Geometries no euclidianes

Càtedra Lluís Santaló
Casa de Cultura de Girona

24 de maig de 2007

Agustí Reventós Tarrida

Guió[1]

- **Euclides**
- **Arquimedes**
- **Lambert**
- **Gauss**
- **Riemann**

==

Mirarem de resumir en poques pàgines els aproximadament 2000 anys que hi ha entre Euclides i Riemann.

[1] Vull agrair molt especialment al Professor Carles Barceló, coordinador de la Càtedra Lluís Santaló d'aplicacions de la Matemàtica de la Universitat de Girona, la invitació que em va fer a parlar de geometries no euclidianes dintre del cicle de conferències *Les matemàtiques a la vida quotidiana*, que ell mateix va organitzar a la Casa de Cultura de la Diputació de Girona.

Així mateix vull agrair a la professora Judit Abardia, i als professors Eduard Gallego, Joan Porti i Carlos Rodriguez els molts comentaris i ajuts que m'han donat durant la preparació d'aquesta conferència.

Guió

- **Euclides** $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Arquimedes**
- **Lambert**
- **Gauss**
- **Riemann**

==

Dels treballs d'Euclides en destaquem una fórmula (que en servirà de fil conductor durant la resta del treball). Els tres angles d'un triangle sumen 180 graus. Com que mesurem en radians, el que tenim és $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, però per raons que es veuran tot seguit hem preferit escriure aquesta fórmula com $0=\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Guió

- **Euclides** $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Arquimedes** $A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Lambert**
- **Gauss**
- **Riemann**

==

Arquimedes va calcular l'àrea de la superfície esfèrica. Va veure que era igual a quatre vegades l'àrea d'un cercle màxim. Tot i que no es troba en el seus treballs, es pot fàcilment deduir d'ells, que l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional al seu excés. Més endavant ho veurem.

- **Euclides** $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Arquimedes** $A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Lambert** $-A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Gauss**
- **Riemann**

==

Lambert va demostrar que en geometria no euclidiana l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional al seu defecte.

Guió

- **Euclides** $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Arquimedes** $A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Lambert** $-A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Gauss** $K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Riemann**

==

Gauss va estudiar les superfícies i sobre elles el concepte de curvatura. Va demostrar que la curvatura total d'un triangle és igual al seu defecte o excés. La fórmula[2] $K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$[3] engloba les tres anteriors com casos particulars, segons que la curvatura de la superfície sigui constant zero, constant positiva o constant negativa.

[3] Aquesta fórmula, que nosaltres anomenem *teorema del defecte*, es coneix sovint com teorema de Gauss-Bonnet, ja que n'és un cas particular.

Guió

- **Euclides** $0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Arquimedes** $A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Lambert** $-A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Gauss** $K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- **Riemann** En quin món vivim?

==

Finalment veurem com Riemann generalitza el concepte de curvatura a dimensions superiors. En deduirem que vivim en una "varietat de Riemann" de dimensió tres. En quina?

I. Euclides

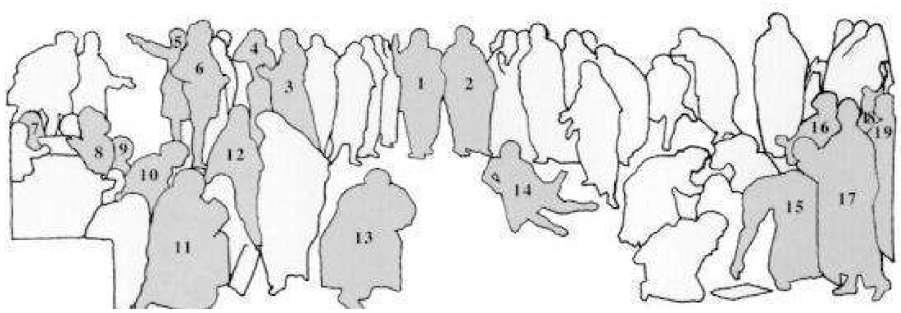
Euclides $\sim 325 - 265\ aC$.

==

Sabem molt poc sobre la vida d'Euclides. Gairebé tot prové de Proclus (410-485), potser el primer estudiós d'Euclides del que tenim referències, però, com veiem, han passat uns 700 anys!
Hi ha[4] qui inclús dubta de l'existència real d'Euclides atribuint els Elements a una obra conjunta tipus Bourbaki.

[4]Vegeu J. Itard, *Euclide*, Encyclopaedia Universalis, París, 1985. Corpus, 7, pp. 518-9. Aquesta i altres imatges de matemàtics que apareixeran mes endavant estan tretes de `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Indexes/F.html`

Escola d'Atenes. Raffaello Sanzio, 1510, Stanza della segnatura, Vaticà.



1. Plató 2. Aristòtil 3. Sòcrates 7. Zenó 11. Pitàgores 13. Heràclit
15. Euclides 17. Ptolemeu 18. Autoretrat de Raphael

==

No és fins el Renaixement que es reivindica la gran aportació a la Ciència que varen fer els grecs.

==

Remarquem el detall del fresc en que Euclides està dibuixant amb un compàs. La geometria dels Elements serà la geometria de les construccions geomètriques amb regle i compàs. El cap d'Euclides correspon a l'arquitecte Bramante.

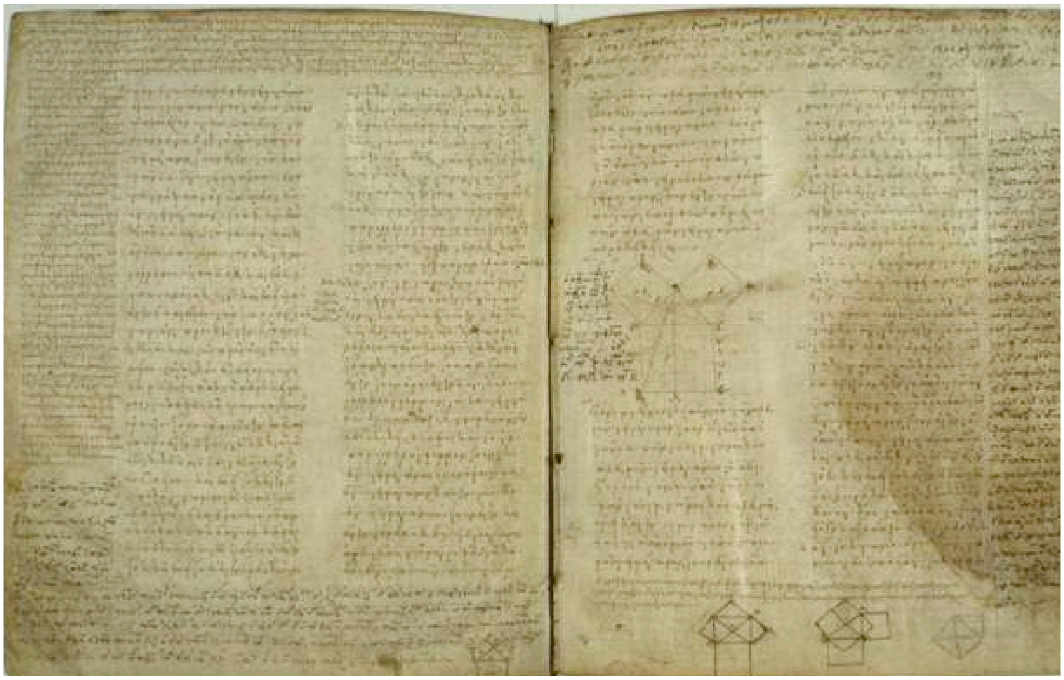
Els Elements

Bodleian Library, Oxford, 888.

==

L'any 2005 la Bodleian Library va digitalitzar la versió grega més antiga que es conserva dels Elements. La podeu consultar a http://www.rarebookroom.org/Control/eucmsd/index.html

Els Elements

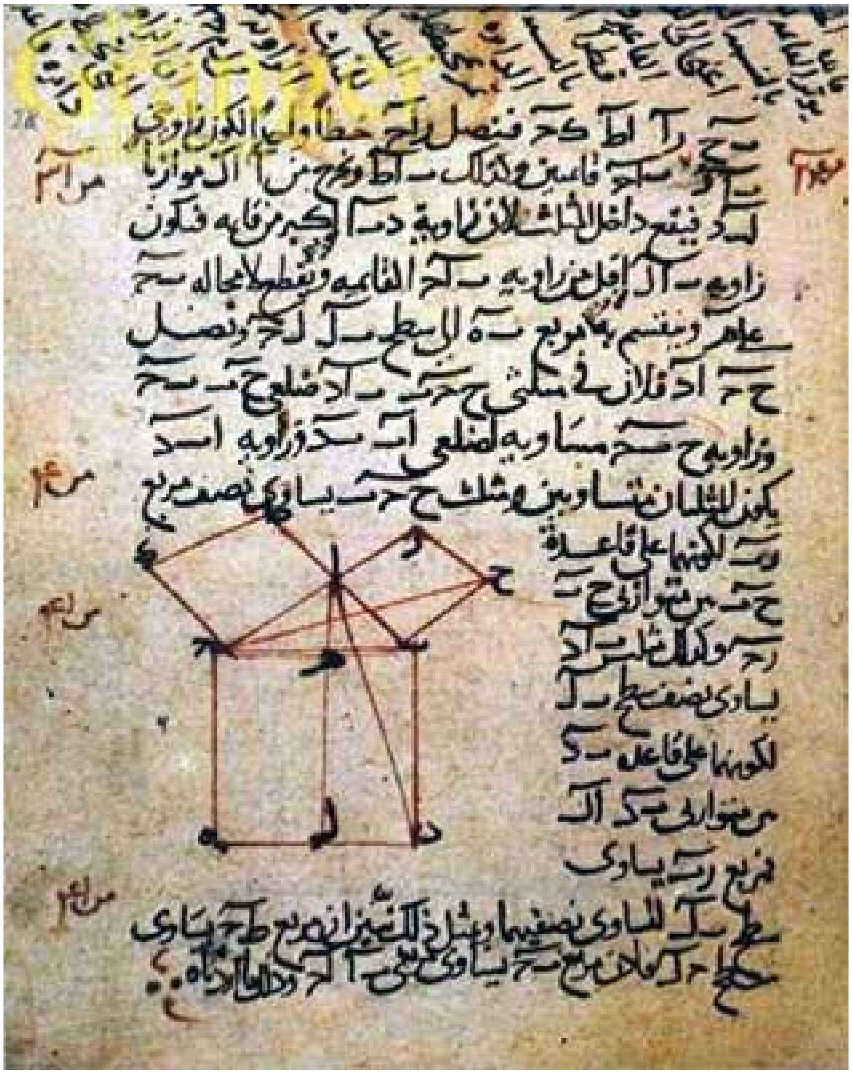


Pergamí grec. Segle IX. Vaticà.

==

En aquest vell pergamí es pot veure la famosa demostració del teorema de Pitàgores donada per Euclides.

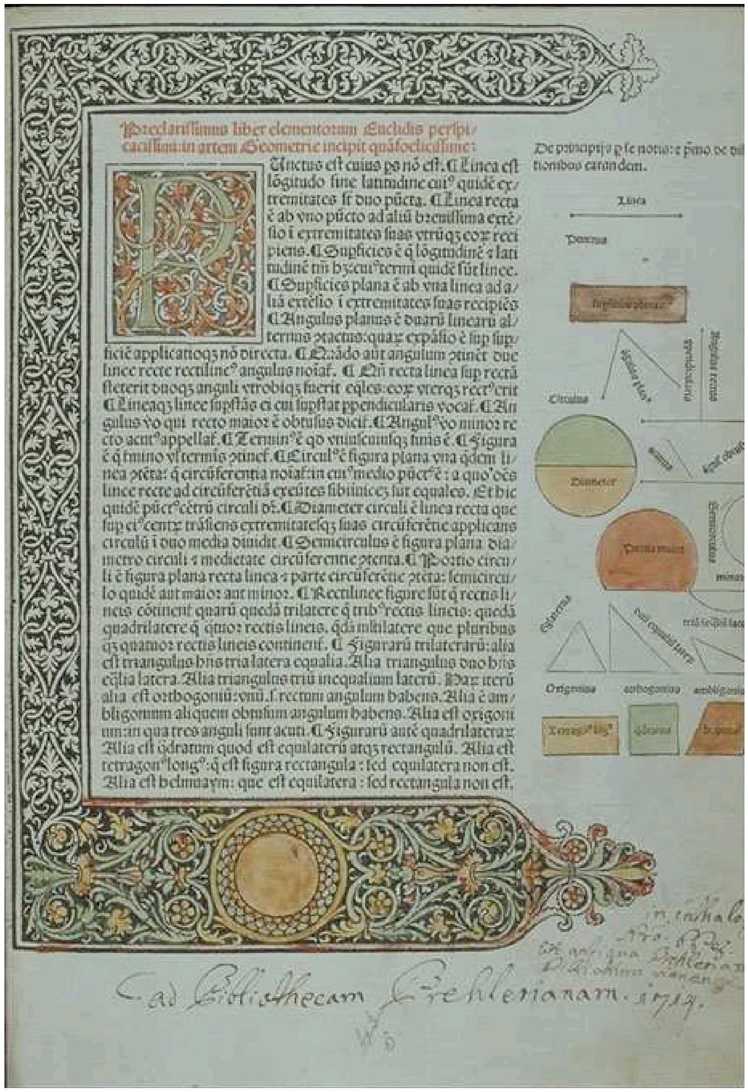
Els Elements



Abu Jafar Muhammad Ibn al-Hasan Nasir al-Din al-Tusi, 1258.

