GAUSS I LA GEOMETRIA

GEODÈSIA I GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

AGUSTÍ REVENTÓS TARRIDA
CARLOS J. RODRÍGUEZ BUITRAGO

Índex

1. Geometria euclidiana

Comencem[1] reproduint les paraules que Gauss utilitza en una carta[2] al seu amic Gerling, el 6 de gener de 1819, per explicar-li com va descobrir la possibilitat de construir el polígon regular de disset costats amb regle i compàs. Es veu clarament, en aquesta redacció, la molta estima en que Gauss tenia aquest resultat, el primer dels seus que va vuere publicat.

> *La història d'aquest descobriment no l'he explicat enlloc fins ara, però puc indicar-la exactament.*
>
> *Va ser el 29 de març de 1796, i la casualitat no hi va tenir res a veure. Tot estava en dividir les arrels de l'equació*
>
> $$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$
>
> *en dos grups [...]*
>
> *A partir d'esforçades meditacions entre les connexions de les arrels i els fonaments de l'aritmètica, feliç per unes vacances a Braunschweig, el matí d'aquell dia, abans de llevar-me, vaig tenir la sort de veure amb gran claredat tota aquesta correlació, de manera que allà mateix i immediatament vaig aplicar a l'heptadecàgon la corresponent confirmació numèrica.*

El resultat va ser enunciat a la columna *Neue Entdeckungen* (Nous descobriments) de *Intellegenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung*, l'1 de Juny de 1796, per A. W. Zimmermann, professor de Gauss al Collegium Carolinum de Braunschweig. Reproduïm l'escrit de Gauss i la presentació de Zimmermann.[3]

> *Com tot principiant en geometria sap, hi ha diversos polígons regulars, per exemple, el triangle, tetràgon, pentàgon, 15-gon, i aquells que s'obtenen doblant el nombre de costats d'algun d'ells, que són geomètricament construïbles.*

[1]Agraïm als organitzadors de la Jornada Gauss, especialment als professors Miguel Muñoz i Sebastià Xambó, l'oportunitat que ens han donat de participar-hi. Agraïm també a Enric Nart i Jerome Sherer l'ajuda en la traducció d'alguns passatges de l'alemany al català.

[2][?], Vol. 10, pàg 125.

[3][?], pàg. 28.

Això ja se sabia des del temps d'Euclides, i sembla que s'ha dit des de llavors que el camp de la geometria elemental no va més enllà: almenys jo no conec cap intent exitós d'estendre els seus límits en aquesta direcció.

Amb més raó, el descobriment mereix atenció... que a part d'aquells polígons regulars n'hi ha d'altres, per exemple el 17*-gon, que es poden construir geomètricament. Aquest descobriment és, en realitat, només un cas especial d'una teoria més general, encara no completada, i que es presentarà al públic tan bon punt ho sigui.*

Carl Friedrich Gauss
Estudiant de Matemàtiques a Göttingen

És important remarcar que el Sr. Gauss té ara 18 *anys, i es dedica aquí a Braunschweig amb igual èxit a la filosofia i a la literatura clàssica així com a l'alta matemàtica.*

18 *Abril,* 1796 E. A. W. Zimmermann, *Prof.*

L'endemà del dia en que va veure *amb gran claredat* la construcció del polígon de 17 costats, és a dir, el 30 de Març de 1796, comença el seu famós *Diari*, un mes abans de complir 19 anys.

Les entrades [1],[3],[55],[65],[66],[116], fan referència a polígons.

Concretament,

[1]. 30 de Març de 1796. *Els principis dels quals depèn la divisió del cercle, i la divisibilitat geomètrica del mateix en disset parts, etc.*

[3]. 12 d'Abril de 1796. *Les fórmules per als cosinus dels submúltiples dels angles d'una circumferència ...*

[55]. 19 de Gener de 1797. *He trobat un distingit suplement a la descripció dels polígons. Concretament, si $a, b, c, d, \ldots$ són els factors primers del nombre primer p disminuït en una unitat, llavors per descriure un polígon de p costats no necessitem més que*

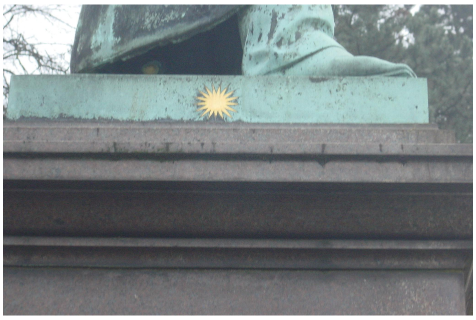
(1) *dividir l'arc en parts $a, b, c, d, \ldots$*

(2) *descriure els polígons de $a, b, c, d, \ldots$ costats.*

[65]. 17 de Juliol de 1797. *He perfeccionat una segona deducció del teorema sobre els polígons.*

Braunschweig

Göttingen



Gauss va expressar a W. Bolyai el seu desig de que el polígon de 17 costats figurés a la seva tomba.

Esquerra*: Al peu de l'estàtua erigida a la seva ciutat natal, Braunschweig, hi figura un polígon estrellat de* 17 *vèrtexs.*

Dreta*: Sobre la seva tomba, a Göttingen, hem intentat seguir els seus desitjos!*

> [66]. 17 de Juliol de 1797. *Es pot demostrar per ambdós mètodes que tan sols cal resoldre equacions pures [resolvents de Lagrange].*
> [116]. 6 d'Abril de 1801. *Provat que és impossible reduir la divisió del cercle a qualsevol equació de grau menor al suggerit per la nostra teoria.*

Destaquem encara l'entrada

> [81]. 16 d'Octubre de 1797. *Nova demostració del teorema de Pitàgores.*

Lemniscata. Idees semblants es poden aplicar a la divisió amb regle i compàs de la lemniscata en parts d'igual longitud. Per aprofundir en aquesta qüestió, vegeu l'article de Joan C. Lario en aquest volum. Senyalem només que les entrades [51],[60],[62],[63],[92],[108],[146], fan referència a la lemniscata. Justament la [146] és la última: 9 de Juliol de 1814.

2. Geometria no euclidiana

Segons el propi Gauss, es preocupa abans dels fonaments de la geometria que del poligon de 17 costats. En efecte, en una carta a Schumacher $(28-09-1846)$ diu:

> *El que Schweikart va anomenar* geometria astral*, Lobatchevski anomena* geometria imaginària*. Saps que durant* 54 *anys he compartit els mateixos punts de vista. No he trobat res nou per mi en el treball de Lobatchevski. Però el seu desenvolupament, en un vertader esperit geomètric, és diferent del camí que jo vaig seguir.*

Estavem, doncs, a 1792 i Gauss tenia 15 anys!

La publicació d'aquesta carta, just després de la mort de Gauss, el 1855, on pondera positivament el treball de Lobatchevski, va causar una forta impressió a la comunitat matemàtica europea. A partir d'aquell moment la Geometria no Euclidiana va començar a ser universalment acceptada.

En una carta a Gerling $(10-10-1846)$ comenta:

> *El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de* $360°$ *per una quantitat,*

> *[....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

Tenia, doncs, 17 anys!

Les entrades del *Diari* que fan referència als fonaments de la geometria són:

> [72]. 28 de Juliol de 1797. *He demostrat la possibilitat del pla.*
> [99]. Setembre de 1797. *Hem fet excepcionals progressos en els principis de la Geometria.*

2.1. **Teoria de les paral·leles.** Probablement pel problema de la consistència, no va publicar res sobre aquest tema, tot i que després de la seva mort es varen trobar entre els seus papers uns escrits inacabats sobre teoria de les paral·leles, probablement de 1831 (54 anys).[4]

En aquests escrits Gauss no arriba massa lluny, però ja s'hi entreveu la idea d'horocicle. Concretament parla de *punts corresponents* que és la relació d'equivalència que dóna lloc a l'horocicle. La redacció s'assembla molt al treball de Bolyai.

Però coneixem el que pensava sobre aquest tema per les seves cartes a amics i col·legues, les quals comentarem breument a la secció 3. No obstant, tots els resultats de geometria *astral* que apareixen en aquestes cartes es poden deduir directament de l'*analogia de Lambert* (cosa que Gauss no diu en cap moment).

2.2. **L'analogia de Lambert.** Lambert (1728 – 1777) suggereix que la geometria de l'angle agut correspon a la geometria sobre una esfera de radi imaginari.[5]

Està ben establert que Gauss consulta l'obra de Lambert a la biblioteca de Göttingen el 24 d'octubre de 1795 i el 2 de gener de 1797.[6] Taurinus (1794 – 1874) va ser el primer en desenvolupar l'*analogia*, seguint les idees dels seu oncle Schweikart. Va arribar a l'angle de paral·lelisme. Gauss, en una extensa carta, li reconeix el mèrit, però en atribuir-se les seves conclusions va frustrar la carrera d'un matemàtic amb talent.

---

[4]Vegeu [**?**], Volum VIII, pàg. 202 – 209, o [**?**], pàg. 67 – 75.
[5]Vegeu [**?**].
[6]Justament l'any de les entrades 72 i 99 del *Diari.*

2.3. **Esfera de radi R.** Comencem recordant les fórmules de la trigonometria sobre una esfera de radi R. Es compleixen les igualtats següents.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha} &= \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma} \\
\cos\frac{a}{R} &= \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \\
\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R},
\end{aligned}$$

on a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle esfèric d'angles respectivament oposats α, β, γ.

Teorema de Pitàgores. En particular, per a un triangle rectangle de catets b, c i hipotenusa a, obtenim el teorema de Pitàgores.

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$$

Àrea. També és ben conegut que l'àrea d'un triangle esfèric d'angles α, β, γ està donada per la fórmula

$$\begin{aligned}
\text{Àrea del triangle} &= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\
&= R^2 \cdot \text{ Excés.}
\end{aligned}$$

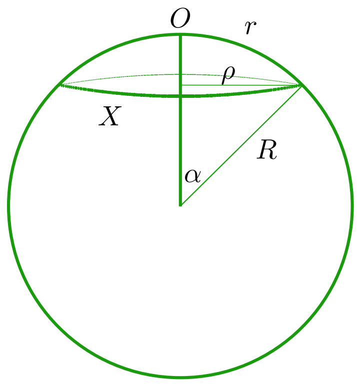
Longitud. Finalment, la longitud d'una circumferència esfèrica de radi r, mesurat òbviament sobre l'esfera, està donada per la fórmula

$$L = 2\pi\rho = 2\pi R\sin\alpha = 2\pi R\sin\frac{r}{R},$$

on la relació entre ρ, r i α està donada en el dibuix següent.

Observem, en el mateix dibuix, que els punts del paral·lel de colatitud α estan a distància $r = R\alpha$ del pol nord O.

Observem que aquesta fórmula ens dóna un criteri per saber on vivim. Si construïm una circumferència de radi $r = 1\,\mathrm{m}$ i veiem que té longitud $L = 6\,\mathrm{m}$, llavors estem en una esfera de radi $R = 1.9098585\,\mathrm{m}$.



2.4. **Esfera de radi infinit.** El teorema de Pitàgores sobre l'esfera de radi R, quan R es fa gran, dóna lloc a l'aproximació

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} \sim (1 - \frac{b^2}{2R^2}) \cdot (1 - \frac{c^2}{2R^2}),$$

i, per tant, en una esfera de radi infinit el teorema de Pitàgores queda reduït a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Àrea. La fórmula de l'àrea del triangle en una esfera de radi R dóna lloc, quan R tendeix a infinit, a

$$\text{Àrea} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \infty \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Si asumim que l'àrea del triangle és finita, tenim

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Longitud. La fórmula de la longitud de la circumferència esdevé

$$L = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \sim 2\pi\, r.$$

És a dir, hem retrobat tres resultats ben coneguts de la geometria euclidiana plana.

2.5. **Esfera de radi Ri.** Com que la substitució formal de R per ∞ ens ha donat bons resultats, siguem ara una mica més atrevits, i substituïm formalment R per Ri. Recordem les relacions

$$\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.$$

Les fórmules de la trigonometria esfèrica es transformen en

$$\begin{aligned} \frac{\sinh \dfrac{a}{R}}{\sin\alpha} &= \frac{\sinh \dfrac{b}{R}}{\sin\beta} = \frac{\sinh \dfrac{c}{R}}{\sin\gamma} \\ \cosh\frac{a}{R} &= \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos\alpha \\ \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{R}\,, \end{aligned}$$

on a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle hiperbòlic (triangle sobre l'esfera de radi imaginari, sigui el que sigui aquest objecte) d'angles respectivament oposats α, β, γ.

Teorema de Pitàgores. En particular, el teorema de Pitàgores ens diu ara que en un triangle rectangle d'hipotenusa a, i catets b i c, es compleix

$$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}.$$

Àrea. L'àrea d'un triangle es transforma en[7]

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= (Ri)^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\ &= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma)) \\ &= R^2\cdot\text{Defecte}. \end{aligned}$$

Longitud. La longitud d'una circumferència està donada per

$$L = 2\pi Ri\sin\frac{r}{Ri} = 2\pi R\sinh\frac{r}{R}.$$

Observem que aquesta fórmula ens dóna un criteri per saber on vivim. En efecte, si vivim en una esfera imaginària no ens podrem trobar mai en la situació descrita a la pàgina 7, en que suposàvem una circumferència de radi $r = 1\,\mathrm{m}$ i longitud $L = 6\,\mathrm{m}$. Aquí, una circumferència de radi $r = 1\,\mathrm{m}$ té longitud més gran de 2π. Si amb radi

[7]Justament aquesta substitució formal va ser la que va conduir Lambert a la seva *Analogia*.

$r = 1\,\mathrm{m}$ trobéssim, per exemple, $L = 7\,\mathrm{m}$, llavors el radi seria Ri amb $R = 1.22884\,\mathrm{m}$. Si amb aquest radi R féssim una circumferència de radi $r = 10\,\mathrm{m}$, ens trobaríem que aquesta circumferència té més de 2 quilòmetres de longitud!

Resumint aquests tres últims resultats tenim

R	Ri
$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$.

Vegem encara tres conseqüències més

Defecte.

