Gauss y el Apéndice del Tentamen

UCM, 2009

Agustí Reventós & Carlos Rodríguez

Escuela de Atenas. Raffaelo 1510

Euclides con un compás

Quinto postulado

- Si una línea recta es cortada por dos líneas rectas de manera que los ángulos interiores del mismo lado sumen menos de dos rectos, y si estas dos líneas rectas se prolongan indefinidamente, entonces se cortan en el lado dónde están estos ángulos que suman menos de dos rectos.

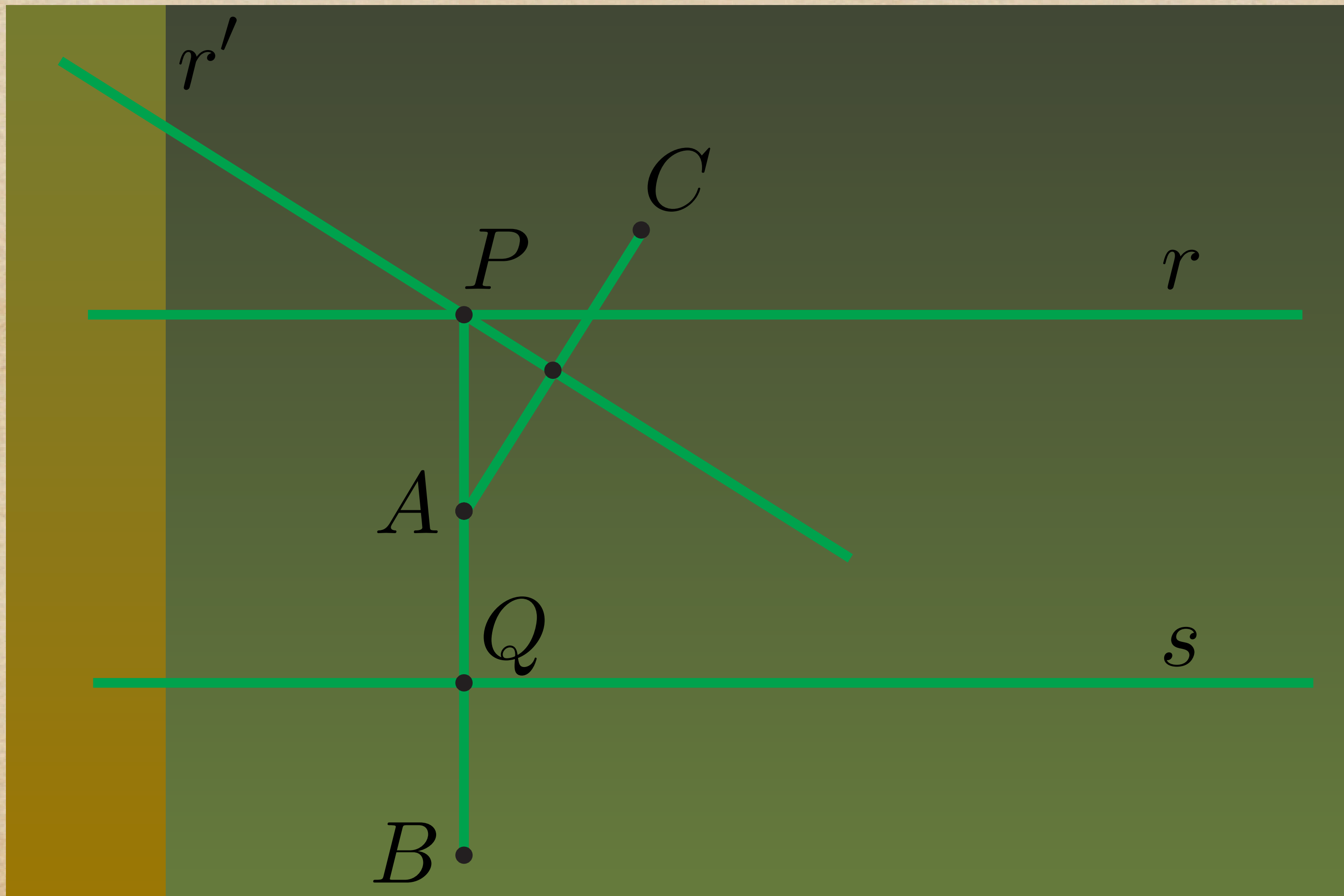
Quinto postulado

Si $\alpha + \beta < \pi$, r y s se cortan.

Quinto postulado

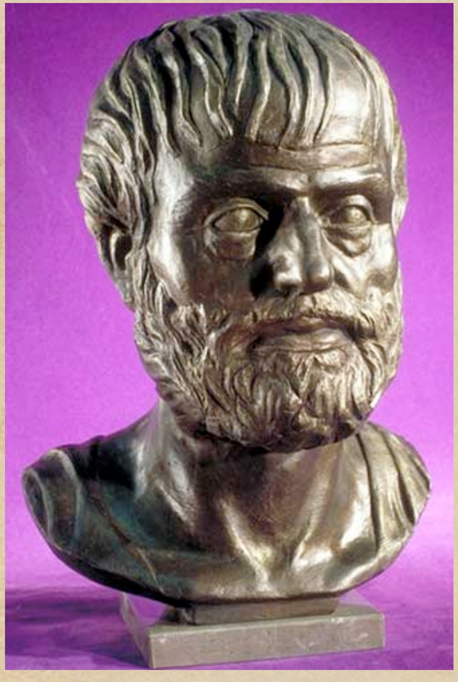
1. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.
2. Tres puntos no alineados determinan una circunferencia.
3. Existen triángulos semejantes.
4. Hay triángulos de área tan grande como queramos.
5. Los ángulos de un triángulo suman lo mismo que dos ángulos rectos.
6. Las equidistantes son rectas.

Farkas Bolyai



- Primer geómetra no euclidiano

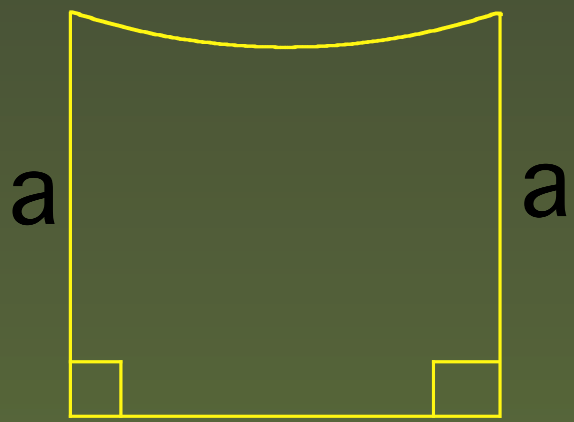
Aristóteles 384-382 aC



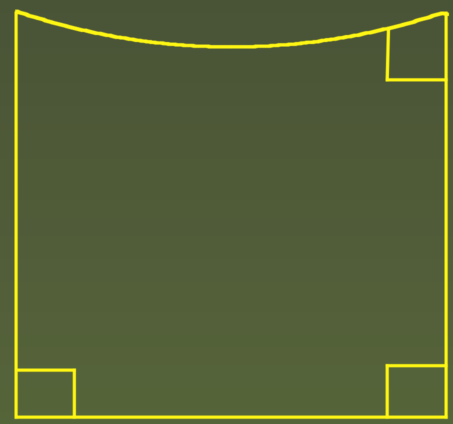
- Si es imposible que los ángulos de un triángulo sumen dos rectos, entonces el lado del cuadrado es conmensurable con la diagonal. (De caelo)

1667-1733

1728-1777



Saccheri



Lambert

Lambert 1728-1777

- Theorie der Parallellinien 1766
- Formula la Analogía

Lambert 1728-1777

- 1. Bajo la tercera hipótesis deberíamos tener una medida absoluta de longitud.
- 2. [el defecto] crece con el área.

Lambert 1728-1777

- 3. Las tablas trigonométricas serían infinitamente largas, no abría semejanza ni proporcionalidad de figuras....

Lambert 1728-1777

- 4. Lo que nos impresiona aún más es que lo que hemos dicho sobre triángulos esféricos se puede probar independientemente de la dificultad presentada por las rectas paralelas

Lambert 1728-1777

- 5. Me inclino a pensar que la tercera hipótesis es cierta en alguna esfera de radio imaginario

La Analogía de Lambert

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$

La Analogía de Lambert

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$

$$\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i\sinh x.$$

Esfera

$$\sin\frac{a}{R}\sin\beta = \sin\frac{b}{R}\sin\alpha$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{c}{R}\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{c}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}$$

Esfera imaginária

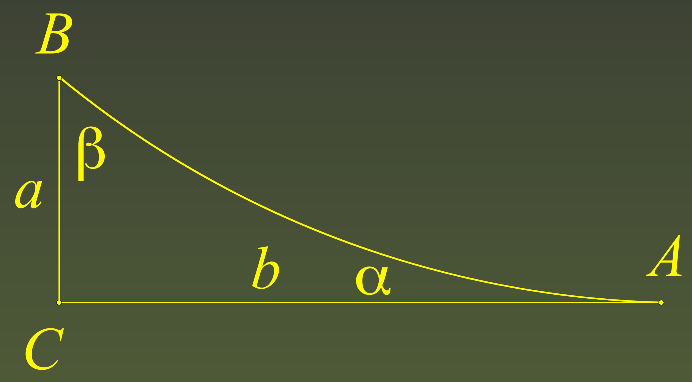
$$\begin{aligned}
\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}
\end{aligned}$$

