Un nou món creat del no-res

Un món on es pot quadrar el cercle!

Un nou món creat del no-res

Un món on es pot quadrar el cercle!

Agustí Reventós Tarrida

Conferència
pronunciada el 17 de novembre de 2004
a la sala d'actes de la Facultat de Ciències
de la Universitat Autònoma de Barcelona
amb motiu de la festivitat
de Sant Albert Magne,
patró de la Facultat

Bellaterra, novembre de 2004

Edició: Departament de Matemàtiques
Impressió: Servei de Publicacions
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona)

Dipòsit legal: B. 44.926-2004

Imprès a Espanya

Índex

1 Introducció

Uns tres-cents anys abans de la nostra era, el gran geòmetra grec Euclides tractà de recopilar i sobretot ordenar lògicament els nombrosos resultats de geometria coneguts en el seu temps. En aquella època els grecs ja tenien clar què era una demostració i obtenien nous resultats per raonaments lògics a partir de teoremes ja coneguts.

Però aquests teoremes havien de provenir, per la seva part, també d'altres teoremes coneguts i així successivament.

Per tant, per poder donar una coherència lògica a l'exposició dels resultats de la geometria es feia inevitable determinar quins eren els *primers teoremes*, és a dir, en quin punt es podia començar la cadena de raonaments que permetés anar demostrant nous teoremes a partir dels anteriors.

Calia, doncs, trobar uns resultats o teoremes que fossin tan evidents per si mateixos que no calgués demostrar-los.

Per això Euclides comença la seva gran obra, els *Elements*, amb una llista de cinc postulats, que fan el paper de *primers teoremes* i que són *tan evidents* que hom els accepta sense demostració.

Abans, però, ha donat també 23 definicions (punt, recta, etc.) per saber de què es parla i 5 regles de lògica o nocions comunes (el tot és més gran que una part, etc.).

A partir d'aquí i amb un rigor que fou considerat modèlic fins al segle XIX, Euclides retroba tots els teoremes de la geometria elemental, per bé que algunes qüestions més complicades, com per exemple seccions còniques, tot i ésser conegudes a la seva època, no apareixen als *Elements*.

En aquesta conferència farem un breu repàs d'una de les històries més apassionants del món de les matemàtiques: la història del cinquè postulat.

Veurem com primer s'intenta demostrar a partir dels altres, després es rebutja per absurd, confonent la validesa d'un model matemàtic amb la realitat d'allà on s'aplica, i finalment s'acaba acceptant que la geometria que es pugui fer amb el cinquè postulat o amb la negació d'aquest és igualment vàlida. En aquesta segona geometria, que va apareixent posteriorment en els llocs més inesperats de la matemàtica, tenen lloc coses curioses, de les quals en aquesta conferència destacarem la possibilitat de quadrar el cercle.[1]

2 Els *Elements*

Euclides

Els *Elements*, l'obra científica més important que jamai s'hagi escrit,[2] consta de tretze llibres; els I, III, IV, XI, XII i XIII tracten de geometria, els VII, VIII i IX tracten d'aritmètica, i els restants, d'àlgebra.

Els resultats dels quatre primers llibres, el setè i el novè, són deguts principalment als pitagòrics, el cinquè i el sisè són deguts a Èudox (segle IV aC.), i el desè i el tretzè són de Teatet (368 aC.).

Contenen un total de 131 definicions i 465 proposicions.[3] Com a anècdota direm que totes les proposicions s'acaben amb el Q.E.D. (*quod*

[1] Agraeixo a Carlos Rodríguez les nombroses estones que hem passat parlant d'aquests temes, i a Eduard Gallego, Joan Girbau, Francesc Mañosas i Joan Porti, la lectura del primer esborrany d'aquestes notes.

[2] A. Dou, *Evolució dels fonaments de la matemàtica i relacions amb la física.* Lliçó inaugural del curs acadèmic 1987–1988, Universitat Autònoma de Barcelona.

[3] En podeu trobar una versió catalana en xarxa. `http://www.xtec.es/~jdomen28/indexeuclides.htm`.

eram demostrandum, tal com volíem demostrar), que tan popular s'ha fet entre els matemàtics.

A l'obra ja comentada d'A. Dou hi podem llegir el comentari següent sobre els *Elements* que ens sembla interessant reproduir:

> La geometria dels *Elements* és una geometria que avui seria geometria física, perquè per a Euclides i Aristòtil els termes de les proposicions dels *Elements* es refereixen amb tota exactitud als cossos naturals de la realitat del món físic, amb una referència única que és simultàniament immediata i última. *És una geometria que pretén estudiar l'estructura de l'espai físic.*

Recordem les 23 definicions, les 5 nocions comunes i els 5 postulats amb què comença el llibre I dels *Elements*.

Definicions[4]

1. Un *punt* és allò que no té parts.

2. Una *línia* és una longitud sense amplada.

3. Les extremitats d'una línia són punts.

4. Una *línia recta* és una línia igualment distribuïda respecte als seus punts.

5. Una *superfície* és allò que té longitud i amplada únicament.

6. Les extremitats d'una superfície són línies.

7. Una *superfície plana* és una superfície igualment distribuïda respecte a les seves línies rectes.

8. Un *angle pla* és la inclinació d'una respecte a l'altra de dues línies en un pla que es tallen i no pertanyen a la mateixa línia recta.

[4]Hem procurat mantenir l'estil de la redacció original.

9. I quan les línies que formen l'angle són línies rectes, l'angle es diu *rectilini*.
10. Quan una línia recta recolzada en una altra línia recta forma angles adjacents iguals, cadascun d'aquests angles es diu *recte*, i la línia recta recolzada en l'altra es diu *perpendicular* a aquesta.
11. Un angle *obtús* és un angle més gran que un angle recte.
12. Un angle *agut* és un angle més petit que un angle recte.
13. Una *vora* és allò que és extremitat d'alguna cosa.
14. Una *figura* és allò contingut per una vora o vores.
15. Un *cercle* és una figura plana continguda per una línia tal que totes les línies rectes que surten cap a ella a partir d'un punt de la figura són iguals entre elles.
16. I el punt es diu el *centre* del cercle.
17. Un *diàmetre* del cercle és qualsevol línia recta dibuixada a través del centre i acabada en ambdues direccions per la circumferència del cercle, i una tal línia recta també biseca el cercle.
18. Un *semicercle* és la figura continguda pel diàmetre i la circumferència tallada per aquest. I el centre del semicercle és el mateix que el centre del cercle.
19. *Figures rectilínies* són aquelles que estan contingudes per línies rectes; així, les figures *trilaterals* són les contingudes per tres línies rectes, les *quadrilaterals* són les contingudes per quatre línies rectes, i les *multilaterals* són aquelles contingudes per més de quatre línies rectes.
20. D'entre les figures trilaterals, un *triangle equilàter* és aquell que té els tres costats iguals, un *triangle isòsceles* és aquell que té únicament dos costats iguals, i un *triangle escalè* és aquell que té els tres costats diferents.

21. A més, d'entre les figures trilaterals, un *triangle rectangle* és aquell que té un angle recte, un *triangle obtusangle* és aquell que té un angle obtús, i un *triangle acutangle* és aquell que té els tres angles aguts.

22. D'entre les figures quadrilaterals, un *quadrat* és la que és a la vegada equilateral i rectangle; un *rectangle* és la que és rectangle però no equilateral; un *rombe* és la que és equilateral però no rectangle; un *romboide* és la que té els costats i angles oposats iguals entre ells però no és ni equilateral ni rectangle. I els altres quadrilaterals es diran *trapezis*.

23. Línies *paral·leles* són aquelles que, estant en el mateix pla i prolongades indefinidament en els dos costats, no es tallen en cap direcció.

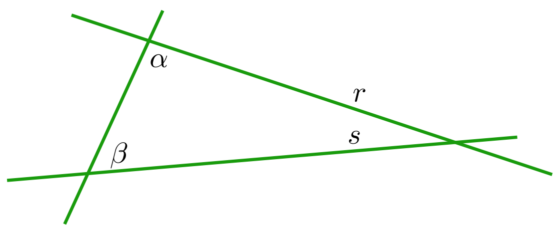
Nocions comunes

1. Coses iguals a una mateixa cosa són iguals entre elles.
2. Si iguals s'afegeixen a iguals els totals són iguals.
3. Si iguals se sostreuen d'iguals les restes són iguals.
4. Coses que coincideixen amb una altra són iguals a aquesta.
5. El total és més gran que la part.

Postulats

1. Podem dibuixar línies rectes des de qualsevol punt a qualsevol punt.
2. Podem prolongar una línia recta finita contínuament a una línia recta.

3. Podem descriure un cercle amb qualsevol centre i distància.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. *Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on estan aquests angles que sumen menys de dos rectes.*



Si $\alpha + \beta < \pi$, r i s es tallen

Comentaris als postulats

Els tres primers

Observem que els tres primers postulats diuen que es vol fer la geometria del regle i el compàs: per dos punts passa una única recta, les rectes es poden prolongar indefinidament i podem traçar circumferències de centre i radi arbitraris.

El quart

Què vol dir Euclides en el quart postulat quan escriu que *tots els angles rectes són iguals*? No és evident? Molts matemàtics pensen que amb aquest postulat Euclides volia evitar tota referència al moviment. En efecte, què vol dir que un angle recte de vèrtex un punt P sigui igual a un angle recte de vèrtex un altre punt Q? No es podria demostrar?

(i, per tant, no seria un postulat sinó un teorema). Si intentem demostrar-ho, la primera cosa que se'ns acudeix és posar l'angle de vèrtex P sobre l'angle de vèrtex Q. Però això vol dir moure (!) i Euclides no ho podia fer. O sí que podia?