Aplicant les fórmules de la trigonometria hiperbòlica a un triangle equilàter de costat a i angle α obtenim

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}.$$

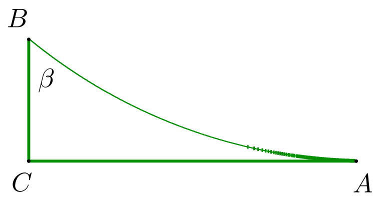
Per tant, $\alpha < \pi/3$, o, equivalentment,

$$\alpha+\alpha+\alpha < \pi;$$

és a dir, els triangles equilàters tenen *defecte* $\delta = \pi - 3\alpha > 0$. Però, és ben sabut, que si hi ha un triangle amb defecte positiu, tots tenen defecte positiu. Per tant, tots els triangles de l'esfera imaginària tenen defecte positiu.

Angle de paral·lelisme. Si apliquem la tercera fórmula de la trigonometria al triangle rectangle $\triangle ABC$ de la figura, d'angles respectius α, β, γ, amb $\gamma = \pi/2$, obtenim

$$\cos\alpha = \sin\beta\cosh\frac{a}{R}.$$



Observem que si $A \to \infty$, llavors $\alpha \to 0$. És a dir, quan A s'allunya de C, sobre la recta AC, l'angle α en el vèrtex A es va fent petit, i, de fet, tendeix a zero.

En el límit l'angle β és l'angle de paral·lelisme[8] del costat BC, i com que depèn només de la longitud a d'aquest costat, es denota per $\Pi(a)$. Per tant, l'anterior fórmula es transforma en

$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R},$$

o, equivalentment,

$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

que és la famosa fórmula de l'angle de paral·lelisme.

Rectes infinites. Per permutació circular de la tercera fórmula de la trigonometria, amb $\gamma = \pi/2$, obtenim

$$\cos \beta = \sin \alpha \cosh \frac{b}{R}.$$

Quan $\alpha \to 0$, llavors $\beta \to \Pi(a) < \pi/2$. Per tant, tenim

$$\cos \Pi(a) = 0 \cdot \cosh \frac{b}{R},$$

i per tant

$$b \to \infty.$$

És a dir, les rectes de l'esfera imaginària tenen longitud infinita.

[8]Qualsevol semirecta d'origen B que formi amb la semirecta BC un angle menor que $\Pi(a)$ talla la recta AC, i qualsevol semirecta d'origen B que formi amb la semirecta BC un angle major que $\Pi(a)$ no talla la recta AC.

3. Cartes de Gauss sobre geometria no euclidiana

Tots el comentaris sobre geometria no euclidiana que va escriure Gauss estan continguts en les següents cartes.[9]

Carta a Farkas Bolyai (17 – 12 – 1799)

> *Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no! És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.*

Carta a Farkas Bolyai (25 – 11 – 1804)

> *He llegit el teu manuscrit amb gran interès i cura, i he gaudit completament de la precisió subjacent. No obstant no vulguis la meva lloança que semblaria esbiaixada perquè el teu desenvolupament de les idees té molt en comú amb el meu. He buscat la solució d'aquest nus Gordià, i fins ara he buscat en va. Desitges tan sols la meva atenta opinió: és que la teva explicació no em satisfà. Miraré de fer el punt crític (que pertany al mateix tipus d'obstacles que fan els meus esforços inútils) tan clar com pugui.*
>
> [...] *M'has demanat la meva honesta opinió i te l'he donada; i et repeteixo un cop més que tinguis la seguretat que em donaria molta alegria si poguessis superar tots els obstacles.*

Carta a Gerling[10] (11 – 04 – 1816)

> *De fet, seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa, ja que llavors tindríem una mesura universal a priori, per exemple, podríem assumir com unitat de l'espai el costat del triangle equilàter amb angle* $= 59°59'59''.99999$.[11]

[9] Totes les cartes que citem les podeu trobar al volum VIII de [?] entre les pàgines 159 i 220. Hi ha recopilacions en diversos llocs, per exemple, a [?].

[10] Gerling va escriure a Gauss el mes de març de 1816 respecte la teoria de les paral·leles de Legendre, exposada en el seu llibre *Eléments de Géométrie*, sisena edició 1806. Gauss contesta que l'argument de Legendre no es pot considerar una prova, i comenta què passaria si la geometria euclidiana no fos certa.

[11] Un toc d'humor en els treballs de Gauss.

Carta a Olbers $(28-04-1817)$

> *Cada vegada estic més convençut que la necessitat física de la nostra geometria euclidiana no pot ser demostrada almenys per la raó humana.*
> *Hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que l'aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica. Potser en una altra vida ens serà possible de penetrar en la naturalesa de l'espai; però ara no és factible.*

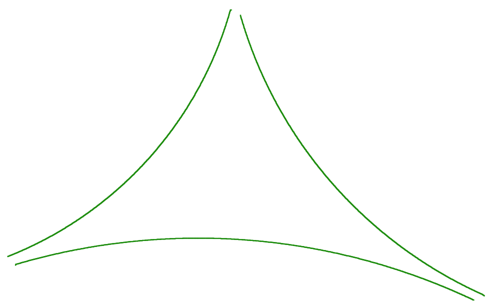
Carta a Gerling $(25-08-1818)$

> *M'alegra que tingueu el coratge d'expressar-vos com si reconeguéssiu la possibilitat de que la nostra teoria de les paral·leles, i amb ella tota la geometria, pogués ser falsa.*

Carta a Gerling $(16-03-1819)$

> *Sospito que el professor Schumacher estarà d'acord en tots aquests punts, la qual cosa m'alegraria molt perquè aquest punt de vista coincideix amb el meu. Tan sols vull remarcar que he desenvolupat la geometria astral tan lluny que puc resoldre completament tots els problemes un cop la constant C està donada.*
> *El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de 180° és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a ella, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.*

I acaba amb el dibuix següent:



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Observem que log hyp vol dir logaritme neperià, i que la constant que està multiplicant a π (per a nosaltres R^2, vegeu la pàgina 9), apareix en agafar com unitat de longitud el segment que té angle de paral·lelisme $\pi/4$, és a dir,

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Carta a Taurinus (8 – 11 – 1824)

> *No tinc res a dir (o no massa) en contra del seu intent* [de provar el cinquè postulat]. *La seva presentació de la prova que la suma dels tres angles d'un triangle no pot excedir de* 180^o *necessita algun retoc, en rigor geomètric. Això es podria fer, i no hi ha dubte de que aquesta impossibilitat es pot provar rigorosament. La situació és molt diferent en la segona part, que la suma dels angles no pot ser inferior a* 180^o*; aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis. M'imagino que sobre aquest tema no hi ha estat pas molt de temps. Jo hi he estat pensant durant més de trenta anys i no crec que ningú no hi hagi pensat més que jo. La suposició que la suma dels angles d'un triangle és inferior a* 180^o *condueix a una geometria que és molt diferent de la nostra (la euclidiana) però totalment consistent, que he desenvolupat a la meva entera satisfacció, de manera que en ella puc resoldre-hi qualsevol problema llevat la determinació d'una constant que no es pot determinar a priori.*
> [...] *Tots els meus esforços per descobrir una contradicció, una inconsistència, en aquesta geometria no euclidiana no han tingut èxit; i la cosa en ella més oposada a les nostres concepcions és que, si fos certa,* existiria en l'espai una magnitud lineal, determinada per ella mateixa *(però que ens és desconeguda). Però em sembla a mi que, malgrat la* sàvia xerrameca dels metafísics*, sabem massa poc, o quasi res en absolut, sobre la vertadera naturalesa de l'espai per considerar impossible del tot el que ens sembla poc natural.*

Carta a Bessel (27 – 01 – 1829)

> *Hi ha un altre tòpic, que per mi té quasi* 40 *anys, sobre el que he pensat de temps en temps en aïllades hores lliures, em refereixo als principis de la geometria; no sé si te n'he parlat. També en això tinc moltes coses consolidades, i la meva convicció de que no podem establir completament una geometria a priori s'ha*

> *tornat més forta. Mentrestant passarà probablement un temps abans no comenci a preparar les meves* molt extenses investigacions *sobre això per publicar-les; potser això no passarà mai mentre jo visqui ja que temo el rebombori dels beocis.*

Els beocis eren els natius de Beocia, a l'antiga Grècia, cèlebres perquè els seus exercits atacaven cridant. Aquí s'aplica als metafísics neokantians.

De fet Gauss no anava gens desencaminat, ja que inclús molt posteriorment, el 1871, el professor Lotze, un neokantià de Göttingen, va declarar que la geometria no euclidiana no tenia sentit, causant molts problemes a Klein.

Carta a Bessel (9 – 04 – 1830)

> *La meva íntima convicció és que l'estudi de l'espai és a priori completament diferent que l'estudi de magnituds; el nostre coneixement del primer està mancat de la completa convicció de necessitat (així, de la veritat absoluta) que és característic del segon; hem d'admetre humilment que si bé el nombre és merament un producte de les nostres ments, l'espai té una realitat fora de les nostres ments i les seves lleis no les podem saber a priori.*

Carta a Schumacher (17 – 05 – 1831)

> *Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria, però, que això morís amb mi.*

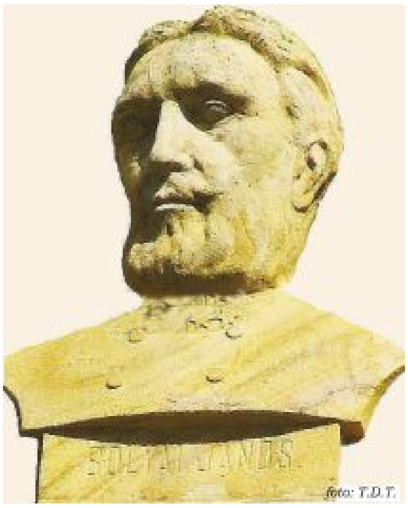
Carta a Schumacher (12 – 07 – 1831)

> *La longitud d'una circumferència de radi r és :*

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

i comenta que, perquè les mesures coincideixin amb l'experiència, k hauria de ser infinitament gran.

Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.



János Bolyai (1802 – 1860)[12] Marosvásárhely

Carta a Gerling (14 – 02 – 1832)

> *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment, encara que d'una manera concentrada difícil de seguir per algú que no estigui familiaritzat amb el tema. L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el* 1798*, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra, v. Bolyai, com un dels genis més grans.*

Carta a Farkas Bolyai[13] (6 – 03 – 1832)

> *Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant això, no puc fer altra cosa: si l'alabés, m'alabaria a mi mateix, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu*

[12]No es conserven retrats de János Bolyai. Sabem que tenia la cara allargada i els ulls blaus. Però en el Palau de cultura de la ciutat on van viure els Bolyai, Marosvásárhely, hi ha representats sis famosos científics. D'esquerra a dreta, Elek Dósa, Sámuel Teleki, Farkas Bolyai, Jänos Bolyai, Ferenc Mentovich i István Pêntelei. Vegeu `http : //www.titoktan.hu/Bolyai_a.htm`

[13]L'original d'aquesta carta es va perdre. Però hi ha una copia feta per János Bolyai enviada pel seu pare a Sartorius el 26 d'agost de 1856, vegeu [**?**].

fill i els resultats a què ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys. Estic vertaderament atònit. La meva intenció era no donar a conèixer el meu treball mentre jo visqués. Molta gent no té idea del que està involucrat, i n'he trobat molt pocs que hi estiguin particularment interessats. Per apreciar el que està emergint, un ha de tenir, primer de tot, una comprensió real del que està perdut, i sobre aquest punt la majoria estan en la foscor. Per altra banda, era la meva intenció escriure tot això, de manera que no morís amb mi.[14]

És, per tant, una agradable sorpresa per mi, i estic molt satisfet, que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.

Quant hagués pogut canviar aquesta història si Gauss hagués fet pública la seva molt bona opinió del treball de János Bolyai!

És en aquesta carta que suggereix el nom de *paraesfera* per a la superfície F de J. Bolyai.

A més, dóna una demostració original de que l'àrea d'un triangle hiperbòlic és proporcional al defecte. Aquesta demostració, una de les poques que va escriure Gauss sobre aquest tema, es basa en el fet de que els triangles amb tres vèrtexs a l'infinit tenen àrea finita, la qual cosa no és evident.

Aquesta relació de les cartes de Gauss sobre geometria no euclidiana es completa amb les dues cartes que, molt posteriorment, va enviar a Schumacher i a Gerling, i que ja hem comentat a la pàgina 5.

Recensions. Per completesa, citem també dues recensions que, sobre aquest tema, va fer Gauss a *Göttingische gelehrte Anzeigen*, el 20 d'abril de 1816. A la introducció escriu:

> *Rarament passa un any sense un intent d'omplir aquests forats* [els fonaments de la teoria de les paral·leles] *i sense que puguem dir de cap manera, si parlem honesta i clarament, que hem anat més enllà del que va fer Euclides fa* 2000 *anys.*

Sobre el treball de J. C. Schwab comenta que l'autor creu demostrar que si una línia recta talla dues paral·leles ho fa amb el mateix angle. Sobre el treball de Matthias Metternich comenta que el seu error està

[14] Vegeu la carta a Schumacher de 17 – 05 – 31, comentada a la pàgina 15.

en suposar que una successió monòtona de punts que s'acosta a un punt donat té per límit aquest punt.

4. Geodèsia

El més refinat geòmetra i el perfecte astrònom.[15]
Rellotge personal de Gauss (Museu de Braunschweig)

Tot i que Gauss ja s'havia iniciat en la geodèsia[16] va ser a partir d'una carta de Schumacher, del 8 de juny de 1816, quan s'hi va començar a dedicar molt seriosament. En aquesta carta Schumacher li demanava ajuda per tal de mesurar l'arc de meridià entre Skagen i Lauenburg i, eventualment, estendre els càlculs a la regió de Hannover.[17] Gauss contesta il·lusionat el 5 de juliol de 1816, oferint la seva ajuda. Feia temps que estava interessat en determinar la forma de la Terra a partir de dades empíriques i, per tant, la proposta de Schumacher li anava molt bé.

[15][**?**], pàg. 113. En una carta a Olbers Gauss diu: *El més refinat geòmetra i el perfecte astrònom - aquests són dos títols separats que estimo amb tot el meu cor, i que adoro amb passió sempre que estan units.*

[16]Vegeu el capítol 10 de [**?**].

[17]Schumacher estava treballant en la triangulació de Dinamarca, que en aquell moment incloïa les províncies germàniques de Schleswig i Holstein, i volia continuar-la cap el sud.

Els problemes econòmics els resol Schumacher a través del Baró Karl Friedrich Alexander von Arnswaldt, qui s'interessà per aquests treballs. Després de diversos avatars, el dia 1 de juny de 1819, obtenen la directiva ministerial autoritzant Gauss a rebre els avançaments de diners necessaris per iniciar les mesures a Lauenburg.