Esfera imaginária

$$
\begin{aligned}
\sinh\frac{a}{R}\sin\beta &= \sinh\frac{b}{R}\sin\alpha \\
\cosh\frac{a}{R} &= -\sinh\frac{c}{R}\sinh\frac{b}{R}\cos\alpha + \cosh\frac{c}{R}\cosh\frac{b}{R} \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

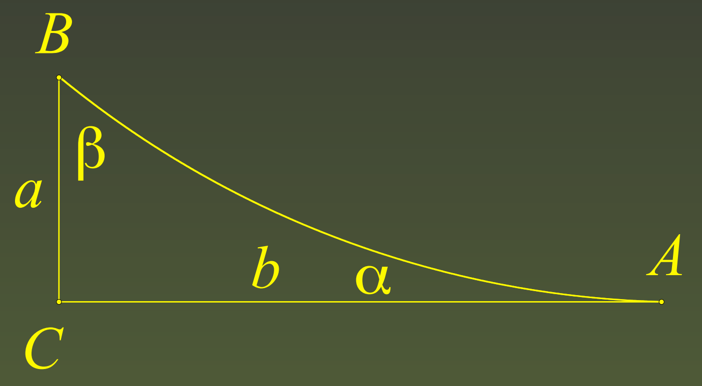
- Algunas consecuencias

Ángulo de paralelismo



$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}$$

Ángulo de paralelismo



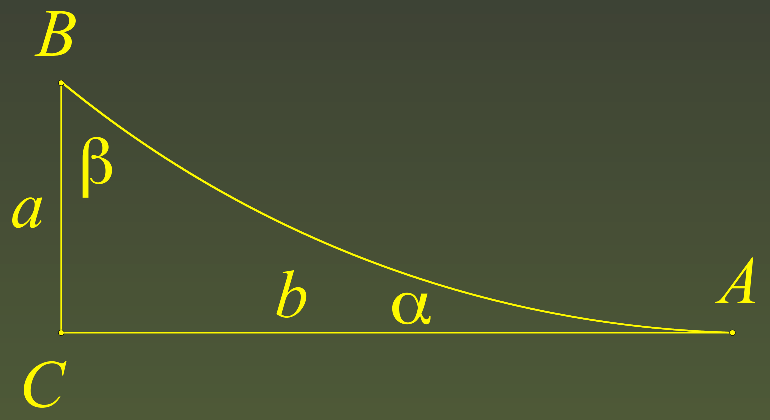
$\cos\alpha = \sin\beta \cosh \frac{a}{R}$

Si $A \to \infty, \alpha \to 0,$

$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R}$$

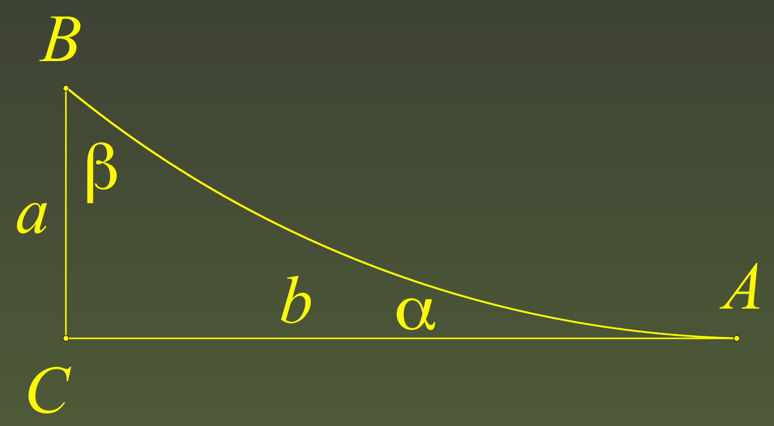
- $\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}$

Rectas tienen longitud infinita



$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

Rectas tienen longitud infinita



$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh \frac{b}{R}$$

Si $\alpha \to 0$, $\beta \to$ ángulo paralelismo $< \pi/2$

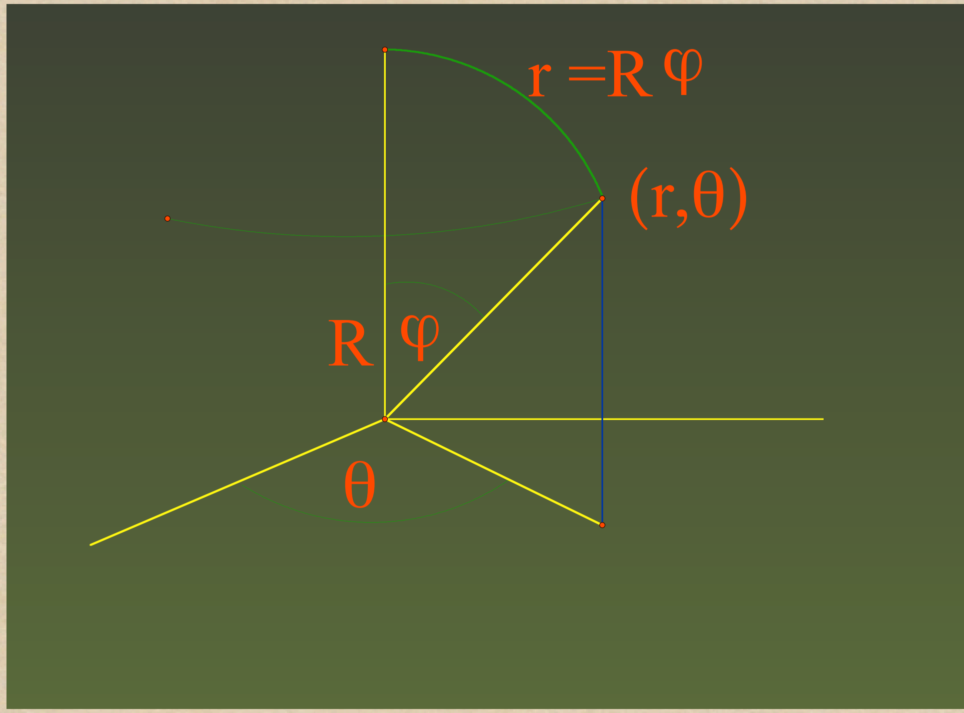
$$\Longrightarrow \quad b \to \infty$$

Taurinus 1794-1874

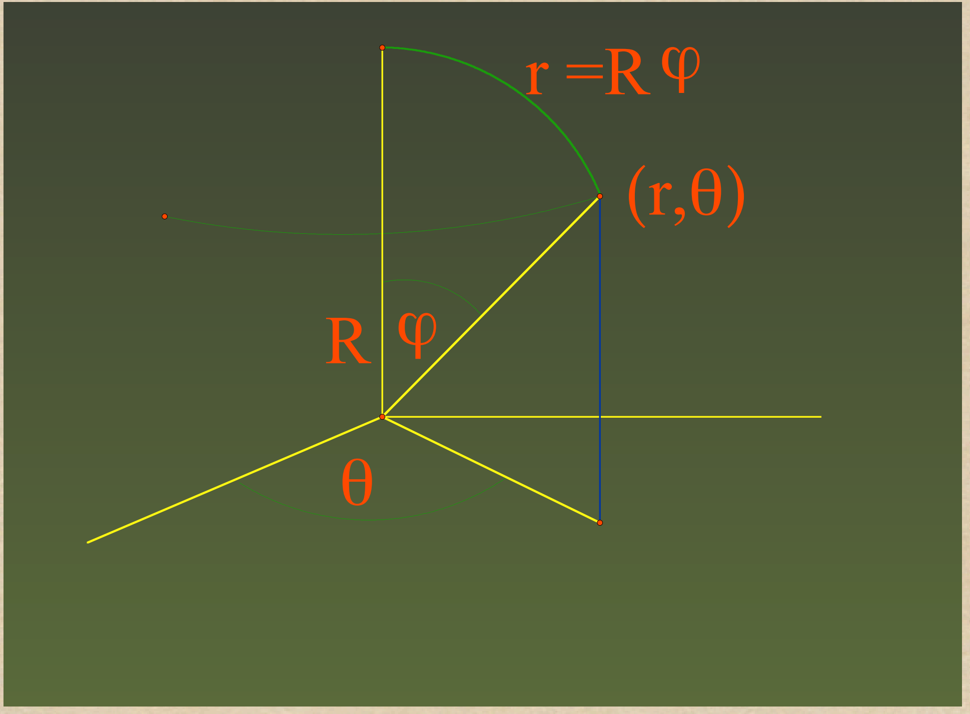
- Sobrino de Schweikart
- A. Dou, *Orígenes de la geometria no euclídea: Saccheri, Lambert y Taurinus*, Historia de la Matemática en el siglo XIX, RACEFN Madrid (1992) 43-65.