En aquella època el concepte de *moviment* havia estat molt i molt debatut. Recordem, si més no, Zenó d'Elea i les seves famoses paradoxes (anomenades fal·làcies per Aristòtil) d'Aquil·les i la tortuga o la de la fletxa que no es podia moure, ja que en un instant donat estava quieta i no es podia trencar la unitat de temps.

Aristòtil a la seva *Metafísica* rebat els arguments de Zenó i distingeix entre matemàtiques i física dient: "Els objectes matemàtics estan entre les coses que existeixen a part del moviment. La física tracta amb coses que tenen en elles mateixes el principi del moviment".

No és estrany, doncs, que Euclides es topés amb el problema del moviment.

El cinquè

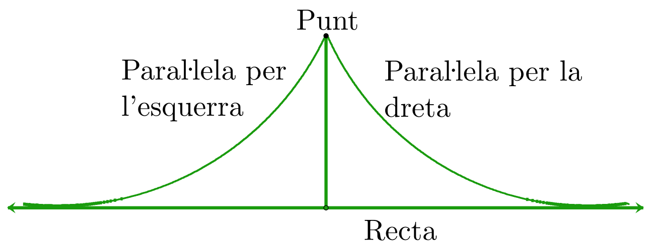
El cinquè postulat és el famós postulat de les paral·leles i diu essencialment que *per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.* El punt clau ve de la unicitat, no de l'existència, ja que aquesta es pot provar a partir dels altres postulats.

D'entrada, ja sorprèn que aquest postulat tingui un enunciat tan llarg si es compara amb els altres. Molts matemàtics van pensar que es podia demostrar a partir dels altres postulats, com veurem al llarg de la conferència.

Una manera d'intentar demostrar-lo és suposar que es compleix la seva negació amb l'esperança d'arribar a contradicció. Aquesta negació es pot formular així:

Cinquè postulat, versió no euclidiana. *Donats una recta i un punt exterior, passen per aquest punt més d'una recta que no tallen la recta donada.*

És fàcil veure que si n'hi ha més d'una n'hi ha infinites. D'entre totes les rectes que no tallen, les que tenen una posició límit es diuen *paral·leles*, i les altres que no tallen es diuen *ultraparal·leles.* Hi ha una paral·lela per la dreta i una per l'esquerra.



Primeres proposicions dels *Elements*

Inici de la cadena

Com que el cinquè postulat és molt conflictiu, Euclides procura no utilitzar-lo. De fet, a les primeres 28 proposicions no és necessari. Reproduïm l'enunciat de les quatre primeres proposicions dels *Elements*, perquè es vegi com comença la cadena de resultats (la quarta proposició és el criteri d'igualtat de triangles, conegut com el criteri costat-angle-costat, la demostració del qual necessita la proposició 3, la demostració de la qual necessita la proposició 2, la demostració de la qual necessita la proposició 1).

Concretament, aquestes proposicions diuen:

Proposició I. Sobre una línia recta finita donada, construir un triangle equilàter.

Proposició II. Posar en un punt donat (com a extremitat) una línia recta igual a una línia recta donada.

Proposició III. Donades dues línies rectes diferents, tallar de la més gran una línia recta igual a la menor.

Proposició IV. Si dos triangles tenen els dos costats iguals als dos costats respectivament, i tenen els angles continguts per les línies rectes iguals també iguals, tindran també la base igual a la base, el triangle serà igual al triangle, i la resta d'angles seran iguals a la resta d'angles respectivament, concretament aquells sustentats pels mateixos costats.

Per demostrar aquest resultat, en un determinat moment de la prova Euclides *aplica* el triangle $\triangle ABC$ sobre el triangle $\triangle A'B'C'$, és a dir *mou* els triangles l'un sobre l'altre sense preocupar-se que els costats es conservin rectes. Dos mil anys més tard això es veurà com un problema de rigor i aquesta demostració no s'acceptarà totalment.

Hilbert

A partir de la negació del cinquè postulat apareixen els treballs de N. Lobachevski i J. Bolyai, que, independentment, descobreixen la *geometria hiperbòlica* (una geometria totalment coherent però que no compleix el cinquè postulat, vegeu la secció 9). Això fa necessària una reformulació dels *Elements* d'Euclides per poder demostrar amb tot rigor la validesa o no d'aquesta nova geometria. S'inicien així diversos treballs que culminen en dues visions una mica diferents: la de F. Klein *(moviment)* i la de D. Hilbert *(no moviment)*.

Expliquem breument la solució de D. Hilbert. L'obra de D. Hilbert *Grundlagen der Geometrie*, apareguda l'any 1900, és la culminació del treball de molts matemàtics, especialment de M. Pasch. La reformulació de l'obra d'Euclides consisteix essencialment a considerar que, d'entrada, tan sols tenim un parell de conjunts (ens restringim a la geometria plana), els elements dels quals *no definim* però anomenem respectivament *punts* i *rectes*. Suposem llavors que entre els elements d'aquests conjunts hi ha unes certes *relacions*, que *no definim*, però que han de complir uns axiomes o propietats: incidència, ordre, continuïtat i congruència.

Els axiomes d'*incidència* fan referència al fet que per dos punts passa una recta. Els axiomes d'*ordre* permeten parlar de segments i els de *continuïtat* permeten construir els nombres reals. Els axiomes de *congruència* diuen essencialment que "donat un segment AB i una semirecta d'origen C, existeix un únic punt D sobre aquesta semirecta tal que el segment AB és congruent al segment CD". I quelcom semblant per a angles. Reconeixem aquí la proposició 4 d'Euclides, que ha passat a ser, doncs, un axioma (dit d'una altra manera, no hi ha hagut manera d'arreglar la demostració de la quarta proposició d'Euclides!). Com a contrapartida, però, el quart postulat d'Euclides passa a ser ara un teorema.

Observem, però, el gran encert d'Euclides en adonar-se de la necessitat del cinquè postulat, ja que, com es veurà, de la seva negació no se'n segueix cap contradicció, com molts grans matemàtics van tractar de demostrar durant molts anys. Com han comentat diversos matemàtics: quina ironia que Euclides fos el primer geòmetra no euclidià!

3 Quadratura del cercle (euclidià)

Ja hem comentat que els tres primers postulats d'Euclides fan referència a construccions amb regle i compàs. Precisem què volem dir quan parlem de *problemes de construcció*.

Sempre considerarem donats dos punts. Aquesta és la situació de partida, i no hi ha inconvenient, doncs, a establir la distància entre aquests dos punts donats inicialment com a unitat de mesura. De manera que podem dir que, d'entrada, tenim donats dos punts a distància 1.

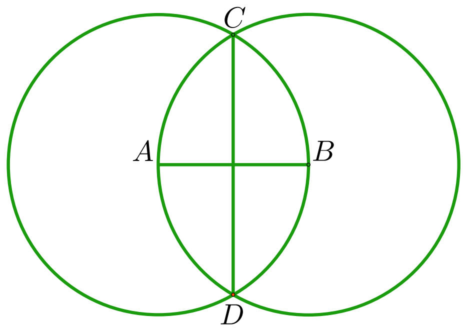
Una *recta* es considera construïda si s'han construït prèviament dos punts d'aquesta recta.

Una *circumferència* es considera construïda si s'han construït prèviament el seu centre i un punt d'ella. Equival, doncs, també a construir dos punts.

Un *punt* es considera construït si es dóna com a intersecció de rectes i circumferències prèviament construïdes.

Posem-ne un exemple senzill.

Construcció de la mediatriu. Suposem construïts els punts A i B de la figura. Per tant, la circumferència de centre A que passa per B i la circumferència de centre B que passa per A estan construïdes. Així, els punts C i D estan construïts, ja que són intersecció de circumferències construïdes. La recta CD, que és la mediatriu del segment AB, està, doncs, construïda.



QUADRATURA DEL CERCLE. *Construir, amb regle i compàs, un quadrat que tingui la mateixa àrea que un cercle donat.*

Podem considerar que els dos punts donats al principi són el costat del quadrat, i llavors es tracta de construir un cercle d'àrea 1, o podem considerar que els dos punts donats al principi són el centre i un punt d'un cercle, i es tracta llavors de construir un quadrat d'àrea π.

Aquest es pot considerar, amb una certa unitat de mesura,[5] el problema més difícil dels ja resolts en matemàtiques.

Un *regle* no és pas un objecte físic. Per a nosaltres, un regle és qualsevol mètode que permeti determinar el punt d'intersecció de dues rectes (per tant, a partir de quatre punts donats).

Un *compàs* no és pas un objecte físic. Per a nosaltres, un compàs és qualsevol mètode que permeti determinar el punt d'intersecció de dues circumferències o d'una recta i una circumferència (per tant, a partir de quatre punts donats).

Si, donat un cercle de radi 1, i per tant d'àrea π, volem construir un quadrat de la mateixa àrea π, el que hem de fer és construir un segment de longitud $l = \sqrt{\pi}$.

---

[5] Podríem convenir que la dificultat d'un problema és directament proporcional al temps necessari per resoldre'l. En el nostre cas, uns 2400 anys! Hi ha constància escrita del problema a l'obra *Els ocells* d'Aristòfanes, 414 aC. Per tant, podem assegurar que van passar més de 2295 anys.

Teorema 1 (P. L. Wantzel, 1837) *Els nombres reals construïbles amb regle i compàs són algebraics*[6] *sobre* $\mathbb{Q}$ *i el seu grau és una potència de* 2.