Finalment, el 30 de juny de 1820, Gauss rep l'aprovació per part de George IV, rei de Gran Bretanya i Hannover, de la continuació dels treballs en el regne de Hannover.

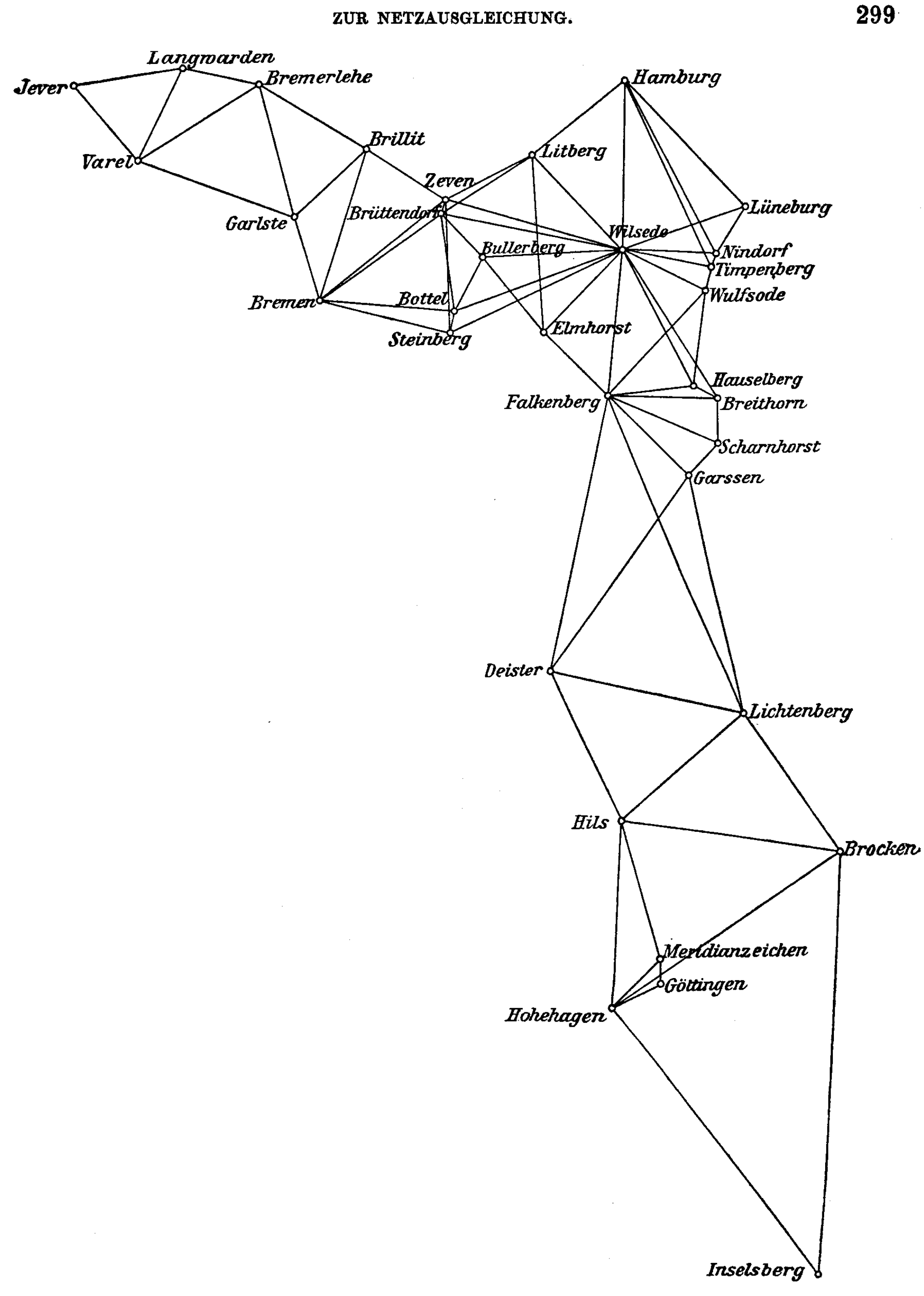
S'estableix Hohenhagen[18] com punt inicial de la triangulació. Treballa en aquesta triangulació de manera exhaustiva fins aproximadament finals de 1825, quan inicia la primera versió del *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, com un primer pas cap a la geodèsia avançada.

Modesta decoració de l'interior de la Torre de Gauss a Hohenhagen, gener 2006*. La foto de l'esquerra correspon a l'actual torre, i en alguna de les altres es veu l'antiga torre, ja enderrocada.*

Reproduïm a continuació la triangulació de Hannover[19] que s'ha d'interpretar com un sistema d'equacions lineals amb lligadures, que Gauss resol amb la tècnica dels mínims quadrats, que coneixia des de molt abans i que ja havia emprat en astronomia el 1802.

[18]Hohenhagen és una petita muntanya de 508 metres d'altitud, a Dransfeld, a uns 15 kms de Göttingen.

[19]Aquests resultats sobre la triangulació de Hannover, que ara comentarem, els podeu trobar a [**?**], vol. IX pàgs. 297 – 316.



Triangulació de Hannover. 33 *vèrtexs i* 55 *triangles.*

La numeració de Gauss, en la que explicita les connexions entre els vèrtexs, és la següent:

1	Göttingen	1··· 2.3
2	Merid.-Zeichen	2··· 1.3.4
3	Hohenhagen	3··· 1.2.4.5.6
4	Hils	4··· 2.3.5.7.8
5	Brocken	5··· 3.4.6.7
6	Inselsberg	6··· 3.5
7	Lichtenberg	7··· 4.5.8.9.10
8	Deister	8··· 4.7.9.10
9	Garssen	9··· 7.8.10.11
10	Falkenberg	10··· 7.8.9.11.12.13.14.15.19
11	Scharnhorst	11··· 9.10.12
12	Breithorn	12··· 10.11.13.15
13	Hauselberg	13··· 10.12.14.15
14	Wulfsode	14··· 10.13.15.16
15	Wilsede	15··· 10.12.13.14.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26
16	Timpenberg	16··· 14.15.17.21
17	Nindorf	17··· 15.16.18.21
18	Lüneburg	18··· 15.17.21
19	Elmhorst	19··· 10.15.20.22
20	Litberg	20··· 15.19.21.23.25
21	Hamburg	21··· 15.16.17.18.20
22	Bullerberg	22··· 15.19.23.24
23	Brüttendorf	23··· 15.20.22.24.25.27
24	Bottel	24··· 15.22.23.26.27
25	Zeven	25··· 15.20.23.26.27.28
26	Steinberg	26··· 15.24.25.27
27	Bremen	27··· 23.24.25.26.27.28
28	Brillit	28··· 25.27.29.30
29	Garlste	29··· 27.28.30.31
30	Bremerlehe	30··· 28.29.31.32
31	Varel	31··· 229.30.32.33
32	Langwarden	32··· 30.31.33
33	Jever	33··· 31.32

A continuació dóna els angles dels 51 triangles i els seus defectes. Reproduïm un tros d'aquesta taula:

300 NACHLASS.

[3.]

[Zusammenstellung der beobachteten Dreiecke und ihrer Widersprüche.]

Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess
1	1 2 3	115° 58′ 47″,435 48 19 36, 048 15 41 35, 239		10.	8 9 10	23° 11′ 52″,206 99 14 52, 452 57 33 19, 258		19	12 13 15	27° 27′ 12″,046 148 10 28, 108 4 22 19, 354	
		179 59 58, 722 −1, 436	0″,158			180 0 3, 916 −0, 329	4″,245			179 59 59, 508 −0, 813	0″,321
2	2 3 4	119 37 29, 268 42 31 25, 667 17 51 7, 707		11	9 10 11	87 32 16, 986 21 0 11, 004 71 27 33, 968		20	13 14 15	34 25 46, 752 109 38 36, 566 35 55 37, 227	
		180 0 2, 642 +1, 294	1, 348			180 0 1, 958 +1, 200	0, 758			180 0 0, 545 −0, 750	1, 295
3	3 4 5	52 29 10, 876 84 40 26, 895 42 50 30, 659		12	10 11 12	22 10 9, 986 64 11 24, 606 93 38 25, 839		21	14 15 16	80 10 54, 559 15 24 48, 626 84 24 15, 820	
		180 0 8, 430 +1, 862	6, 568			180 0 0, 431 −0, 328	0, 759			179 59 59, 005 −1, 344	0, 349
4	3 5 6	86 13 58, 366 53 6 45, 642 40 39 30, 165		13	10 12 13	8 0 47, 395 28 17 42, 299 143 41 29, 140		22	15 16 17	7 35 56, 089 96 37 6, 464 75 46 59, 128	
		180 0 14, 173 −0, 680	14, 853			179 59 58, 834 −1, 368	0, 202			180 0 1, 681 +1, 505	0, 176

Recopilació dels triangles observats i les seves contradiccions.

Ens interessa remarcar el primer, que usaré com exemple, i el quart, que és el famós triangle Hohenhagen, Brocken, Inselsberg.

Nr.	Vèrtex	Angle	Excés
1	1 2 3	115^0 $58'$ $47'', 435$ 48 19 36, 048 15 41 35, 239	
		179 59 58, 722 −1.436	0”.158

Nr.	Vèrtex	Angle	Excés
4	3 5 6	86^0 $13'$ $58'', 366$ 53 6 45, 642 40 39 30, 165	
		180 0 14, 173 −0.680	14”.853

A continuació d'aquesta taula dóna els lligams que provenen de adonar-se de que una mateixa figura geomètrica queda triangulada, en el mapa de la pàgina 20, de dos maneres diferents. Per exemple el quadrilàter $7-9-10-8$ (Lichtenberg-Garssen-Falkenberg-Deister), és unió dels triangles $7-8-9$ i $8-9-10$, però també dels triangles $7-9-10$ i $7-8-10$. Com que Gauss té tots els triangles numerats, aquesta relació l'escriu com $7+10=8+9$.

Obté en total vuit relacions, que són

$$\begin{aligned}
7+10 &= 8+9\\
14 &= 13+16+19\\
15+17 &= 16+20\\
22+25 &= 23+38\\
24+26 &= 25+39\\
30+40 &= 31+35\\
34 &= 32+33+41\\
37+45 &= 34+35+36+42+43+44
\end{aligned}$$

on aquests nombres representen triangles. Concretament són els triangles següents (el primer nombre representa el triangle i els altres tres nombres, entre parèntesi, els vèrtexs que el determinen): $7(7,8,9)$; $8(7,8,10)$; $9(7,9,10)$; $10(8,9,10)$; $13(10,12,13)$; $14(10,12,15)$; $15(10,13,14)$; $16(10,13,15)$; $17(10,14,15)$; $19(12,13,15)$; $20(13,14,15)$; $22(15,16,17)$; $23(15,16,21)$; $24(15,17,18)$; $25(15,17,21)$; $26(15,18,21)$; $30(15,20,23)$; $31(15,20,25)$; $32(15,22,23)$; $33(15,22,24)$; $34(15,23,24)$; $35(15,23,25)$; $36(15,24,26)$; $40(20,23,25)$; $41(22,23,24)$; $42(23,24,27)$; $43(23,25,27)$; $44(24,26,27)$. L'objectiu ara és repartir la diferència entre l'excés calculat a partir de l'àrea dels triangles[20] (quarta columna de la taula que hem reproduït a la pàgina 22) i l'excés que s'obté sumant

[20] D'on surt l'excés de $0.158''$ del primer triangle (i de tots els demés)? Pensem que el càlcul de Gauss podria haver estat el següent. La línia bàsica de la triangulació és el costat $1-2$ (Göttingen-Meridianzeichen) del primer triangle. La longitud d'aquest primer costat s'ha d'aproximar sobre el terreny. A la pàgina 314 del Vol. IX de [?], es diu que aquest costat mesura $5014.24900396\,m$. Si calculem llavors l'àrea del triangle pla que té un costat igual a $5014.24900396\,m$, i els angles corresponents a aquest costat iguals a $115^o\,58'\,47.435''$ i $48^o\,19'\,36.048''$, donats pel propi Gauss a la taula de la pàgina 9, obtenim un àrea igual a $S=31207156,42\,m^2$, i per tant, un defecte igual a $S/R^2=0.1580151975''$, gairabé igual al de $0.158''$ donat per Gauss.

els tres angles. Per exemple, en el primer triangle, la seva àrea dividida per R^2, amb $R = 6382491,371\,m$, dóna $0.158''$ (és el teorema del defecte), mentre que la suma dels tres angles, $179^o\,59'\,58.722''$, no arriba a 180^o, l'hi falten $1.278''$, que sumats a $0.158''$ dóna una "contradicció" de $1.436''$.

Per fer això ha de corregir les direccions dels costats dels angles, però hi ha costats que pertanyen a dos triangles, de manera que les correccions aplicades a un triangle s'han de compensar amb les aplicades a l'altre triangle.

Es pregunta si hi ha una mateixa correcció a aplicar a cadascuna de les tres direccions de cada triangle de manera que els defectes quadrin. A aquestes correccions les denomina $(1), (2), (3), \cdots$, una per a cada triangle, introduint així 51 variables.

Fixem-nos, per exemple, en el primer triangle i diguem α, β, γ, el vertader valor (desconegut) dels angles respectivament en els vèrtexs 1 (Göttingen), 2 (Meridianzeichen) i 3 (Hohenhagen). Siguin $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, els valors trobats realment.