La Analogía diferenciable

Elemento de longitud de la esfera



Elemento de longitud de la esfera



$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\tfrac{r}{R}\right) d\theta^2$$

Analogía diferenciable

Objetivo: Encontrar una superficie con elemento de longitud

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

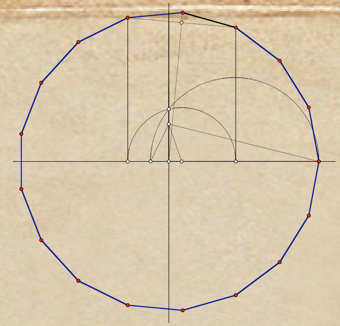
Analogía diferenciable

Objetivo: Encontrar una superficie de curvatura constante

$$K = \frac{1}{(Ri)^2} = -\frac{1}{R^2}$$

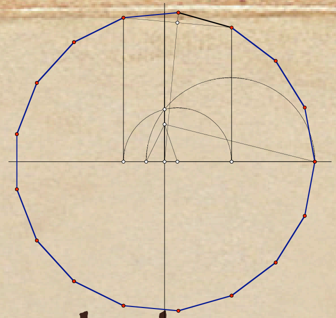
- Gauss y la geometría euclídea

Gauss 1796



- Carta a Gerling 1819: La historia de este descubrimiento no se ha mencionado hasta ahora; la puedo explicar muy exactamente. Fue el día 29 de marzo de 1796, sin la más mínima participación de la casualidad, ya que fue fruto de esforzadas meditaciones;

Gauss 1796



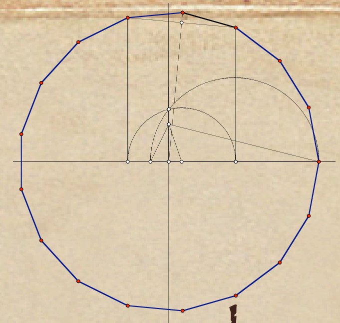
- Todo está en dividir las raíces de la ecuación

$$x^p-1/x-1=0$$

en dos grupos [...]

Gauss

1796



- Durante unas vacaciones en Braunschweig una mañana (antes de levantarme de la cama) tuve la suerte de ver claramente todas las correlaciones, de manera que apliqué al polígono de 17 lados la correspondiente confirmación numérica.

Braunschweig

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años.
- Las entradas [1], [3], [55], [65], [66], [116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.

El Diario

- Al día siguiente, 30 de marzo de 1796, empezó el Diario, un mes antes de cumplir 19 años
- Las entradas [1], [3], [55], [65], [66], [116], hacen referencia a polígonos. Nace la Teoría de Galois.
- [1] *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*

Göttingen

Göttingen

- Gauss y la geometría no euclídea

Gauss vs Bolyai

- J.M. Montesinos, *Las geometrias no euclídeas: Gauss, Lobachevsky y Bolyai*, Historia de la Matemática en el siglo XIX, RACEFN Madrid (1992), 65-114.

Parallelentheorie

- Notas encontradas entre los papeles de Gauss de 1831.
- Cartas a amigos y colaboradores.
- No obstante, todos los resultados sobre Geometría astral que aparecen en estas cartas se pueden deducir directamente de la Analogía de Lambert.
- Gauss conoce el trabajo de Lambert : biblioteca de Göttingen 1795 y 1797. Carta a Bessel 1829: *A través de lo que Lambert dijo, y Schhweikart reveló ...*

- Algunas cartas

Gauss-Shumaker 1846

- La que Schweikart llamó Geometría Astral, Lobatchevski la llama Geometría imaginaria. Tu sabes que durante 54 años (desde 1792) he compartido los mismos puntos de vista

Gauss-Shumaker 1846

- La que Schweikart llamó Geometría Astral, Lobatchevski la llama Geometría imaginaria. Tu sabes que durante 54 años (desde 1792) he compartido los mismos puntos de vista (con algunos desarrollos adicionales sobre los que no quiero entrar ahora)
- [...] pero el desarrollo sigue un camino diferente al mío.

Gauss-Gerling 1846

- El teorema que Sr. Schweikart le menciona a usted, que en cualquier Geometría la suma de los ángulos externos de un polígono difiere de 360° en una cantidad [...] que es proporcional al área, es el primer teorema que se encuentra en el umbral de esta teoría, un teorema la necesidad del cual reconocí ya en 1794.

El Diario

- [72] Plani possibilitatem demonstravi.

28 de julio de 1797

El Diario

- [99] In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

setiembre 1799

Gauss-Farkas Bolyai 1799

- Si se pudiera probar que existe un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces yo estaría en condiciones de probar rigurosamente toda la Geometría. Mucha gente tomaría esto como un axioma, pero yo no. Es posible que el área no llegue nunca a un cierto valor límite.

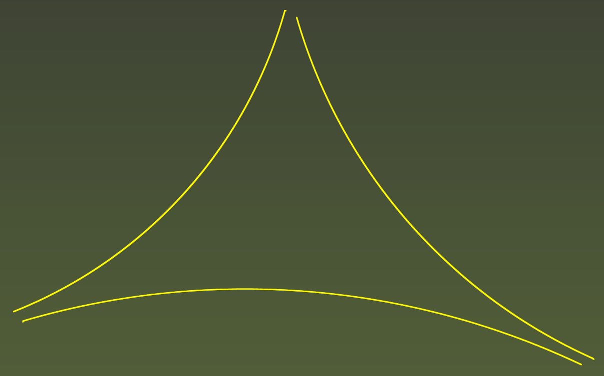
Gauss-Gerling 1816

- Sería incluso deseable que la Geometría Euclídea no fuera cierta, porque entonces tendríamos una medida universal a priori. Por ejemplo, podríamos tomar como unidad el lado de un triángulo equilátero de ángulo =59°59'59''.99999

Gauss-Gerling 1819

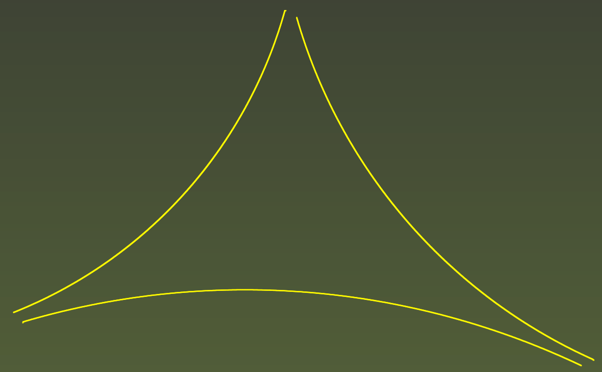
- El defecto no es sólo más grande cuando el área se hace más grande, sino que es exactamente proporcional a ella, de tal manera que el área tiene una cota que no se puede alcanzar, y esta cota es igual al área encerrada por 3 líneas asintóticas. La fórmula para esta cota es

Gauss-Gerling 1819



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Gauss-Gerling 1819



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \operatorname{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(C) = \frac{\pi}{4}$$

- 1822: Stand meiner untersuchung über die umformung der flächen

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

$$ds^2 = m(du^2 + dv^2)$$

- 1822: Stand meiner untersuchung über die umformung der flächen

mittelst paralleler Normalen auf die Kugel vom Radius 1 abgebildet und entspricht ihm dort ein Flächenelement der Grösse

$$A(B'C''-C'B'')+B(C'A''-A'C'')+C(A'B''-B'A'')\,dt\,du = \Delta\,dt\,du,$$

so ist das Krümmungsmass der Fläche im Punkte t, u:

$$K = \frac{\Delta}{mm}.$$

Vermöge der Gleichung 24 wird alsdann:

$$[25] \qquad K = -\frac{1}{mm}\left(\frac{\partial\partial \log m}{\partial t^2} + \frac{\partial\partial \log m}{\partial u^2}\right),$$

K lässt sich also allein durch m und die Ableitungen davon ausdrücken, oder das Krümmungsmass behält denselben Werth bei allen Umformungen der Fläche, die deren Linienelement

$$\sqrt{\{mm(dt^2+du^2)\}}$$

unverändert lassen.]

Geodesía

El más refinado geómetra y el perfecto astrónomo, estos son dos títulos separados que amo con todo mi corazón y que adoro con pasión siempre que están unidos

- 1825: Primera versión (no publicada) del *Disquisitiones* generales circa superficies curvas
- 1827

- 1825: Primera versión (no publicada) del *Disquisitiones* generales circa superficies curvas
- 1827

... quodvis punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{E}.\mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{G}.\mathrm{d}q$; denique denotando per ω angulum inter haec elementa, facile perspicitur, fieri $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curva in-

Gauss-Schumaker 1831

- Hace algunas semanas he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de 40 años atrás. Nunca las había redactado, y ello me ha obligado a empezar mi trabajo de nuevo tres o cuatro veces. No quisiera, sin embargo, que todo esto pereciera conmigo.

Gauss-Schumaker 1831

- En esta carta da también la longitud de una circunferencia de radio r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

y comenta que para que las medidas coincidan con la experiencia, k debería ser infinitamente grande.

- Gauss interrumpe la escritura en 1832, cando conoce el trabajo de János Bolyai.

Gauss-Gerling 1832

Te comento también que he recibido estos días un pequeño trabajo desde Hungría, sobre Geometrías no euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados desarrollados muy elegantemente.

Gauss-Gerling 1832

El autor es un joven oficial austriaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí en 1978, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación actual. Tengo a este joven geómetra v. Bolyai como un genio de primera magnitud...

Gauss-Farkas Bolyai 1832

....no puedo hacer otra cosa: si lo alabase, me alabaría a mi mismo, ya que el total contenido del trabajo, el camino que sigue tu hijo y los resultados que obtiene coinciden casi desde el principio al fin con mis reflexiones de hace 30-35 años.

Gauss-Farkas Bolyai 1832

....era mi idea escribir todo esto para que no pereciese conmigo [...] Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

Gauss-Farkas Bolyai 1832

La imposibilidad de decidir a priori entre Σ y S da la clara demostración de que Kant no estaba en lo cierto al afirmar que el espacio es solo la forma de nuestra percepción. Otra razón igualmente fuerte está en mi breve ensayo [...] donde puedes encontrar la esencia de mis opiniones sobre cantidades imaginarias.

- Cuánto hubiera podido cambiar la historia si Gauss hubiese hecho pública su buena opinión del trabajo de János Bolyai!