Teorema 2 (F. Lindemann, 1882) *El nombre* π *és transcendent.*[7]

L. F. von Lindemann 1852–1939

Ara bé, si es podés quadrar el cercle, podríem construir un segment de longitud $\sqrt{\pi}$ i, per tant, per procediments elementals podríem construir π, en contra dels teoremes de Wantzel i Lindemann.

4 Geometria absoluta

Es coneix així el conjunt de resultats de geometria que es dedueixen dels quatre primers postulats. Es diu que aquests resultats són absoluts, ja que han de ser certs tant en la geometria euclidiana (cinquè postulat) com en la no euclidiana (negació del cinquè postulat).

[6] Que $a \in \mathbb{R}$ sigui algebraic sobre $\mathbb{Q}$ vol dir que existeix un polinomi no nul amb coeficients racionals $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, tal que $P(a) = 0$. El grau es refereix al grau del polinomi mínim que té a per arrel.

[7] Transcendent vol dir que no és arrel de cap polinomi a coeficients racionals.

Des del punt de vista històric tenen gran importància els anomenats quadrilàters de Saccheri i Lambert, ja que es van utilitzar per intentar demostrar, sense èxit, el cinquè postulat. En mirar de fer això, van fer geometria sense usar el cinquè postulat, de manera que van ser els primers a estudiar geometria absoluta.

G. Saccheri (1667–1733) en la seva obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universiae geometriae principia,* va obtenint resultats a partir dels postulats d'Euclides sense utilitzar mai el cinquè postulat. Això ho fa amb l'esperança de trobar un resultat contradictori amb la negació d'aquest postulat, la qual cosa demostraria que el postulat és cert. És a dir, deixaria de ser un postulat per passar a ser un teorema.

L'únic error que comet és considerar que certs resultats són contradictoris o falsos pel sol fet d'estar en contra de la intuïció euclidiana ordinària.

Definició. Un *quadrilàter de Saccheri* és un quadrilàter tal que els angles de la base són rectes i els costats contigus a la base són iguals.

Es compleix que, en un quadrilàter de Saccheri, els angles oposats a la base són iguals i no són obtusos. Per tant, són aguts o rectes.

Saccheri rebutjava que aquests angles fossin aguts ("l'hostil hipòtesi de l'angle agut") perquè aquesta hipòtesi el portava a obtenir resultats "que repugnen la natura de la línia recta". Es quedava, així, a les portes del descobriment de la geometria no euclidiana.

Per tant, els quatre angles han de ser rectes, els costats oposats iguals dos a dos, i el quadrilàter és un rectangle. Estem en el cas de la geometria euclidiana.

J. H. Lambert (1728–1777) a l'obra *Theorie der Parallellinien* (1766), publicada després de la seva mort per J. Bernouilli i C. F. Hindenburg (1786), fa raonaments semblants als de Saccheri però no cau en l'error de dir que ha demostrat el cinquè postulat. De fet, sembla que ell veu possible una geometria sense el cinquè postulat, ja que escriu: "M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari".

Lambert

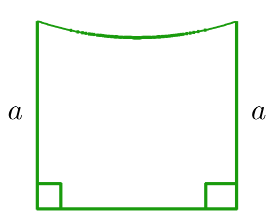
Definició. Un *quadrilàter de Lambert* és un quadrilàter amb tres angles rectes.

Es pot veure que el quart angle no pot ser obtús. Per tant, ha de ser agut o recte.

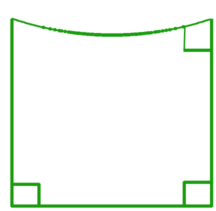
Si és recte els costats oposats són congruents dos a dos i el quadrilàter és un rectangle. Estem en el cas de la geometria euclidiana.

A diferència de Saccheri, Lambert no va deduir cap contradicció de suposar que fos agut. Però no va anar més enllà.

Es compleix que en un quadrilàter de Lambert cada costat adjacent a l'angle agut és més gran o igual que el seu oposat, i en un quadrilàter de Saccheri el costat superior és més gran o igual que la base.



Saccheri



Lambert

Com a conseqüència d'aquests treballs, a la geometria que s'obté en acceptar com a certa la negació del cinquè postulat se la coneix també com a *geometria de l'angle agut.* També es parla de *geometria hiperbòlica,* per motius que es veuran més endavant, o simplement de *geometria no euclidiana.*

5 Intents de demostració del cinquè postulat

El 1759 D'Alembert (1717–1813) havia escrit:

> La definició i les propietats de la línia recta, així com de les línies paral·leles, són l'escull i, per dir-ho així, l'escàndol dels elements de la geometria.

D'Alembert

En efecte, la definició d'Euclides de recta és una mera descripció, i no una definició en el sentit matemàtic actual. Tots els intents per definir recta més precisament van fracassar i, tal com hem comentat, en els *Fonaments de la geometria* de Hilbert les rectes no es defineixen.

Però aquesta no fou l'única dificultat. Potser la més important fou la creença que la geometria euclidiana és la descripció vertadera de l'espai físic, la qual cosa tendeix a ignorar la natura lògica del problema d'una fonamentació rigorosa de la geometria elemental.

Però, des del punt de vista matemàtic, la raó fonamental podria ser el fet que el pla hiperbòlic (el món de la geometria no euclidiana) no es pot submergir isomètricament d'una manera completa[8] en l'espai ordinari (vegeu la secció 11). Això fa difícil d'imaginar i visualitzar aquest món.

La majoria d'intents de demostrar el cinquè postulat fallaven perquè en algun moment de la prova se suposava cert un fet, aparentment evident, però que era equivalent en el fons al cinquè postulat. Es queia, doncs, en una petició de principi.

Entre les proves més conegudes del cinquè postulat tenim les de Ptolemeu (segle II dC.), Proclus (410–485), J. Wallis (1616–1703), A. M. Legendre (1752–1833) i F. W. Bolyai (1775–1856). Aquest Bolyai, conegut com Farkas Bolyai, és el pare de János Bolyai, i va publicar aquesta prova justament en el *Tentamen*,[9] l'apèndix del qual és el famós treball del seu fill (vegeu la secció 9). Donem, com a petit exemple, les proves de Bolyai i Wallis.

Formulacions equivalents del cinquè postulat

1. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.

2. Tres punts no alineats determinen una circumferència. Vegeu la demostració de W. Bolyai a continuació.

3. Existeixen triangles semblants.

4. Per a tot triangle n'hi ha un de semblant arbitràriament gran. Vegeu la demostració de Wallis a continuació.

---

[8] N. H. Kuiper dóna una immersió isomètrica derivable només una vegada. "On C^1-isometric imbeddings". *Indag. Math.* 17 (1955).

[9] *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi* 1832: un intent d'introduir la joventut estudiosa en els elements de la matemàtica pura.

5. Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem.

6. Els angles d'un triangle sumen el mateix que dos angles rectes.[10]

7. Rectes que no es tallen són equidistants.

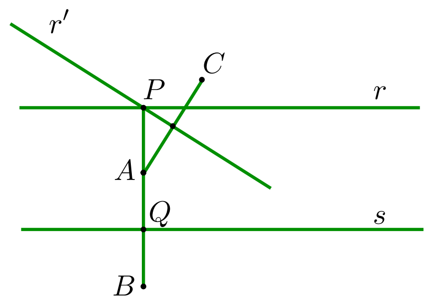
8. Les equidistants són rectes.

F. W. Bolyai

A. M. Legendre

Demostració de Bolyai

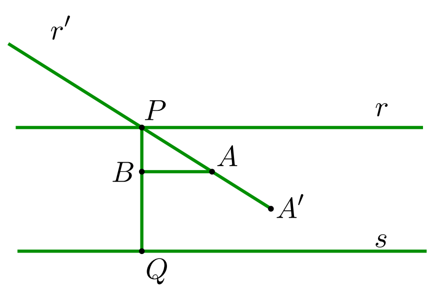
[10]És el treball de Legendre. L'obra clau d'Adrien-Marie Legendre és *Éléments de géometrie* (1794), però les seves reflexions sobre el cinquè postulat es van recollir posteriorment en una obra titulada *Reflexions sobre les diverses maneres de demostrar la teoria de les paral·leles o el teorema sobre la suma dels tres angles del triangle* (Mém. Ac. Sc., París, T. XIII. 1833).



Donats el punt P i la recta s, $P \notin s$, considerem la perpendicular PQ a s i la recta r per P perpendicular a PQ. Prenem una tercera recta $r' \neq r$ per P i un punt A entre P i Q. Sigui B el simètric de A respecte a s i sigui C el simètric de A respecte a r'. El centre de la circumferència determinada pels punts no alineats A, B, C pertany a la mediatriu de AB i a la mediatriu de AC, per tant, aquestes dues rectes r' i s es tallen i la paral·lela a s per P és única.

Per què falla?

Demostració de Wallis



Prenem dues rectes r, s que no es tallin i sigui $Q \in s$ el peu de $P \in r$. Prenem una tercera recta $r' \neq r$ per P i un punt $A \in r'$ entre r i s. Sigui B el peu de A sobre PQ. Sigui $\triangle PQA'$ un triangle semblant al triangle $\triangle PBA$, amb $A' \in r'$. Llavors r' i s es tallen en el punt A'.

Per què falla?

6 Geometria sobre l'esfera de radi R

Abans de continuar, i per entendre millor els comentaris de Lambert sobre l'esfera de radi imaginari, estudiem geometria sobre l'esfera de radi R.

La distància més curta entre dos punts d'una esfera està donada pel cercle màxim que els uneix. És a dir, que les *rectes* de l'esfera, si pensem les rectes com a línies de longitud mínima, són els cercles màxims. Observem que el cercle màxim que passa per dos punts donats s'obté com a intersecció de l'esfera amb el pla determinat per aquests dos punts i el centre de l'esfera. Observem també que donada una *recta* i un punt exterior a ella no hi ha cap *recta* que passi pel punt i no talli la recta donada. No val, doncs, el cinquè postulat.

