 5 \\ -1 & 7-5+i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $u = (5, 2 - i)$ (o qualsevol múltiple d'aquest).

8.2 Sistema d'equacions diferencials

L'objectiu és trobar dues funcions $x = x(t)$ i $y = y(t)$ de les quals sabem únicament que les seves derivades són combinació lineal d'elles mateixes.

Concretament tenim

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + by(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

que escrivim simplement com

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

on a, b, c, d són nombres reals coneguts.

És útil usar notació matricial i escriure aquest sistema com

$$X' = AX$$

on

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Teorema 8.2.1 (Existència i unicitat) *El sistema d'equacions diferencials $X' = AX$ té infinites solucions però només una $X = X(t)$ tal que $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.*

Una altra observació important és que *la combinació lineal de solucions de $X' = AX$ és també solució.* En efecte, si $X(t)$ és solució, llavors $Z(t) = \lambda X(t)$ és també solució, ja que

$$Z'(t) = \lambda X'(t) = \lambda AX(t) = A(\lambda X(t)) = AZ(t).$$

I si $X(t)$ i $Y(t)$ són solucions, llavors $Z(t) = X(t) + Y(t)$és també solució, ja que

$$Z'(t) = X'(t) + Y'(t) = AX(t) + AY(t) = A(X(t) + Y(t)) = AZ(t).$$

8.3 Cinètica química

En CINÈTICA QUÍMICA[1] apareixen diagrames com el següent que presentem, que modelen situacions de descomposició de materials en altres materials.

$$A \underset{k_3}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \xrightarrow{k_2} C$$

Un material A és transforma en un material B. Aquest es transforma en els materials A i C. Trobeu $A(t)$ (concentració molar[2] de A a l'instant t) i $B(t)$ (concentració molar de B a l'instant t).

Solució. L'equació que regeix la descomposició dels materials és $x'(t) = kx(t)$. Per tant, la situació del problema es regeix per

$$\begin{aligned} A'(t) &= -k_1A(t) + k_3B(t) \\ B'(t) &= k_1A(t) - (k_2 + k_3)B(t) \end{aligned}$$

En efecte, la velocitat de variació de A ($A'(t)$) és proporcional a la quantitat de A que hi ha en cada moment ($A(t)$) i aquesta constant és negativa ($-k_1$) perquè $A(t)$ és decreixent. Però $A(t)$ augmenta per la part de B que es transforma en A. Aquesta part és proporcional a la quantitat de B que

[1]Veure *Ecuaciones diferenciales para las ciencias químicas y físicas*, F. Balibrea, V, Jiménez, ICE Universidad de Murcia, (2000).

[2]$A(t) = n_A(t)/V$, on $n_A(t)$ és el nombre de mols de A a l'instant t i V és el volum del sistema, que se suposa constant.

hi ha en cada moment ($B(t)$) i aquesta constant és positiva (k_3) perquè $A(t)$ augmenta.

Un argument similar justifica la segona equació. La velocitat de variació de B ($B'(t)$) es la suma de les velocitats en les que el cos B es transforma en A (que és proporcional a quantitat de cos B que tenim ($B(t)$) amb constant de proporcionalitat k_3), de la velocitat en la que el cos B es transforma en C (que és proporcional a quantitat de cos B que tenim ($B(t)$) amb constant de proporcionalitat k_2) i a la velocitat en la que el cos A es transforma en B. És a dir:

$$B'(t) = k_1 A(t) - k_2 B(t) - k_3 B(t).$$

8.4 El característic té arrels reals diferents

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de A, tingui dues arrels reals diferents λ, μ.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

essent u vector propi de A de valor propi λ ($Au = \lambda u$), i v vector propi de A de valor propi μ ($Av = \mu v$).

És a dir

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

o, equivalentment,

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + C_2 e^{\mu t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + C_2 e^{\mu t} v_2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Justificació.[3] Demostrar que

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v$$

és soució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= C_1 e^{\lambda t} \lambda_1 u + C_2 e^{\mu t} \mu v \\ &= C_1 e^{\lambda t} A u + C_2 e^{\mu t} A v \\ &= A(C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v) \\ &= AX. \end{aligned}$$

Nota 8.4.1 *Com que sabem que la combinació lineal de solucions és solució, és suficient demostrar que $X(t) = e^{\lambda t} u$ i $X(t) = e^{\mu t} v$ són solució.*

Nota 8.4.2 *Atenció, perquè no és el mateix dir que qualsevol combinació lineal de $e^{\lambda t} u$ i $e^{\mu t} v$ és solució, que dir qualsevol solució que se'ns pugui ocórrer és d'aquest tipus. Això és conseqüència del teorema d'unicitat 6.1.1 i del fet que els vectors propis són linealment independents.*

En efecte, donada una solució qualsevol amb

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

sempre podem ajustar les constants C_1 i C_2 per tal de que una solució del tipus $C_1 e^{\lambda t} u + C_2 e^{\mu t} v$ compleixi aquesta condició inicial, i coincideixi doncs (per la unicitat), amb la solució donada.