Los Bolyai

Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae [...] Introducendi. 1832

Marosvásárhely

Göttingen

Farkas a János 1820

- Por el amor de Dios! Deja las paralelas tranquilas, abjura de ellas como de una charla indecente, te quitarán (como a mi) todo tu tiempo, salud, tranquilidad y felicidad de tu vida.

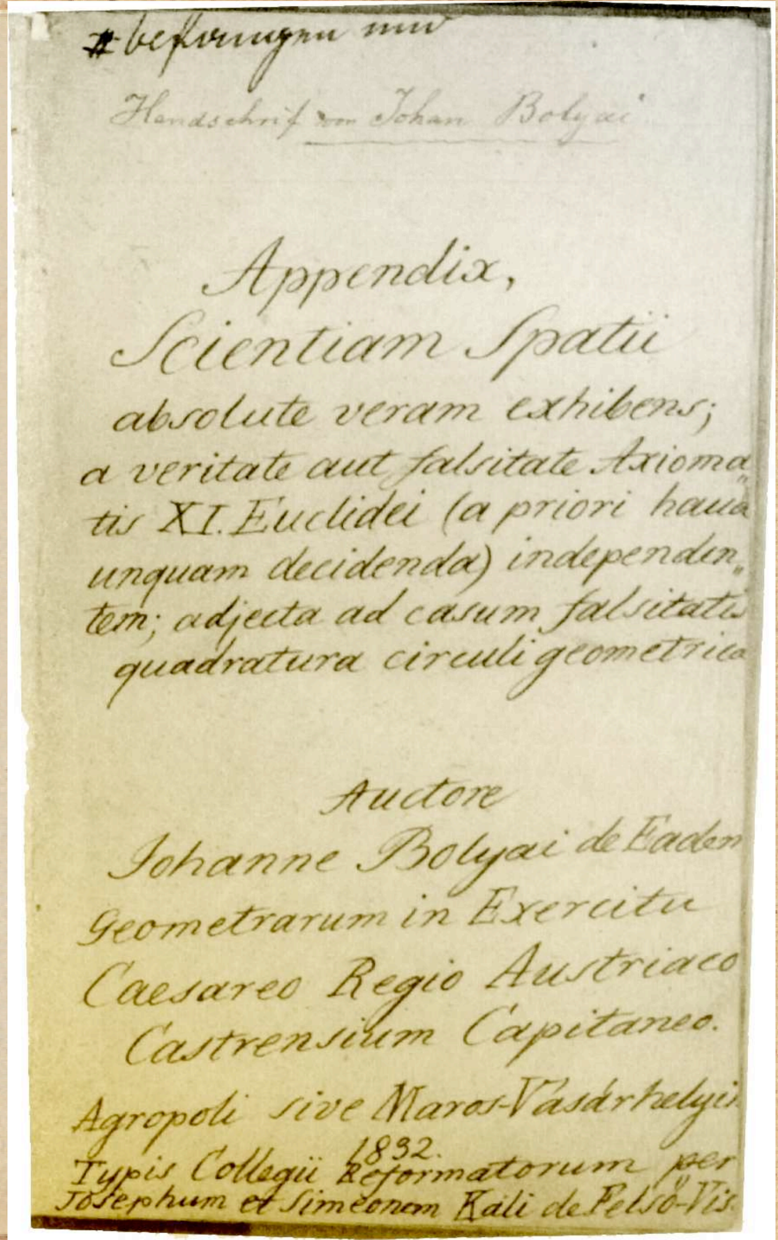
János a Farkas 1823

- Estoy determinado a publicar un trabajo sobre las paralelas, tan pronto lo haya arreglado y preparado y tenga oportunidad para ello [...].
- He descubierto cosas tan soberbias que yo mismo estoy atónito, y significaría una vergüenza eterna dejarlo perder para siempre; si usted, apreciado padre, las ve, las reconocerá; ahora no puedo decir más: de la nada he creado un mundo nuevo y diferente.

El Apéndice

Enviado a Gauss en Junio 1831

y Enero 1832



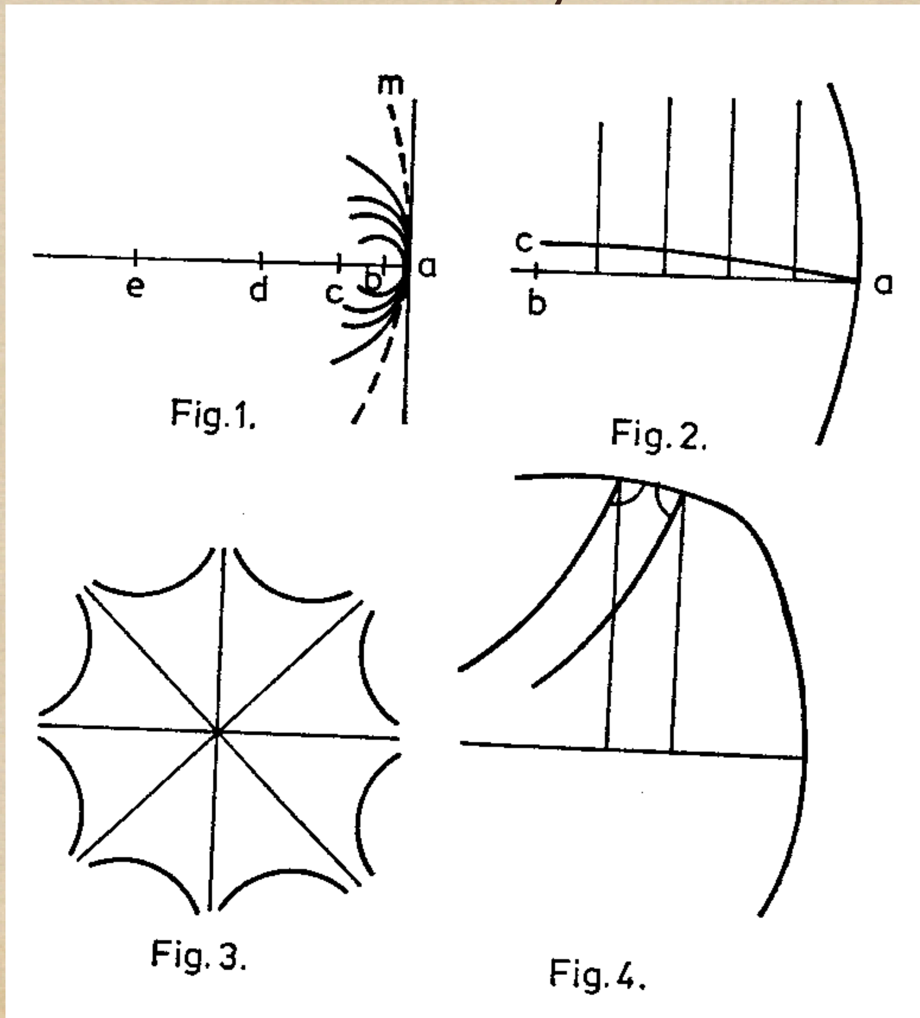
Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vasárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

Parallelarum Theory 1820

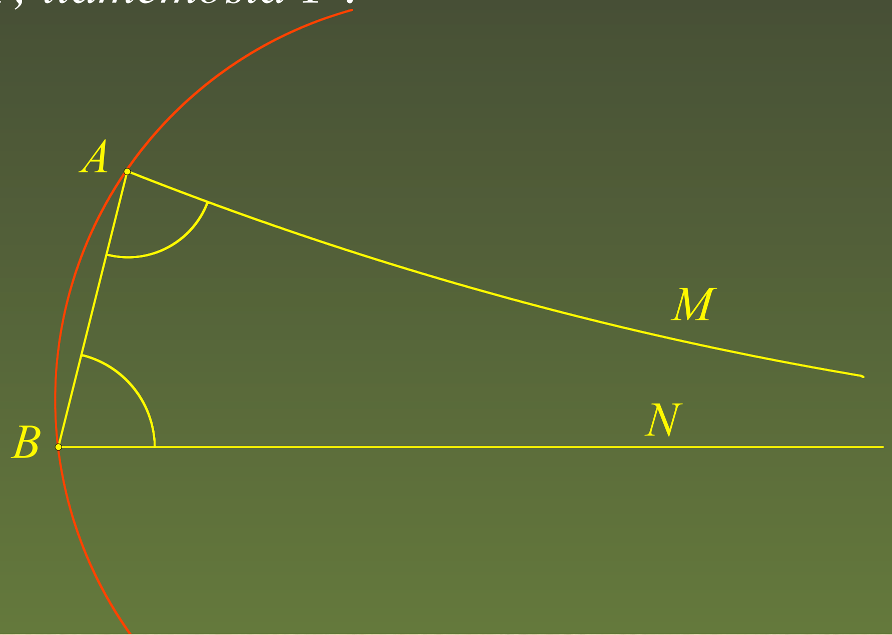


El Apéndice

- §1 Introduce el paralelismo.
- §11 Introduce horosfera y horociclo.
- §21 *La geometría de la horoesfera es euclidiana*.
- §24 Aparecen exponenciales.
- §25 Trigonometria absoluta.
- §32 Introduce el elemento de longitud.
- §43 Cuadratura del círculo.