6.1 Àrea d'un triangle

Calculem l'àrea d'un triangle esfèric. És a dir, l'àrea del tros d'esfera determinat per tres punts sobre ella i pels tres sectors dels cercles màxims que els uneixen.

Donarem els càlculs fets per Harriot el 1603, que fan pensar que Arquimedes podria haver conegut ja aquest resultat.

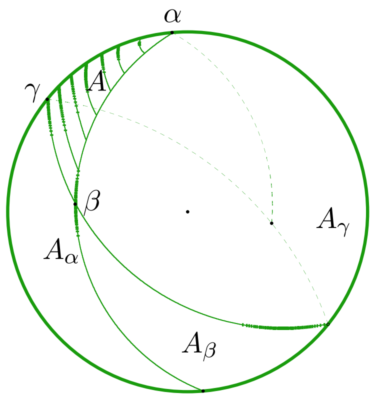
En efecte, Arquimedes va demostrar que l'àrea F d'una esfera de radi R era igual a l'àrea de 4 cercles màxims. És a dir

$$F = 4\pi R^2.$$

Acceptant que l'àrea d'un fus esfèric F_α d'angle[11] α és proporcional a aquest angle, tenim

$$F_\alpha = 2R^2\alpha.$$

[11] L'angle entre dos cercles màxims és l'angle entre els dos plans que els determinen.



Denotem per A l'àrea del triangle esfèric d'angles α, β, γ, i per A_α, A_β, A_γ, l'àrea del complementari del triangle en el fus d'angle α, β, γ respectivament. Tindrem, doncs

$$\begin{aligned} A + A_\alpha &= 2R^2\alpha \\ A + A_\beta &= 2R^2\beta \\ A + A_\gamma &= 2R^2\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Observem ara, mirant la figura, que el triangle i els complementaris del fusos corresponents a cadascun dels tres angles α, β, γ del triangle ocupen mitja esfera, de manera que tenim

$$A + (A_\alpha + A_\beta + A_\gamma) = 2\pi R^2. \tag{2}$$

D'altra banda, sumant les tres expressions de (1) obtenim

$$3A + (A_\alpha + A_\beta + A_\gamma) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \tag{3}$$

Restant les equacions (2) i (3) obtenim que l'àrea A d'un triangle esfèric és

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \text{Excés}.$$

És a dir, que *l'àrea d'un triangle esfèric és proporcional a l'excés.*

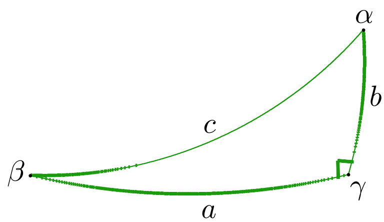
6.2 Trigonometria

La trigonometria esfèrica es remunta als inicis de la nostra era. Sembla que va ser Menelau d'Alexandria (70–130 dC. aprox.) a la seva gran obra *Sphaerica* el primer a definir triangle esfèric.

> Un triangle esfèric és l'espai inclòs per arcs de cercles màxims sobre la superfície de l'esfera [...] aquests arcs són sempre més petits que un semicercle.

Tot això ho feia evidentment per estudiar astronomia.

Per simplificar escriurem les fórmules de la trigonometria per a triangles rectangles. Suposem, doncs, donat un triangle d'angles $\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$, i costats a, b, c com a la figura.



$$\begin{array}{llcl}
[\text{Teorema del sinus}] & \sin\alpha & = & \dfrac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{c}{R}} \\
[\text{Teorema del cosinus}] & \cos\alpha & = & \sin\beta\cdot\cos\dfrac{a}{R} \\
[\text{Teorema de Pitàgores}] & \cos\dfrac{c}{R} & = & \cos\dfrac{a}{R}\cdot\cos\dfrac{b}{R}.
\end{array}$$

Què passa quan *R* és molt gran?

Teorema del sinus. Observem que la primera fórmula, quan $R = 1$, ens diu que el sinus d'un dels angles aguts és igual a

$$\sin\alpha = \frac{\textit{sinus del}\ \text{catet oposat}}{\textit{sinus de la}\ \text{hipotenusa}}.$$

Quan R és molt gran podem aproximar el sinus de $\frac{a}{R}$ i sinus de $\frac{c}{R}$ per l'angle

$$\sin\frac{a}{R} \sim \frac{a}{R}, \quad \sin\frac{c}{R} \sim \frac{c}{R},$$

de manera que quan $R \mapsto \infty$ tenim la fórmula euclidiana

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

que ens diu que *el sinus d'un angle és igual al catet oposat dividit per la hipotenusa.*

Teorema del cosinus. Quan R és molt gran podem aproximar $\cos\frac{a}{R}$ per 1 de manera que quan $R \mapsto \infty$ tenim la fórmula euclidiana

$$\cos\alpha = \sin\beta,$$

fórmula certa, ja que α i β són angles complementaris.

Teorema de Pitàgores. Quan R és molt gran podem aproximar, amb millor precisió que abans, $\cos\frac{a}{R}$ per $1-\frac{a^2}{2R^2}$, de manera que quan $R \mapsto \infty$ tenim

$$1-\frac{c^2}{2R^2} \sim (1-\frac{a^2}{2R^2})\cdot(1-\frac{b^2}{2R^2}).$$

Negligint els termes on apareix R^4 dividint, que ja són molt petits, tenim el teorema de Pitàgores euclidià

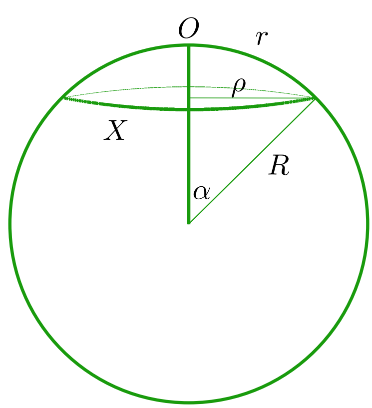
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

que ens diu que *el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.*

6.3 Longitud d'una circumferència

Una circumferència de centre O i radi r sobre una esfera de radi R és el conjunt de punts X de l'esfera tals que la distància entre X i O, mesurada sobre l'esfera (és a dir, la longitud del meridià que els uneix), és igual a r.

Podem suposar que O és el pol nord i llavors la circumferència és un paral·lel.



Amb la notació de la figura es veu clar que la longitud L del paral·lel de colatitud α, que no és més que la circumferència de centre el pol nord i radi r, és

$$L = 2\pi\rho = 2\pi R \sin\alpha = 2\pi R \sin\frac{r}{R}.$$

Si un habitant d'una superfície de dimensió dos es dedica a calcular longituds de circumferències i obté sempre, independentment del punt on es trobi, que la longitud d'una circumferència de radi r és $2\pi R \sin\frac{r}{R}$, pot concloure sense por d'equivocar-se que viu sobre una esfera de radi R.

7 L'esfera imaginària

Ja hem comentat que Lambert suggereix que la geometria de l'angle agut correspon a la geometria sobre una esfera de radi imaginari. F. A. Taurinus[12] (1794–1874) desenvolupa aquesta idea i arriba a resultats força sofisticats, especialment al càlcul de l'angle de paral·lelisme.

La idea és tan simple com substituir, a totes les fórmules anteriors obtingudes sobre l'esfera de radi R, aquesta R per Ri.

7.1 Àrea d'un triangle

L'àrea d'un triangle és proporcional al defecte. Si a la fórmula de l'àrea d'un triangle esfèric

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \text{Excés}$$

canviem R per Ri obtenim

$$A = -R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma) = R^2 \cdot \text{Defecte}.$$

És a dir, que *l'àrea d'un triangle de l'esfera imaginària és proporcional al* defecte. En particular, un cop fixada la unitat de mesura R, podem dir que *no hi ha triangles d'àrea arbitràriament gran.*

[12] *Geometriae prima elementa*, 1826.

7.2 Trigonometria

RECORDATORI

Recordem la famosa fórmula d'Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

de la qual deduïm

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Canviant x per ix obtenim

$$\cos ix = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \sin ix = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2i}$$

però com que, per definició,

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

tenim que

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \quad \sin ix = i \sinh x.}$$

Suposem, doncs, com hem fet a l'apartat 6.2, que tenim, sobre l'esfera de radi Ri (sigui quin sigui aquest objecte), un triangle rectangle d'angles $\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$, i costats a, b, c. La substitució formal de R per Ri a les fórmules trigonomètriques de l'apartat 6.2 ens proporciona unes noves fórmules que han de ser, si aquesta geometria existeix, les fórmules de la trigonometria de l'esfera imaginària.

[TEOREMA DEL SINUS] $$\sin\alpha = \frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sinh \frac{c}{R}}$$

[TEOREMA DEL COSINUS] $$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}$$

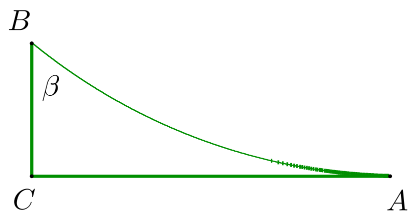
[TEOREMA DE PITÀGORES] $$\cosh\frac{c}{R} = \cosh\frac{a}{R}\cosh\frac{b}{R}.$$

D'aquestes fórmules podem treure ja algunes conseqüències.

Primers resultats de geometria hiperbòlica

Primera conseqüència

Comencem pel càlcul de l'angle de paral·lelisme. Considerem el triangle ABC rectangle en C i denotem per α l'angle en el vèrtex A i per β l'angle en el vèrtex B.