Volem tenir

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o + 0.158'',$$

però tenim

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 180^o - 1.278''.$$

Restant, obtenim

$$(\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) + (\gamma - \gamma_0) = 1.436. \tag{1}$$

Però cada angle el calcula amb l'heliotropi com diferència d'azimuts, de manera que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1.2 - 1.3 \\ \beta_0 &= 2.3 - 2.1 \\ \gamma_0 &= 3.1 - 3.2, \end{aligned}$$

on 1.2 denota[21] l'azimut de la direcció que va de 1 a 2, etc. Si denotem per (1.2) la correcció que se li ha d'aplicar a 1.2 per tenir l'azimut vertader (desconegut), tenim que els valors vertaders dels angles α, β, γ,

[21]Respectem aquí, i en la resta de la secció, la notació de Gauss.

serien

$$\begin{aligned}\alpha &= 1.2 + (1.2) - 1.3 - (1.3)\\ \beta &= 2.3 + (2.3) - 2.1 - (2.1)\\ \gamma &= 3.1 + (3.1) - 3.2 - (3.2),\end{aligned}$$

o, equivalentment,

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + (1.2) - (1.3)\\ \beta &= \beta_0 + (2.3) - (2.1)\\ \gamma &= \gamma_0 + (3.1) - (3.2).\end{aligned}$$

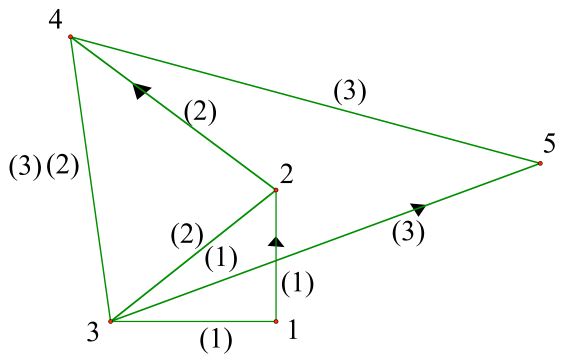
Sumant, i comparant amb (1), obtenim

$$(2)\quad +(1.2) - (2.1) + (2.3) - (3.2) + (3.1) - (1.3) - 1.436 = 0$$

que és la primera equació que, sense explicacions, escriu Gauss, a la pàgina 302 del Vol. IX de [**?**].

La correcció (1.2) que hem d'aplicar a la direcció 1.2 és la correcció corresponent al triangle (1), ja que el costat 1.2 només és costat d'aquest triangle. Tindrem $(1.2) = +(1)$. Però a la direcció 2.3 li hem d'aplicar la correcció (2.3), que depèn de les correccions dels triangles 1 i 2.

Per veure com es compensen aquestes correccions, tindrem en compte l'orientació dels costats induïda per l'orientació de cada triangle, segons el diagrama següent.[22]



[22]Aquest diagrama no apareix en el treball de Gauss, però pensem que explica els càlculs que allà apareixen.

Obté les relacions següents,

$$\begin{array}{lcl} (1.2) & = & -(2.1) = +(1) \\ (1.3) & = & -(3.1) = -(1) \\ (2.3) & = & -(3.2) = +(1) - (2) \\ (2.4) & = & -(4.2) = +(2) \\ (3.4) & = & -(4.3) = -(2) - (3) \\ & \ldots & \end{array}$$

L'equació (2) es transforma en

$$6(1) - 2(2) - 1.436 = 0.$$

Dóna així una llista de 51 equacions, una per a cada triangle, la primera de les quals és la que acabem de trobar (recordem que (1) i (2) són les incògnites). Concretament, Gauss escriu com a primera equació:

$$0 = -0.718 + 3(1) - (2).$$

Però, aquest sistema de 51 equacions té 8 lligadures, les donades a la pàgina 23. Això ho resol aplicant el mètode dels mínims quadrats.

Finalment, després de molts càlculs, resol el sistema i obté totes les correccions (i.j) per aplicar als azimuts, i, en conseqüència, les modificacions que s'han d'aplicar a cada angle (ha eliminat les contradiccions).

Els resultats definitius dels angles de la triangulació de Hannover els recopila finalment en una taula que comença així:

[8.]

Ausgleichungswerthe.

Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten	Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten
	1	115°58′ 47,″885	4,221 7939		7	66° 1′ 19,″251	4,780 5184
1	2	48 19 36, 540	4,141 3507	7	8	66 39 58, 719	4,782 6578
	3	15 41 35, 731	3,700 2059		9	47 18 48, 840	4,686 0435
	2	119 37 28, 959	4,674 4426		7	55 34 15, 737	4,848 5425
2	3	42 31 25, 063	4,565 1592	8	8	89 51 50, 793	4,932 1822
	4	17 51 7, 328	4,221 7939		10	34 34 2, 142	4,686 0435
	3	52 29 10, 229	4,741 3374		7	10 27 3, 514	4,449 6103
3	4	84 40 26, 275	4,840 0752	9	9	146 33 41, 664	4,932 1822
	5	42 50 30, 066	4,674 4426		10	22 59 17, 205	4,782 6579
	3	86 13 58, 691	5,025 2012		8	23 11 52, 074	4,449 6103
4	5	53 6 45, 967	4,929 1248	10	9	99 14 52, 824	4,848 5425
	6	40 39 30, 195	4,840 0752		10	57 33 19, 347	4,780 5184
	4	49 57 23, 197	4,627 7548		9	87 32 16, 652	4,472 3562
5	5	46 6 58, 284	4,601 5606	11	10	21 0 10, 563	4,027 1430
	7	83 55 42, 791	4,741 3374		11	71 27 33, 545	4,449 6103

Destaquem, per la seva importància, el triangle 4, Hohenhagen Brocken, Inselsberg.

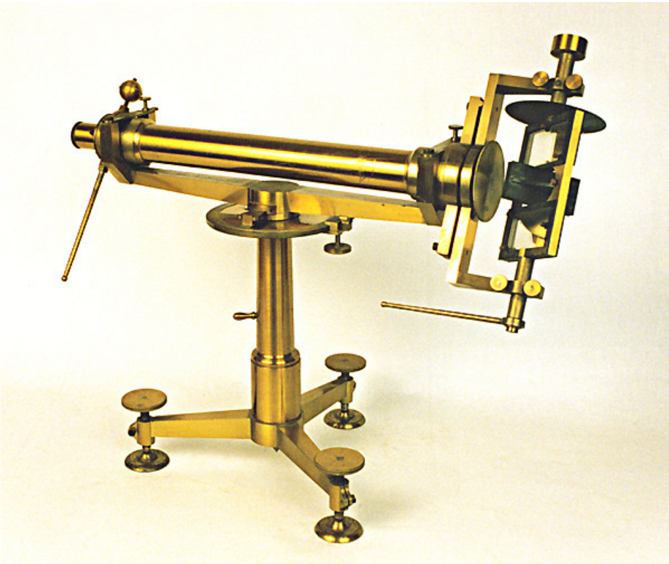
Nr.	Vèrtex	Angles compensats	Log. costats
4	3	$86^0\ 13'\ \ 58'', 691$	5.0252012
	5	$53\ \ \ 6\ \ \ 45, 967$	4.9291248
	6	$40\ \ \ 39\ \ \ 30, 195$	4.8400752

4.1. **Heliotropi.** Es diu que l'invent de l'heliotropi prové de quan Gauss estava a Lüneburg, als voltants del mes d'octubre de 1818, i va veure brillar un raig de sol que provenia reflectit per la finestra de l'església de St. Miquel a Hamburg (a uns 50 km).

St. Michaeliskirche, Hamburg

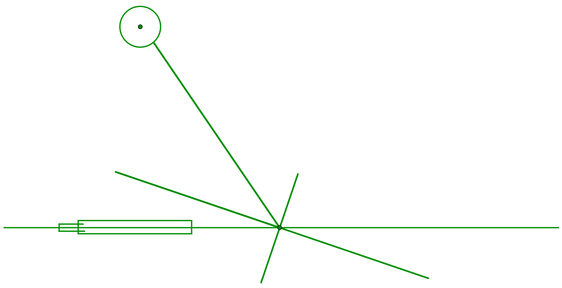
La base de heliotropi és un telescopi muntat en una plataforma graduada (similarment al teodolit) i dos miralls perpendiculars. A la foto següent es veu com els miralls perpendiculars giren solidàriament davant del telescopi, pel qual es veu només un dels miralls. Així, el raig de llum reflectit en el mirall superior surt reflectit en la direcció que es veu mirant pel telescopi en el mirall perpendicular.

El juliol de 1821 Philipp Rumpf, inspector i mecànic de l'observatori de Göttingen, va construir el primer heliotropi.



Heliotropi de F. W. Breithaupt, Kassel, 1835

El paper jugat pels miralls perpendiculars s'explica amb aquest esquema copiat dels Werke, Vol. IX, pag. 464:



Els resultats topogràfics de la regió de Hannover foren copiats per Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt i es varen enviar el 15 de març de 1848 al ministeri de l'interior de Hannover. En ocasió de l'edició dels Werke es varen retornar a Göttingen.

Caixa amb els càlculs de la triangulació de Hannover, Göttingen.

Gauss es preguntava sovint si no hagués fet millor de dedicar-se a altres ocupacions. El seu amic Bessel li suggereix que el treball mecànic que realitza el podrien fer matemàtics de menys nivell. Li contesta en una carta de la que destaquem dos paràgrafs perquè aporten informació sobre el caràcter de Gauss[23]

> [...] *als meus ulls [aquest treball] és més important que aquelles ocupacions que interromp. He vingut fins aquí per ser amo del meu temps. L'haig de dividir entre ensenyar (a la qual cosa sempre he tingut una antipatia, que augmenta, però no està causada, pel sentiment de perdre el temps)...*
>
> [...] *No li haig d'amagar que és una qüestió que equilibra la desigualtat que existeix entre el meu salari - el mateix*

[23][?], pàg. 120.

> *el* 1824 *que el fixat el* 1810 *per Jérôme - i les necessitats d'una gran família.*

4.2. **Representacions conformes.** Aquest tema va interessar Gauss des de molt aviat.

Carta a Schumacher $(5-07-1816)$[24]

> *He pensat un problema interessant* [per posar en una competició]*: en el cas general, projectar (aplicar) una superfície donada sobre una altra, també donada, de manera que la imatge i la original siguin infinitesimalment similars. Un cas especial esdevé quan la primera superfície és una esfera i la segona un pla. Llavors les projeccions estereogràfica i de Mercator són solucions particulars.*

Aquesta pregunta es publica el 1822 a la Real Societat Cientifica de Copenhagen, a instàncies de Schumacher. Gauss mateix la contesta el $11-12-1822$, però no es publica fins el 1825 a Astronomische Abhandlungen, Altona, revista editada per Schumacher, amb el títol:

> *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den Kleinsten Theilen ähnlich wird.*[25]

El títol acaba amb un afegitó que diu: *Ab his via sternitur ad maiora*[26], imitació de la frase de Newton a *De quadratura curvarum*, que escriu *et his principiis via ad maiora*, i que fou el preludi, ni més ni menys, que del càlcul de fluxions.

Fem un petit resum del contingut de l'article.

Imaginem, per exemple, que volem transformar conformement una esfera de radi a en el pla (localment). Escrivim la mètrica de l'esfera

$$ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2,$$

on u, t són la colatitud i la longitud respectivament, i apliquem un mètode general (és a dir, que servirà no únicament per aplicar una

[24]La mateixa carta esmentada a la pàgina 18.

[25]Una solució general al problema d'aplicar una superfície donada sobre una altra superfície de manera que la imatge i la superfície aplicada siguin infinitesimalment similars.

[26]Camí preparat per a coses més grans.

esfera sobre un pla, sinó també per aplicar una superfície donada sobre qualsevol altra també donada) que consisteix en: 1. Igualar a zero la mètrica.[27] 2. Aïllar un diferencial. 3. Integrar.

Pas 1*, igualar a zero.*

$$ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2 = 0.$$

Pas 2*, aïllar.*

$$dt = \pm i \frac{du}{\sin u}.$$

Pas 3*, integrar.*

$$t \pm i \log \cot \frac{u}{2} = constant.$$

Ara només hem d'agafar noves coordenades p, q definides per

$$p = t; \ q = \log \cot \frac{u}{2},$$

de manera que l'anterior equació s'escriu

$$p \pm iq = constant.$$

D'aquesta manera tenim que

$$ds^2 = a^2 \sin^2 u (dp^2 + dq^2).$$

És a dir, en aquestes noves coordenades p, q la mètrica de l'esfera és igual a la mètrica euclidiana $dp^2 + dq^2$ multiplicada per una funció. Això implica clarament que els angles es conserven. D'aquestes coordenades p, q sobre l'esfera se'n diuen *isotermals.*

L'aplicació conforme és doncs

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ (t, u) & \mapsto & t + i \log \cot \frac{u}{2} \end{array} \tag{3}$$

[27]Si pensem el ds^2 com una longitud, no sembla massa natural igualar-lo a zero. Però si ho pensem com forma quadràtica, cosa que Gauss podia fer sense problemes ja que va ser ell en el *Disqisitiones Arithmeticae* qui va introduir el llenguatge de les formes quadràtiques i el problema de la seva classificació, llavors és natural igualar-la a zero, ja que el que estem fent és buscar les arrels d'un polinomi quadràtic.

El què hem fet fins aquí per tal d'aplicar l'esfera sobre el pla, ho fem ara per a qualsevol superfície (igualem a zero la mètrica, aïllem i integrem[28]), de manera que sabrem aplicar (localment) qualsevol superfície sobre el pla.

Si fem això per a dues superfícies qualssevol S_1 i S_2, és a dir, construïm dues aplicacions conformes $\varphi_i : S_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, entre cadascuna d'elles i el pla, tindrem una aplicació conforme entre elles considerant, simplement, l'aplicació $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$.

Però podem fer una mica més, i considerar el diagrama següent

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{C} \\ & & \downarrow f \\ S_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{C} \end{array} \tag{4}$$

on f és qualsevol aplicació holomorfa (i que, per tant, conserva angles) Obtenim així totes les aplicacions conformes, $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$, insistim que localment, entre dues superfícies qualssevol.

Aplicant aquesta tècnica Gauss troba totes les aplicacions conformes entre un el·lipsoide i una esfera.

Denota per T i $90 - U$ la longitud i la latitud a l'esfera, i per t i $90 - \omega$ la longitud i la latitud de l'el·lipsoide.

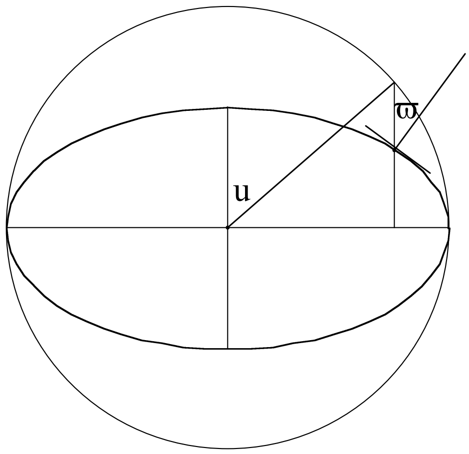
Però s'ha d'anar en compte perquè ω és la colatitud normal, és a dir, l'angle entre la normal a l'el·lipsoide i l'eix polar. Concretament, si l'el·lipsoide s'obté per revolució de l'el·lipse

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u, \end{aligned}$$

la relació entre u i ω està donada per

$$\tan \omega = \frac{b}{a} \tan u.$$

[28]Estem amagant un petit problema a l'hora d'integrar, ja que necessitem que una 1-forma del tipus $dt + f(t, u)du$ admeti factor integrant. L'existència d'un factor integrant local per a una 1-forma del tipus $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ quan P i Q prenen valors complexos depèn d'un sistema d'equacions en derivades parcials el·líptic. Vegeu [?]. En el cas en què aplicàvem l'esfera sobre el pla aquest problema no apareixia, perquè la funció $f(t, u)$ només depèn, en aquell cas, de u. Agraïm a David Marín l'ajuda que ens ha prestat en aquest tema.