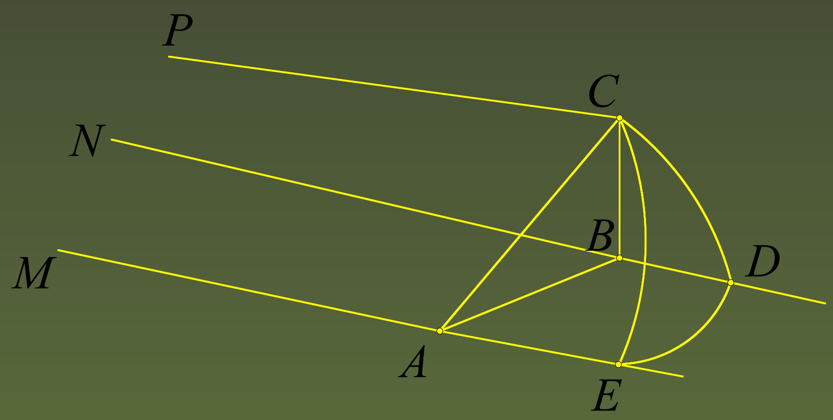
§11 Horosfera

Consideremos el conjunto formado por el punto A *y todos los puntos* B *tales que si* $BN \| AM$ *entonces* $BN \simeq AM$*; llamemosla* F.



§25 Teorema del seno

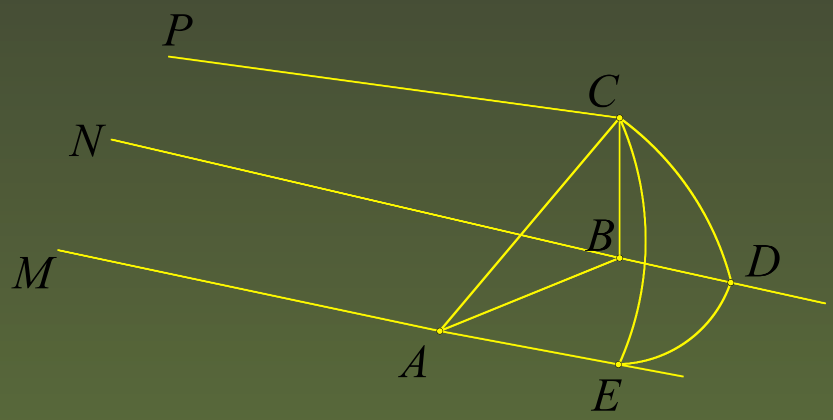
En cualquier triángulo rectilíneo, los círculos con radio igual a sus lados son como los senos de los ángulos opuestos.

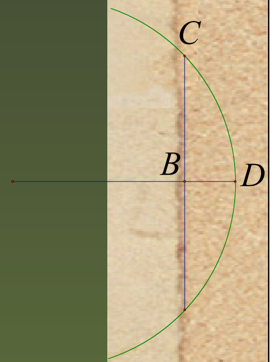


$$\frac{1}{\sin A} = \frac{EC}{DC} = \frac{\odot EC}{\odot DC} = \frac{\odot AC}{\odot BC}$$

§25 Teorema del seno

En cualquier triángulo rectilíneo, los círculos con radio igual a sus lados son como los senos de los ángulos opuestos.

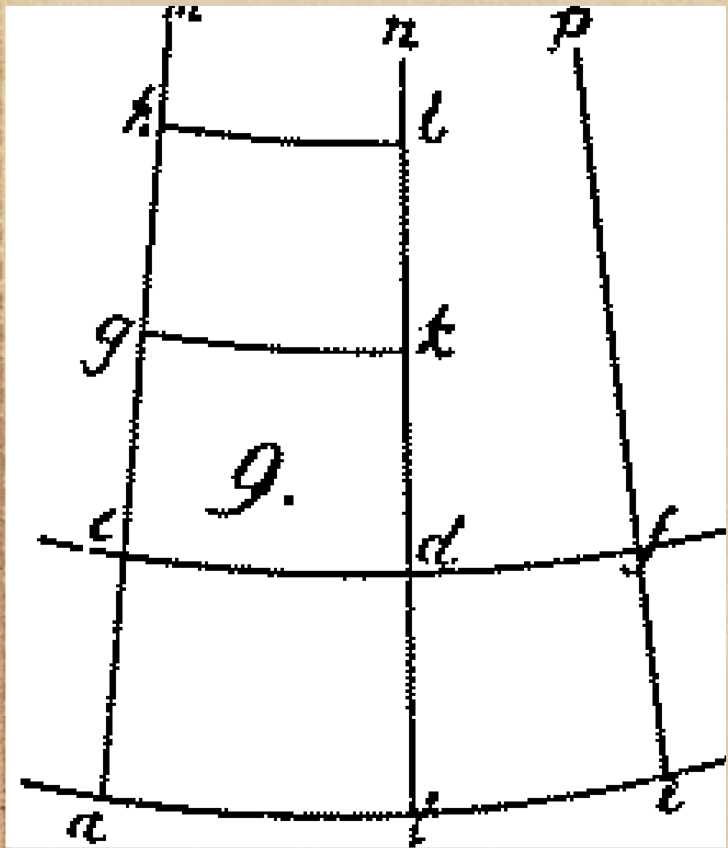




$$\frac{1}{\sin A} = \frac{EC}{DC} = \frac{\odot EC}{\odot DC} = \frac{\odot AC}{\odot BC}$$

- Las tres métricas que Gauss debió ver en el Apéndice

Primera §24



$$z = y e^{-x/R}$$

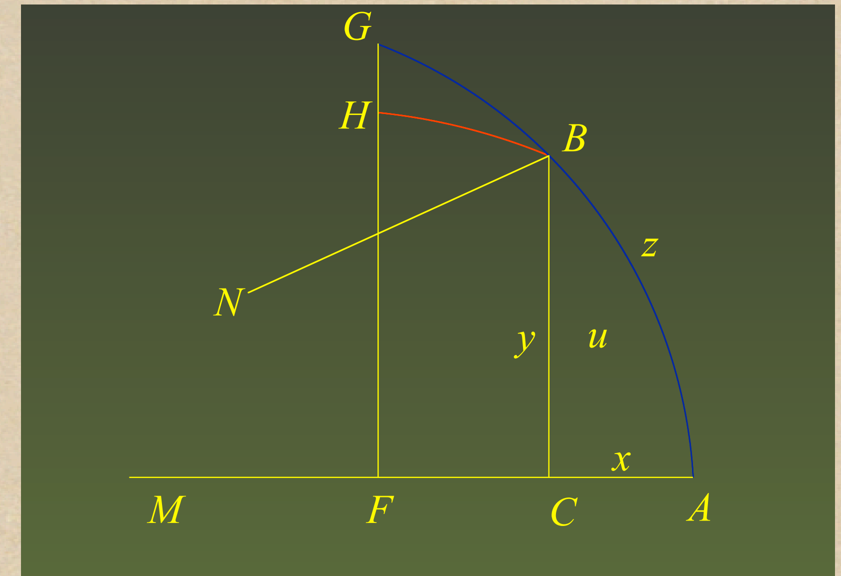
$$ds^2 = dx^2 + e^{-2x/R}\, dy^2$$

Segunda §30

$$L(r) = 2\pi \sinh(r/R)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R) \, d\theta^2$$

Tercera §32.



II. **Demonstrari potest, esse** $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$;

$$ds^2 = dy^2 + \cosh^2(y/R)\ dx^2$$

Curvatura

- (1825)

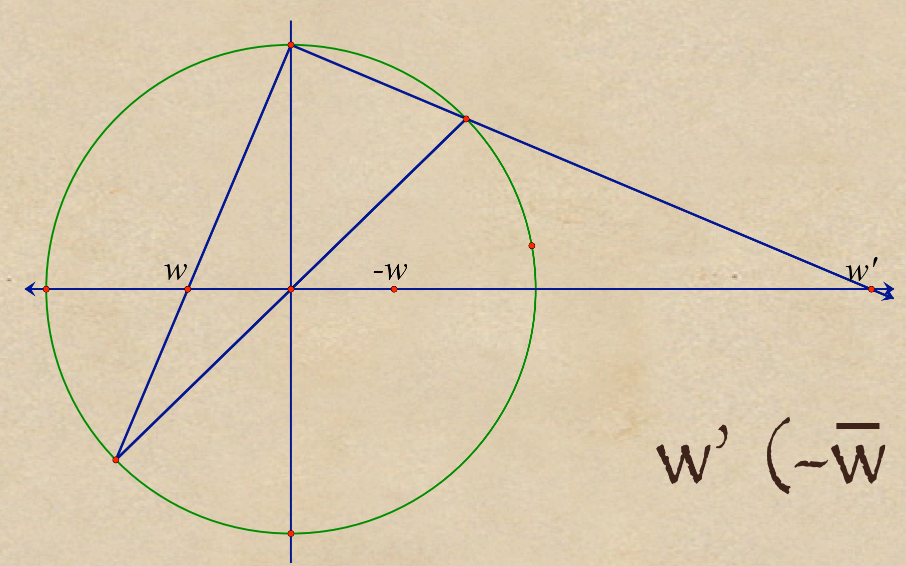
$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