Sabem, pel teorema del cosinus, que

$$\cos\alpha = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}.$$

Si $A \to \infty$, allunyant-se de C sobre la recta AC, es pot veure que $\alpha \to 0$ i tenim

$$1 = \sin\beta \cosh\frac{a}{R}$$

que és la fórmula que ens dóna l'angle que forma la paral·lela a la recta AC des del punt B, que dista a de C. En particular, veiem que l'angle β depèn només de a i escriurem $\beta = \beta(a)$. Podem aïllar β a l'equació anterior i obtenim la fórmula clau de la geometria hiperbòlica: la *fórmula de l'angle del paral·lelisme*:

[Angle de paral·lelisme] $$\beta(a) = 2\arctan e^{-a/R}.$$

Segona conseqüència

La suma dels angles d'un triangle és més petita que π. En efecte, si resolem un triangle equilàter d'angle α i costat a, obtenim

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}.$$

Per tant, $\alpha < \frac{\pi}{3}$. I en particular

$$\alpha + \alpha + \alpha < \pi.$$

Ara es pot veure que tot triangle d'angles α, β, γ compleix

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Ja hem dit que de la diferència $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ se'n diu *defecte* del triangle, i per tant estem dient que tots els triangles de l'esfera imaginària tenen *defecte*.

Tercera conseqüència

De la fórmula

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh\frac{b}{R}$$

deduïm que quan $\alpha \to 0$, el costat $b \to \infty$, ja que $\sin\alpha \to 0$, però en canvi $\cos\beta$ no tendeix a zero, sinó que $\beta \to$ angle paral·lelisme $< \pi/2$. Per tant, ha de ser

$$b \to \infty$$

i això vol dir que, a diferència del que passa a l'esfera de radi R, les *rectes hiperbòliques són de longitud infinita.*

Quarta conseqüència

No hi ha triangles semblants, ja que la relació que la trigonometria ens dóna entre angles i costats ens permet calcular aquests costats a partir dels angles.

7.3 Longitud d'una circumferència

Seguint amb la nostra analogia, i d'acord amb 6.3, la longitud d'una circumferència de centre O i radi r sobre una esfera de radi Ri és

$$L = 2\pi R \sinh\frac{r}{R}.$$

Si un habitant d'una superfície de dimensió dos es dedica a calcular longituds de circumferències i obté sempre, independentment del punt on es trobi, que la longitud d'una circumferència de radi r és $2\pi R \sinh \frac{r}{R}$, pot concloure sense por d'equivocar-se que viu sobre una esfera de radi Ri. (Vegeu la secció 11).

8 C. F. Gauss

No hi ha cap dubte que C. F. Gauss va anar molt lluny en el desenvolupament de la geometria no euclidiana. Probablement coneixia molt bé l'analogia de Lambert que acabem de comentar i, per tant, tenia un fil conductor que li indicava quins eren els resultats que havia d'anar trobant. Probablement pel problema de la fonamentació no va publicar res sobre aquest tema, tot i que després de la seva mort es van trobar els seus treballs sobre paral·lelisme, però va deixar molta informació en diverses cartes als seus amics i col·legues.

Citem algunes cartes.[13]

[13] Cap paraula de Gauss es pot desaprofitar, però m'he permès subratllar-ne algunes frases.

Carta a F. W. Bolyai (1813)

Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. *Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no!* És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.

Carta a Olbers (1817)

Cada vegada estic més convençut que la necessitat física de *la nostra geometria euclidiana no pot ser demostrada*, almenys per la raó humana [...] hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que l'aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica. Potser en una altra vida ens serà possible de penetrar en la naturalesa de l'espai; però ara no és factible.

Carta a Taurinus (1824)

Pel que fa al seu intent de demostrar el cinquè postulat no tinc res (o no gaire) a dir, llevat que és incompleta [...] [no és correcta la seva demostració que] la suma dels angles [d'un triangle] no pot ser inferior a la suma de dos angles rectes: *aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis*. M'imagino que sobre aquest problema no hi ha estat pas molt de temps. Jo hi he estat pensant durant més de trenta anys i no crec que ningú no hi hagi pensat més que jo, tot i que no he publicat res.

[...]

Tots els meus esforços per descobrir una contradicció, una inconsistència, en aquesta geometria no euclidiana no han tingut èxit, i la cosa en ella més oposada a les nostres concepcions és que, si

> fos certa, *existiria en l'espai una magnitud lineal, determinada per ella mateixa* (però que ens és desconeguda). Però em sembla a mi que, malgrat la sàvia xerrameca dels metafísics, sabem massa poc, o quasi res en absolut, sobre la vertadera naturalesa de l'espai per considerar impossible del tot el que ens sembla poc natural.

Carta a Schumacher (1831)

> Fa unes quantes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les quals no n'he redactat res, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. *No voldria que això morís amb mi.*

Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

Carta a Gerling (1832)

> Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment, [...] L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. *Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

9 János Bolyai

János Bolyai està considerat la figura més gran de la ciència hongaresa i se'l té pel Copèrnic de la geometria. En el seu treball de 26 pàgines publicat el 1831 i citat generalment com a Apèndix, i que és un apèndix al volum I del *Tentamen*, la monumental monografia en dos volums del seu pare, Farkas Bolyai, va fer una troballa revolucionària creant l'anomenada geometria no euclidiana.

Reproduïm la primera pàgina de l'Apèndix, que va ser també reproduïda en una moneda hongaresa encunyada l'any 2002 per recordar els dos-cents anys del naixement de János Bolyai.

APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII absolute veram exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei[14]

(a priori haud unquam decidenda)

independentem; adjecta ad casum

falsitatis, quadratura circuli

geometrica.

Auetore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum

in exercitu Caesareo Regio Austriaco

Castrensium Capitaneo

[14]El cinquè postulat fou l'axioma XI en diverses edicions dels *Elements*.

Cortesia de Viktor Richter

L'anvers de la moneda representa un triangle hiperbòlic projectat a l'horoesfera d'un dels vèrtexs. És un dels dibuixos de János.

La voluntat de János d'estudiar la teoria de les paral·leles devia ser molt forta, ja que el 4 d'abril de 1820 va rebre una carta del seu pare que deia:

> Per l'amor de Déu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura'n com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida. Aquesta foscor sense fons pot devorar un miler d'altes torres com Newton i mai més no tornarà a brillar a la terra...

János Bolyai

A principis de setembre de 1823 János va ser nomenant sotslloctinent, i va ser assignat a la Direcció de Fortificacions de Temesvár. Des d'aquí va escriure al seu pare la carta de 3 de novembre de 1823 que va esdevenir extensament coneguda a tot el món:

> Apreciat pare! Tinc moltes coses per escriure-us sobre els meus nous descobriments, però, de moment, no puc sinó evitar-ne la discussió en profunditat aquí i us els escriuré en unes quartilles... Estic determinat a publicar un treball sobre les paral·leles tan aviat

com l'hagi arreglat i preparat i hi hagi una oportunitat de fer-ho; de moment, encara no està descobert, però el camí que he seguit promet aconseguir la meva meta si d'alguna manera és possible; encara no està llest però *he descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit*, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més: *de no-res he creat un món nou i diferent*; totes les altres coses que us he enviat són com un castell de cartes comparat amb una torre.

La importància dels seus resultats no va ser reconeguda fins després de la seva mort i fins i tot llavors no sense resistència. Durant la seva vida, les seves brillants idees, que havien estat madurades a l'edat de 21 anys, no van ser enteses. Les va presentar amb la bravesa revolucionària de la joventut, sense por de les crítiques de la classe dirigent científica.

Qui sí que va entendre les idees de Bolyai fou C. F. Gauss, "el príncep de les matemàtiques", que va ser injust amb János Bolyai quan va formar la seva opinió sobre l'Apèndix el 1832. Va dir, en la seva carta a Farkas Bolyai, pare de János i antic amic seu, que era incapaç de lloar el treball de János perquè seria com lloar-se ell mateix:

> Ara deixa'm dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs desconcertat. No obstant això, no puc fer altra cosa: *si l'alabés, m'alabaria a mi mateix*, ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a què ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa trenta o trenta-cinc anys.

A més, una posterior conducta de Gauss és també reprensible. Quan va saber que el rus Lobatxevski[15] havia descobert el mateix, en essència,

[15]El 1837 publica *Géométrie imaginaire* i el 1840 a Berlín publica un resum de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien.* El seu treball és in-

que János Bolyai, no va informar Lobatxevski que hi havia una altra persona que havia obtingut resultats similars.

S'ha dit moltes vegades que, després del seu retir el 1833, János Bolyai va escriure poques coses, incloent-hi, això sí, una de molt important sobre la fonamentació dels nombres complexos, i que la manca de reconeixement el va portar a un estat de depressió i que va renunciar de fet a la recerca creativa en matemàtiques. Va ser Elemér Kiss, professor a Marosvásárhely, qui va refutar aquesta opinió.[16] Havent consultat els manuscrits que Bolyai ens va deixar al llarg d'una dècada, hi va trobar significants "gemmes" matemàtiques que es podien considerar completament noves en aquell moment.[17]

Horoesfera

L'eina descoberta per Bolyai (coneguda per Gauss i Lobatxevski) i que és el punt central del seu treball, sense la qual, i sens dubte, no hagués pogut fer res, és el que avui coneixem per *horoesfera.* Gauss proposa posteriorment dir-ne paraesfera, però Bolyai no li dóna cap nom, simplement la defineix i li diu superfície F.

Tot i que és una mica tècnica, deixeu-me recordar-ne la definició.