Això complica una mica l'expressió (3), però finalment la relació entre les coordenades de l'esfera T, U i les de l'el·lipsoide t, ω, donada pel diagrama (4), és

$$(5)\ \ T + i \log \cot \frac{U}{2} = f\left(t + i \log\left(\cot \frac{\omega}{2} \cdot \left(\frac{1 - e\cos\omega}{1 + e\cos\omega}\right)^{\frac{e}{2}}\right)\right).$$

És a dir, el punt de coordenades t, ω sobre l'el·lpsoide va a parar al punt de coordenades T, U sobre l'esfera, essent f una aplicació holomorfa qualsevol, que Gauss agafarà de diverses maneres per recuperar aplicacions conformes ja conegudes, com ara la de Mercator, o per ajustar el problema a les seves necessitats, com veurem més endavant que fa amb la regió de Hannover.

4.3. **Coordenades isotermals.** L'endemà de respondre la seva pròpia pregunta sobre transformacions conformes (pregunta que hem comentat a la pàgina 30), és a dir, el $12 - 12 - 1822$, escriu a les seves notes privades, que ell mateix titula *L'estat de les meves investigacions sobre la transformació de superfícies,* la següent fórmula per a la curvatura:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

on $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$ és la mètrica de la superfície. Curiosament, aquesta fórmula tant important, i que implica el teorema egregi, no apareix (explícitament) en el *Disquisicions*.[29]

Però Gauss s'adona de la seva importància i escriu: *La curvatura pren el mateix valor sota totes les transformacions de la superfície que deixen l'element de línia* $m(du^2 + dv^2)$ *invariant.*

De fet, la demostració de Liouville del teorema egregi, vegeu per exemple [**?**], pàg. 742, passa per demostrar l'existència de coordenades isotermals, potser el punt que Gauss no tenia prou clar el 1822.

4.4. **Geodèsia avançada.** Els propòsits de Gauss amb la frase *Ab his via sternitur ad maiora*, que hem comentat a la pàgina 30, finalment es compleixen, i publica a *Abhanlungen der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* dos treballs, el primer el 1844 i el segon el 1847, titulats respectivament *Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie, Erste Abhandlung i Zweite Abhandlung.*[30]

En el primer estudia amb tot detall una transformació conforme entre l'el·lipsoide terrestre i una esfera que l'aproxima. En el segon estudia trigonometria sobre un el·lipsoide.

Comentem breument només el primer.

Geodèsia avançada I.

Surt de la fórmula (5) tal com si l'acabés de trobar en aquell moment, i no 22 anys enrera. Ja hem comentat que a l'hora de construir aplicacions conformes hi ha una aplicació holomorfa involucrada que pot elegir arbitràriament. En aquest article en pren una que, podríem dir, és la més senzilla possible. Concretament pren

$$f(z) = \alpha z - i \log k, \tag{6}$$

on α, k són constants a determinar.

Així com les dimensions de l'el·lipsoide terrestre estan donades, el radi A de l'esfera que aproxima "bé" aquest el·lipsoide prop de Hannover, no ho està. De manera que té tres constants a determinar, α, k i A.

[29]En aquest treball parlarem del *Disquisicions* per referir-nos al *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, i no, com és habitual, al *Disquisitiones Arithmeticae.*

[30]Investigacions sobre temes d'alta geodèsia, primer treball i segon treball.

Imposa llavors que l'aplicació conforme sigui isometria[31] al llarg del paral·lel mitjà de Hannover, que té una latitud $Q = 52° \, 40' \, 0''$.

A partir de les dades de Bessel (Astronomische Nachrichten, Vol. 19, pàg. 116),

$$\begin{aligned} \log a &= 6.5148235337 \quad \text{Toise} \\ \log e &= 8.9122052079 \end{aligned}$$

on a és el semieix major de l'el·lipsoide terrestre i e la seva excentricitat, obté

$$\begin{aligned} P &= 52° \, 42' \, 2.53251'' \\ \log \frac{1}{k} &= 0.0016708804 \\ \log \alpha &= 0.0001966553 \\ \log A &= 6.5152074703 \quad \text{Toise} \end{aligned}$$

on P correspon a la latitud de l'el·lipsoide que s'aplica sobre la latitud Q de l'esfera.

És remarcable la manera de manipular els logaritmes, donant importància a les xifres significatives, de manera que el logaritme de l'excentricitat e, que és un nombre menor que 1, l'escriu com 8.9122052079. De fet, hauria de posar -1.0877947920.

Observem que Gauss encara usa el Toise com unitat de mesura.[32] De les relacions que dóna Gauss a l'article que estem comentant, [?], vol. IV, pàg. 268, es dedueix que

$$1 \text{ Toise} = 1.94886953272 \, m.$$

Observem també que, en contra del que podria semblar, $a < A$, (tendim a pensar que una esfera que aproxima un el·lipsoide té un radi mitjà entre els semieixos major i menor). El dibuix de la pàgina 36

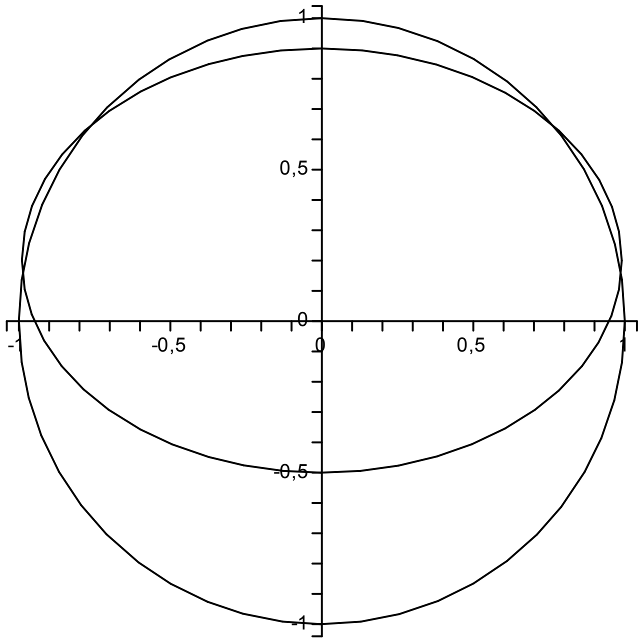
---

[31]Sabem que no pot ser isometria sobre cap obert, per petit que sigui, però sí que ho pot ser sobre una corba.

[32]Es coneix com Toise del Gran Chatelet una mesura de longitud establerta el 1668 basada, sembla, en la meitat de l'amplada de la porta interior d'entrada al Louvre. El 1766 és reemplaçat pel Toise de l'Acadèmia, aproximadament 1.949 m actuals, també anomenat Toise del Perú, ja que es va usar en la mesura del meridià en una expedició de l'Acadèmia a l'Equador. El prototip era una barra de ferro feta per La Condamine el 1735.

mostra, en dimensió dos, un exemple d'aquesta situació: el radi de la circumferència és una mica més gran que el semieix major de l'el·lipse.

Al final de l'article Gauss adjunta una taula on calcula l'aplicació (5), amb f donada per l'expressió (6) amb α i k trobats a la pàgina 35, minut a minut, sis graus amunt i sis graus avall de Hannover, és a dir, entre 46^0 i 58^o, donant, per a cada entrada el factor conforme corresponent. Una feinada increïble!



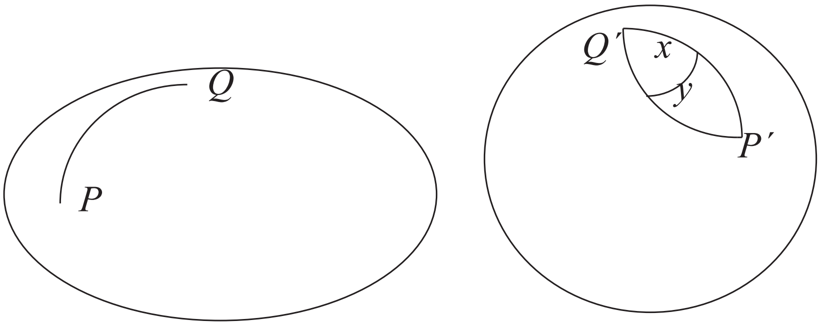
També volem remarcar, d'aquest article, el següent resultat:

$$d(P,Q) = \frac{d(P',Q')}{\sqrt{m_P m_Q}},$$

on $d(P,Q)$ és la distància sobre l'el·lipsoide entre els punts P,Q, i $d(P',Q')$ és la distància sobre l'esfera entre els punts P',Q', imatges dels punts P i Q per l'aplicació conforme. El denominador és la mitjana geomètrica dels factors conformes a P i Q respectivament.

La idea és parametritzar la corba imatge de la geodèsica que uneix P i Q usant coordenades abciso-geodèsiques ortogonals, prenent com eix de les x el cercle màxim sobre l'esfera que uneix P' i Q', i com y la longitud de la geodèsica ortogonal corresponent. Aquesta parametrització la passa a una parametrització de la geodèsica inicial sobre l'el·lipsoide a través de l'aplicació conforme. Ara imposa, amb les tècniques clàssiques del càlcul de variacions, que aquesta corba és efectivament geodèsica.

Aquest resultat és local, i a la demostració s'usen desenvolupaments en serie dels que es menyspreen el termes a partir d'un cert ordre.



Observem que m_P és el factor de dilatació de longituds en el punt P (i m_Q en el punt Q), de manera que és raonable que la dilatació de la distància entre P i Q (punts relativament pròxims) vingui controlada per una certa mitjana (concretament la mitjana geomètrica) dels factors de dilatació.

La feinada és bastant decebedora, ja que els punts més allunyats del paral·lel 52, on m és més gran, i on hi ha, doncs, més diferència entre pensar en l'esfera o en l'el·lipsoide, es té $m = 1.000002418749$.

5. Geometria diferencial

L'estudi de l'analogia de Lambert que hem fet a la secció 2.2 ens porta, de manera natural, a la hipòtesi següent.

Conjectura

Gauss podria haver estès l'analogia de Lambert al terreny de la geometria diferencial, amb la idea de trobar una superfície que representés l'esfera imaginària.

Aquesta esfera tindria curvatura

$$1/(Ri)^2 = -1/R^2,$$

i, per tant, el que s'ha de trobar és una superfície de curvatura constant negativa.

En relació a aquesta conjectura ens plantegem dues inquietants preguntes, de les que potser no sabrem mai la resposta:

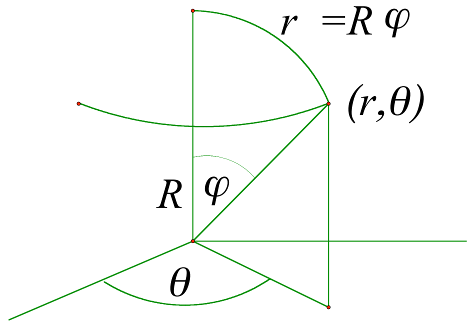
Pregunta 1. Podria ser aquest el *camí diferent* emprés per Gauss per demostrar el cinquè postulat, i al qual es refereix en la seva carta a Schumacher de 1846?

Pregunta 2. Va ser escrit el *Disquisicions* [almenys en part] amb aquesta idea?

5.1. **L'analogia diferenciable.** Recordem que l'element de longitud de l'esfera de radi R està donat per

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2,$$

on r, θ són coordenades polars sobre l'esfera. De fet, θ és la longitud i $r = R\varphi$, on φ és la colatitud.



Quan parlem d'estendre l'analogia de Lambert a la geometria diferencial ens referim a que és natural preguntar-se per l'existència d'una superfície amb element de longitud

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

obtingut a partit del ds^2 de l'esfera de radi R, tot canviant R per Ri.

6. Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Ja hem vist com Gauss, motivat per problemes geodèsics, havia estudiat les representacions conformes entre superfícies, i molt especialment les representacions conformes entre una esfera i l'el·lipsoide terrestre o entre aquest el·lipsoide i el pla. Durant aquest període, que va aproximadament de 1812 a 1826, estudia també les geodèsiques de l'el·lipsoide. Vegeu *Erdellipsoid und geodätische Linie*, a la pàgina 65 del Vol. IX de [**?**].

Tot això el motiva a estudiar superfícies des d'un punt de vista més general.

En una carta a Schumacher (21 – 11 – 1825) diu

> *Recentment he reprès part de les meves investigacions sobre superfícies corbes, que hauran de formar la base del meu projectat assaig en geodèsia avançada.*
> [...] *Desafortunadament, em trobo que haig d'anar molt enrera en l'exposició perquè inclús el que és conegut,*[33] *ha de ser desenvolupat d'una manera diferent, adequada a les noves investigacions.*
> [...] *Molts d'ells pertanyen a la Geometria situs, un camp quasi completament inexplorat fins ara.*

A partir d'aquí redacta una primera versió que no arriba a publicar. La podeu trobar breument comentada a [**?**], i completa a [**?**].

La segona versió es publica a *Commentationes societatis regiae scientaiarum Gottingensis recentioris classis mathematicae,* Vol VI, pag. 99 – 146, 1828, amb data de rebuda el 8 d'octubre 1827, [**?**].

Esquemàticament, diguem que el *Disquisicions* té (només) unes 40 pàgines, i està dividit en 29 seccions. Conté cinc nous (?) conceptes, i uns 10 teoremes. Només cita *"l'ill. Euler"* (§8), i el *"clar. Legendre"* (§27). L'única superfície que apareix és l'esfera (tot i que ja es coneixien superfícies tant interessants com l'helicoide i la catenoide, atribuïdes a Euler i Meusnier, respectivament). També es parla, a la penúltima secció, de "la superfície de la terra".

Alguns comentaris del propi Gauss fan pensar que el *Disquisicions* és un projecte inacabat. Per exemple,

> §6. *Hem de reservar per a una altra ocasió una exposició més estesa d'aquestes figures...*
>
> §13. *L'estudi d'aquestes propietats obra a la geometria un camp nou i fèrtil...*
>
> §26. *La consideració del triangle rectilini de costats iguals és d'una gran utilitat...*

Nosaltres pensem que és un projecte inacabat, sobre tot, perquè no troba l'esfera imaginària.