Les primeres versions llatines dels Elements foren traduccions de les versions àrabs. Aquesta es coneix simplement com el *Tusi*.[5]

[5] Imatge treta de `http://www.imagesonline.bl.uk/britishlibrary/controller/`

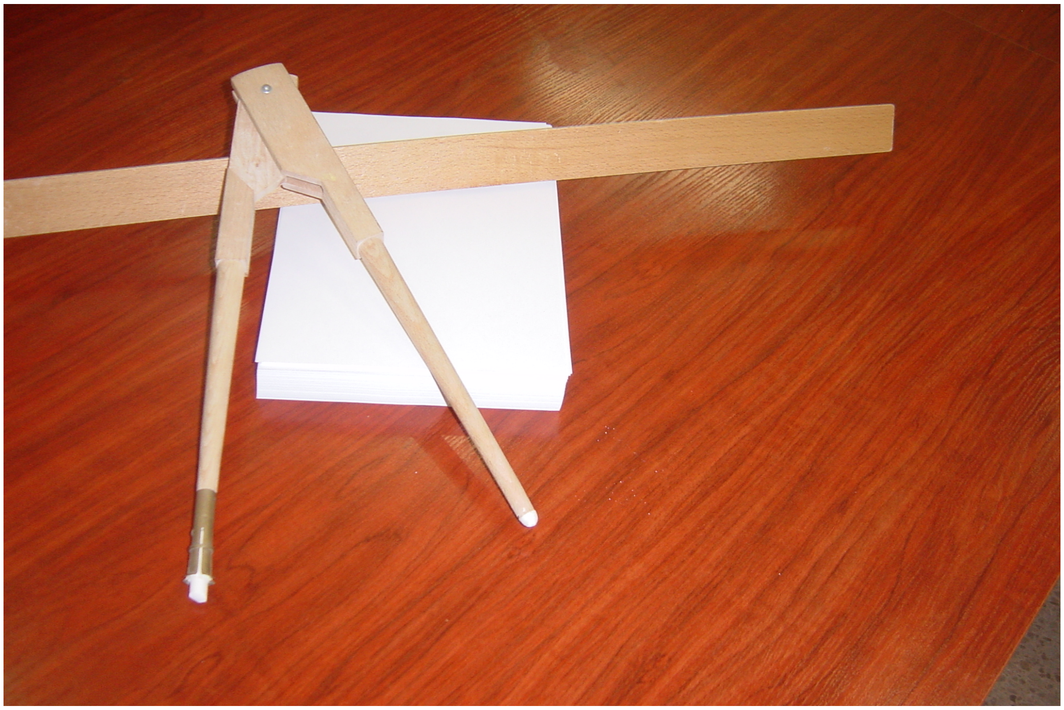


Primera edició impresa. Venecia 1482

==

Va ser la primera vegada que es van imprimir dibuixos. Foli A2r dels Elements d'Euclides, imprès per Erhard Ratdolt, 27 anys després del primer llibre imprès per Johannes Gutenberg. (Special Collections, Glasgow University Library, Sp Coll BD7-c.5)

Postulats



Els tres primers postulats d'Euclides.

==

Concretament aquests tres postulats diuen:

1. Podem dibuixar línies rectes des de qualsevol punt a qualsevol punt.
2. Podem prolongar una línia recta finita contínuament a una línia recta.
3. Podem descriure un cercle amb qualsevol centre i distància.

És a dir, tenim un regle, un compàs i molt paper!

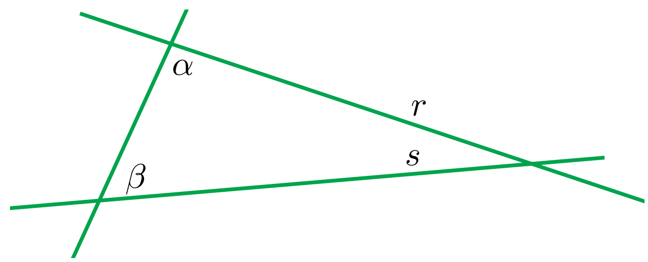
Postulats

4. Tots els angles rectes són iguals.

==

No parlarem ara d'aquest postulat. Només indiquem que està relacionat amb la possibilitat de *moure* les figures. Per exemple, per demostrar en el dibuix anterior que $a = b$ hauríem de portar l'angle recte a sobre l'angle recte b. Però, podem moure les figures?

Cinquè Postulat



Si $\alpha + \beta < \pi$, r i s es tallen.

==

Concretament aquest postulat diu:

5. Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on estan aquests angles que sumen menys de dos rectes.

Enunciats equivalents

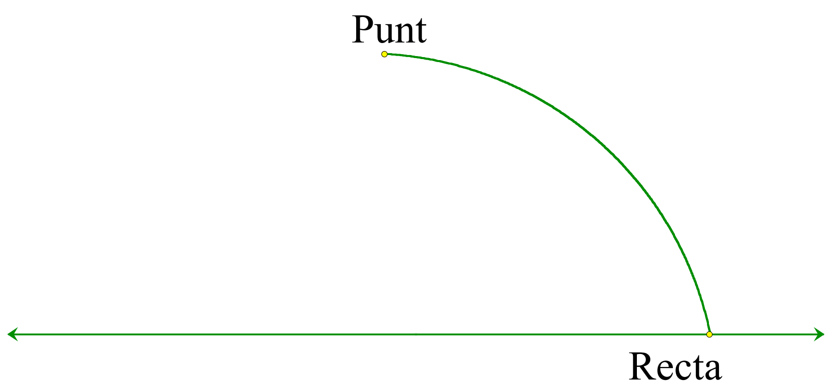
1. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.
2. Tres punts no alineats determinen una circumferència.
3. Existeixen triangles semblants.
4. Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem.
5. Els angles d'un triangle sumen el mateix que dos angles rectes.
6. Les equidistants són rectes.

==

Moltes de les falses demostracions del cinquè postulat fallaven justament perquè en un moment o altre s'utilitzaven fets aparentment certs (com els sis punts anteriors) però que no es poden demostrar en rigor si no s'utilitza el cinquè postulat. Es queia, doncs, en una petició de principi.

Negació del cinquè postulat

- *Donada una recta i un punt exterior, tota recta per aquest punt talla la recta donada.*

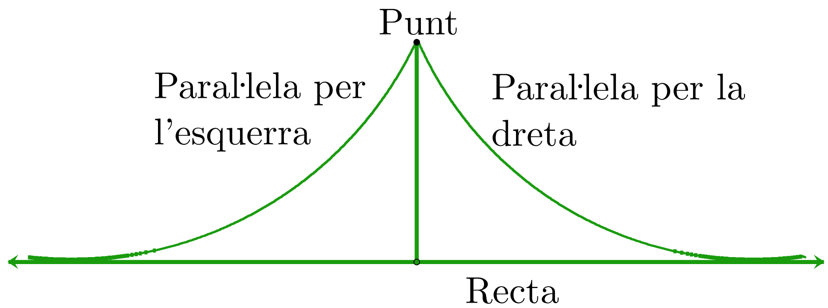


==

Aquesta manera de negar el cinquè postulat portava fàcilment a contradicció i no es va considerar. Però és essencialment la situació que es dóna en la geometria sobre l'esfera, quan diem *rectes* als meridians.

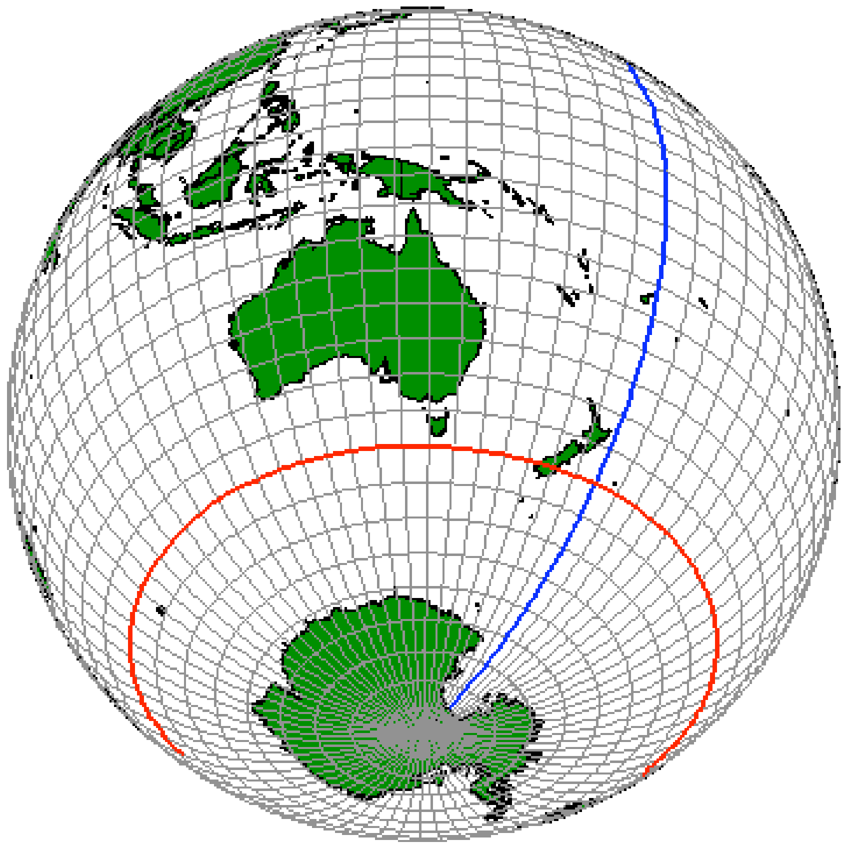
Negació del cinquè postulat

- *Donada una recta i un punt exterior, passen per aquest punt més d'una rectes que no tallen la recta donada.*



==

És fàcil veure que si passa més d'una recta pel punt que no talla la recta donada, llavors n'hi passen infinites. Cadascuna d'aquestes rectes es diu ultraparal·lela i el nom de paral·lela (per la dreta o per l'esquerra) es reserva a l'ínfim de les ultraparal·leles.



==

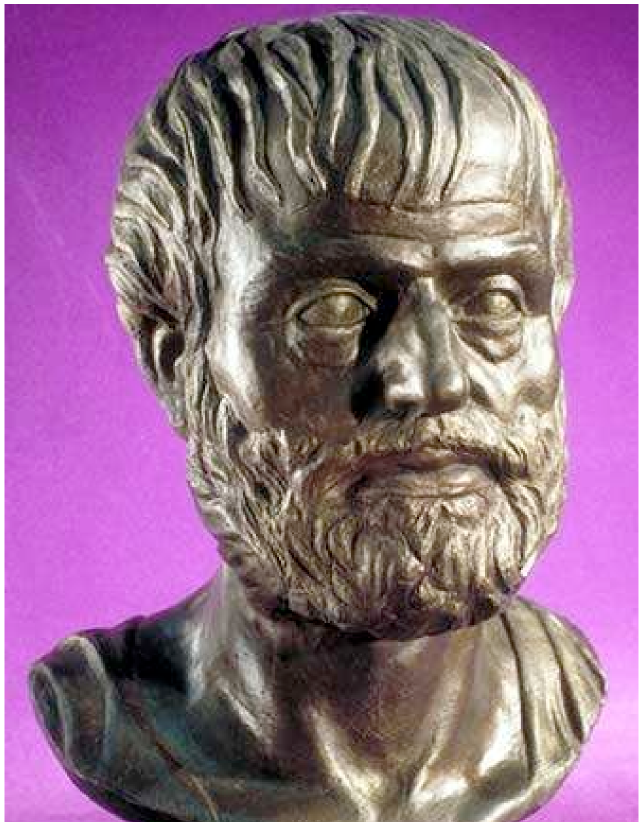
Observem com l'equador terrestre és un meridià (una *recta* no euclidiana) i en canvi la seva equidistant (punts que estan a la mateixa distància de l'equador) és un paral·lel, que no és una recta sobre l'esfera (no és un meridià!). També és evident que no hi triangles d'àrea arbitràriament gran, etc.[6]

[6] Imatge treta de `http://www.utas.edu.au/spatial/locations/spalatit.html`

==

Posteriorment comentarem aquesta figura, que representa el món de la geometria hiperbòlica. Diguem ara només que tots aquests triangles tenen, tant els grans com els petits, la mateixa àrea π.