Per trobar C_1 i C_2 hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 e^{\lambda t_0} u_1 + C_2 e^{\mu t_0} v_1 \\ y_0 &= C_1 e^{\lambda t_0} u_2 + C_2 e^{\mu t_0} v_2 \end{aligned}$$

el qual té solució única perquè

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t_0} u_1 & e^{\mu t_0} v_1 \\ e^{\lambda t_0} u_2 & e^{\mu t_0} v_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda+\mu) t_0} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ja que l'exponencial no s'anul·la mai i els vectors propis son linealment independents.

[3] Vegeu la secció 8.9, pàgina 196.

Exemple 8.4.3 *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trobeu també la solució particular tal que $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solució. Polinomi característic: $x^2 - 6x + 8$.

Arrels del característic (valors propis) $\lambda = 2$, $\mu = 4$.

Càlcul del vector propi de valor propi 2.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equival a resoldre la única equació

$$u_1 + u_2 = 0.$$

Per tant, tot vector que tingui la primera component igual a la segona canviada de signe és vector propi de valor propi 2.

Prendrem, doncs, com a vector propi de valor propi $\lambda = 2$ el vector $u = (1, -1)$

Càlcul del vector propi de valor propi 4.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equival a resoldre la única equació

$$-u_1 + u_2 = 0.$$

Per tant, tot vector que tingui la primera component igual a la segona és vector propi de valor propi 4.

Prendrem, doncs, com a vector propi de valor propi $\mu = 4$ el vector $u = (1, 1)$

Per tant, la solució general del sistema

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

és igual, en el nostre cas, a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{aligned} \tag{8.3}$$

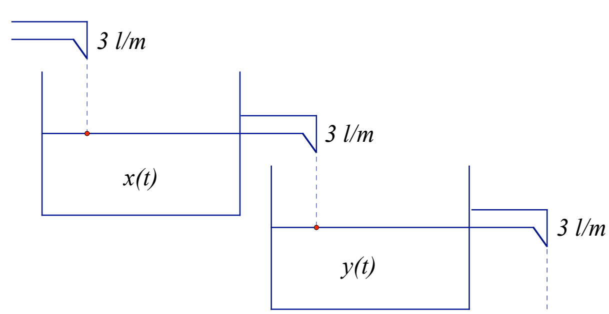
Si ara volem la solució particular amb $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ només hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= -C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Per tant, $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$ i la solució buscada és

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t} \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{4t} \end{aligned}$$

Exemple 8.4.4 *Un dipòsit conté inicialment* 100 *litres d'aigua i* $10Kg$ *de sal. A aquest dipòsit hi entra aigua a raó de* 3 *litres per minut, i surt disolució (aigua amb sal) a raó també de* 3 *litres per minut. Aquesta disolució va a parar a un segon dipòsit que conté inicialment 50 litres d'aigua i del qual surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. En quin moment serà màxima la quantitat de sal en el segon dipòsit?*



Solució. Si diem $x(t)$ a la quantitat de sal en el primer dipòsit i $y(t)$ a la quantitat de sal en el segon dipòsit tenim:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3\,\frac{x(t)}{100} \\ y'(t) &= 3\,\frac{x(t)}{100} - 3\,\frac{y(t)}{50} \end{aligned}$$

amb $x(0) = 10$ i $y(0) = 0$.

Observem que $x(t)/100$ és la *concentració* de sal del primer dipòsit (quantitat de sal per litre) i que $y(t)/50$ és la *concentració* de sal del segon dipòsit. Com que la velocitat de sortida de dissolució del primer dipòsit és de 3 litres per minut, i cada litre conté $x(t)/100$ Kg de sal, la velocitat de sortida de sal del primer dipòsit ($x'(t)$) és igual (en valor absolut) a $3(x(t)/100)$. El signe menys de la primera equació ($x'(t) = -3\frac{x(t)}{100}$) prové del fet que la funció $x(t)$ és decreixent, i per tant , té derivada negativa. Un argument similar justifica la segona equació del sistema anterior.

La matriu associada al sistema és

$$\begin{pmatrix} -3/100 & 0 \\ 3/100 & -3/50 \end{pmatrix}.$$

Vector propi de valor propi $\lambda = -3/100$: $u = (1, 1)$.

Vector propi de valor propi $\lambda = -3/50$: $v = (0, 1)$.

Per tant:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-3/100t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3/50t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En imposar les condicions inicials $x(0) = 10$, $y(0) = 0$, obtenim $C_1 = 10$, $C_2 = -10$. En imposar $y'(t) = 0$, obtenim

$$2e^{(-3/50)t} = e^{(-3/100)t},$$

és a dir,

$$2 = e^{(3/100)t},$$

i per tant $t = (100/3)\ln 2 = 23,1$ minuts.