-

$$k=-1/R^2$$

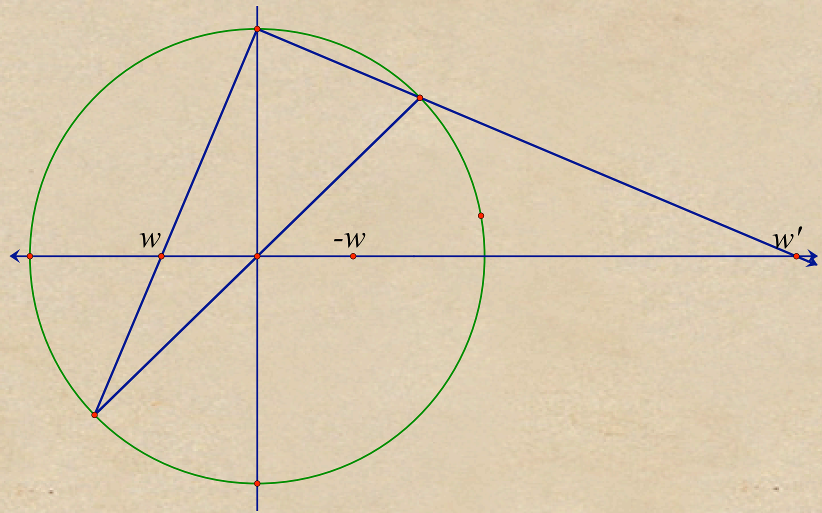
La oportunidad perdida

- Aplicar la Analogía a la proyección Estereográfica



$$w'\,(-\overline{w}) = R^2$$

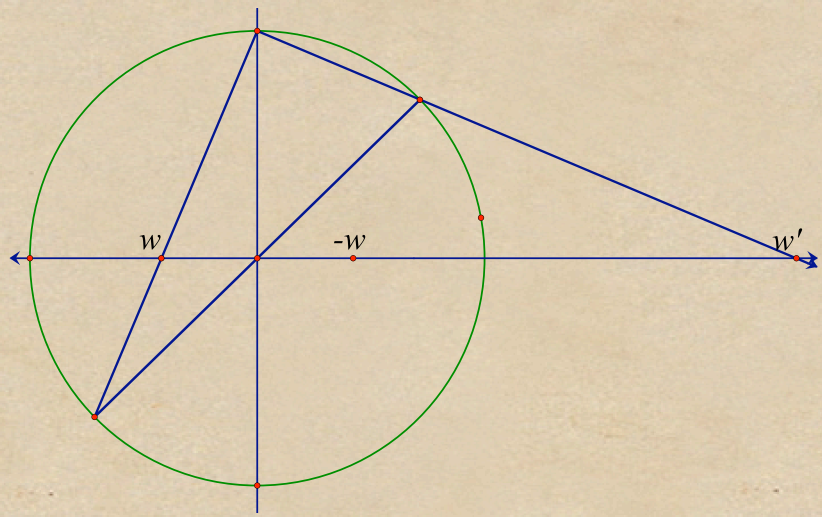
La oportunidad perdida



$w' \, (-\bar{w}) = R^2$

- $z, w \in \mathbb{C}$
- Recta zw=círculo zww'= círculo zw-w*
- w*=inverso de w

La Analogía



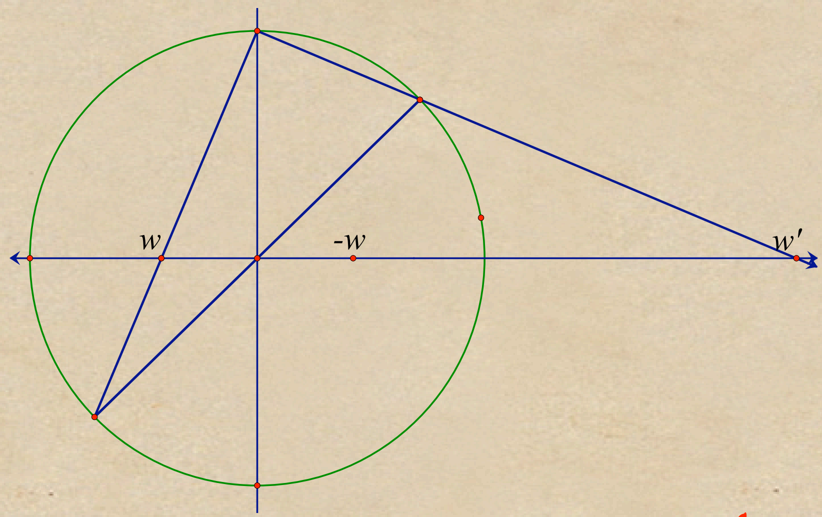
$w' (+\bar{w}) = R^2$

- $z, w \in \mathbb{C}$

- Recta zw=círculo zww'= círculo zw+w*

- w*=inverso de w

La Analogía

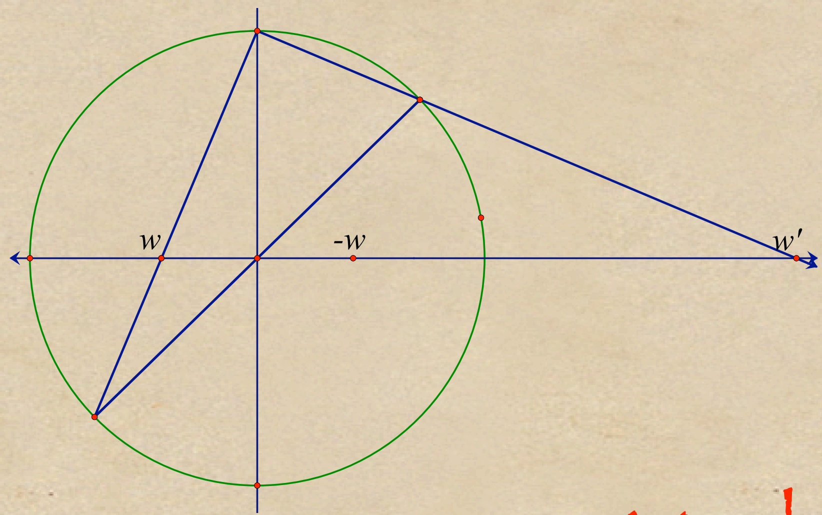


$w' \;(+\bar{w}) = R^2$

ortogonal al borde

- $z, w \in \mathbb{C}$
- Recta zw=círculo zww'= círculo zw+w*
- w*=inverso de w

La Analogía



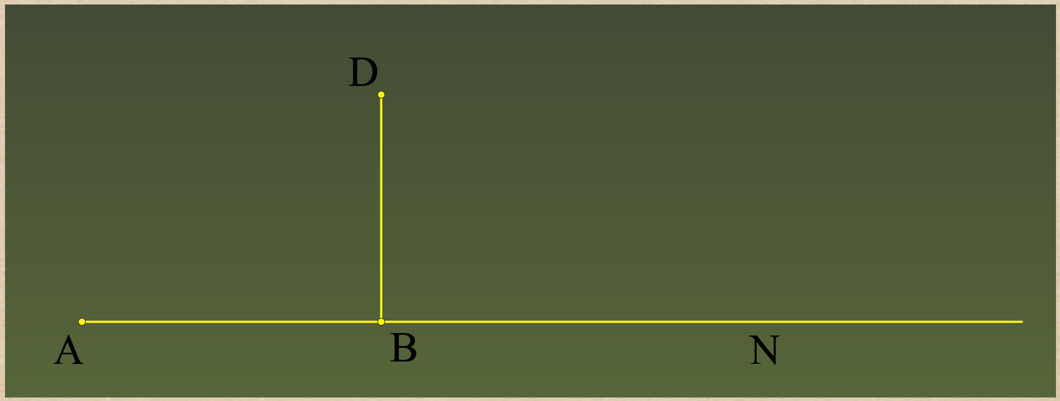
$$w' \; (+\overline{w}) = R^2$$

Modelo de Poincaré

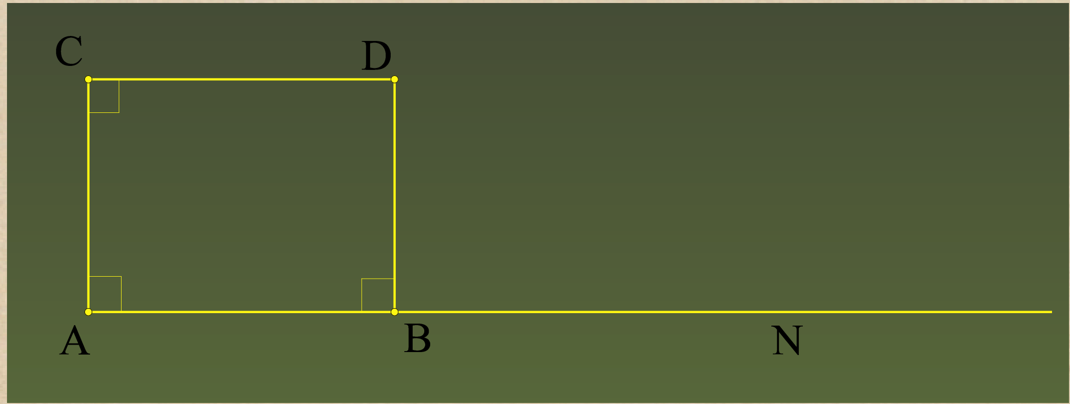
- $z, w \in \mathbb{C}$
- Recta zw=círculo zww'= círculo zw+w*
- w*=inverso de w