El primer geòmetra no-euclidià

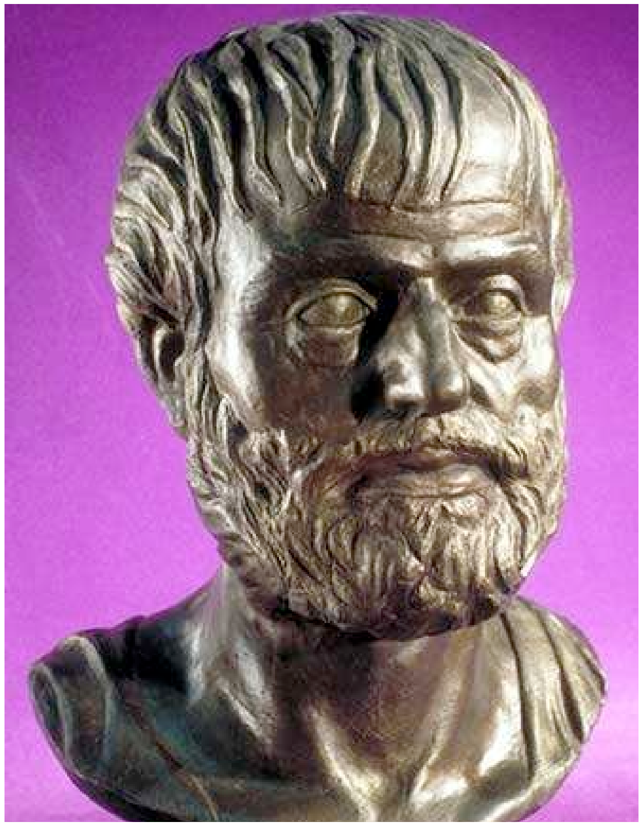


Aristòtil 384 – 322 aC.

==

El que sembla més lògic és donar el títol honorífic de *primer geòmetra no-euclidià* a Euclides, ja que tant va dubtar del cinquè postulat que es va veure incapaç de demostrar-lo (no com molts matemàtics feren anys després) i el va posar com a Postulat.
Però nosaltres, potser forçant una mica les coses, li donarem aquesta distinció a Aristòtil, per la frase que podem llegir en la seva obra 'De Caelo' (El Cel):

El primer geòmetra no-euclidià



Aristòtil 384 – 322 aC.

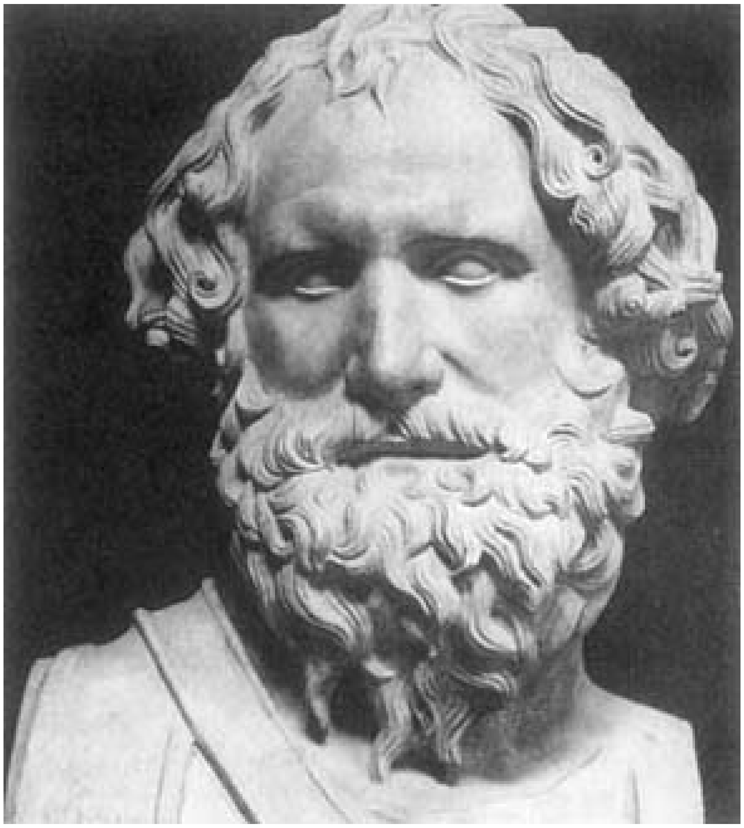
==

Si és impossible que els angles d'un triangle sumin dos rectes, llavors el costat del quadrat és commensurable amb la diagonal.

Quan diem que $\sqrt{2}$ no és racional (que la diagonal del quadrat no és commensurable amb el costat) estem usant el teorema de Pitàgoras. Si aquest no fos cert, la diagonal podria ser commensurable amb el costat. Penseu sobre l'esfera.

II. Arquimedes

Arquimedes



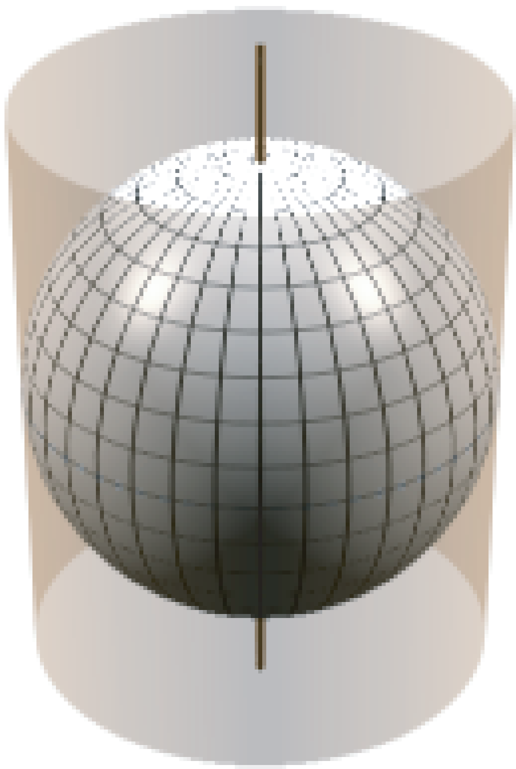
Arquimedes (287 – 212 aC)

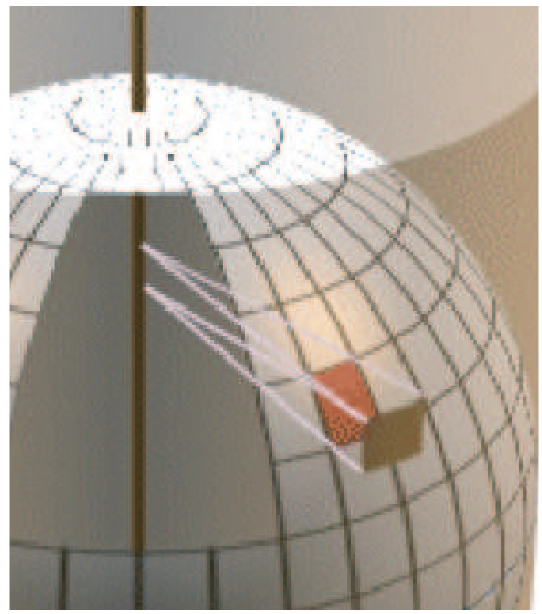
==

En la seva magistral obra *De l'esfera i el cilindre*, Arquimedes demostra que l'àrea de l'esfera de radi és igual a l'àrea de quatre cercles màxims. Així ho anuncia i ho demostra veient que l'àrea de l'esfera no pot ser ni més gran ni més petita que quatre vegades l'àrea d'un cercle màxim, però **com ho va conjecturar?**

$$\boxed{\text{Àrea de l'esfera} = 4\pi R^2}$$

L'esfera i el cilindre

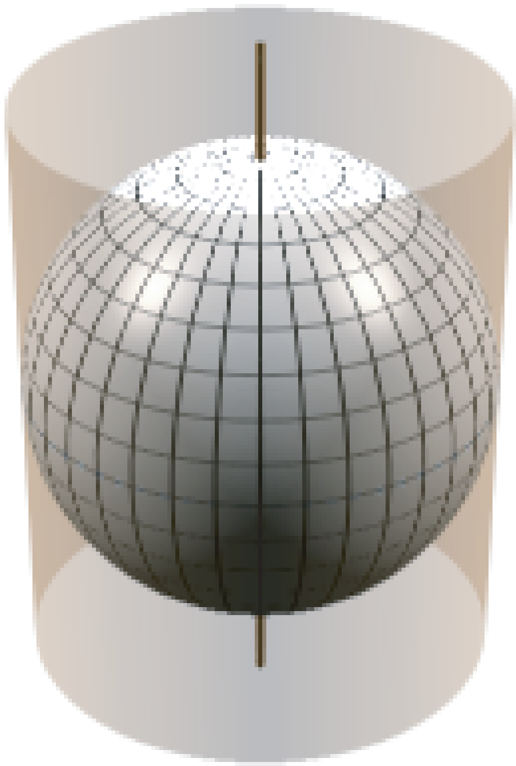


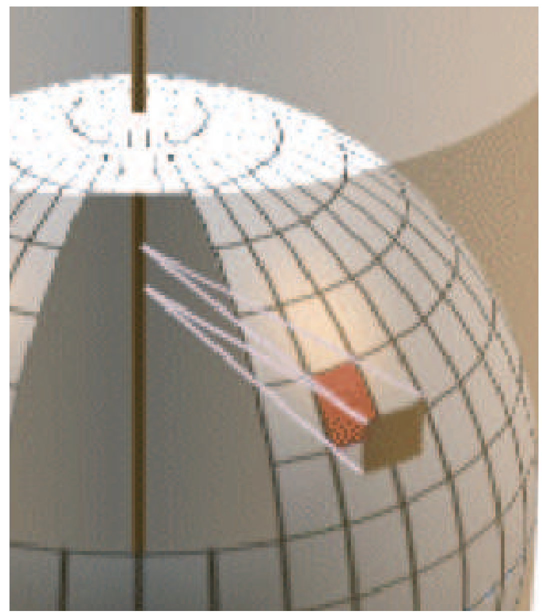


Considerem una esfera de radi R i el cilindre recte tangent a ella en l'equador. L'aplicació que porta cada punt de l'esfera sobre el punt del cilindre que s'obté tallant aquest cilindre amb la recta que passa pel punt donat i és perpendicular a l'eix del cilindre, conserva àrees. Qualsevol figura que dibuixem sobre l'esfera es projecta a una figura sobre el cilindre, que tindrà un aspecte diferent, com distorsionada, però que casualment tindrà exactament la mateixa àrea qiue la figura inicial. En particular, l'àrea de l'esfera és igual a l'àrea lateral del cilindre:

$$\boxed{A = 2\pi R.2R}$$

L'esfera i el cilindre





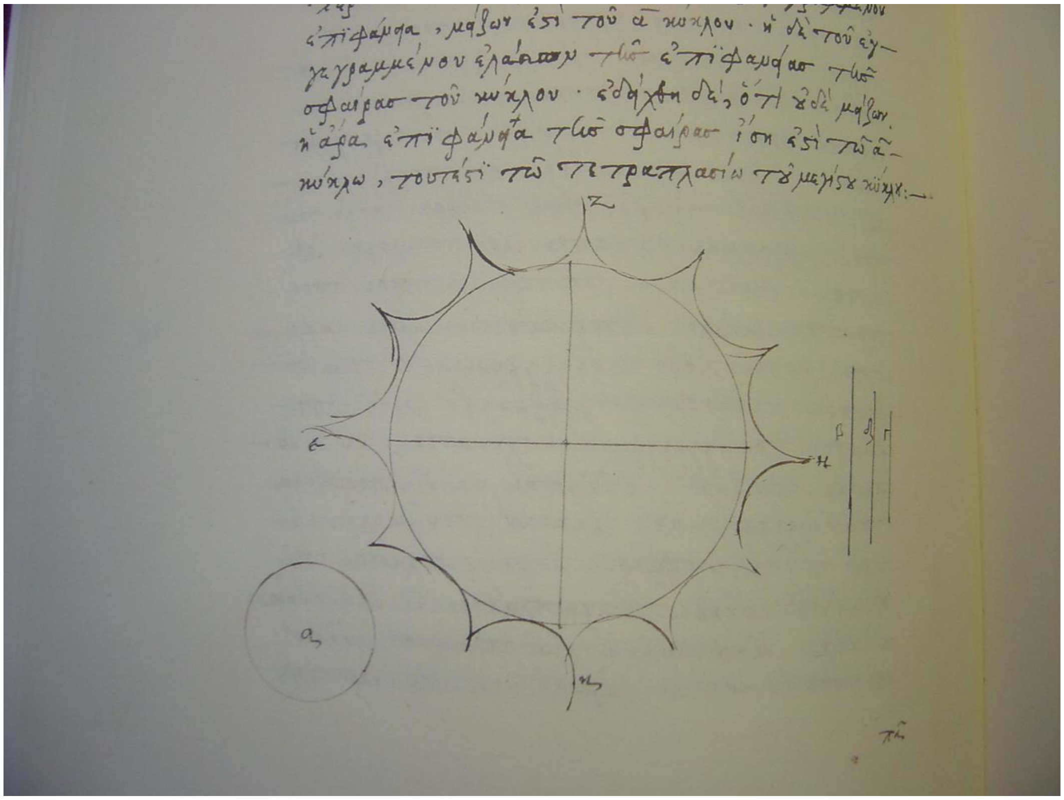
===

En el mateix llibre Arquimedes demostrar també que el volum de l'esfera és igual a dos terços del volum del cilindre circumnscrit:[7]

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 .2R}$$

[7] Imatges tretes de `http://www.imaginatorium.org/books/maps.htm`

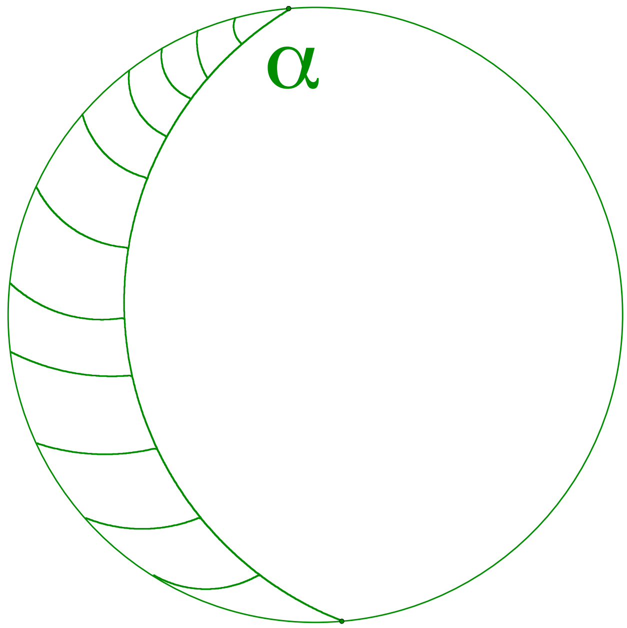
Sobre l'esfera i el cilindre



Manuscrit X-I-14 El Escorial (∼ 1540), copiat del CCCV de Venecia, copiat d'un del segle IX, perdut.

==

A l'obra d'Arquimedes no s'hi troba el dibuix de l'esfera amb el cilindre circumscrit. A la versió grega més antiga que es coneix hi apareixen aquests dibuixos on els costats dels polígons circumscrits semblen troços de cercle. Aquest dibuix fa pensar molt (casualment) en el disc de Poincaré.



Àrea d'un fus esfèric: $\left\{ \begin{array}{ccc} 2\pi & \rightarrow & 4\pi R^2 \\ \alpha & \rightarrow & F_\alpha \end{array} \right.$

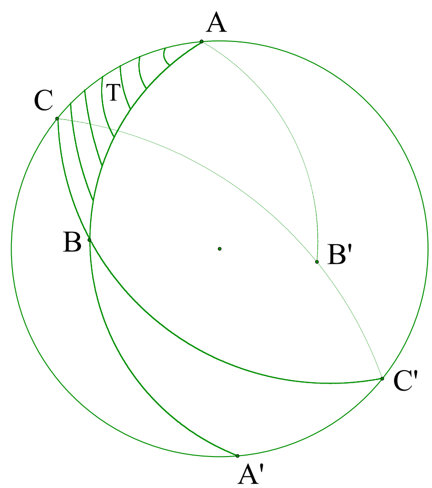
$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{2R^2}\alpha.$$

==

És clar que l'àrea de mitja esfera és $4\pi R^2/2$, que l'àrea d'un terç d'esfera és $4\pi R^2/3$, etc. A partir d'aquí, una simple regla de tres ens permet calcular l'àrea d'un fus d'angle α.

Àrea triangle esfèric

	Triangle	*Triangle*	*Àrea*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$



==

Denotem per A' l'antipodal de A (punt simètric de A respecte del centre de l'esfera). Anàlogament definim B' i C'. D'aquesta manera l'esfera queda descomposta en vuit triangles. Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ tenen la mateixa àrea T ja que són simètrics.

Àrea triangle esfèric

	Triangle	*Triangle*	*Àrea*
1	ABC	$A'B'C'$	T
2	ABC'	$A'B'C$	$2R^2\gamma - T$
3	$AB'C$	$A'BC'$	$2R^2\beta - T$
4	$A'BC$	$AB'C'$	$2R^2\alpha - T$

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 &= 2(T + (2R^2\gamma - T) + (2R^2\beta - T) + (2R^2\alpha - T)) \\ \pi R^2 &= R^2(\alpha + \beta + \gamma) - T. \end{aligned}$$

Àrea $= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot$ **Excés**

==

Sumant i simplificant s'obté la fórmula que ens dóna l'àrea d'un triangle esfèric en funció dels seus angles. Ja hem comentat que aquesta fórmula no apareix a l'obra d'Arquimedes, però acabem de veure que es pot deduir fàcilment d'ella.

III. Lambert

Geometria Absoluta

- G. Saccheri (1667 – 1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.*

- J. H. Lambert (1728 – 1777): *Theorie der Parallellinien.*

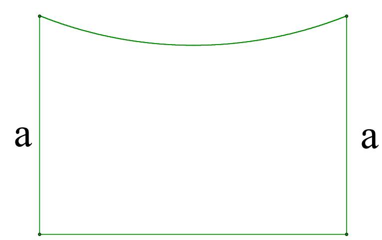
==

Per geometria absoluta s'entén el conjunt de resultats que s'obtenen a partir dels quatre primers postulats d'Euclides. Són resultats certs tant si s'accepta com si es nega el cinquè postulat.

- Saccheri rebutja *l'hostil hipòtesi de l'angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

==

Construeix un quadrilàter amb angles rectes a la base i es pregunta si els angles superiors són aguts o obtusos.



- Lambert veu possible una geometria sense el cinquè postulat: *M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari*.

==

Consrueix un rectangle amb tres angles rectes
i es pregunta si el quart angle és agut o obtús.

Esfera imaginària

- $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$
- $A = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$

- Aquesta fórmula suggereix canviar R per Ri.

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.}$$

==

La frase de Lambert: *M'inclino a pensar...* s'explica molt bé comparant les dues primeres fórmules d'aquesta pàgina. A diferència de Saccheri, Lambert no rebutja la hipòtesi de l'angle agut.

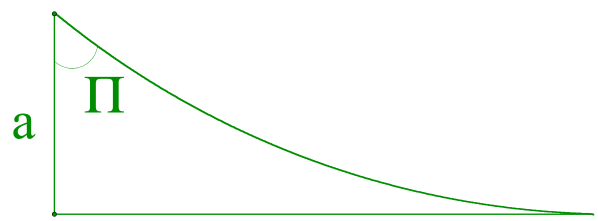
Analogia

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R} \cdot \cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R} \cdot \cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$	A$= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$
L$= 2\pi R \sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R \sinh\frac{r}{R}$.

==

A l'esquerra, fórmules ben conegudes de geometria esfèrica: Teorema de Pitàgores, àrea d'un triangle i longitud d'una circumferència de radi r. A la dreta les que s'obtenen pel canvi formal $R \longrightarrow Ri$.

Angle de paral·lelisme



$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

==

La fórmula més fonamental i característica de la Geometria Hiperbòlica: la que ens dóna l'angle $\Pi(a)$ que forma la paral·lela a una recta, que passa per un punt que està a distància a d'aquesta recta, amb la perpendicular a aquesta recta pel punt. S'obté fàcilment a partir de l'analogia i un pas al límit.

K=1,0,-1 $\qquad \Sigma = \alpha + \beta + \gamma$

$\mathbb{S}^2(1)$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{E}^2$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{S}^2(i)$

$\Sigma > \pi$ $\qquad\qquad$ $\Sigma = \pi$ $\qquad\qquad$ $\Sigma < \pi$

$A = \Sigma - \pi$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A = \pi - \Sigma$

==

Breu resum de les tres situacions possibles. Més endavant veurem que el cinquè postulat està relacionat amb la "curvatura" K del triangle que considerem (positiva a l'esfera, zero al pla, i negativa a l'hiperbòlic).

IV. C. F. Gauss

El diari

- 29 de Març de 1796. Disset costats.
- L'endemà comença el diari, un mes abans de complir 19 anys.

[1] *Els principis dels quals depèn la divisió del cercle, i la divisibilitat geomètrica del mateix en disset parts, etc.*

==

El primer resultat dels seus que Gauss va veure publicat, i pel que sentia especial predilecció, fa referència a geometria euclidiana: amb regle i compàs es pot construir el polígon regular de disset costats.

Braunschweig

==

Fou en el seu poble natal Braunschweig, durant unes vacances que, abans de llevar-se, Gauss va *veure amb gran claredat* quins polígons regulars es podien dibuixar amb regle i compàs.

==

Va comentar al seu amic Wolfang Bolyai que li agradaria que el polígon de disset costats figurés a la seva tomba. Aquí em teniu fent el possible per acontentar Gauss!

El diari

- 28 de Juliol de 1797.

[72] *He demostrat la possibilitat del pla.*

===

En el *Diari* només hi ha dues entrades que fan referència al cinquè postulat. Aquesta críptica frase és (des del meu punt de vista) la primera.

El diari

- Setembre de 1799.

[99] *Hem fet excepcionals progressos en els principis de la Geometria.*

==

I aquesta n'és la segona.

1792

- Carta a Schumaker (28 – 09 – 1846)

El que Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatchevski anomena geometria imaginària. Saps que durant 54 *anys [*1792*] he compartit els mateixos punts de vista.*

Tenia 15 anys!

==

Però sembla, segons el propi Gauss, que va ser bastant abans del que es veu en el *Diari* que va començar a pensar en aquests temes.

$1846 - 54 = 1792$. Gauss va néixer el 1877.

1794

- Carta a Gerling $(10 - 10 - 1846)$

El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de 360° *per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

Tenia 17 anys!

==

En el cas particular en que el polígon és un triangle d'àrea A i angles α, β, γ, és el mateix dir

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = k\,A$$

que

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) - 2\pi = k\,A,$$

(canviar *angles* per *angles exteriors*). Gauss està explicant a Gerling el teorema del defecte.

Carta a Farkas Bolyai, 1799

- *Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no! És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.*

==

El cinquè postulat era un tema que apassionava a Farkas. En aquesta carta Gauss parla d'una de les afirmacions (aparentment òbvies) equivalents al cinquè postulat, que hem comentat al principi. Hem destacat aquesta carta, a part d'això, per la importància que Farkas, i sobre tot el seu fill János, van tenir en el naixement de les geometries no euclidianes.

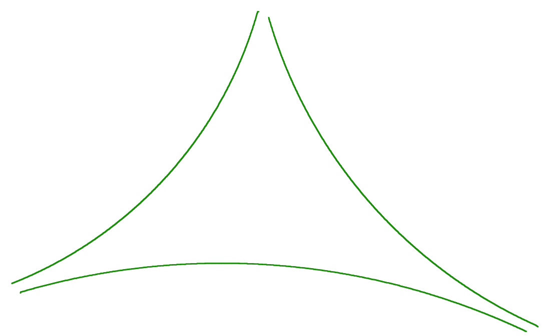
Carta a Gerling, 1819

- *El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de* 180° *és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a ella, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.*

==

Novament el teorema del defecte.