8.5 El característic té arrels complexes

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de A, tingui dues arrels complexes $\lambda, \bar{\lambda}$.

La solució general està donada per

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \Re \left[e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right] + C_2 \Im \left[e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right]} \tag{8.4}$$

on $\Re$ vol dir "part real" i $\Im$ vol dir "part imaginària"[4], i

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

és el vector propi de valor propi λ. Com que λ és un nombre complex, tant u_1 com u_2 són també nombres complexos. C_1 i C_2 són constants reals.

Justificació. El fet de que les arrels del característic siguin complexes ens 'obliga' a considerar el sistema $X' = AX$ com un sistema complex: les entrades de la matriu X, i per tant també les de X', són nombres complexos.

Tindrem

$$\begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

Com que els elements de la matriu A són reals, la igualtat de matrius complexes anteriors implica, considerant la part real i la part imaginaria als dos costats de la igualtat, les dues igualtats de matrius reals següents

$$\Re \begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \Re \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

$$\Im \begin{pmatrix} x'(t) + ip'(t) \\ y'(t) + iq'(t) \end{pmatrix} = A \Im \begin{pmatrix} x(t) + ip(t) \\ y(t) + iq(t) \end{pmatrix}.$$

[4]Així $\Re(a + bi) = a$, i $\Im(a + bi) = b$. Anàlogament

$$\Re \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \Im \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

És a dir, la part real i la part imaginària d'una solució complexa de $X' = AX$ són solucions reals de $X' = AX$.

El mateix argument que en el cas real (pàgina 179) ens diu que si u és un vector propi de valor propi λ (tant λ com les dues components de u nombres complexos), llavors

$$X(t) = e^{\lambda t} u$$

és solució del sistema $X' = AX$.

Per tant,

$$\Re(e^{\lambda t} u), \quad \text{i} \quad \Im(e^{\lambda t} u)$$

són solucions *reals* de $X' = AX$.

Per tant, qualsevol combinació lineal de elles és també solució, i la fórmula (8.4) queda justificada.

Nota 8.5.1 *Atenció, perquè no és el mateix dir que qualsevol combinació lineal de $\Re(e^{\lambda t} u)$ i $\Im(e^{\lambda t} u)$ és solució, que dir qualsevol solució que se'ns pugui ocórrer és d'aquest tipus. Això és conseqüència del teorema d'unicitat 6.1.1 i del fet que les dues components (complexes) del vector propi u són linealment independents sobre $\mathbb{R}$.*

En efecte, donada una solució qualsevol $X(t)$ amb

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

sempre podem ajustar les constants C_1 i C_2 per tal de que una solució del tipus $C_1 \Re(e^{\lambda t} u) + C_2 \Im(e^{\lambda t} u)$ compleixi aquesta condició inicial, i coincideixi doncs (per la unicitat), amb la solució donada.

Per trobar C_1 i C_2 hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \Re(e^{\lambda t_0} u_1) + C_2 \Im(e^{\lambda t_0} u_1) \\ y_0 &= C_1 \Re(e^{\lambda t_0} u_2) + C_2 \Im(e^{\lambda t_0} u_2) \end{aligned}$$

el qual té solució única perquè

$$\begin{vmatrix} \Re(e^{\lambda t_0}u_1) & \Im(e^{\lambda t_0}u_1) \\ \Re(e^{\lambda t_0}u_2) & \Im(e^{\lambda t_0}u_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

com es veurà[5] *a continuació,* **??**.

Explicitem la fórmula (8.4)

Si posem

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + iu_{12} \\ u_{21} + iu_{22} \end{pmatrix}$$

llavors

$$e^{\lambda t}u = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ e^{\lambda t}u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(u_{11} + iu_{12}) \\ e^{\lambda t}(u_{21} + iu_{22}) \end{pmatrix}.$$

Posem $\lambda = \alpha + i\beta$ i calculem les dues components de la darrera matriu.

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}u_1 &= e^{\alpha t}e^{\beta it}(u_{11} + iu_{12}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(u_{11} + iu_{12}) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}u_2 &= e^{\alpha t}e^{\beta it}(u_{21} + iu_{22}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(u_{21} + iu_{22}). \end{aligned}$$

Així

[5] Aquest determinant val

$$e^{2\alpha t_0}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix},$$

amb $\lambda = \alpha + i\beta$ i $u = (u_1, u_2) = (u_{11} + iu_{12}, u_{21} + iu_{22})$. I

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

és el determinant format pels dos vectors de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ u_1 i u_2 (les dues components complexes de u). La fórmula (8.1) ens diu que podem pensar sempre u_1 real i u_2 complex, de manera que és evident que són linealment independents sobre $\mathbb{R}$.