Regla y compás

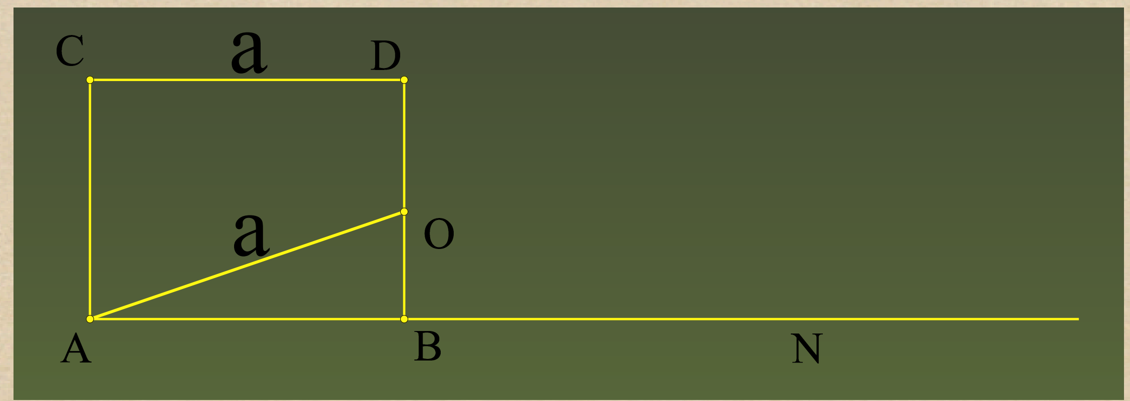
Ángulo de paralelismo §24



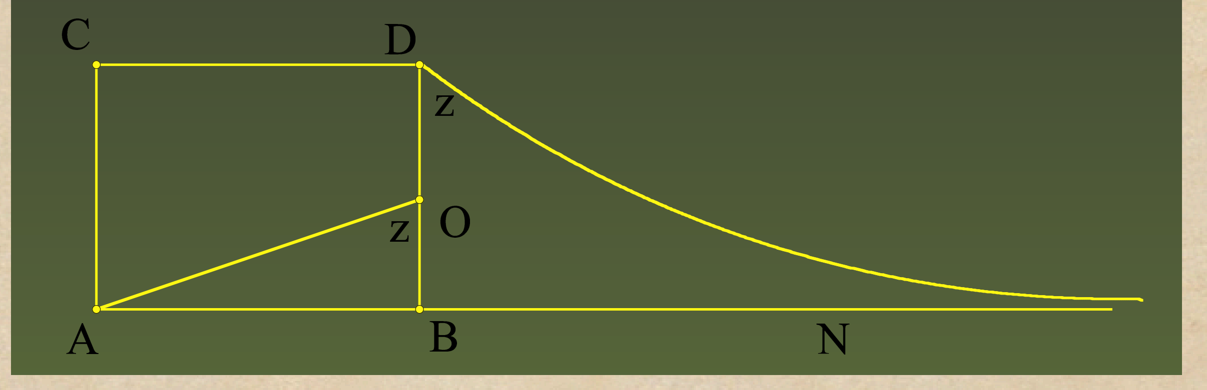
Ángulo de paralelismo



Ángulo de paralelismo



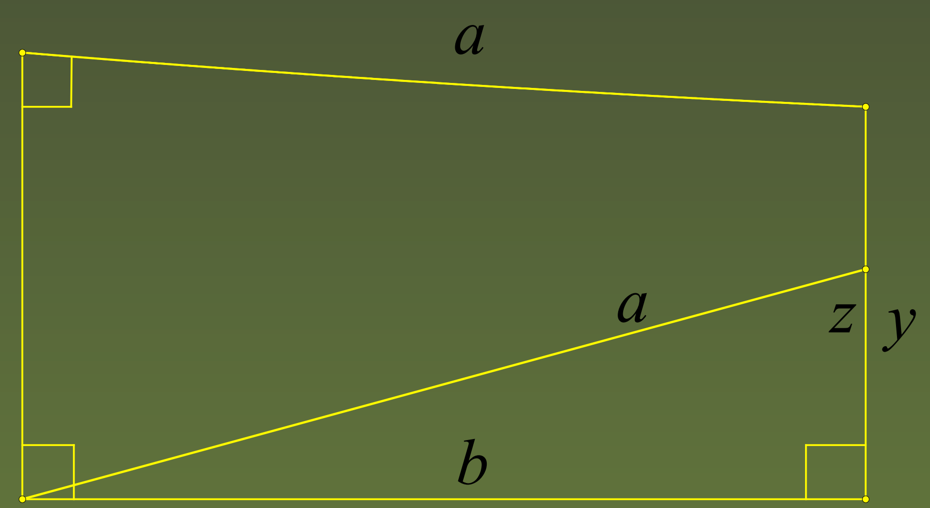
Ángulo de paralelismo



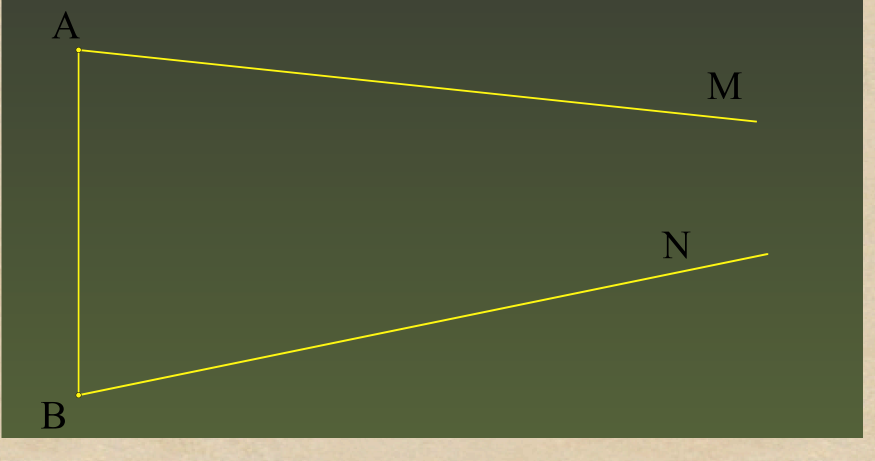
Ángulo de paralelismo

Justifiacción: Trigonometria de un Lambert

$$\cosh \frac{y}{R} = \frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sinh \frac{b}{R}} = \frac{1}{\sin \Pi(y)} = \frac{1}{\sin z}$$