Mateixa carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

==

Un dels pocs dibuixos de Gauss. Correspon a un triangle amb angles iguals a zero. Per tant, d'àrea proporcional a π.

La constant que multiplica a π depèn de la unitat de mesura. En aquest cas Gauss està agafant com a unitat de mesura el segment tal que el seu angle de paral·lelisme és $\pi/4$, i.e. $\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$.

Carta a Schumaker, 1831

- *Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria, però, que això morís amb mi.*

==

Després de la mort de Gauss van aparèixer aquests escrits. Els podeu trobar comentats en anglès a Bonola, *Non-euclidean geometry*, de la Dover, o en alemany als *Werke*, Vol VIII, pàg. 202-209. Vegeu `http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D136917.html`

Gauss llegeix Bolyai

- Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

==

Malgrat la importància que Gauss està donant a escriure els seus resultats sobre la teoria de les paral·leles mai ho va fer. És més, abandona el projecte poc després d'iniciar-lo amb tant d'esforç. L'explicació és l'aparició d'un petit treball d'un noi molt jove.

Carta a Gerling, 1832

- *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.*

- *L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el* 1798*, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

==

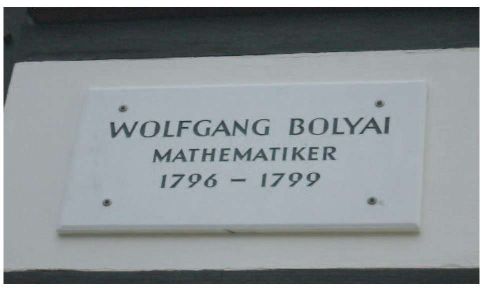
Grans lloances de Gauss a János Bolyai que, malauradament no es fan públiques.

Exclou que les idees de Gauss passessin a János a través del seu pare Farkas.

V. Bolyai

Farkas al seu fill, 1820

- Per l'amor de Deu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura d'elles com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida.



==

Hem volgut recrear l'ambient de Gottingen on van coincidir dos joves estudiants, Gauss i Farkas Bolyai. A l'esquerra la placa recordatòria de la casa de Farkas i a la dreta la casa de Gauss.

János al seu pare, 1823

- He descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més:

del no-res he creat un món nou i diferent!

==

El fills no fan gaire cas als seus pares. Però l'advertència del pare fou premonitòria i János va patir molt tota la seva vida per la falta de reconeixement a la seva obra.

Farkas i János Bolyai

Marosvásárhely (Tirgu Mures, Transilvania, Rumania)

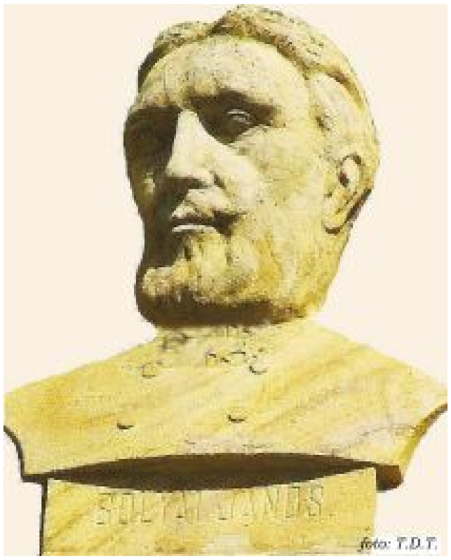
Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi. 1832

==

El treball de János es publica com un apèndix al llibre del seu pare: *Un intent d'introduir la joventut estudiosa als elements de la matemàtica pura.*

Monument a la ciutat on varen viure els Bolyai.

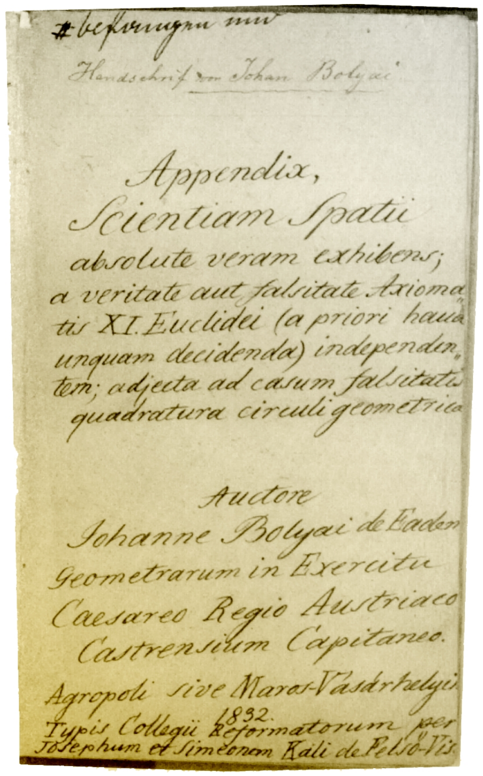
János Bolyai, 1802 – 1860



Palau de Cultura de Marosvásárhely

===

No es conserven retrats de János. La única imatge fiable és el bust que apareix al Palau de Cultura de Marosvásárhely. D'esquerra a dreta, Elek Dósa, Sámuel Teleki, Farkas Bolyai, Jänos Bolyai, Ferenc Mentovich i István Pêntelei. Vegeu `http : //www.titoktan.hu/Bolyai_a.htm`



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis

La primera pàgina de l'apèndix es va perdre i el propi János la va refer manuscrita.
Apèndix que versa sobre La Ciència Absoluta de l'Espai: independentment de la veritat o falsedat de l'axioma XI d'Euclides (que no es pot decidir a priori); s'adjunta, en cas de falsedat, la quadratura geomètrica del cercle.

VI. Quadratura del cercle

Quadratura del cercle

- Anaxagoras 499 – 428 aC.
- Aristofanes en fa burla a *Els ocells*, 414 aC.

===

Sembla que va ser Anaxàgoras el primer de formular el problema. La primera constància escrita ens ve del dramaturg Aristòfanes. Probablement és el problema que ha trigat més anys a resoldre's.

Quadratura del cercle

- TEOREMA[P. L. Wantzel, 1837] Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són arrels de polinomis que tenen per coeficients nombres racionals.

- TEOREMA[F. Lindemann, 1882] El nombre π no és arrel de cap polinomi a coeficients racionals.

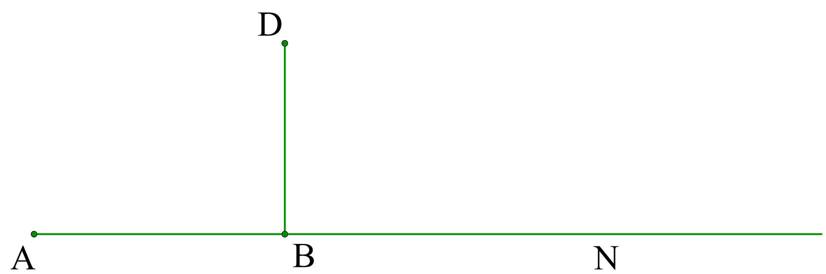
==

La quadratura del cercle equival a poder construir, amb regle i compàs, el número π. El primer pas és, doncs, caracteritzar els nombres reals construïbles (Wantzel).

Com que el nombre π no es pot construir (Lindeman), no es pot quadrar el cercle.

VII. Quadratura del cercle (hiperbòlic)

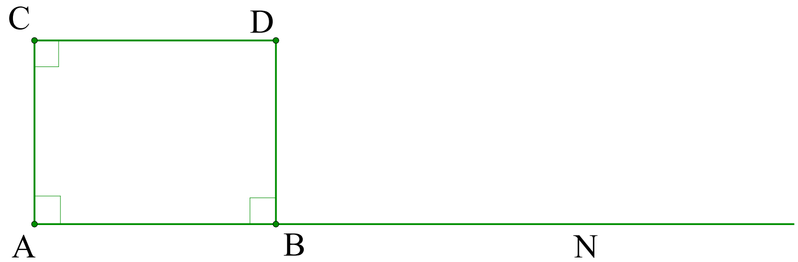
Angle de paral·lelisme



==

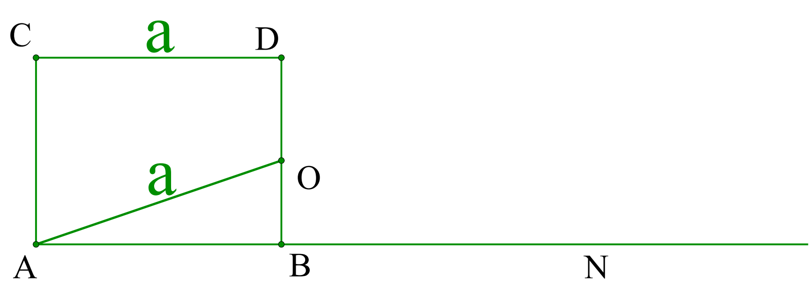
El fet de que en geometria hiperbòlica es pugui quadrar el cercle és conseqüència de que l'angle de paral·lelisme es pot construir amb regle i compàs. Tot el que fem a continuació està tret directament de l'*Apèndix* de János Bolyai.

Angle de paral·lelisme



==

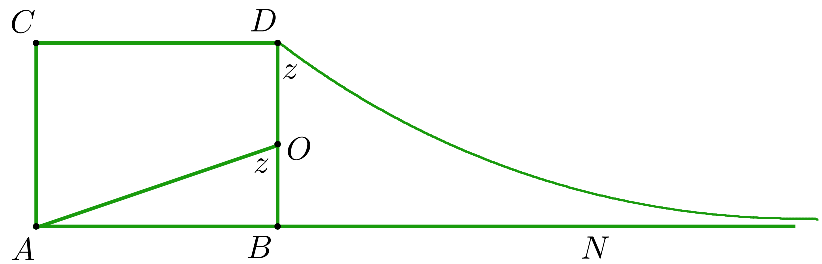
Construïm la perpendicular r a la recta AB des del punt A. Construïm la perpendicular des de D a r. Es tallen en el punt C.



==

Amb centre A i radi CD tracem una circumferència que tallarà BD en un punt O. Remarquem que el fet de tenir un regle i un compàs depèn dels tres primers postulats d'Euclides, que són els mateixos en geometria euclidiana i en geometria hiperbòlica. Aquests postulats diuen *Podem dibuixar..., podem prolongar..., podem descriure...* però no fan referència a objectes concrets que permetin fer això. Els estris de fusta de la foto de la pàgina 16 no són gaire útils en el cas hiperbòlic.

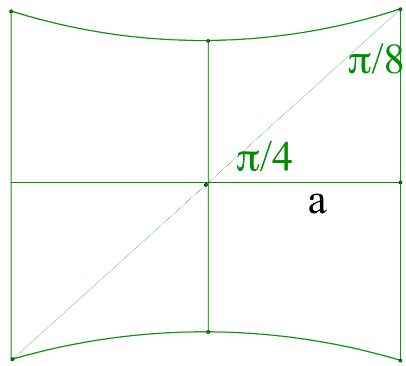
Angle de paral·lelisme



===

L'angle $z = \angle(AOB)$ és igual a l'angle de paral·lelisme (el que forma la recta BD amb la paral·lela a AB des de D). Com se li va ocòrrer a Bolyai considerar aquesta construcció?

Quadrat d'àrea π



- Àrea $= 8\,(\pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8})) = \pi$.
- El triangle bàsic és construïble a partir de l'angle de paral·lelisme.

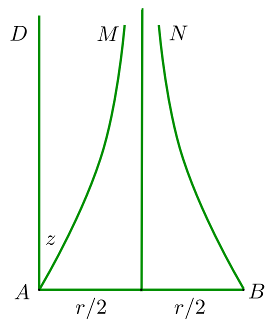
==

Un quadrat és un polígon que té quatre costats iguals i quatre angles iguals. Usant l'angle de paral·lelisme podem[8] construir un triangle rectangle d'angles aguts de 45 i 22.5 graus. Per a una unitat de longitud adequada l'àrea d'aquest triangle és $\pi/8$. I la del quadart format per vuit còpies d'aquest triangle és π.

[8]Vegeu el Butlletí de la SCM, Vol. 19, Núm. 2. 2004.

Cercle d'àrea π

- Àrea cercle $= \pi(2\sinh\frac{r}{2})^2 = \pi\ \tan^2 z.$
- z és el complementari de l'angle de paral·lelisme de $r/2$.