$$\Re\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Re(e^{\lambda t}u_1) \\ \Re(e^{\lambda t}u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(u_{11}\cos\beta t - u_{12}\sin\beta t) \\ e^{\alpha t}(u_{21}\cos\beta t - u_{22}\sin\beta t) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix}.$$

$$\Im\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Im(e^{\lambda t}u_1) \\ \Im(e^{\lambda t}u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(u_{11}\sin\beta t + u_{12}\cos\beta t) \\ e^{\alpha t}(u_{21}\sin\beta t + u_{22}\cos\beta t) \end{pmatrix}$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'equació (4.3) també es pot escriure com

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\left[C_1 P\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + C_2 P\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}\right]} \tag{8.5}$$

amb

$$P = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

També es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}P\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

De manera que quan volem imposar les condicions inicials $(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0))$ per trobar C_1 i C_2 ens trobem amb un sistema de Cramer, ja que el determinant del sistema és $e^{2\alpha t}\det P$, i $\det P \neq 0$, com veiem fàcilment a continuació.

En efecte, segons la fórmula (8.1) sempre podem agafar $u = (b, \lambda - a)$ de manera que

$$P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \alpha - a & \beta \end{pmatrix}.$$

Això ens permet veure directament que $\det P = b\beta \neq 0$ ja que $\beta \neq 0$ és la hipòtesi que estem fent de que els valors propis són complexos. Anàlogament ha de ser $b \neq 0$, ja que la matriu

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

té valors propis reals (que són a i d, ja que el característic és $(a-x)(d-x)$).

La solució del sistema $X' = AX$ en el cas $Au = \lambda u$, amb $\lambda = \alpha + i\beta$, $u = (u_{11} + iu_{12}, u_{21} + iu_{22})$ està donada pel producte de matrius $$X(t) = H(\alpha t)PG(\beta t)C$$ *on* $$\begin{aligned} H(\alpha t) &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad \textit{homotècia de raó } e^{\alpha t}, \\ P &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad \textit{matriu de les components del vector propi}, \\ G(\beta t) &= \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \textit{gir d'angle } \beta t, \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota 8.5.2 *Com que les entrades de la matriu A són reals, si A té el valor propi complex $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$), també té el valor propi conjugat $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. I el vector propi de valor propi $\bar{\lambda}$ és justament el conjugat $\bar{u}$ de u. Només cal conjugar la igualtat $Au = \lambda u$; com que A és real obtenim: $A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$.*

Es compleix també que

$$\Re(e^{\bar{\lambda}t}\bar{u}), \quad i \quad \Im(e^{\bar{\lambda}t}\bar{u})$$

són solucions reals *de $X' = AX$.*

Repetint els càlculs anteriors obtindríem [6]

$$X(t) = H(\alpha t)\bar{P}G(-\beta t)C$$

[6] En conjugar, α no canvia, β canvia de signe, u_{11} i u_{21} no canvien, i u_{12} i u_{22} canvien de signe.

on

$$
\begin{aligned}
H(\alpha t) &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad \textit{homotècia de raó } e^{\alpha t}. \\
\bar{P} &= \begin{pmatrix} u_{11} & -u_{12} \\ u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix}, \quad \textit{matriu de les components del vector propi.} \\
G(-\beta t) &= \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \textit{gir d'angle } -\beta t. \\
C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Però aquest producte de matrius coincideix amb el considerat en el requadre anterior simplement canviant C_2 per $-C_2$. Com C_2 és una constant arbitrària, aquesta solució és essencialment igual a la ja obtinguda, és a dir, és el mateix escriure la solució general (8.5) *a partir de la parella* (λ, u) *que a partir de la parella* $(\bar{\lambda}, \bar{u})$.

Exemple 8.5.3 *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució.

Polinomi característic: $x^2 - 2x + 17$.
Arrels del característic (valors propis) $\lambda = 1 + 4i, \bar{\lambda} = 1 - 4i$.
Si posem $\lambda = \alpha + i\beta$, tenim $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

Càlcul de vector propi de valor propi $\lambda = 1 + 4i$.
Hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 1-(1+4i) & 4 \\ -4 & 1-(1+4i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema es redueix a l'equació $-4iu_1 + 4u_2 = 0$. Si $u_1 = 1$, ha de ser $u_2 = i$. Per tant, podem agafar com vector propi $u = (1, i)$.

Solució a partir de la fórmula (8.4).