La primera observació és que hem de sortir del pla i situar-nos a l'espai. És a dir, augmentar una dimensió. Fixem un raig o semirecta. Direm que dos punts A i B són *isogonals* corresponents, o breument punts corresponents (el terme és degut a Gauss), quan en considerar les semirectes paral·leles AM i BN al raig inicial es compleix que

$$\angle MAB = \angle NBA.$$

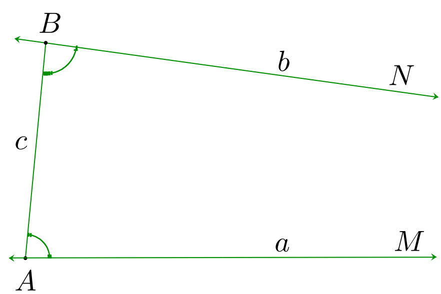
dependent de Bolyai. Però així com ell i Gauss eren grans matemàtics amb molt prestigi, i ja d'una certa edat, János era un noi de 21 anys. Per això és l'heroi d'aquesta història.

[16] Elemér Kiss. *Mathematical Gems from the Bolyai Chests: János Bolyai's Discoveries in Number Theory and Algebra As Recently Deciphered from His Manuscripts.* Budapest: Akadémiai Kiadó, 1999.

[17] András Prékopa. "La revolució de János Bolyai". *Notícies de la SCM* 18 (2003).

Escriurem, com János Bolyai, $A \doteqdot B$, per denotar que A i B són isogonals.

Aquesta relació és independent del cinquè postulat, pertany al reialme de la geometria absoluta i té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva: $A \doteqdot A$; si $A \doteqdot B$, llavors $B \doteqdot A$; si $A \doteqdot B$ i $B \doteqdot C$, llavors $A \doteqdot C$. Si una relació té les propietats anteriors, se'n diu relació d'equivalència. És ben conegut que qualsevol relació d'equivalència en un conjunt dóna lloc a una subdivisió del conjunt en subconjunts disjunts. Se'n diuen classes d'equivalència.



Ara, cada classe d'equivalència obtinguda a partir de la relació anterior és un subconjunt de l'espai, que anomenarem *horoesfera*. Bolyai va demostrar que, sobre l'horoesfera, la geometria euclidiana és vàlida. La construcció depèn del raig inicial.

Més precisament, si considerem com a conjunt de *punts* els punts de l'horoesfera i com a conjunt de *rectes* els horocicles (intersecció amb l'horoesfera de plans que contenen el seu eix[18]), es compleixen els cinc postulats d'Euclides. *La geometria de l'horoesfera és euclidiana.*

La geometria euclidiana de dimensió dos viu dins de la geometria hiperbòlica de dimensió tres.

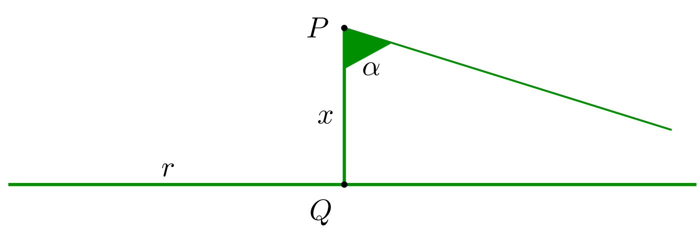
[18]Qualsevol recta paral·lela a la semirecta emprada en la definició d'horoesfera es diu *eix* de l'horoesfera.

L'horoesfera es pot considerar també la figura a la qual tendeix una esfera quan el centre tendeix a infinit.

Angle de paral·lelisme

J. Bolyai obté en el seu treball la fórmula més fonamental de la geometria hiperbòlica, la que ens dóna l'angle de paral·lelisme en funció de la distància del punt a la recta. L'analogia de Lambert ens donava també aquesta fórmula, però J. Bolyai la demostra en tot rigor simplement a partir de la negació del cinquè postulat.

Concretament, sigui P un punt exterior a una recta r i sigui x la distància hiperbòlica entre P i r. Sigui Q el peu de P sobre r. Sabem que per P passen infinites rectes que no tallen r però només una per cada costat rep pròpiament el nom de paral·lela (per la dreta o per l'esquerra), i és aquella que té una posició límit respecte a la propietat de no tallar. És a dir, tota recta per P que formi amb PQ un angle menor que el que hi formi aquesta recta, diguem-ne α, talla r, i si forma un angle més gran que α no talla r.



La relació entre x i α està donada per la *fórmula del paral·lelisme* o funció Π de Lobatxevski

$$\alpha = \Pi(x) = 2 \arctan e^{-\frac{x}{R}}$$

on aquesta R depèn només de la unitat de mesura elegida. Correspon al radi d'aquella esfera imaginària de la qual parlàvem anteriorment.

També es pot escriure

$$1 = \sin \Pi(x) \cdot \cosh(x).$$

No demostrarem ara aquesta fórmula, però voldria remarcar si n'és de sorprenent que de la negació del cinquè postulat se'n dedueixin fórmules que involucren *funcions exponencials.*

Justament d'aquesta fórmula es dedueix que en geometria hiperbòlica es pot descriure una *unitat de mesura de longitud a priori.*[19] Se'n pot privilegiar una respecte de les altres, cosa que no passa pas en geometria euclidiana. Per exemple, si agafem com a unitat de longitud la corresponent a un angle $\frac{\pi}{4}$ tenim

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan e^{-\frac{1}{R}}$$

i podem determinar R. Però és més natural simplificar els càlculs prenent $R = 1$, que equival a agafar com a unitat de longitud la corresponent a un angle de paral·lelisme

$$\Pi(1) = 2 \arctan e^{-1}.$$

10 Quadratura del cercle (hiperbòlic)

Recordem que, tal com hem dit a la secció 3, *construir* una recta vol dir donar-ne dos punts, cadascun com a intersecció de rectes i circumferències ja construïdes.

Construir una circumferència vol dir donar-ne el centre i un punt, cadascun com a intersecció de rectes i circumferències ja construïdes.

El procés s'inicia sempre a partir de dos punts donats.

J. Bolyai es va adonar que, a partir de saber construir l'angle de paral·lelisme i el seu invers, es podien construir un cercle i un quadrat de la mateixa àrea.

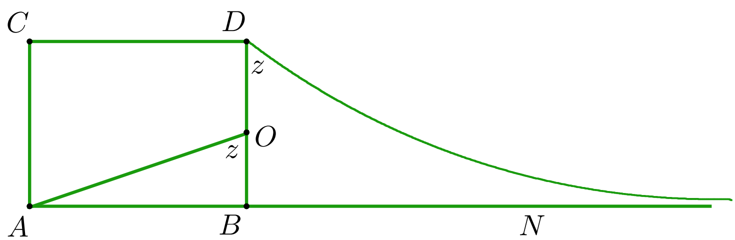
Donem les construccions de J. Bolyai sense entrar a justificar-les.

---

[19] Recordem la carta de Gauss a Taurinus.

Construcció de l'angle de paral·lelisme

Per construir la paral·lela des de D a la recta BN construirem primer la perpendicular DB a BN. Des de qualsevol punt A de la recta BN aixecarem la perpendicular AC a AN. El punt C l'agafem com el peu de la perpendicular de D sobre AC. Les perpendiculars es poden construir amb regle i compàs. Construïm el punt O com a intersecció de la circumferència de centre A i radi CD amb BD. Llavors l'angle AOB és l'angle de paral·lelisme buscat.

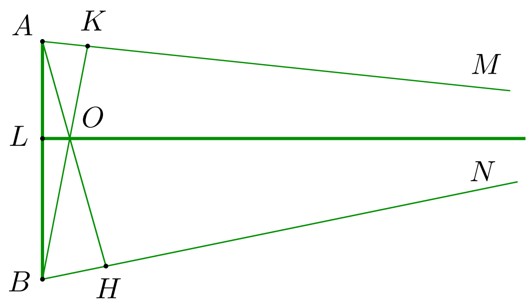


Hem mantingut la notació original de J. Bolyai.

Construcció del segment de paral·lelisme

Es tracta de construir l'invers de l'angle de paral·lelisme. És a dir, donat un angle, construir un segment que el tingui com a angle de paral·lelisme. Això és equivalent a, *donat un angle agut, construir una recta paral·lela a un dels costats i perpendicular a l'altre.* Donarem la construcció de R. Bonola.[20] Donat l'angle BAM tracem la paral·lela a AM des de B, que sabem fer per l'apartat anterior. Tracem la perpendicular AH a BN i la perpendicular BK a AM. La perpendicular a AB des del punt d'intersecció O de AH i BK ens dóna la recta buscada. En particular l'angle donat és l'angle de paral·lelisme del segment AL.

[20] *Non-Euclidean Geometry.* Nova York: Dover Publications, Inc., 1955 (l'obra de Bonola és de 1906).

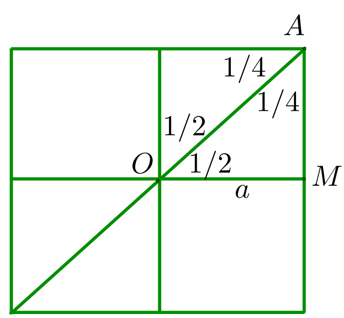


Construcció d'un quadrat d'àrea πR^2

El quadrat que busquem (quatre costats iguals i quatre angles iguals), el construirem enganxant adequadament vuit còpies del triangle rectangle d'angles aguts

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}.$$

Així, els quatre angles iguals mesuren $\pi/4$.



Amb la notació de la figura, pel teorema del cosinus, tenim que

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Siguin b' i c' els segments corresponents als angles de paral·lelisme $\pi/4$ i $3\pi/8$ respectivament, que sabem construir pels comentaris anteriors.