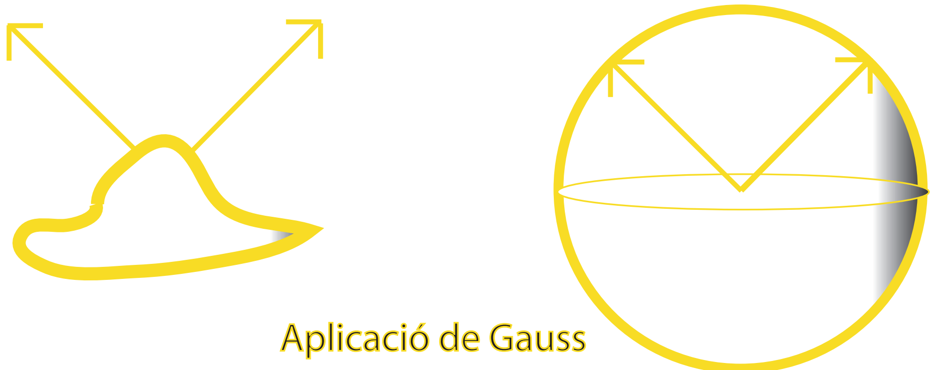


==

Torna a sorprendre la genialitat de Bolyai que és capaç d'escriure l'àrea del cercle de radi r en funció de l'angle de paral·lelisme de $r/2$. Com que $A = \pi\ \tan^2 z$, si $z = \pi/4$, tenim $A = \pi$. Així, per construir un cercle d'àrea π tan sols hem de construir el segment de paral·lelisme del complementari de $\pi/4$.

VIII. Gauss i el Disquisitiones (1827)

Aplicació de Gauss $\quad\quad \gamma : S \to S^2$

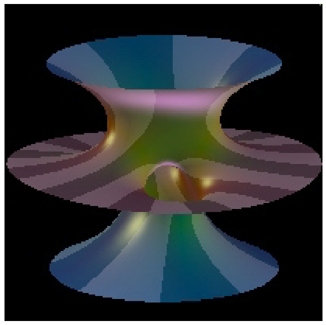


==

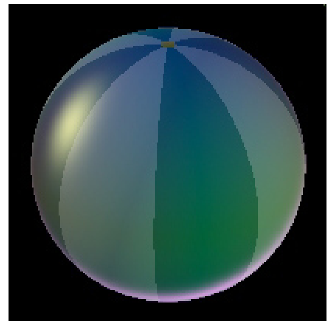
L'aplicació de Gauss envia cada punt de la superfície sobre el punt de l'esfera unitat donat per la normal a la superfície en el punt. Així una figura sobre la superfície (que té una certa àrea) va a parar a una figura sobre l'esfera (que tindrà una forma i àrea diferent).

Curvatura. §6

Aplicació de Gauss $\gamma : S \to S^2$



$\longrightarrow$



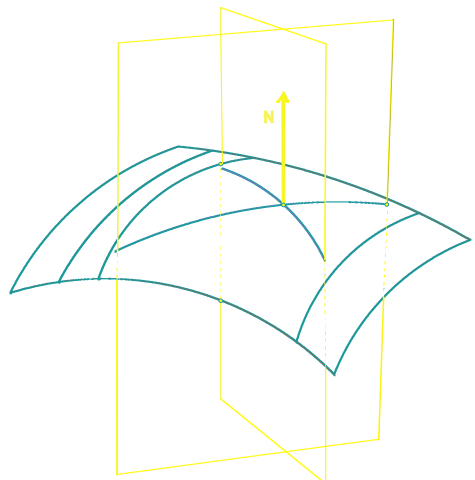
$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}$$

==

La imatge de la superfície sobre l'esfera pot ser molt complicada, cobrir-la diverses vegades, etc. La superfície del dibuix és la superfície de Costa (minimal). Els diferents colors indiquen zones corresponents. En la definició de curvatura s'ha de tenir en compta el signe (que aquí no hem considerat).[9]

[9]Imatges tretes de `http://www.msri.org/about/sgp/jim/geom/surface/maps/gauss/mainc.html`

Curvatura d'Euler. §8



$$\boxed{k = k_1 \cdot k_2}$$

==

El concepte de curvatura d'una corba és previ al concepte de curvatura d'una superfície. Aquí Gauss les relaciona.

Curvatura d'Euler. §8

$$\boxed{k = 1 \cdot 0 = 0}$$

===

El cilindre té curvatura zero (com el pla).

Teorema Egregi. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

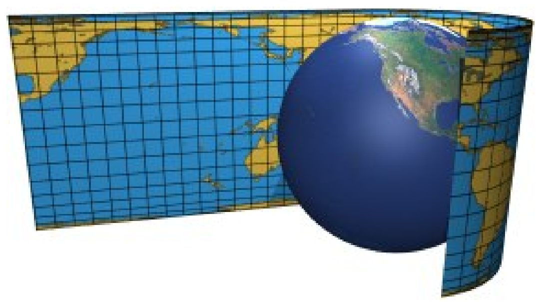
THEOREMA *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.*

==

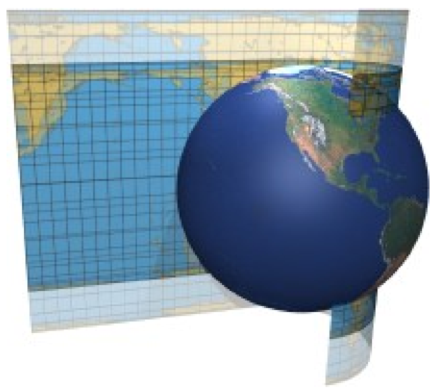
Neix la *teoria intrínseca de superfícies.*

TEOREMA Si una superfície es desenvolupa sobre una altra superfície qualsevol, la mesura de curvatura en els punts corresponents resta invariant.

No es poden fer bons mapes



Lambert



Gall-Peters

==

Una esfera de radi R té curvatura $1/R^2 \neq 0$. Per tant, no es pot desenvolupar sobre un pla (ni la més petita porció d'ella) conservant distàncies. En fer un mapa sempre es distorsionen les distàncies.
L'aplicació entre l'esfera i el cilindre (que hem comentat en parlar d'Arquimedes) dóna mapes que conserven les àrees del països.[10]

[10]Peters va dir: *La Projecció de Mercator sobre-valora a l'home blanc i distorsiona la imatge del món per a avantatge dels colonialistes.* Imatges tretes de `http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/ProjCyl/ProjCEA/projCEA.html`

Teorema del defecte. §20

$$K = \int_T k \, dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

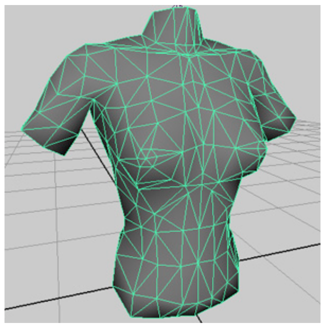
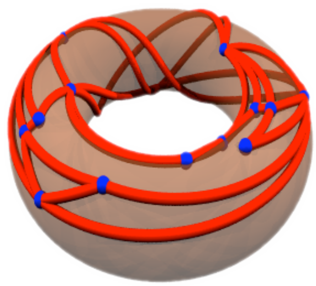
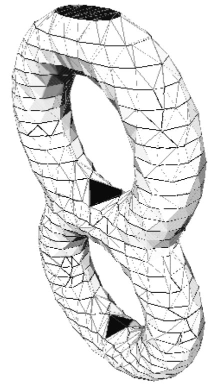
- Curvatura total = Àrea imatge esfèrica = Defecte

==

La integral de la curvatura d'un triangle és el seu defecte o excés.

La integral de la curvatura es pot interpretar com l'àrea sobre l'esfera de la imatge del triangle per l'aplicació de Gauss. Quan K és constant (positiva, negativa, o zero) retrobem les tres fórmules sobre triangles de les geometries clàssiques.

Teorema de Gauss-Bonnet

$K = 4\pi$ $\qquad$ $K = 0$ $\qquad$ $K = -4\pi$

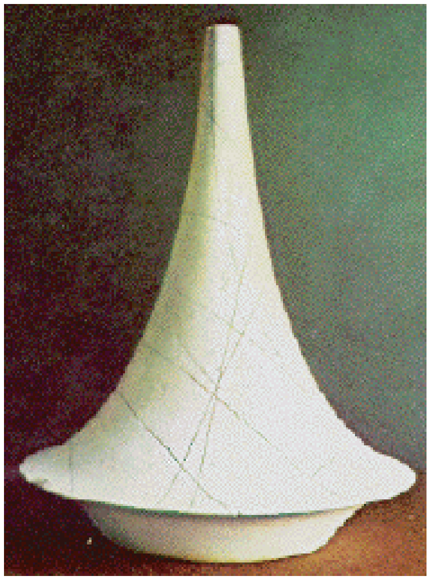
Aplicant el teorema anterior a cadascun dels triangles de la superfície i sumant, obtenim aquest extraordinari resultat: *La curvatura total només depèn de la topologia de la superfície.* Concretament és igual a 2π vegades la característica d'Euler.

Recordem que la característica d'Euler de l'esfera és 2, la del tor és 0, i la del doble tor és -2.[11]

[11] La primera imatge prové de `http://www.drone.org/tutorials/rayDisplace-workarounds.html`. La segona de `http://www.istia.univ-angers.fr/ delanoue/index.php4`, i la tercera de `http://www.cescg.org/CESCG-2001/SBiasotti/`.

IX. L'esfera imaginària

F. Minding, 1840



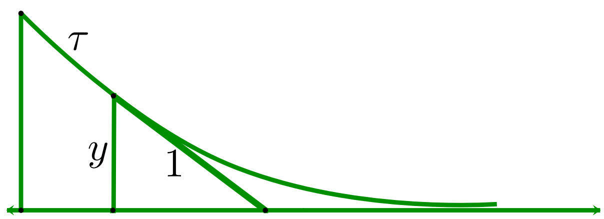
==

Minding fou el primer estudiós del *Disquisitiones* i pare de la geometria diferencial russa. Estudia una superfície amb curvatura constant negativa.[12]

[12] La primera foto prové de `http://www.faculty.fairfield.edu/jmac/sj/sacflaw/sacflaw.htm`

Tractriu

- Corba amb subtangent 1.

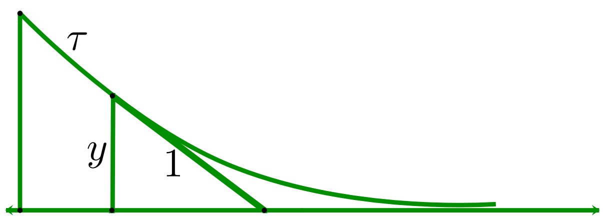


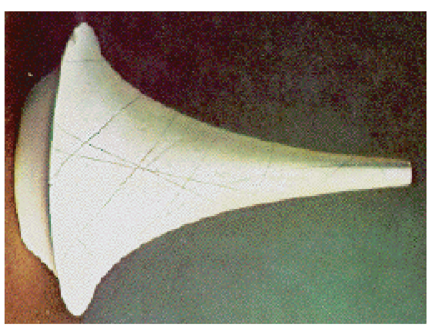
==

Perrault, el segle XVII, va proposar calcular la corba que descriu un mòbil arrossegat com indica la figura. Aquest problema fou resolt per Huygens.

Tractriu

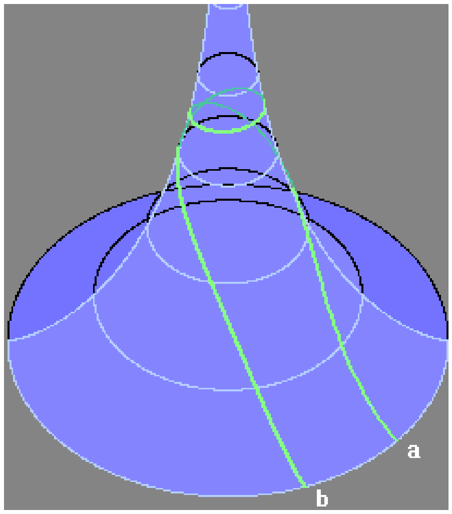
- Corba amb subtangent 1.