Calculem

$$\Re[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}], \quad \text{i} \quad \Im[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}]$$

Tenim

$$\begin{gathered}
\Re(e^{\lambda t}u_1) = \Re(e^{(1+4i)t}\cdot 1) = e^t\cos(4t) \\
\Re(e^{\lambda t}u_2) = \Re(e^{(1+4i)t}\cdot i) = -e^t\sin(4t) \\
\Im(e^{\lambda t}u_1) = \Im(e^{(1+4i)t}\cdot 1) = e^t\sin(4t) \\
\Im(e^{\lambda t}u_2) = \Im(e^{(1+4i)t}\cdot i) = e^t\cos(4t)
\end{gathered}$$

Per tant, la solució general

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\Re\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] + C_2\Im\left[e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]}$$

és ara

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t\cos(4t) \\ -e^t\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^t\sin(4t) \\ e^t\cos(4t) \end{pmatrix}} \tag{8.6}$$

Solució a partir de la fórmula (8.5).

Amb la notació de la fórmula (8.5) tenim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que $1 = 1 + 0i$ (primera fila) i $i = 0 + 1$ i (segona fila).

Per tant la solució és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t\left[C_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}\right]$$

És a dir,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t\left[C_1\begin{pmatrix} \cos(4t) \\ -\sin(4t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}\right]}$$

que coincideix amb (8.6). Equivalentment,

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^t(C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)) \\
y(t) &= e^t(-C_1\sin(4t) + C_2\cos(4t))
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Exemple 8.5.4 *Trobeu la solució de l'anterior sistema tal que* $x(0) = 0$ *i* $y(0) = 1$.

Solució. Només hem d'imposar

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) \\ 1 = y(0) &= e^0(-C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \\ 1 &= C_2 \end{aligned}$$

i, per tant, la solució és

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \sin(4t) \\ y(t) &= e^t \cos(4t) \end{aligned}$$

$\Diamond$

8.6 El característic té una arrel real doble i hi ha un únic vector propi

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de A, tingui una arrel real doble λ.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2) e^{\lambda t} v}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

essent v l' únic vector propi de A de valor propi λ ($Av = \lambda v$), i u és un vector que compleix

$$\boxed{Au = \lambda u + v}$$

Equivalentment
$$(A-\lambda I)u = v,$$
on I és la matriu identitat 2×2. Observem que aquesta igualtat vectorial és un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites: les dues components u_1, u_2 del vector u, que es poden trobar doncs fàcilment.

És important notar que aquest sistema és compatible indeterminat. Això és conseqüència del teorema Rocuhé-Frobenius ja que
$$\text{rang}(A-\lambda I) = \text{rang}(A-\lambda I|v).$$

En efecte, com que estem estudiant el cas en que el polinomi característic de
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
que, recordem que val $x^2-(a+d)x+ad-bc$, té una arrel real doble, això vol dir que el seu discriminant és zero, i per tant
$$\lambda = \frac{a+d}{2}.$$
El vector propi v és ara fàcil de calcular. Obtenim $v=(2b, d-a)$. Així
$$\text{rang}(A-\lambda I|v) = \text{rang}\left(\begin{array}{cc|c} \frac{a-d}{2} & b & 2b \\ c & \frac{d-a}{2} & d-a \end{array}\right) = \text{rang}(A-\lambda I),$$
ja que la tercera columna és un múltiple de la segona.

Així doncs sempre existeix aquest vector u tal que $(A-\lambda I)u = v$, essent v el vector propi, i per tant la solució general del sistema en aquest cas serà
$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

o, equivalentment,
$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} v_2 \end{aligned}$$

Justificació. Demostrar que
$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} v$$

és soució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, i tenint en compte que $Au = \lambda u + v$, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= C_1 e^{\lambda t}\lambda u + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t}\lambda v + C_1 e^{\lambda t} v \\ &= C_1 e^{\lambda t}(\lambda u + v) + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} A v \\ &= C_1 e^{\lambda t} A u + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} A v \\ &= A(C_1 e^{\lambda t} u + (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} v) \\ &= AX. \end{aligned}$$

Exemple 8.6.1 *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Polinomi característic: $x^2 - 4x + 4$. Arrels del característic: $\lambda = 2$ amb multiplicitat dos. Observeu que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Càlcul del vector propi de valor propi 2: Resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -4 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema es redueix a l'equació $x + 2y = 0$, i per tant, podem agafar com a vector propi de valor propi 2 el vector $v = (-2, 1)$. Fixeu-vos que qualsevol múltiple λv d'aquest vector, $((4, -2), (-10, 5), ...)$ és també vector propi de valor propi 1

Busquem ara u tal que $Au = 2u + v$. Equivalentment,

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -4 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és equivalent a la única equació $u_1 + 2u_2 = 1$. Per tant, podem agafar per exemple $u = (1, 0)$.