Per la fórmula de l'angle de paral·lelisme tenim

$$\begin{aligned} 1 &= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cosh\frac{c'}{R} \\ 1 &= \sin\frac{3\pi}{8}\cdot\cosh\frac{b'}{R}. \end{aligned}$$

Així

$$\cosh\frac{c'}{R} = \cosh\frac{a}{R}\cdot\cosh\frac{b'}{R},$$

que no és més que el teorema de Pitàgores hiperbòlic, i, per tant, a és el catet d'un triangle rectangle de catet b' i hipotenusa c'. Per tant, a és fàcilment construïble.

L'àrea del quadrat és

$$A = 8R^2(\pi - (\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8})) = \pi R^2.$$

Construcció d'un cercle d'àrea πR^2

El gran J. Bolyai s'adona que l'àrea d'un cercle de radi r, normalment escrita[21]

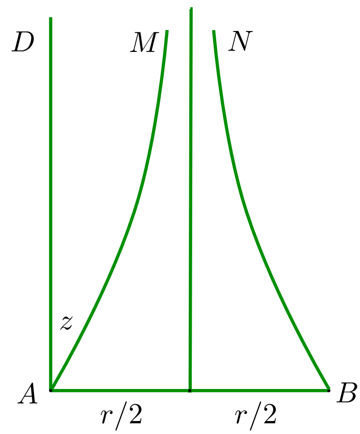
$$A = \pi(2R\sinh\frac{r}{2R})^2,$$

es pot escriure també

$$A = \pi R^2\ \tan^2 z,$$

on z és el complementari de l'angle de paral·lelisme de $r/2$.

[21] Analogia de Lambert aplicada al casquet esfèric.



Per tant, si construïm un angle z igual a $\pi/4$, DAM a la figura, i a continuació, pel procediment ja explicat, el segment de paral·lelisme del complementari de z, queda construïda la meitat del radi (i per tant el radi) d'una circumferència d'àrea

$$A = \pi R^2 \ \tan^2 z = \pi R^2.$$

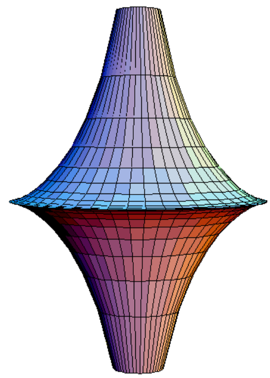
Hem construït, doncs, un cercle i un quadrat de la mateixa àrea.

Això acaba la quadratura del cercle hiperbòlica, amb l'advertència que no pas tot cercle hiperbòlic es pot quadrar! Quins es poden quadrar?

11 Pseudoesfera

Ja hem comentat que una de les dificultats conceptuals per al descobriment de la geometria hiperbòlica és que el pla hiperbòlic *no es pot submergir isomètricament d'una manera completa en l'espai ordinari.* Aquest és un llenguatge tècnic una mica difícil d'entendre, però essencialment vol dir que no hi ha una superfície a l'espai ordinari $\mathbb{R}^3$ que tingui les propietats de la geometria hiperbòlica. La paraula *completa* fa referència al fet que les "rectes" d'aquesta superfície hipotètica es poden prolongar indefinidament.

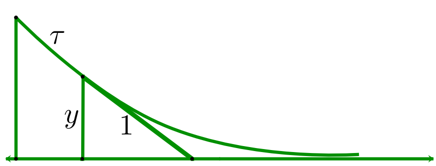
No obstant això, localment (oblidant, doncs, la paraula "completa"), sí que hi cap. L'any 1840 F. Minding va descobrir una superfície, anomenada pseudoesfera, que té localment les propietats del pla hiperbòlic.



Aquesta superfície s'obté com a superfície de revolució de la tractriu, que és per definició la corba amb subtangent 1, que és la corba que descriu un objecte pesant, situat en el punt $(0, 1)$, en ser arrossegat per una corda inextensible que l'uneix al punt $(0, 0)$ quan aquest punt es desplaça sobre l'eix de les $x > 0$. L'estudi d'aquesta corba fou proposat per Perrault, el segle XVII, i va ser resolt per Huygens.

Si escrivim que la subtangent del gràfic de la funció $y = y(x)$ és igual a 1, obtenim l'equació diferencial de la tractriu

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

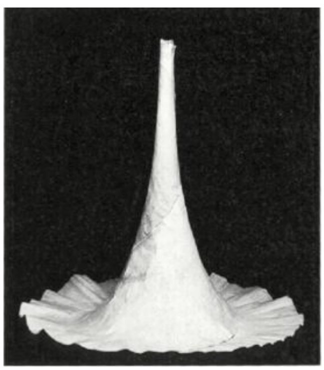


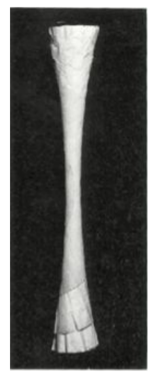
Els habitants de la pseudoesfera que volguessin saber la longitud de petites circumferències de radi r obtindrien la fórmula hiperbòlica

$$L = 2\pi \sinh r,$$

que és la fórmula de la secció 7.3 per a $R = 1$ (es diu que la pseudoesfera té curvatura -1).

Aquí teniu unes construccions de la pseudoesfera fetes per M. E. Beltrami, de qui parlarem més endavant.





12 Consistència de la geometria hiperbòlica

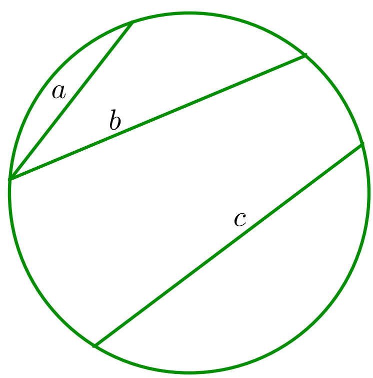
Tota teoria axiomàtica es troba amb el problema de la consistència: com saber que dins d'aquella teoria no es podran demostrar mai resultats contradictoris?

Això és realment molt difícil de respondre, i el que es fa és donar models (objectes matemàtics) que compleixin els axiomes.

Per exemple, el pla $\mathbb{R}^2$ amb les rectes donades per les equacions lineals, i els moviments, pels girs, translacions i simetries, forma un model algebraic de la geometria euclidiana. Aquesta és, doncs, tan consistent com l'àlgebra.

En el nostre cas, el que es va fer va ser donar un model euclidià de la geometria no euclidiana, de manera que podem dir que la geometria no euclidiana és tan consistent com l'euclidiana. El recíproc també és cert.

El que va fer J. Battaglini[22] va ser donar el que avui dia es coneix com *model projectiu* de la geometria hiperbòlica. Sense entrar en detalls diguem que agafa com a punts del pla no euclidià els punts interiors d'un disc, i com rectes la intersecció de rectes euclidianes amb el disc (les cordes). Pensa la vora del disc com l'infinit (els punts de la vora no pertanyen al pla hiperbòlic). Llavors, es diu que dues rectes són paral·leles quan es tallen a l'infinit, i és clar que per un punt exterior a una d'aquestes rectes hi passen infinites rectes que no la tallen.



Les rectes a i b de la figura són paral·leles i les rectes a i c ni es tallen ni són paral·leles (es diuen ultraparal·leles).

Per poder parlar de circumferències s'ha d'introduir una distància. Això es fa declarant isometries les projectivitats del pla que preserven el cercle.[23]

[22] "Sulla geometria immaginaria di Lobachevski". *Giornale di Matematiche* 5 (1867): 27–231.

[23] Vegeu L. A. Santaló. *Geometrías no euclidianas.* Buenos Aires: EUDEBA, 1961.

Potser pel fet de ser anterior a l'obra de D. Hilbert, el treball de Battaglini encara no és prou rigorós. Hom considera M. E. Beltrami (1835–1900) el vertader artífex de la prova de la consistència de la geometria hiperbòlica. Inspirat en Battaglini,[24] Beltrami[25] introdueix una mètrica de Riemann (una manera de mesurar longituds) en el disc $D = \{z = (x, y) \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, concretament

$$ds^2 = R^2 \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Així, la distància entre els punts $(0, 0)$ i (x, y) està donada per

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + r}{1 - r}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2).$$

Aquest valor és diferent de la distància euclidiana entre aquests dos punts, que seria r. És a dir, que el coneixement de les coordenades d'un parell de punts no ens diu de manera immediata quina és la distància entre ells. Tenim, això sí, una fórmula que ens permet calcular-la. Això és un grau d'abstracció difícil d'assolir. El mateix A. Einstein, el 1949, tot comentant l'estat de les seves investigacions el 1908 va dir:

> Per què es van necessitar encara set anys més per a la construcció de la teoria de la relativitat? La raó principal rau en el fet que no és tan fàcil deslliurar-se de la idea que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat.

Amb el model de Beltrami, és a dir el disc D amb la mètrica anterior, la geometria hiperbòlica quedava absolutament reconeguda com una més de les geometries riemannianes i es tancava definitivament el problema de la seva consistència.

---

[24] Vegeu J. M. Montesinos. "La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica". A: *Historia de la matemática en el siglo* XIX. 2a part. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1994.

[25] "Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea". *Giornale di Matematiche* 6 (1868): 248–312. Volum següent de la mateixa revista on va publicar Battaglini.

13 Clars de lluna

Agafem prestat de la teoria de nombres[26] el concepte de *clar de lluna* per referir-nos al fet que la geometria hiperbòlica apareix en els llocs més insospitats de la matemàtica. Són situacions que a primer cop d'ull poden semblar coincidències, però al darrere sempre hi ha un motiu profund. Elegim com a mostra tres d'aquestes coincidències.