Els cinc nous conceptes a què fèiem referència, junt amb les seccions en que apareixen, són:

[33] Un estudi de la teoria de superfícies abans de Gauss el podeu trobar a [**?**].

§6. Aplicació de Gauss.
§6. Curvatura de Gauss.
§6. Curvatura total.
§18. Transport paral·lel (variació angular).
§19. Coordenades abciso-geodèsiques ortogonals.

El nom "abciso-geodèsiques" és de Gauss, però no en el *Disquisicions*, vegeu [**?**].

I alguns dels resultats més importants són:

§7. $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. 1$r$ càlcul de la curvatura.
§8. $k = k_1 \cdot k_2$. 2n càlcul de la curvatura.
§12. Teorema Egregi. 3r càlcul de la curvatura.
§15. Lema de Gauss.
§19. $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. 4$t$ càlcul de la curvatura.
§20. Teorema del defecte.[34]
§27. $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$.

A la secció següent els comentem tots ells amb una mica més de detall.[35]

7. Primeres seccions del Disquisicions

§2. *Trigonometria esfèrica.*

Per a nosaltres aquesta secció és fonamental,[36] perquè dóna suport a la nostra conjectura. En efecte, Gauss reconstrueix la geometria de l'esfera per un camí analític, sense recorre a dibuixos o figures, ja que aquest és l'únic camí generalitzable posteriorment a l'esfera imaginària, i l'única manera de presentar la geometria hiperbòlica de manera consistent i inatacable.

El punt central de la secció és el següent teorema que engloba totes les fórmules de la trigonometria esfèrica.

Teorema. *Si L, L', L'', L''' denoten quatre punts de l'esfera, i A denota l'angle entre els arcs LL', $L''L'''$ en el seu punt d'intersecció,*

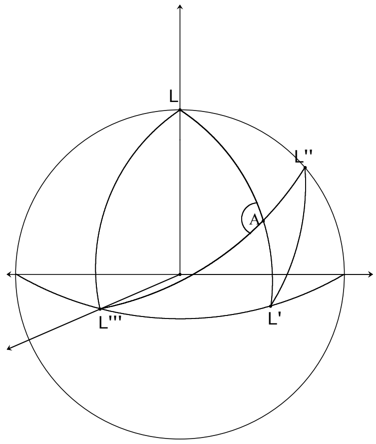
[34]Avui en dia, el teorema del defecte és un cas particular del teorema de Gauss-Bonnet.

[35]Podeu consultar també l'excel·lent conferència de Pere Pascual [**?**].

[36]Spivak, a [**?**], diu: *Aquesta secció es pot ometre completament.* La justificació de Spivak és clara: cap dels resultats de la secció §2 és usada més endavant. Però nosaltres tenim un altra punt de vista. De fet, A és l'angle d'inclinació d'una geodèsica, un concepte que serà molt important en el *Disquisicions*, vegeu la secció 9.

tindrem

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A.$$

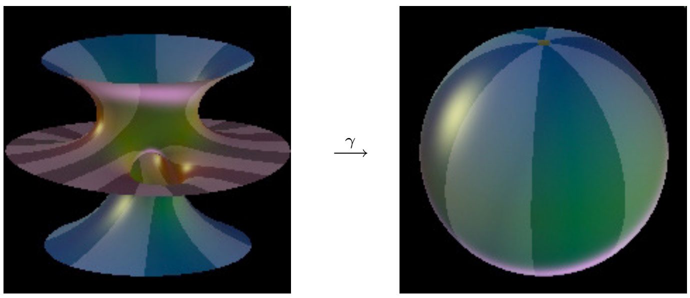


§6. *Curvatura.*

Defineix l'aplicació de Gauss entre la superfície S i l'esfera unitat S^2,

$$\gamma : S \to S^2$$

que associa a cada punt de la superfície el seu vector normal, i s'estén en consideracions sobre el signe i la multiplicitat de la regió d'esfera coberta per aquesta aplicació.[37]



A partir de l'aplicació de Gauss γ defineix *curvatura total* o integral d'una part de la superfície com l'àrea de la imatge esfèrica d'aquesta

[37]Per il·lustrar l'aplicació de Gauss hem agafat aquest bonic dibuix de `http://www.msri.org/about/sgp/jim/geom/surface/maps/gauss/main.html`. Aquesta superfície té tres finals, o parts, on va cap a l'infinit (a dalt, al mig i a baix) on l'aplicació de Gauss tendeix a ser vertical. La part del mig no és pas plana, sinó que l'aplicació de Gauss té multiplicitat tres.

part de superfície. I defineix *mesura de curvatura* com el límit

$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}.$$

Observem que, en el llenguatge propi de l'anàlisi, el que està dient és que la curvatura és el Jacobià de l'aplicació de Gauss.

§7. *Càlcul de la curvatura.*

Calcula la curvatura d'una superfície donada com a gràfica d'una funció. Si la superfície és $z = z(x, y)$, denota les derivades parcials primeres i segones per

$$\begin{aligned} t &= z_x, \quad u = z_y, \\ T &= z_{xx}, \quad U = z_{xy}, \quad V = z_{yy}, \end{aligned}$$

i obté l'expressió

$$k = \frac{TV - UU}{(1 + tt + uu)^2}$$

que, en llenguatge modern, diu que

$$k = \frac{\det \Phi_2}{\det T_2},$$

on T_2 és la primera forma fonamental, i Φ_2 és la segona forma fonamental.

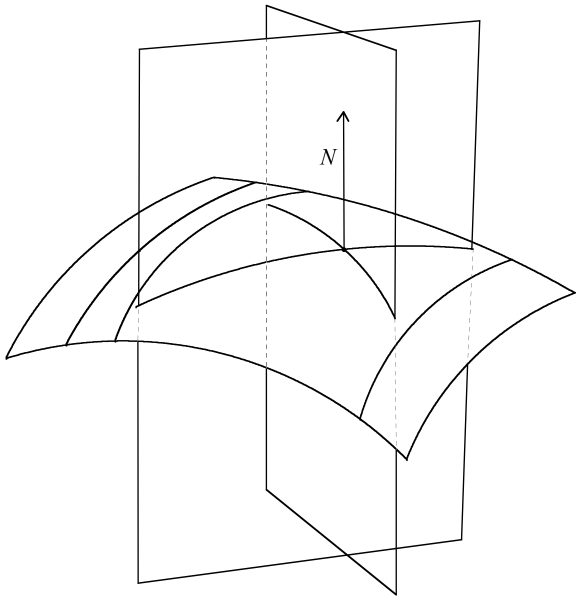
§8. *Curvatura d'Euler.*

Demostra el resultat següent.

Teorema. *La mesura de curvatura en qualsevol punt de la superfície és igual a una fracció que té per numerador la unitat, i per denominador el producte dels dos radis de curvatura extrems de les seccions per plans normals.*

És a dir, denotant per k la curvatura de Gauss, i per k_1 i k_2 les curvatures principals, tenim

$$k = k_1 \cdot k_2.$$



Just abans diu: *Aquestes conclusions contenen quasi tot el que l'il·lustre Euler fou el primer de provar sobre curvatura de superfícies corbes.*

Però en canvi, no fa cap referència a Olinde Rodrigues, (1794−1851), qui, en el treball [**?**], ja parlava del que ara coneixem com *aplicació de Gauss* i *curvatura de Gauss*, i demostrava la fórmula $k = k_1 \cdot k_2$.

De fet, anava encara més lluny, ja que provava el que avui es coneix com teorema d'Olinde Rodrigues, a l'estudiar la variació de la normal al llarg de les línies de curvatura. Concretament demostrava que

$$N'(t) = \lambda x'(t),$$

és a dir, les direccions de curvatura són els vectors propis de l'aplicació de Weingarten.

Tot això passava deu anys abans de la primera versió no publicada del *Disquisicions* i tretze abans de la publicació de la segona versió. Per tant, la prioritat en la publicació se li hauria de reconèixer més universalment.

No obstant, a través de notes no publicades de Gauss, sembla que Gauss coneixia els 3 primers punts abans de 1813. Però el teorema d'Olinde no apareix al *Disqisicions.*

§11. *Teorema Egregi.*

En aquesta secció demostra l'extraordinària fórmula

$$\begin{aligned} 4 \quad & (EG-FF)^2\, k = E(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + (\frac{dG}{dp})^2) \\ + \quad & F(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}) \\ + \quad & G(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + (\frac{dE}{dq})^2) \\ - \quad & 2(EG-FF)(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp\cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}). \end{aligned}$$

on k és la curvatura i E, F, G són els coeficients de la mètrica, que s'expressen en funció de coordenades arbitràries p, q.

La manipulació de les equacions, genial, podria potser explicar-se pel fet de que Gauss coneixia ja aquesta fórmula per a coordenades isotermals i per a coordenades polars (última fórmula de la versió de 1825). Però la demostració no és, almenys no ho sembla, un simple canvi de coordenades.

§12. *Teorema Egregi.*

Com a conseqüència immediata de l'anterior fórmula, diu: *Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium*

THEOREMA *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.*

Que una superfície es pugui desenvolupar (explicatur) sobre una altra significa que hi ha una isometria entre elles.

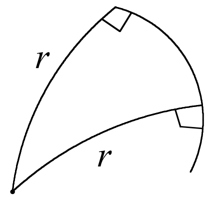
Fins el moment s'havien estudiat superfícies desenvolupables sobre el pla, no superfícies desenvolupables l'una sobre l'altra.

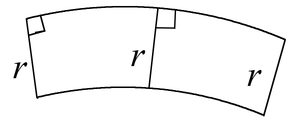
Com un corol·lari del teorema egregi es dedueix que si una superfície és desenvolupable sobre el pla, llavors té curvatura zero. Euler havia donat una prova d'aquest resultat, vegeu [**?**], però segons Gauss, la seva prova no era satisfactòria. Justament és en aquest article d'Euler on s'introdueix el concepte de superfície desenvolupable. Vegeu [**?**].

§15. *Lema de Gauss.*

Demostra el resultat següent.

TEOREMA. *Si sobre una superfície corba es dibuixen des del mateix punt inicial un nombre infinit de línies més curtes d'igual longitud, les* *línies que uneixen les seves extremitats seran normals a cadascuna de les línies.*





Un cop demostrat comenta: *Hem pensat*[38] *que val la pena deduir aquest teorema a partir de la propietat fonamental de les línies més curtes: però la veritat del teorema es fa evident sense cap càlcul mitjançant el següent raonament...*

A la secció §16 generalitza l'anterior resultat al cas en què les geodèsiques d'igual longitud surten d'una línia qualsevol, i no d'un punt com abans.

I diu: *Finalment, advertim que també aquí com precedentment, consideracions geomètriques poden prendre el lloc de l'anàlisi, les quals, no obstant, no ens prendrem el temps de considerar aquí, ja que són suficientment òbvies.*

8. Angle d'inclinació en el pla

Abans de continuar amb el repàs als articles del *Disquisicions*, veiem què entenem per *angle d'inclinació*.

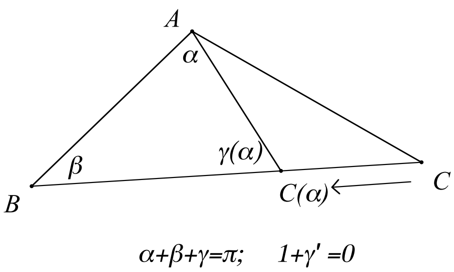
Comencem amb una observació trivial sobre triangles plans.

Els angles α, β, γ d'un triangle $\triangle ABC$ compleixen

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Movem ara el vèrtex C sobre el costat BC, en direcció a B, de manera que l'angle β es manté constant i l'angle γ passa a ser funció de l'angle α.

[38]Un comentari que torna a revelar l'interès de Gauss en trobar demostracions analítiques en lloc de les geomètriques, malgrat que aquestes siguin evidents. Aquesta actitud s'entén si acceptem la hipòtesi de que el *Disquisicions* és part de la seva investigació sobre el cinquè postulat i desenvolupa el programa analític de Lambert, vegeu [**?**].



Tindrem doncs

$$\alpha + \beta + \gamma(\alpha) = \pi,$$

que derivant respecte de α, ens dóna,

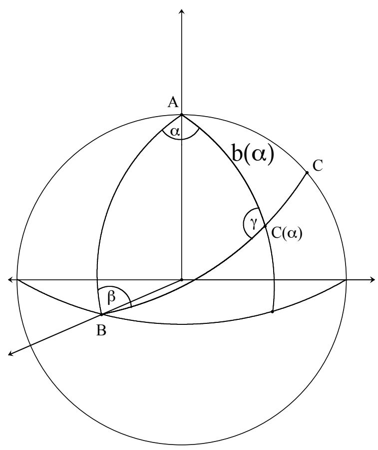
$$\boxed{\frac{d\gamma(\alpha)}{d\alpha} = -1}$$

L'angle $\gamma(\alpha)$ es diu *angle d'inclinació*, i nosaltres ens interessem per la variació d'aquest angle, és a dir, per la seva derivada.

Observem la condició inicial $\gamma(0) = \pi - \beta$, que més endavant utilitzarem.

9. Angle d'inclinació a l'esfera

Repetim la mateixa idea per a triangles esfèrics.



Un càlcul simple, a partir de les fórmules de la trigonometria esfèrica, concretament derivant la fórmula[39]

[39] Vegeu [?].

$$\cos\gamma(\alpha) = -\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\alpha\ \cos\frac{c}{R}$$

on c és la longitud del costat AB i R és el radi de l'esfera, obtenim

$$\boxed{\frac{d\gamma(\alpha)}{d\alpha} = -\cos\frac{b(\alpha)}{R}}$$

on $b(\alpha)$ és la longitud del costat oposat a l'angle B.

Usarem aquesta derivada com una manera alternativa per calcular l'àrea d'un triangle sobre l'esfera.