La solució serà doncs

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (C_1 t + C_2) e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t}(C_1 - 2(C_1 t + C_2)) \\ y(t) &= e^{2t}(C_1 t + C_2) \end{aligned}$$

Exemple 8.6.2 *Un dipòsit conté inicialment 100 litres d'aigua i 10 Kg de sal. A aquest dipòsit hi entra aigua a raó de 3 litres per minut, i surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. Aquesta dissolució va a parar a un segon dipòsit que conté inicialment 100 litres d'aigua i del qual surt disolució (aigua amb sal) a raó també de 3 litres per minut. En quin moment serà màxima la quantitat de sal en el segon dipòsit?*

Solució. Es deixa al lector. $\Diamond$

8.7 El característic té una arrel real doble i hi ha dos vectors propis

Volem resoldre el sistema

$$X' = AX$$

en el cas en que el polinomi característic de A, tingui una arrel real doble λ, però hi hagin dos vectors propis de valor propi λ, u, v linealment independents.

Si passa això, llavors qualsevol vector es vector propi de valor propi λ. De manera que aquesta situació es dóna només si la matriu A és diagonal, i.e. $A = \lambda I$.

La solució general està donada per

$$\boxed{X(t) = e^{\lambda t} u}$$

amb

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

essent u un vector qualsevol.

Justificació. Demostrar que

$$X(t) = e^{\lambda t} u$$

és solució de $X' = AX$ és molt senzill ja que, derivant, tenim

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{\lambda t} \lambda u \\ &= \lambda X(t) \\ &= \lambda I X(t) \\ &= AX. \end{aligned}$$

Exemple 8.7.1 *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució. Polinomi característic: $(x-2)^2$. Arrels del característic: $\lambda = 2$ amb multiplicitat dos. Com que $A = 2I$ tot vector es vector propi de valor propi 2.

La solució serà doncs

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

per a qualsevol valor de u_1 i de u_2.

8.8 Mètode alternatiu: Pas d'un sistema 2×2 de primer ordre a una equació de segon ordre

Els sistemes d'equacions diferencials lineals 2×2 amb coeficients constants es poden reduir a equacions diferencials lineals de segon ordre amb coeficients constants. En particular, podem resoldre aquests sistemes sense parlar de matrius, valors propis etc., com acabem de fer a les seccions anteriors.

Concretament, donat el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

amb a, b, c, d constants, derivem la primera equació i obtenim

$$x'' = ax' + by' = ax' + b(cx + dy) = ax' + bcx + bd\frac{1}{b}(x' - ax)$$

(La última igualtat prové d'aïllar y a la primera equació).

És a dir, tenim l'equació de segon ordre

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

que sabem resoldre pels mètodes explicats a les seccions anteriors. Un cop coneguda la funció $x(t)$ podem trobar $y(t)$ resolent la segona equació $y' - dy = cx(t)$ que és lineal.

També podem trobar $y(x)$ observant que el mateix càlcul anterior però derivant la segona equació en lloc de la primera ens dóna

$$y'' - (a+d)y' + (ad - bc)y = 0.$$

Curiosament, doncs, $x(t), y(t)$, són solucions de la *mateixa* equació diferencial.

Observem que si denotem per

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

l'equació diferencial que compleixen tant $x(t)$ com $y(t)$ es pot escriure com

$$\boxed{x'' - (\text{traça} A)x' + (\det A)x = 0.}$$

Resolem per aquest mètode el mateix exercici 8.4.3.

Exemple 8.8.1 *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solució. L'equació diferencial que compleixen tant $x(t)$ com $y(t)$ és

$$x'' - 6x' + 8x = 0.$$

Les arrels són 2 i 4 i per tant

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= C_3 e^{2t} + C_4 e^{4t} \end{aligned}$$

Ara bé, les constants no són independents. Com que la primera equació dels sistema és $x'(t) = 3x(t) + y(t)$ s'ha de complir que

$$2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} = 3(C_1e^{2t} + C_2e^{4t}) + C_3e^{2t} + C_4e^{4t}.$$

Igualant els coeficients de les dues exponencials tenim

$$\begin{aligned} 2C_1 &= 3C_1 + C_3 \\ 4C_2 &= 3C_2 + C_4 \end{aligned}$$

Per tant, $C_3 = -C_1$ i $C_4 = C_2$. Així que la solució és

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la pàgina 181, equació (8.3).

8.9 Mètode alternatiu: Diagonalització

Una de les aplicacions més interessants dels conceptes de vector i valor propi és la següent.

Definició 8.9.1 *Direm que una matriu A és diagonalitzable si existeix una matriu invertible P tal que la matriu*

$$D = P^{-1}AP$$

és una matriu diagonal.

Recordem que una matriu es diu *diagonal* quan tots els termes fora de la diagonal són zero.

Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

són diagonals.

Estudiarem només el cas de matrius 2×2, ja que de moment estem interessats només en resoldre sistemes d'equacions diferencials de dues equacions amb dues incògnites.