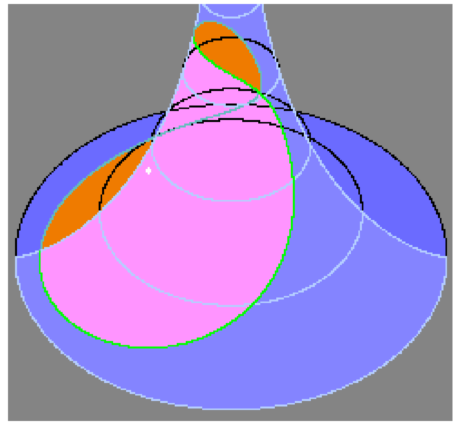


En fer rotar la tractiu obtenim la pseudoesfera.

Pseudoesfera



Rectes



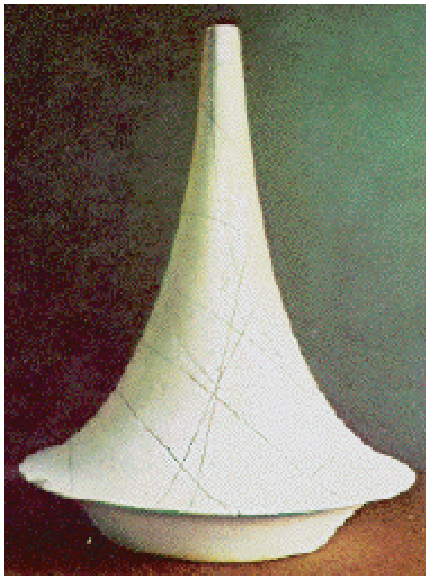
Circumferències

==

Així com en una esfera les rectes són els meridians, ara les rectes (corbes de mínima longitud) es van enfilant i després tornen a baixar com indica la figura.[13]

[13]Imatges tretes de `http://www1.kcn.ne.jp/~iittoo/us20-pseu.htm`

Pseudoesfera



$$A = (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

==

Sobre la pseudoesfera els triangles tenen àrea proporcional al defecte. Hem trobat, doncs, l'esfera imaginària de Lambert.[14]

[14] Hi ha un problema greu, i és que les rectes sobre la pseudoesfera no es poden prolongar indefinidament. Hi ha una vora que no es pot sobrepassar. Hilbert va demostrar que no hi ha cap superfície a $\mathbb{R}^3$ amb curvatura constant negativa en la que les geodèsiques es puguin prolongar indefinidament. És a dir, l'esfera imaginària no hi cap a $\mathbb{R}^3$. Per això va ser tan difícil trobar-la!

Un nou món creat del no-res

Marosvásárhely

===

Una gran pseudoesfera decora el poble dels Bolyai, amb la frase a la seva base: *Un nou món creat del no-res*.

Poincaré. La ciència i la hipòtesi. 1902

Cap experiència estarà mai en contradicció amb el postulat d'Euclides; cap experiència estarà mai en contradicció amb el postulat de Lobatchevski.

==

La geometria euclidiana és tan vertadera com la no euclidiana. Un altre tema és, a l'hora de les aplicacions, quina és més vàlida. Poincaré remarca la diferència entre la consistència lògica d'un model matemàtic i l'experiència.

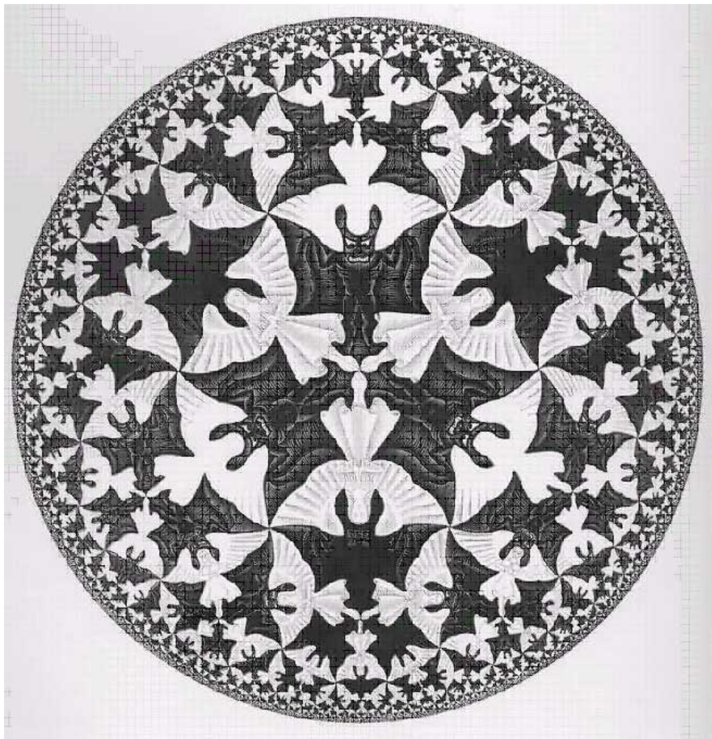
Disc de Poincaré

$$\mathbf{d((0,0),(x,y))} = \ln \frac{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{x^2+y^2}}}{\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{x^2+y^2}}}$$

A *La ciència i la hipòtesi*, Poincaré imagina una esfera molt calenta en el centre i que es va refredant fins el zero absolut a la vora. Els habitants d'aquest món tenen un coeficient de dilatació amb el calor molt gran de manera que es dilaten al centre i es contrauen els extrems. Aquest habitants, quan s'acosten a la vora, fan els passos cada cop més i més petits (ja que ells mateixos són més petits) de manera que no hi arriben mai.

Els habitants del món de Poincaré calculen les distàncies a la seva manera. Per exemple, aquesta és la fórmula de la distància entre el punt (x, y) i l'origen.

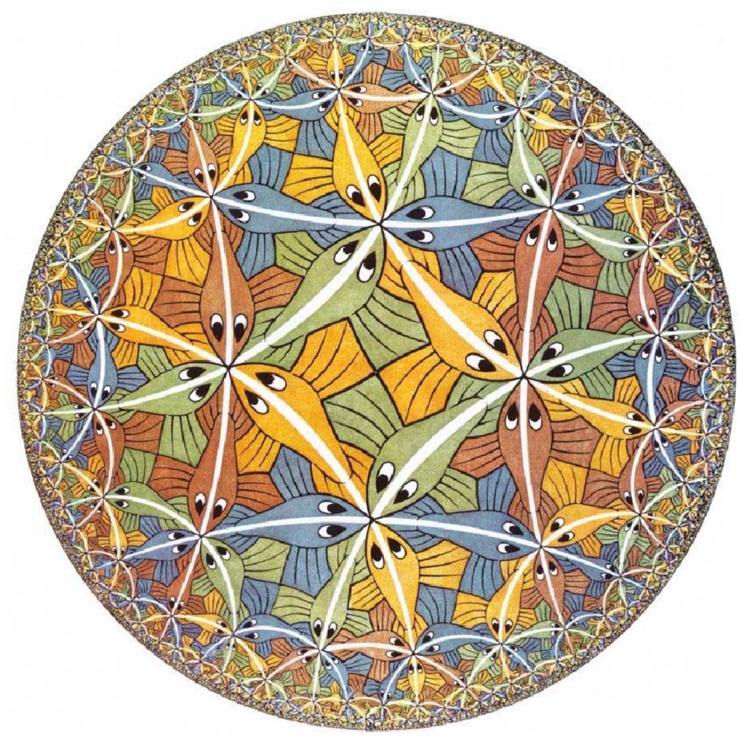
Disc de Poincaré



==

Escher interpretant els habitants imaginats per Poincaré.

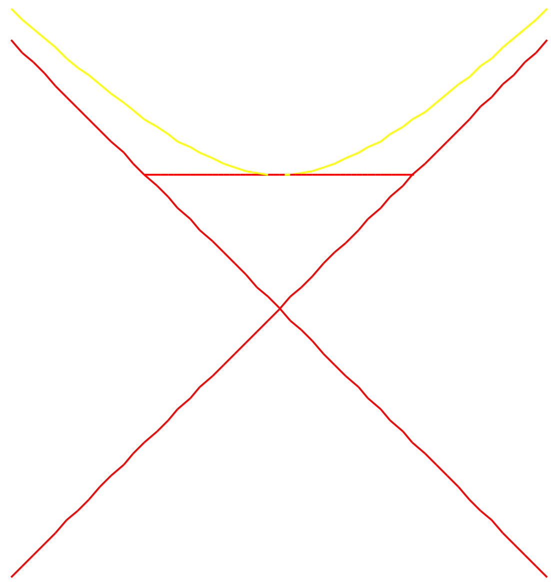
Disc de Poincaré



==

Més Escher.

Disc de Poincaré



==

Una altra manera d'imaginar el disc de Poincaré. Els habitants estan a l'hiperboloide (groc), però nosaltres els veiem des de l'origen reflectits en el disc tangent a l'hiperboloide en el mínim.

Disc de Poincaré

- Einstein, el 1949, tot comentant l'estat de les seves investigacions el 1908:

> *Perquè es van necessitar encara set anys més per a la construcció de la teoria de la relativitat? La raó principal rau en que no es tan fàcil lliurar-se de la idea de que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat.*

===

Inclús per a ments tan preclares com el propi Einstein és difícil pensar que la distància entre el $(0,0)$ i el (x,y) no es $\sqrt{x^2+y^2}$. Conèixer les coordenades dels punts no ens dóna, de manera immediata, la distància entre ells. Recordem la fórmula de la pàgina 97.

X. Riemann

Riemann

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 1854

==

Riemann defensa, davant un tribunal en el que hi havia Gauss, el seu treball *Sobre les hipòtesis que estan a la base de la Geometria.* Podem imaginar una superfície de dimensió dos que es flexiona i es corba. Què vol dir que un objecte de dimensió tres es corbi?

Riemann. Primera pàgina.

- *La relació entre el concepte d'espai i les seves propietats bàsiques ha quedat sempre en la foscor.*
- *Des d'Euclides a Legendre aquesta foscor no ha estat dissipada ni pels matemàtics ni pels filòsofs.*
- *Les propietats que distingeixen l'Espai d'altres [varietats] concebibles només es poden deduir a partir de l'experiència.*

===

La primera pàgina del treball de Riemann no té desaprofitament.

Varietats de Riemann

- Vivim en una varietat de Riemann de dimensió tres.
- En quina? És finita o infinita?
- Quantes n'hi ha?
- Distinció entre geometria i topologia.

==

Riemann introdueix el concepte de *quantitat múltiplement estesa*, el que avui anomenem *varietats*.

Varietats de dimensió dos

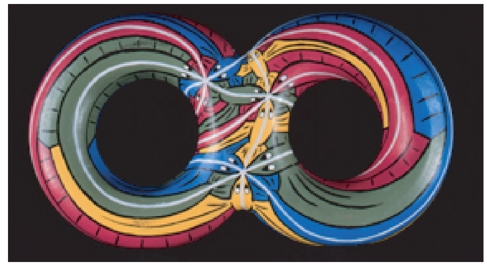
Classificació topològica

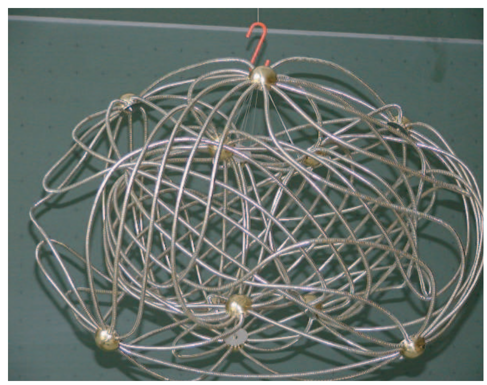
- Pla i pla amb forats.
- Esfera.
- Tor i tor múltiple amb forats.

===

Les superfícies es coneixen molt bé des del punt de vista topològic. Aquesta és la llista de les orientables.

Varietats de dimensió dos

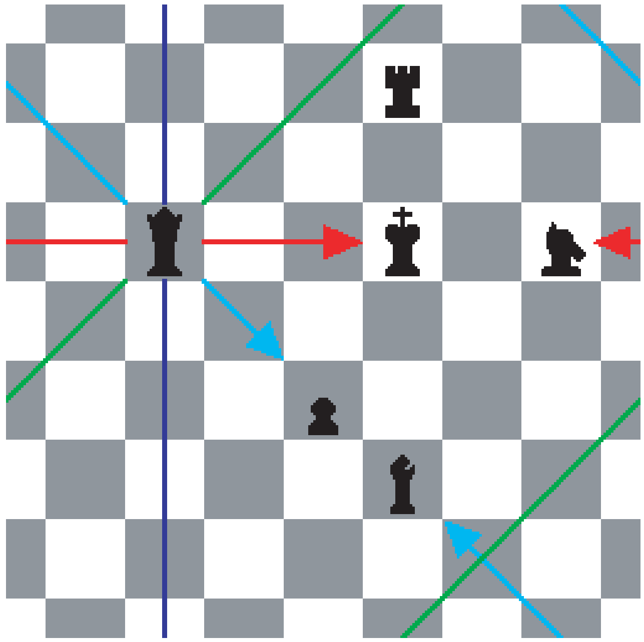




Els habitants dos dimensionals de la primera d'aquestes figures ignoren, per més mesures que prenguin, que viuen en un tor nuat. Poden detectar, però, que viuen en un tor.[15]

[15]Imatges tretes de `http://schwinger.harvard.edu/ motl/desert800.jpg`, `http://www.d.umn.edu/ ddunham/sculptures/index.html`, `http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/visbook/bokowsky/index.html`.