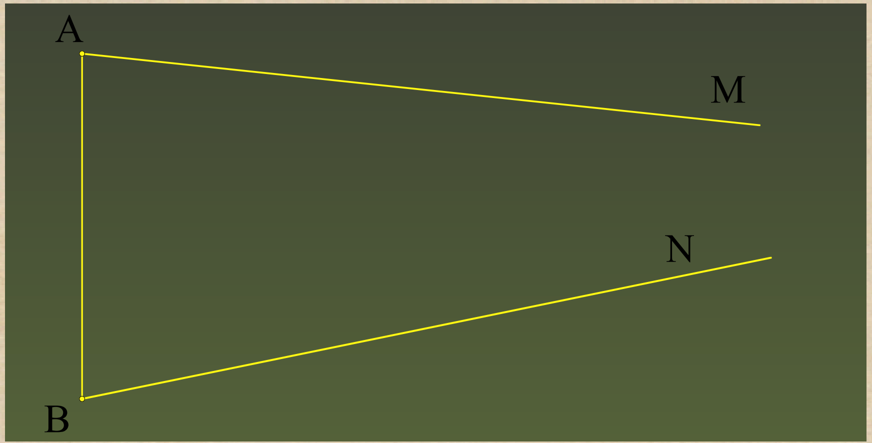


Segmento de paralelismo §35



Dado el ángulo A construir un segmento que lo tenga como ángulo de paralelismo

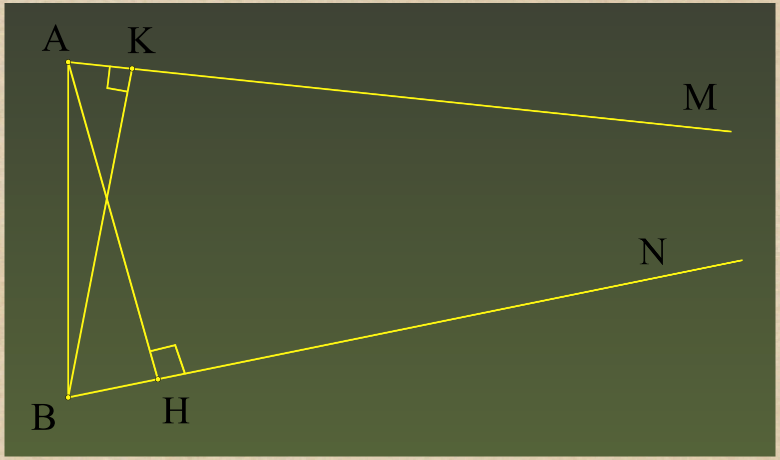
Segmento de paralelismo



Dado el ángulo A construir un segmento que lo tenga como ángulo de paralelismo

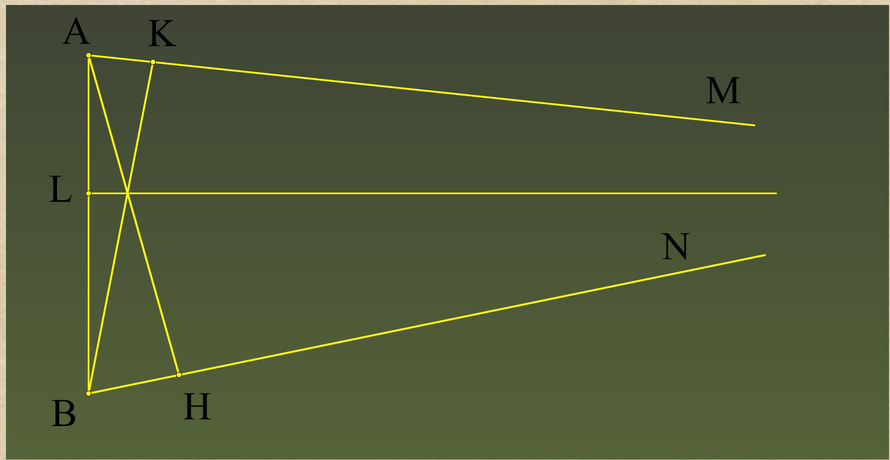
1. Trazamos la paralela desde B

Segmento de paralelismo



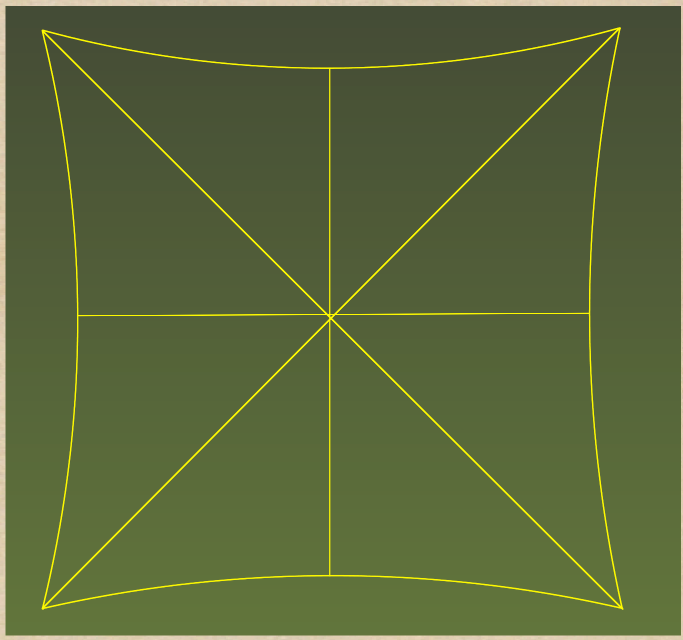
2. Trazamos las alturas

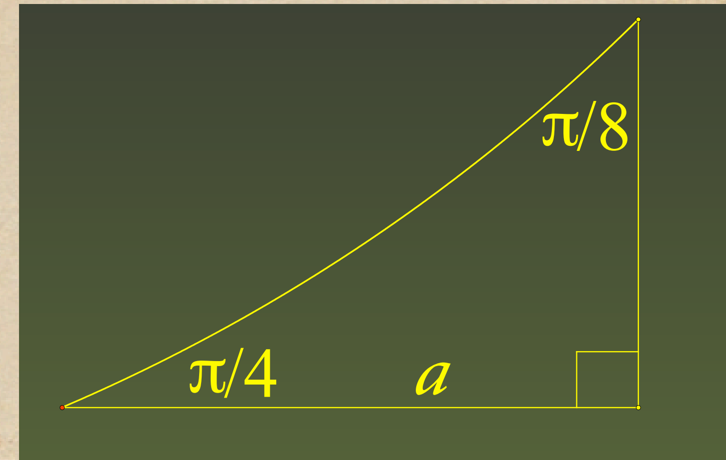
Segmento de paralelismo



3. Ortocentro
4. $\Pi(AL)=A$

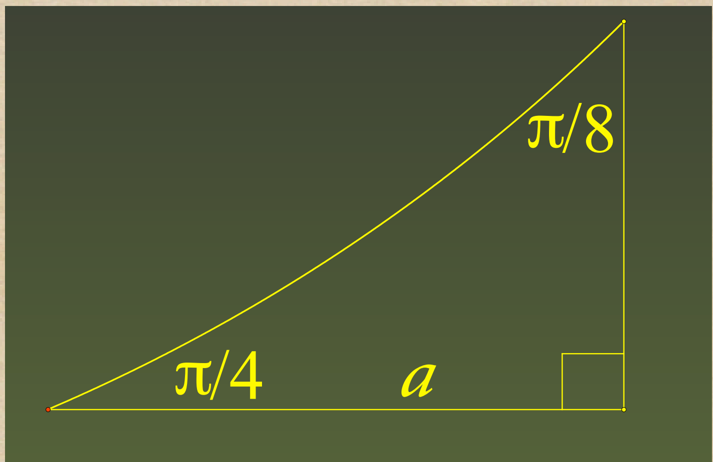
Cuadrado área ΠR^2 §43





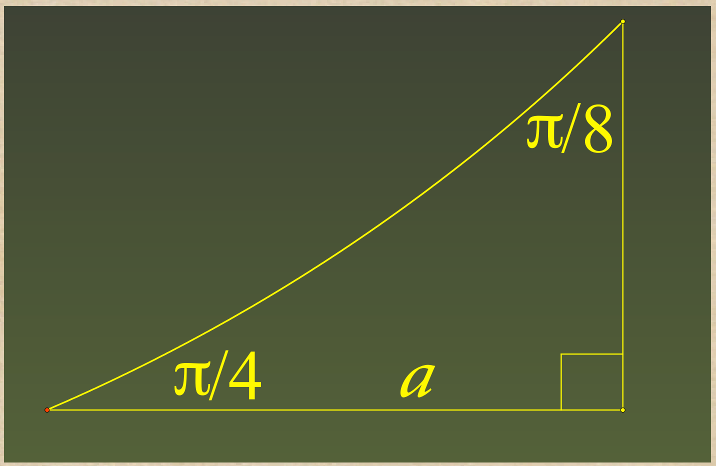
- Area $= R^2(\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8})) = R^2\pi/8.$

Construción de a



$$\cosh \frac{a}{R} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

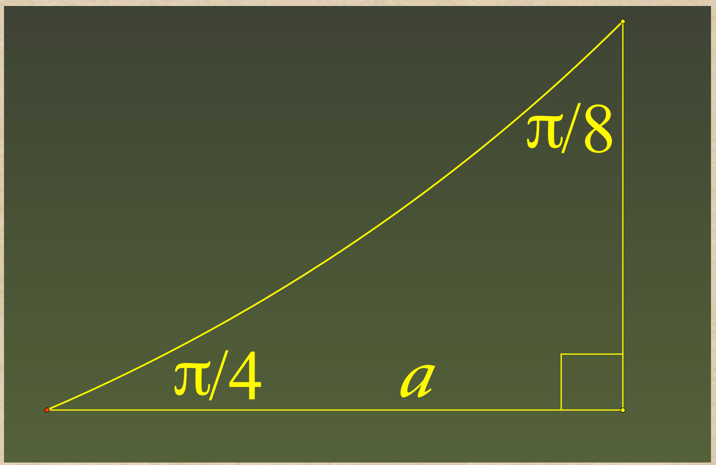
Construción de a



$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$1 = \sin\Pi(x)\cosh(\frac{x}{R})$$

Construción de a



$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\cosh\frac{c}{R}}{\cosh\frac{b}{R}}; \quad \Pi(b) = 3\pi/8,\ \Pi(c) = \pi/4$$

$$1 = \sin\Pi(x)\cosh\left(\frac{x}{R}\right)$$

Construción de a

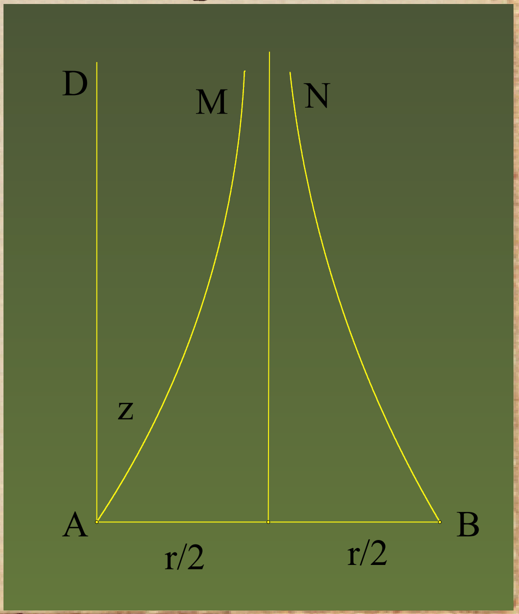
a es el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa c y segundo cateto b, que son segmentos de paralelismo construibles

Círculo de área πR^2

- Área del círculo= $\pi(2R \sinh (r/2R))^2$

  $= \pi(2R \operatorname{tg} z)^2$

  dónde z es el complementario del ángulo de paralelismo de $r/2$



Círculo de área πR^2

Área del círculo = $\pi(2R\ \mathrm{tg}\ z)^2$

Basta construir z con $\mathrm{tg}\ z = 1/2$

y r a partir de

$$\Pi(r/2) = (\pi/2) - z$$

Círculo de área πR^2

Área del círculo = $\pi(2R \operatorname{tg} z)^2$

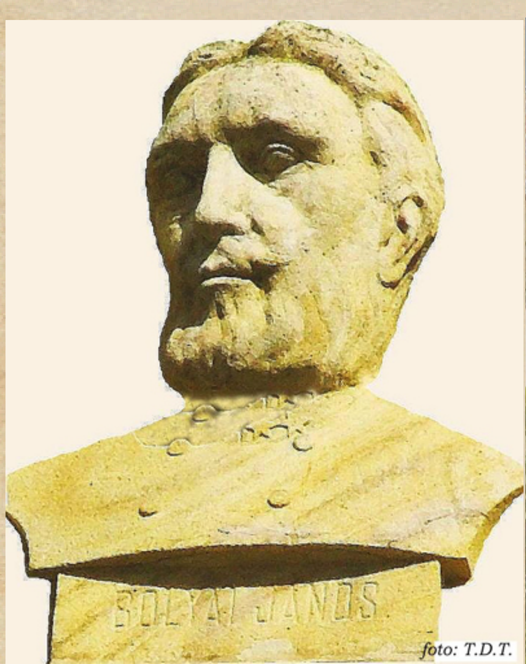
Basta construir z con $\operatorname{tg} z = 1/2$

y r a partir de

$$\Pi(r/2) = (\pi/2) - z$$

No todos los círculos hiperbólicos se pueden cuadrar!!

János Bolyai 1802-1860



Marosvásárhely

- Gracias por su atención