Sigui doncs A una matriu 2×2 i suposem que té un vector propi u de valor propi λ i un altre vector propi v de valor propi μ. És a dir,

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v.$$

Si $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$, les anteriors igualtats s'escriuen

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}$$

Recordant com funciona el producte de matrius[7] veiem que les dues igualtats anteriors es poden expressar en una de sola posant

$$A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Denotant per P la matriu formada pels vectors propis

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

tenim

$$AP = PD, \quad \text{amb} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Si els vectors propis són linealment independents, P és invertible, ($\det P \neq 0$), i tenim

$$D = P^{-1}AP$$

Resumint, *si una matriu* 2×2 *té dos vectors propis independents, diagonalitza. La matriu* P *que realitza aquesta diagonalització* ($P^{-1}AP$ *diagonal)*

[7]La primera (resp. segona) columna de la matriu producte AB s'obté multiplicant A per la primera (resp. segona) columna de B. En el nostre cas

$$A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \left(A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

té per columnes les components dels vectors propis. La diagonal de la matriu $D = P^{-1}AP$ està formada pels valors propis de A.

Exemple 8.9.2 *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. Característic: $x^2 - 5x - 2$.

Arrels del característic (valors propis): $\lambda = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $\mu = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

Vector propi de valor propi λ: $u = (1, \frac{3+\sqrt{33}}{4})$.

Vector propi de valor propi μ: $v = (1, \frac{3-\sqrt{33}}{4})$.

Per tant, si prenem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} & \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$$

tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$

Exemple 8.9.3 *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Solució. Hem vist a l'exemple 8.1.2 que A no té valors propis reals. Per tant, *A no diagonalitza sobre els reals*: no hi ha cap matriu 2×2 amb coeficients reals, invertible , tal que $P^{-1}AP$ sigui una matriu diagonal.

En canvi, si prenem

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$$

(les columnes són els vectors propis calculats a l'exercici 8.1.2) tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5+i & 0 \\ 0 & 5-i \end{pmatrix}$$

És a dir, *A sí que diagonalitza sobre els complexos.* $\Diamond$

Exemple 8.9.4 *Diagonalitzeu la matriu*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució. L'únic valor propi d'aquesta matriu és $\lambda = 2$, ja que el polinomi característic és $(2-x)^2$. Per calcular el vector o vectors propis associats al valor propi $\lambda = 2$ posem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquí deduïm que l'únic vector propi és $u = (0,1)$ (i, com sempre, qualsevol múltiple d'aquest). Per tant no podem construir la matriu P invertible formada per dos vectors propis de A. Això vol dir que A no diagonalitza (no sobre els reals, ni sobre els complexos).[8] $\diamondsuit$

Aplicació de la diagonalització a resoldre $X' = AX$

Suposem que volem resoldre el sistema d'equacions diferencials

$$X' = AX$$

on A és una matriu 2×2 diagonalitzable.

És a dir, busquem funcions $x(t), y(t)$ tals que

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Que A sigui diagonalitzable vol dir que existeix una matriu 2×2 invertible P, (formada pels vectors propis de A) tal que $D = P^{-1}AP$ és diagonal (els elements de la diagonal són els valors propis de A).

Llavors $A = PDP^{-1}$ i per tant

$$X' = AX = PDP^{-1}X$$

Multiplicant per P^{-1},

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

[8] Demostreu directament, sense recorre a vectors i valors propis, que no hi ha cap matriu invertible P tal que $AP = PD$ amb D diagonal (A la matriu de l'exemple).

Posem, $Z = P^{-1}X$. Com que P és constant, al derivar tenim $Z' = P^{-1}X'$ i per tant

$$Z' = DZ$$

Però resoldre aquest sistema és ara trivial ja que si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

aquest sistema està format en realitat per dues equacions diferencials independents. Concretament

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

equival a

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \lambda z_1(t) \\ z_2'(t) &= \mu z_2(t) \end{aligned}$$

que té solució

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1 e^{\lambda t} \\ z_2(t) &= C_2 e^{\mu t} \end{aligned}$$

I, per tant, la solució del sistema és

$$X(t) = PZ(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\mu t} \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

Com que sabem que P és la matriu que té per columnes les components dels vectors propis,

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_1 + C_2 e^{\mu t} v_1 \\ y(t) &= C_1 e^{\lambda t} u_2 + C_2 e^{\mu t} v_2 \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la fórmula (8.2) de la pàgina 178.

Si la matriu A del sistema $X' = AX$ és diagonalitzable, llavors la solució és

$$X = PZ, \quad amb \quad D = P^{-1}AP$$

essent Z la solució del sistema diagonal $Z' = DZ$.