Recordem que l'element d'àrea de l'esfera està donat, en coordenades polars geodèsiques, per

$$d\sigma = R\sin\frac{r}{R}drd\theta.$$

Podem descriure el triangle $\triangle ABC$ posant coordenades polars amb origen en A. Llavors els punts del triangle estan descrits per

$$0 \le \theta \le \alpha, \quad 0 \le r \le r(\theta),$$

on $r(\theta)$ és la longitud del meridià que forma un angle θ amb AB, entre el punt A i el costat BC. Per tant, tenim

$$\begin{aligned}\text{Àrea del triangle} &= \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\ &= R^2\alpha - \int_0^\alpha R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}d\theta.\end{aligned}$$

Utilitzant ara la fórmula de la derivada de l'angle d'inclinació, i tenint en compte la condició inicial $\gamma(0) = \pi - \beta$, tenim

$$\begin{aligned}\text{Àrea del triangle} &= R^2\alpha + \int_0^\alpha R^2\,\frac{d\gamma}{d\theta}\,d\theta \\ &= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha) - \gamma(0)) \\ &= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2 \cdot \text{Excés}.\end{aligned}$$

Resumint, el coneixement de la derivada de l'angle d'inclinació ens ha permès calcular l'àrea d'un triangle. Podem fer el mateix sobre una superfície qualsevol? De fet, aquest càlcul és el nucli central de la segona part del *Disquisicions*, i el punt clau per demostrar el teorema del defecte. Podríem dir que la fórmula de la derivada de l'angle d'inclinació és la versió infinitesimal del teorema del defecte.

10. Últimes seccions del Disquisicions

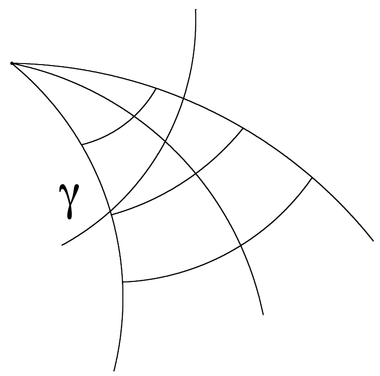
Deixem enrera el teorema egregi i encarem el teorema del defecte.

Per a això, estudiarem l'angle d'inclinació sobre una superfície qualsevol. Escrivim, primer, la mètrica en coordenades polars:[40]

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta) d\theta^2. \tag{7}$$

Suposem llavors que una geodèsica talla transversalment les línies coordenades radials, és a dir, les donades per l'equació θ =constant. D'aquesta manera podem suposar que la geodèsica té equació del tipus $r = r(\theta)$. Denotem per $\gamma(\theta_0)$ l'angle entre la geodèsica $r = r(\theta)$ i la línia coordenada $\theta = \theta_0$ en el seu punt d'intersecció $(\theta_0, r(\theta_0))$.

D'aquest angle se'n diu *angle d'inclinació*, ja que aquesta construcció que acabem de fer coincideix amb la construcció de l'angle d'inclinació en el casos pla i esfèric considerats a les seccions 8 i 9.



Feta aquesta introducció tornem al *Disquisicions*.

§18. *Geodèsiques i angle d'inclinació.* En aquesta secció obté l'equació diferencial de les geodèsiques en funció de l'angle d'inclinació. Concretament, si denotem per γ l'angle d'inclinació de la geodèsica

[40]El mateix raonament serveix per a coordenades abciso-geodèsiques ortogonals. De fet, així és com ho fa Gauss. Recordem que les coordenades polars són un cas particular d'aquest tipus de coordenades

respecte de les línies coordenades $q = constant$, llavors es compleix que

$$\sqrt{EG - FF} \cdot d\gamma = \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq$$

És remarcable que comenta que d'aquí es dedueix una equació diferencial de segon ordre per a les geodèsiques, justament la que habitualment es dóna en l'actualitat en molts llibres de text, però afegeix: "*seria més complicada i menys útil [...]*"

§19. *Derivada de l'angle d'inclinació.*

L'anterior fórmula, per al cas particular de coordenades abciso-geodèsiques ortogonals, és a dir, $E = 1, F = 0$, ens diu que

$$\frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G(r, \theta)}. \tag{8}$$

Observem que en el cas del pla i de l'esfera, tenim respectivament

$$G = r^2, \quad \text{i} \quad G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R},$$

i per tant

$$\frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} = -1, \quad \text{i} \quad \frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} = -\cos \frac{r}{R},$$

d'acord amb els resultats obtinguts anteriorment a les seccions 8 i 9.

En aquesta mateixa secció també s'adona que la fórmula general de la curvatura en funció dels coeficients de la mètrica, la impressionant fórmula de la pàgina 44, quan la mètrica està donada en la forma (7), s'escriu simplement com[41]

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

on, tant k com G, són funcions de r i θ.

Acaba la secció remarcant que no tota funció G pot aparèixer a l'expressió de la mètrica (7). Demostra que ha de ser

$$G(0, \theta) = 0, \quad \text{i} \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(0, \theta) = 1.$$

[41]Aquesta és la última fórmula del *Disquisicions* de 1825, però no la deduïa pas de la fórmula general de la pàgina 44, que encara no posseïa.

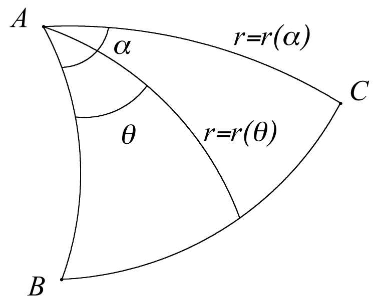
§20. *Teorema del defecte.*

Integrem la fórmula

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

sobre el triangle de la figura, descrit per les equacions

$$0 \le \theta \le \alpha, \quad 0 \le r \le r(\theta).$$



Per a un valor fixat de θ integrem respecte de r entre 0 i $r(\theta)$. Obtenim

$$\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = \left[-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right]_0^{r(\theta)} = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}.$$

Integrant ara respecte de θ, entre 0 i α, obtenim

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha}\frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta,$$

que, per (8) i la condició $\gamma(0) = \pi - \beta$, ens dóna,

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\; d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Equivalentment, com que l'element d'àrea sobre la superfície està donat per $d\sigma = \sqrt{G}dr\; d\theta$, tenim

$$\int_T k\, d\sigma = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi,$$

on T és el triangle anterior. Això és exactament el teorema del defecte, que podem enunciar simplement dient: *La curvatura total d'un triangle (que és igual a l'àrea de la seva imatge esfèrica per l'aplicació de Gauss) és igual al seu defecte.*

Gauss l'enuncia així:

TEOREMA DEL DEFECTE. *L'excés sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície còncavo-còncava, o el dèficit sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície còncavo-convexa, està mesurat per l'àrea de la part de l'esfera que correspon, a través de les direccions de les normals, a aquest triangle, si la superfície total de l'esfera és igual a* 720 *graus.*

Remarquem que l'ordre de la demostració ha estat que a partir del teorema egregi i un parell d'integrals hem obtingut el teorema del defecte. Però l'ordre del descobriment, és a dir, el seguit a la versió no publicada de 1825, va ser l'invers, és a dir, es demostra primer el teorema del defecte, i amb un parell de derivades, el teorema egregi, vegeu [**?**].

El problema és que la demostració del teorema del defecte de 1825 no el satisfà, i comenta:

> *Aquesta prova necessitarà explicació i algún canvi en la seva forma.*

Això el porta a reescriure-ho tot i a la versió del 1827.

§24. *Àrea d'un triangle*

En aquesta secció dóna una fórmula aproximada per a l'àrea d'un triangle rectangle sobre una superfície. Aquesta fórmula la generalitza a triangles arbitraris a la secció següent.

Usant desenvolupaments en serie obté

$$\text{Àrea} = \tfrac{1}{2}pq - \tfrac{1}{12}f^0p^3q - \tfrac{1}{20}f'p^4q - (\tfrac{1}{30}f'' - \tfrac{1}{60}f^0f^0)p^5q \quad etc.$$

on la mètrica està donada per $ds^2 = Edp^2 + dq^2$ i el desenvolupament en serie de $E = E(p,q)$ és

$$\sqrt{E} = 1 + f^0qq + f'pqq + f''ppqq + etc.$$

§26. *Teoremes de comparació.*

Comença amb aquestes paraules

> *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuis latera aequali sunt ipsis* a, b, c [costats del triangle sobre la superfície].

Observem que el teorema del defecte compara la suma d'angles a la superfície ($\alpha + \beta + \gamma$) amb la suma d'angles d'un triangle pla (π).

Això el porta a considerar el triangle pla de costats d'igual longitud que els costats del triangle curvilini, i a comparar els angles A, B, C d'aquest triangle curvilini amb els angles respectius A^*, B^*, C^* del triangle pla. Recordem que, pel criteri costat-costa-costat, aquests angles estan determinats.

Així doncs, podem pensar que el teorema del defecte està donant una interpretació de la diferència entre $A + B + C$ i $A^* + B^* + C^*$. Però, quina diferència hi ha entre A i A^*?

Obté el resultat següent.

$$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{12}\,(2k(A) + k(B) + k(C)) + \text{termes d'ordre superior}, \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{12}\,(k(A) + 2k(B) + k(C)) + \text{termes d'ordre superior}, \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{12}\,(k(A) + k(B) + 2k(C)) + \text{termes d'ordre superior}, \end{aligned}$$

on σ és l'àrea del triangle $\triangle ABC$, $k(A)$ és la curvatura de la superfície en el vèrtex A, i A^* és l'angle del triangle pla de costats d'igual longitud que els costats del triangle sobre la superfície, corresponent a l'angle A. Anàlogament per a B i C.

Aquests "termes d'ordre superior" a què ens referim involucren els coeficients del desenvolupament de Taylor dels coeficients de la mètrica.

§27. *Teoremes de comparació a l'esfera.*

Les anteriors fórmules, en el cas particular en que la superfície de partida és una esfera de radi R, queden reduïdes a

$$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{3R^2}, \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{3R^2}, \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{3R^2}. \end{aligned}$$

Gauss reconeix la prioritat d'aquestes fórmules a Legendre ($1752 - 1833$). Observem que si les sumem obtenim el teorema del defecte sobre l'esfera:

$$\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}.$$

§28. *BHI.*

Com que aquesta secció és molt curta i ha estat tant i tant comentada,[42] la reproduïm en la seva totalitat.

> *Les nostres fórmules generals, si negligim els termes de quart ordre, esdevenen extremadament simples, concretament:*[43]
>
> $$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{12}\left(2k(A) + k(B) + k(C)\right) \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{12}\left(k(A) + 2k(B) + k(C)\right) \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{12}\left(k(A) + k(B) + 2k(C)\right) \end{aligned}$$
>
> *Així, als angles A, B, C sobre una superfície no esfèrica, se'ls ha d'aplicar reduccions diferents, per tal de que els sinus dels angles modificats siguin proporcionals als costats oposats. La desigualtat, genèricament parlant, serà de tercer ordre; però si la superfície difereix poc d'una esfera, la desigualtat serà d'ordre superior. Inclús en els grans triangles de la superfície de la terra, dels quals podem mesurar els seus angles, la diferència és sempre inapreciable*[44]*. Així, per exemple, en el triangle més gran que hem mesurat aquests darrers anys, concretament, el format pels punts Hohehagen,*[45] *Brocken, Inselsberg, on*

---

[42]El mite de Gauss. La discussió prové de si Gauss mesurava aquest triangle per saber la curvatura de l'univers. Sembla que un comentari de Sartorius, poc després de la mort de Gauss, va portar a aquesta hipòtesi. Nosaltres no ho creiem així i pensem que, en tot cas, el que preocupava a Gauss en aquells moments era la curvatura de la terra i no la de l'univers. Gauss mai va dir tal cosa. Vegeu, per exemple, [**?**], [**?**], [**?**], [**?**].

[43]Gauss utilitza la notació α, β, γ, per a les curvatures en els vèrtexs, que nosaltres hem denotat per $k(A), k(B), k(C)$ respectivament.

[44]Compareu aquestes paraules amb les de la Carta a Olbers (Març 1827).

> *A la pràctica, aquesta diferència* [entre usar les fórmules de Legendre o les de Gauss] *no és en absolut important, ja que és negligible per als més grans triangles de la terra que es poden mesurar; no obstant la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturalesa d'aquesta desigualtat.*

[45]Actualment escrit Hohenhagen. Les altituds d'aquests tres punts són, Hohenhagen 508 m, Brocken 1146 m, Inselsberg 916 m.

l'excés de la suma dels angles era $= 14''.85348$, *el càlcul ha donat les següents reduccions per ser aplicades als angles:*

$$\begin{array}{lcl} Hohehagen & \ldots & -4''.95113 \\ Brocken & \ldots & -4''.95104 \\ Inselsberg & \ldots & -4''.95131 \end{array}$$

Observem que si estiguéssim sobre una esfera, l'excés $14''.85348$, s'hauria de dividir per igual entre els tres angles, i la correcció seria doncs de

$$\frac{14.85348''}{3} = 4''.95116,$$

extraordinàriament pròxima a les tres correccions anteriors.

Hem tractat de reproduir els càlculs de Gauss però no hem estat capaços d'aconseguir-ho. Però, com a conseqüència d'aquests intents, podem dir que no són conseqüents amb altres dades donades pel propi Gauss en altres punts dels seus treballs.[46]

Per exemple, a la pàgina 314, Vol IX. (1823) de [**?**] s'hi troben els angles i les longituds dels costats del triangle BHI, tal com hem reproduït nosaltres a la taula de la pàgina 27. Concretament, en metres,

$$\begin{aligned} HI &= 84942.45328, \\ IB &= 105974.4570, \\ BH &= 69195.07749. \end{aligned}$$

Ara és fàcil calcular els angles del triangle pla amb aquests costats. Obtenim

$$\begin{aligned} B^* &= 53^\circ\ 6'\ 41.009760'', \\ H^* &= 86^\circ\ 13'\ 53.763480'', \\ I^* &= 40^\circ\ 39'\ 25.227360''. \end{aligned}$$

Per tant, comparant-los amb els angles B, H, I de la taula de la pàgina 27, tenim

[46] Agraïm a Judit Abardia la molta ajuda que ens ha prestat en la difícil tasca de descobrir a quin càlcul es referia Gauss quan va escriure *el càlcul ha donat*.

$$\begin{aligned} H - H^* &= 4.9275 \\ B - B^* &= 4.9572 \\ I - I^* &= 4.9676 \end{aligned}$$

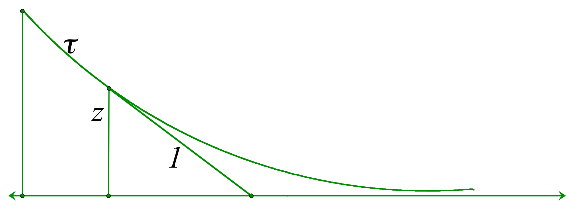
correccions lleugerament diferents de les del *Disquisicions*, i que donen un excés de $14.8523''$, també lleugerament diferent del $14''.85348$ que allà apareix.