Varietat de dimensió dos finita



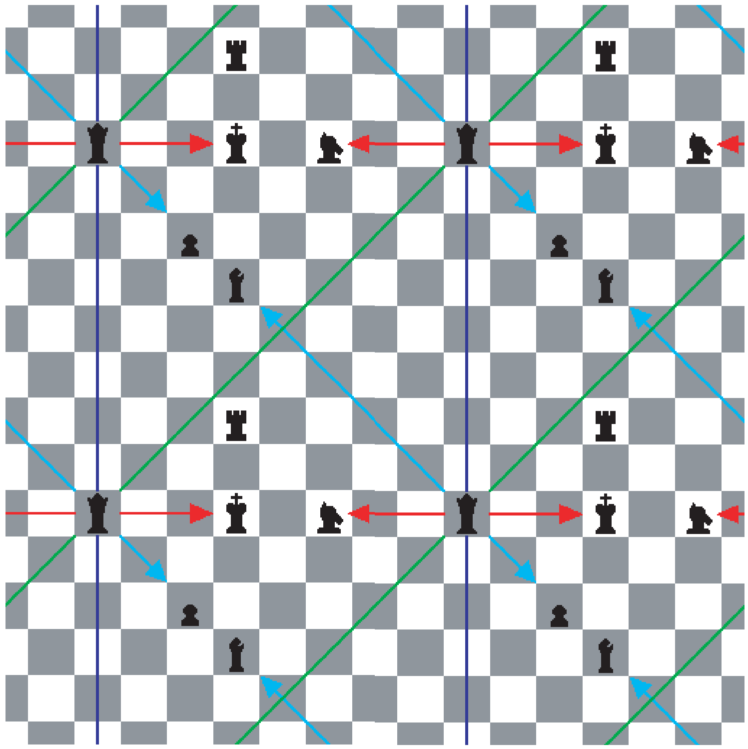
Topologia del tor, geometria del pla.

==

Els jocs d'ordinador han posat de moda els quadrats amb els costats identificats, tan antics ja per als matemàtics. Els seus habitants dos dimensionals viuen en un món finit no acotat. Prenen les mesures com si estiguessin en un pla (recordant que poden trobar camins més curts aprofitant les identificacions).[16]

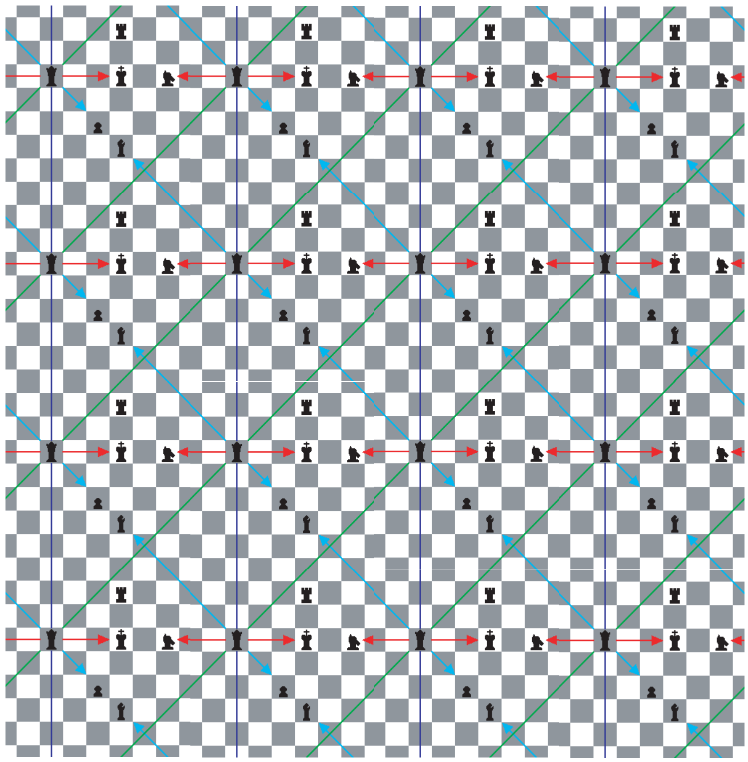
[16] Imatge treta de `http://solmu.math.helsinki.fi/2000/pelit/toruspelit/html/chess-moves/queen.html`

Varietat de dimensió dos finita



==

En lloc d'imaginar que els costats estan identificats, podem pensar que estem en un món format per tot de quadrats iguals. Sortim d'un i entrem en un altre exactament igual.



==

Quan una mateixa figura repetida infinits cops cobreix tot el pla, es diu que tenim una tessel·lació del pla.

Tessel·lacions

==

Escher imagina així el pas d'una tessel·lació de dimensió dos a la dimensió tres. Això és el que volem fer nosaltres: imaginar la dimensió tres a partir del coneixement profund de la dimensió dos. Quines coses podem copiar i quines no, etc.

Varietats de dimensió tres

- Problema obert fins al 2006.

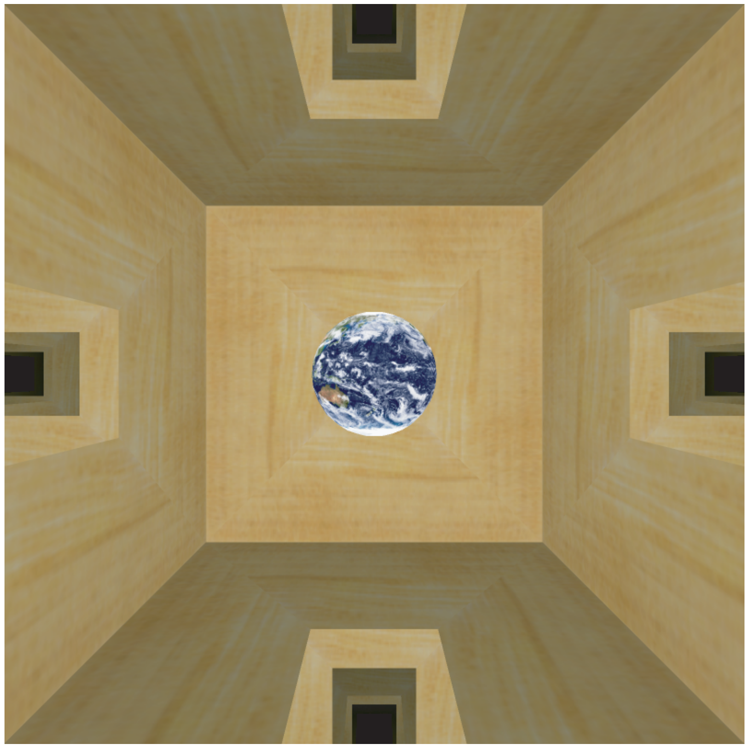
W. Thurston G. Perelman

==

La *conjectura de Poincaré* barrava el pas a la classificació de les varietats de dimensió tres. Perelman acaba el camí emprès per molts altres matemàtics fent el pas final en la resolució de la conjectura de Poincaré. Això desbloqueja la conjectura de geometrització de Thurston i el problema de la classificació.[17]

[17] Agraeixo a uns dels professors que més han aportat a la solució d'aquesta conjectura, el meu company Joan Porti, la informació que m'ha aportat sobre l'estat actual del tema.

A quin espai vivim?

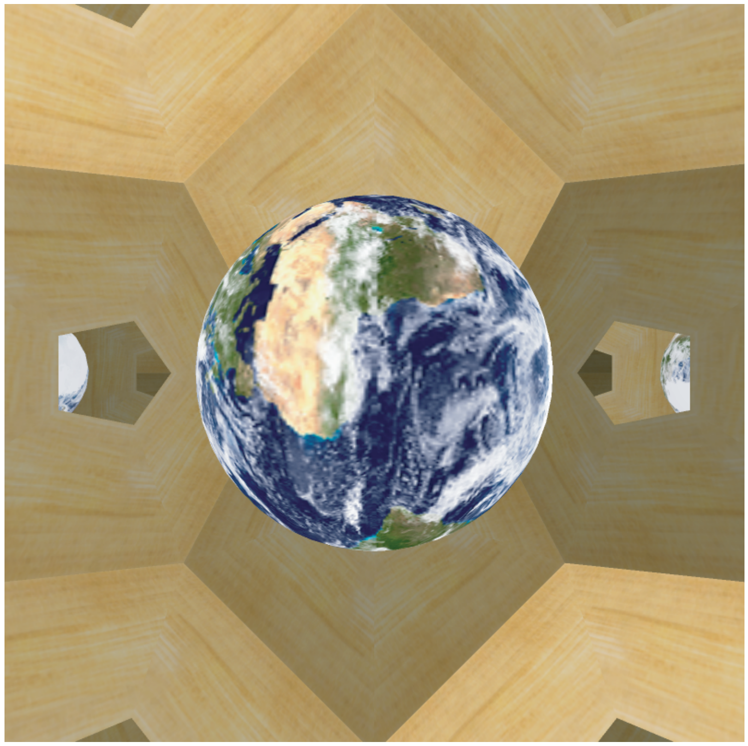


==

$\mathbb{R}^3$ tessel·lat per cubs. En cada aresta hi ha quatre costats que formen un angle de 90 graus $(4 \times 90 = 360)$.[18]

[18] Aquest dibuix i les dos següents estan trets de `http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/`

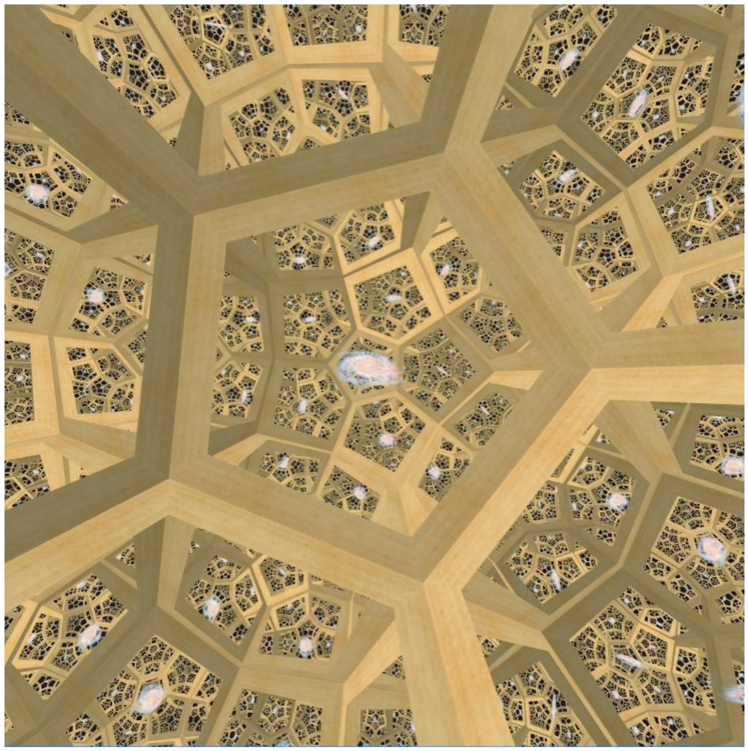
A quin espai vivim?



120 dodecàedres tessel.len S^3

==

No és gens fàcil de veure, però l'esfera S^3 (els punts a distància 1 de l'origen de R^4) es pot tessel·lar per dodecàedres regulars. A cada aresta n'hi ha tres que formen un angle de 120 graus ($3 \times 120 = 360$). Recordem que l'angle depèn de la grandària. Observem que el dodecàedre regular a $\mathbb{R}^3$ té angles díedres de $116°33'54''$ graus, i, per tant, no podem tessel·lar $\mathbb{R}^3$ amb dodecàedres.



==

També l'espai hiperbòlic (en lloc del disc de Poincaré pensem en una esfera de Poincaré) es pot tessel·lar per dodecàedres regulars de grandària adequada perquè els angles vagin bé. En aquest cas n'hi ha infinits.