Exemple 8.9.5 (Veure exemple 8.4.3) *Resoleu el sistema*

$$X' = AX$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solució. Sabem que $u = (1, -1)$ és un vector propi de A de valor propi 2, i que $v = (1, 1)$ és un vector propi de A de valor propi 4. Sabem que si posem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

llavors la matriu $D = P^{-1}AP$ és diagonal, i la diagonal està formada pels valors propis, es a dir

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Segons acabem de veure, igualtat (8.7), la solució del sistema és

$$X(t) = P \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{pmatrix},$$

és a dir

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{aligned}$$

d'acord amb el resultat obtingut a la pàgina 181, equació (8.3).
$\Diamond$

El punt dèbil d'aquesta manera de procedir és que *no tota matriu és diagonalitzable.* Necessitem, en el cas 2×2, que la matriu P formada pels vectors propis sigui invertible. Equivalentment, necessitem tenir dos vectors propis linealment independents. Vegeu l'exemple 8.9.4.

8.10 Cas no homogeni

Volem resoldre el sistema d'equacions diferencials

$$X' = AX + B$$

on

$$B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Tenim el resultat següent.

Teorema 8.10.1 *La solució general del sistema*

$$X' = AX + B$$

és igual a la solució general del sistema homogeni $X' = AX$ més una solució particular del sistema no homogeni $X' = AX + B$.

Demostració. En efecte, la diferència de dues solucions del no homogeni és una solució del sistema homogeni. L'argument és essencialment el mateix que l'utilitzat a 6.4.2 i a 7.2.2. □

Corol·lari 8.10.2 *La solució del sistema*

$$X' = AX + C,$$

amb C constant, és igual a la solució del sistema homogeni $X' = AX$ menys $A^{-1}C$.

Demostració. El vector constant

$$Y(t) = -A^{-1}C$$

és una solució particular del sistema $X' = AX + C$. En efecte,

$$Y'(t) = 0 = A(-A^{-1}C) + C.$$

Exemple 8.10.3 *Considerem*[9] *la reacció química*

$$A \;\underset{k_3}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}\; B \;\underset{k_4}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}}\; C$$

amb $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1, k_4 = 3$*, i suposem que tenen concentracions inicials* $A(0) = 4, B(0) = 3, C(0) = 3$ *mmol/l. Demostreu que les concentracions de* A, B, C *tendeixen a estabilitzar-se.*

Solució. Pels arguments que acabem d'explicar, amb la petita modificació que ara l'element C també dóna lloc a l'element B a velocitat k_4, tenim

$$\begin{aligned} A'(t) &= -A(t) + 2B(t) \\ B'(t) &= A(t) - (1+2)B(t) + 3(10 - A(t) - B(t)) \end{aligned}$$

ja que sempre es compleix $A(t) + B(t) + C(t) = constant = A(0) + B(0) + C(0) = 10$. Hem de resoldre doncs el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= -2x - 6y + 30 \end{aligned}$$

Per fer això trobarem la solució del sistema homogeni associat

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= -2x - 6y \end{aligned}$$

pels mètodes que veurem tot seguit, i la modificarem com indica el teorema.

En el nostre cas

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Així

$$Y(t) = X(t) - A^{-1}C = X(t) - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

[9]Veure *Balibrea-Jiménez*, pàg. 34.

on $X(t)$ és la solució del sistema homogeni $X' = AX$ que trobarem pels mètodes ja explicats a la secció anterior. Concretament s'obté

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t} + 6, \\ y(t) &= -(C_1/2) e^{-2t} - 2C_2 e^{-5t} + 3. \end{aligned}$$

Quan t és gran $x(t)$ s'estabilitza en el valor 6 i $y(t)$ s'estabilitza en el valor 3.

Exemple 8.10.4 *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + t \\ y' &= x + 3y + e^t \end{aligned}$$

Solució. Sabem (exemple 8.4.3, pàgina 180) que la solució del sistema homogeni associat és

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Per tal de trobar la solució del no homogeni fem *variació de les constants.* Posem

$$Z(t) = S(t)C(t), \quad S(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Llavors imposem

$$Z' = S'C + SC' = AZ + B, \tag{8.8}$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Com que $X(t) = S(t)C(t_0)$ és solució del sistema homogeni, per a qualsevol valor fixat t_0, tenim

$$X'(t) = S'(t)C(t_0) = AS(t)C(t_0), \quad \forall t_0$$

En particular, prenent derivades en $t = t_0$, tenim

$$S'(t_0)C(t_0) = AS(t_0C(t_0))$$

i com que aquesta igualtat és certa per a tot t_0 tenim

$$S'(t)C(t) = AZ(t).$$

Substituint a (8.8) tenim

$$S(t)C'(t) = B(t)$$

que permet calcular $C(t)$ integrant

$$C'(t) = S(t)^{-1}B(t).$$

Tenim

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Un parell d'integrals senzilles, usant que

$$\int te^{at}\,dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$$

ens donen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1+2t}{8}e^{-2t} \\ c_2(t) &= -\frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1+4t}{32}e^{-4t} \end{aligned}$$

Per tant la solució particular buscada és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t - \frac{5+12t}{32} \\ \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{3+4t}{32} \end{pmatrix}$$

i la general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t - \frac{5+12t}{32} \\ \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{3+4t}{32} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$