11. Geometria diferencial i geometria no euclidiana

Anem a trobar, dins del món de la geometria diferencial, l'esfera imaginària. D'aquesta manera haurem justificat la "trampa" de canviar R per Ri que fem a l'analogia.

Comencem recordant que la tractriu és la corba que descriu un cos situat en el punt $(0, 1)$ en ser arrossegat des del punt $(0, 0)$ sobre l'eix de les $x > 0$.

Va ser un problema proposat per Perrault, el segle XVII, i resolt per Huygens.



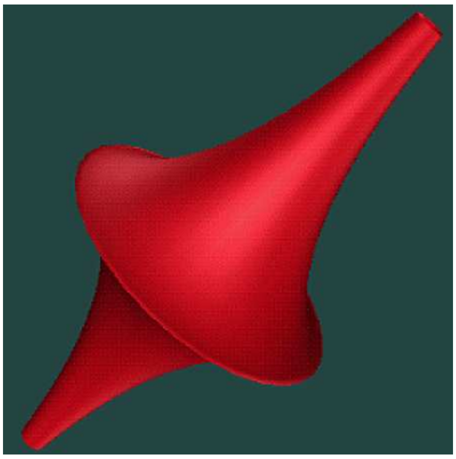
A partir d'aquesta figura es veu immediatament que la tractriu és una corba amb subtangent 1, ja que el segment de tangent entre el punt de contacte i l'eix de les x coincideix amb la corda que uneix l'objecte amb la persona que l'arrossega.

El dibuix també fa evident l'equació diferencial de la tractriu:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Fem ara girar aquesta corba al voltant de l'eix de les x. Tindrem una superfície de revolució, que podem parametritzar per les coordenades (t, y), on t és l'angle de rotació i $y = e^\tau$, essent τ el paràmetre arc (distància) de la tractriu, contat a partir del punt $(0, 1)$.

D'aquesta superfície se'n diu *pseudoesfera*, i va ser descoberta per F. Minding,[47] el 1839.



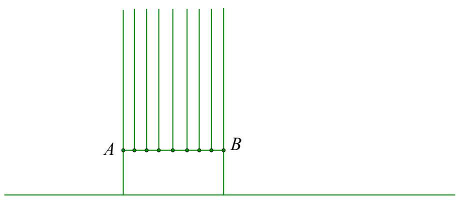
Pseudoesfera

F. Minding

Amb aquestes coordenades és fàcil veure que la mètrica de la pseudoesfera s'escriu com

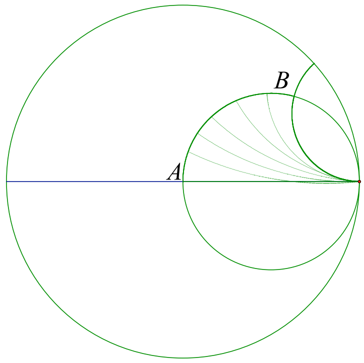
$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dt^2 + dy^2).$$

Quan t varia entre $-\infty$ i $+\infty$, i $y > 0$, la mètrica anterior és la mètrica del semiplà de Poincaré. Però nosaltres tenim que t varia entre 0 i 2π, i $y > 1$. És a dir, tenim un troç (carta local) del semiplà de Poincaré.



[47]Minding fou el primer estudiós del *Disquisicions* i fundador de l'escola de geometria diferencial russa. Va introduir el concepte de curvatura geodèsica d'una corba sobre una superfície el 1830. La pseudoesfera la va introduir el 1839 a l'article [**?**]. No obstant, el lligam entre la pseudoesfera i el pla hiperbòlic (és a dir, entre les superfícies de curvatura constant negativa i la geometria hiperbòlica) no es va fer, malgrat que l'any 1837, i a la mateixa revista on va publicar Minding, hi va aparèixer publicat el treball de Lobatchevski [**?**]. Vegeu [**?**].

En el model disc, la regió que representa la pseudoesfera es veu així:



Destaquem, finalment, que l'anterior mètrica escrita en coordenades polars geodèsiques, s'escriu com[48]

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2,$$

és a dir, *la mètrica de la pseudoesfera és, localment, la mètrica de l'esfera imaginària.*

12. El més gran geni

Ens estem referint a János Bolyai.

En un quadern de quan tenia 18 anys (1820) i estava a l'Acadèmia d'Enginyeria de Viena, sota el títol *Parallellarum theoria*, s'hi troben els dibuixos de la pàgina 58.

El primer d'ells representa diverses circumferències de radis cada cop més grans i que tenen el centre cada cop més lluny de la línia vertical. La línia a la qual s'aproximen aquestes circumferències és la línia vertical en geometria euclidiana (circumferència de radi infinit), o bé a l'horocicle, en geometria hiperbòlica (circumferència de centre i radi infinit). És la figura fonamental de la geometria hiperbòlica.[49] En el

[48]La relació entre les coordenades t, y i r, α està donada per

$$\begin{aligned} \tanh \frac{r}{2R} &= \frac{\sqrt{4t^2 + (t^2 + y^2 - 1)^2}}{t^2 + (y+1)^2}, \\ \tan \alpha &= \frac{t^2 + y^2 - 1}{2t}. \end{aligned}$$

Relació no massa difícil d'obtenir si es dominen les inversions. És una petita modificació de l'aplicació de Cayley entre el semiplà complex i el disc de radi 1: $z \longrightarrow \frac{z-i}{z+i}$.

[49]En podeu trobar un estudi explícit a [?].

treball de Bolyai és essencial la consideració de l'horosfera (l'anàleg tres dimensional del dibuix que estem considerant), subconjunt de l'espai hiperbòlic on és vàlida la geometria euclidiana.

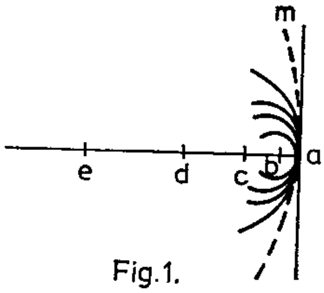


Fig. 1.

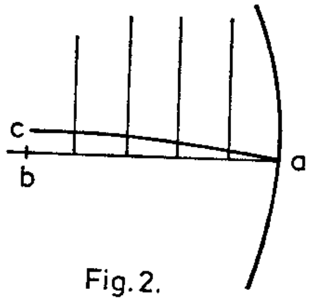


Fig. 2.

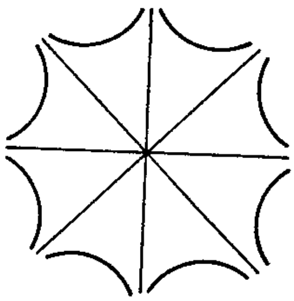


Fig. 3.

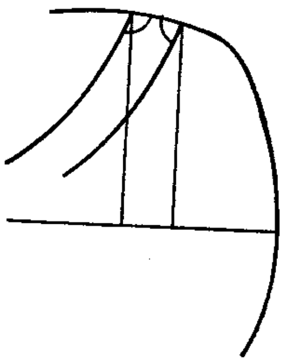


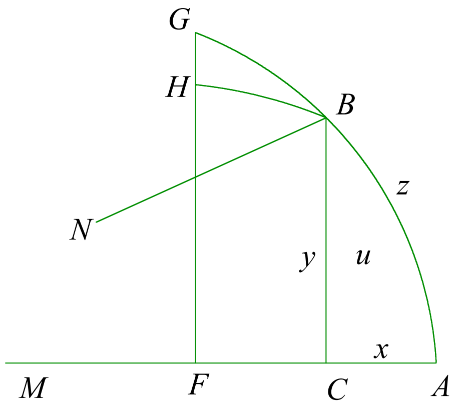
Fig. 4.

A la secció 32 del seu famós *Apèndix*[50] considera la corba AB d'equació $y = y(x)$, en coordenades abciso-geodèsiques ortogonals x, y (fixa la geodèsica AM, i diu que B té coordenades (x, y) quan x és la distància entre A i el peu C de la perpendicular de B a AM; i y és la distància entre el punt B i la recta AM), i es proposa calcular la seva longitud.

Obté la relació següent.

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$

[50]Hem comentat aquest treball més explícitament a [?] i a [?]. Vegeu [?],[?], [?] i [?].



Però ell mateix ha calculat abans el valor de l'equidistant $\overline{BH}$, de manera que obté

$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2,$$

que, en coordenades polars, és igual a (vegeu [?])

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2,$$

és a dir, és la mètrica de l'esfera imaginària.

El coneixement de l'element de longitud, és a dir, de la mètrica, li permet fer *geometria diferencial*, i, en el mateix §32 calcula l'element d'àrea, l'àrea del cercle, l'àrea de l'esfera, volums, comenta que es poden calcular curvatures, evolutes, etc.

Reproduïm la versió original de Bolyai on es pot veure la primera mètrica Riemanniana de l'història

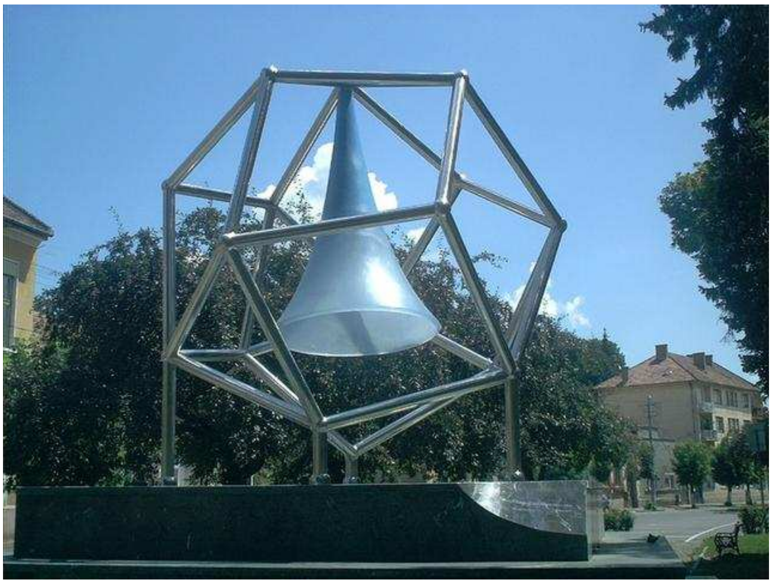
adeoque tang *hba*; eritque (cum *hbc* manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in *b* ipsius *bg* per *y* determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$; Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per *x* expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in *S* inveniri, e. g. ipsius

Pensem que Gauss tenia forçosament que reconèixer, en aquesta fórmula, l'expressió de l'element de longitud hiperbòlic.

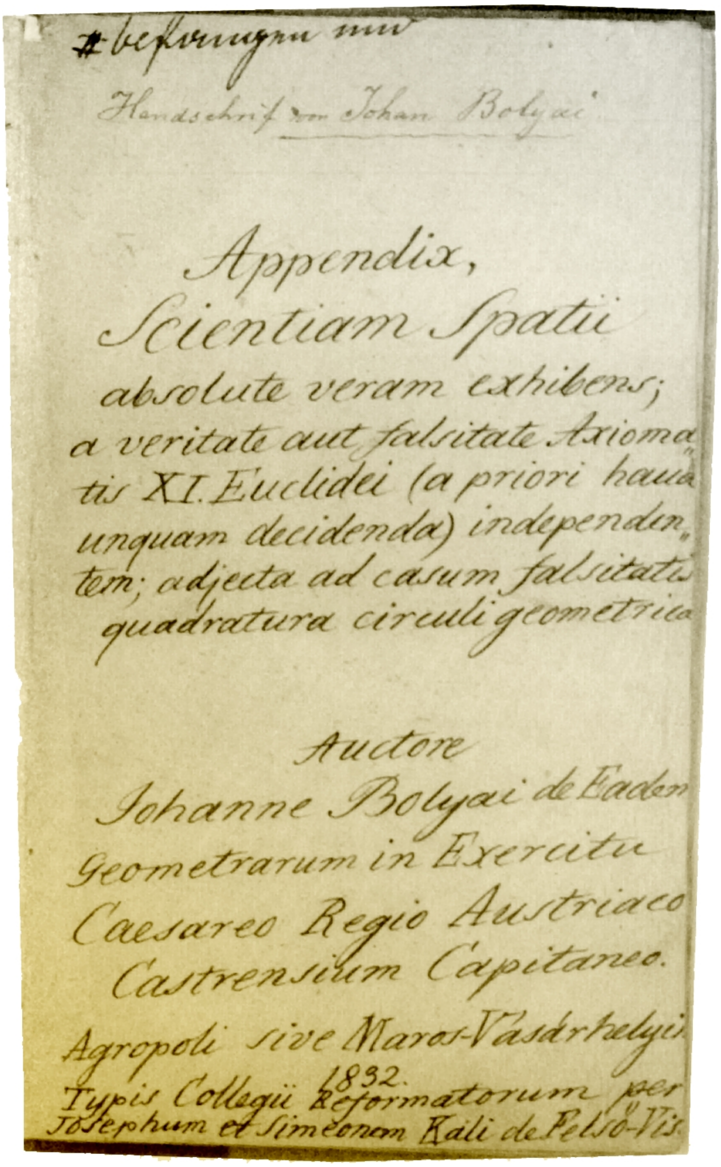
Conjecturem que justament això el va fer desistir en el seu projecte de redactar un treball sobre teoria de les paral·leles. El 1831 diu *No voldria que això morís amb mi*, i el 1832 ho deixa estar. Vegeu la carta a Schumacher i el comentari posterior que en fem, a la pàgina 3. János Bolyai acaba de donar l'esfera imaginària sintèticament. Creiem que és el primer exemple d'una varietat de Riemannn de dimensió dos que no és una superfície.

L'obstrucció que tenia Gauss és que la buscava analíticament i a l'espai euclidià.



En aquest monument a la ciutat on van viure els Bolyai, Marosvásárhely, Transilvania, Hungria (avui Tirgu Mures, Rumania), i que representa una pseudoesfera, hi ha la frase de János Bolyai

Un nou món creat del no-res.


Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vasarhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vist.

*El treball de Bolyai es coneix com l'*Apèndix*, perquè va ser publicat com apèndix a l'obra del seu pare,* Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi *(Un intent d'introduir la joventut estudiosa en els elements de la matemàtica pura). La primera pàgina es va perdre i va ser substituïda per aquesta, escrita pel propi János Bolyai. A [?] podeu trobar la quadratura del cercle que anuncia aquesta pàgina.*

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, agusti@mat.uab.es,crodri@mat.uab.es