13.1 Espai de Minkowski

Si som a l'espai $\mathbb{R}^3$ i volem calcular la norma d'un vector $v = (x, y, z)$, que no és més que la distància entre els punts $(0, 0, 0)$ i (x, y, z), apliquem el teorema de Pitàgores i obtenim

$$||v||^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

En particular, podem definir sense problemes

$$||v|| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

ja que el radicant és sempre més gran o igual que zero.

Si volem situar un punt a l'espai i en el temps (quin lloc ocupa una certa partícula en un determinat moment), ens veiem abocats a considerar quatre dimensions: x, y, z per a l'espai i t per al temps. Podem pensar, doncs, que som a $\mathbb{R}^4$ i escriure els punts de la forma (x, y, z, t).

Quan A. Einstein (1879–1955) va idear la teoria de la relativitat especial, va escriure un famós article sobre els canvis de longitud i de temps en passar d'un sistema inercial a un altre. Poc després, H. Minkowski (1864–1909) es va adonar que les transformacions considerades per Einstein (transformacions de Lorentz) es podien interpretar com a isometries de l'espai $\mathbb{R}^4$ respecte de la norma següent: si $v = (x, y, z, t)$ llavors

$$||v||^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

[26] P. Bayer. "Monstres, cordes, fantasmes i clars de lluna". *Butlletí de la SCM* 14, núm. 1.

$\mathbb{R}^4$ amb aquesta norma es coneix com l'espai de Minkowski i l'estudi de la cinemàtica de la relativitat especial no és altra cosa que l'estudi de problemes geomètrics en aquest espai.

També la dinàmica de la relativitat especial (que inclou la famosa fórmula $E = mc^2$ que relaciona la massa i l'energia) sorgeix de la necessitat de descriure els conceptes físics i les lleis que els regeixen, com a conceptes i lleis intrínsecs (que no depenen d'una determinada elecció de coordenades) a l'espai de Minkowski.

Llavors es defineix

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2},$$

advertint que aquest valor és real positiu, zero, o imaginari pur positiu (ai, amb a real positiu).

Els vectors amb norma zero es diuen *tipus llum*, i formen un con $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ anomenat con de llum. Les rectes interiors a aquest con es diuen *temporals*.

Així, com que les normes poden ser nombres complexos, té perfecte sentit considerar l'esfera de radi i:

$$S(i) = \{v \in \mathbb{R}^4,\ ||v|| = i\}.$$

Aquest espai no és altra cosa que l'hiperboloide (tridimensional) de dos fulls d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1.$$

És asimptòtic i interior al con de llum. Cadascun d'aquests dos fulls és un model de l'espai hiperbòlic de dimensió tres. És a dir, cada full és un món on hi ha punts, rectes (hipèrboles) i plans (hiperboloides) que compleixen les hipòtesis de la geometria de l'angle agut.

Així com l'esfera de $\mathbb{R}^3$ serveix per individualitzar les direccions de les rectes per l'origen, l'esfera imaginària que acabem d'introduir serveix també, entre altres coses, per individualitzar les direccions per l'origen de les rectes temporals de l'espai de Minkowski. Però aquestes rectes representen els moviments uniformes, de manera que la geometria de l'angle agut ens dóna una manera de mesurar la *distància* entre moviments uniformes.

Per visualitzar millor això prescindirem d'una coordenada (és a dir, mirarem quina és la situació, per exemple, per a $z = 0$). Podem pensar que som uns sers bidimensionals estudiant relativitat.

L'espai de Minkowski és llavors $\mathbb{R}^3$ amb

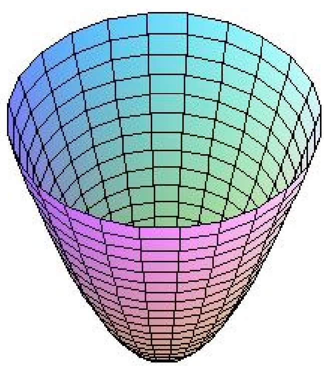
$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 - t^2}$$

i l'esfera imaginària

$$S(i) = \{v \in \mathbb{R}^3,\ ||v|| = i\}$$

no és més que l'hiperboloide $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ (una de les components connexes).

Si prenem com a *pla* el conjunt $S(i)$, com a *punts* els seus propis punts, i com a *rectes* les hipèrboles que s'obtenen en tallar $S(i)$ per plans euclidians de $\mathbb{R}^3$ que passen per l'origen, obtenim un model del pla hiperbòlic, és a dir, un espai on val la geometria de l'angle agut.



Hiperboloide $x^2 + y^2 - t^2 = -1$

Resumint, *l'esfera imaginària no és més que l'esfera de radi i de l'espai de Minkowski.*

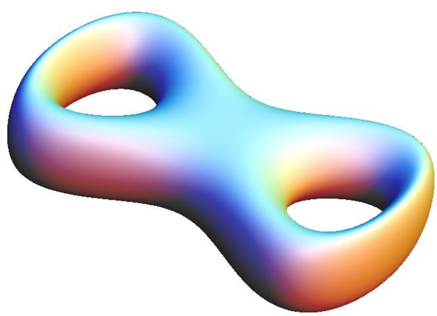
Aquesta manera de pensar l'esfera imaginària és molt útil, ja que permet pensar les isometries hiperbòliques com a aplicacions lineals.

13.2 Classificació de les varietats de dimensió 3

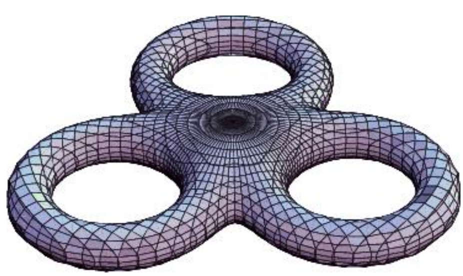
Si pensem que vivim en un món de dimensió tres, pensarem també de seguida: *quants mons de dimensió tres hi ha?* Si tinguéssim una llista de tots aquests mons els podríem anar estudiant per saber quin és el nostre.

Per simplificar va bé començar pensant en una dimensió menys, és a dir, preguntar-nos: *quants mons de dimensió dos hi ha?* Uns éssers bidimensionals que visquessin en una esfera molt gran respecte d'ells podrien pensar que viuen en un pla, com potser alguns éssers humans van pensar algun cop. Si caminant sempre en la mateixa direcció tornessin al lloc inicial podrien descartar que viuen en un pla, però no podrien concloure que estan sobre una esfera, ja que si visquessin, per exemple, sobre un "dònut", també els podria passar això.

Afortunadament, els mons bidimensionals estan classificats pels matemàtics en plans, plans amb forats, esferes, dònuts i dònuts amb molts forats.



http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/surfaces/doubletorus/



http://mathworld.wolfram.com/TripleTorus.html

Malauradament, la classificació dels mons tridimensionals és molt més complicada que la dels mons bidimensionals, tan complicada que encara és un problema obert.

Aquest problema s'ha abordat des de diferents punts de vista, però el gran impuls que ha rebut els darrers anys prové sens dubte de l'anomenada *conjectura de geometrització* de W. Thurston.[27] En concret diu:

Conjectura de Thurston. *Tota varietat de dimensió tres, compacta i sense vora es descompon de manera canònica en fragments que són hiperbòlics o fibrats de Seifert.*

W. Thurston

G. Perelman

No entrem en detalls de què volen dir aquestes paraules, però retenim que, per classificar les varietats compactes de dimensió tres, si la conjectura fos certa, s'haurien de classificar prèviament els fibrats de Seifert, feina feta pel mateix H. Seifert als anys trenta,[28] i les varietats hiperbòliques de dimensió tres, problema aquest encara no resolt. Aquestes varietats hiperbòliques són varietats on és vàlida, almenys localment, la geometria de l'angle agut, és a dir la geometria que hem

[27] "Three dimensional manifolds, Klenian groups and hyperbolic geometry". *Bull. of the Amer. Math. Soc.* 16 (1982): 357–381.

[28] "Topology of 3-dimensional fibered spaces". A: *Seifert and Threlfall: a textbook of topology.* Nova York: Academic Press Inc., 1980.

presentat en aquesta conferència, i que normalment rep el nom de *no euclidiana.*

Diguem finalment que en el difícil camí cap a la prova de la conjectura de Thurston hi ha contribuït un dels nostres companys, el professor Joan Porti, que juntament amb M. Boileau,[29] va demostrar l'anomenat *teorema de geometrització per a orbifolds*, conjecturat també per Thurston com un pas previ per a la demostració de la seva conjectura. Aquest teorema de Porti i Boileau afirma que si un grup finit actua sobre una varietat deixant punts fixos, llavors aquesta varietat satisfà la conjectura de geometrització.

Fa gairebé un parell d'anys que el matemàtic G. Perelman,[30] de Sant Petersburg, va anunciar que tenia una demostració de la conjectura de Thurston. Tot i que de moment Perelman encara no ha fet pública la demostració completa, els articles que ha distribuït el matemàtic rus fan que els especialistes siguin força optimistes.

13.3 Models cosmològics

La geometria hiperbòlica també apareix en l'estudi dels models de l'univers. Un dels més coneguts d'aquests models és el proposat per A. G. Walker i H. P. Robertson als voltants de 1930, per mirar de donar un substrat matemàtic a les teories d'A. Friedmann:[31] sobre l'expansió de l'univers.

La idea, introduïda per Einstein, és considerar cada galàxia com un punt d'un cert espai, per estudiar d'aquesta manera l'evolució de l'univers. Però com que les galàxies es mouen amb el temps, ens tornem

[29] "Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type". *Astérisque* 272 (2001): 208 p.

[30] *Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds*, 10 de març de 2003.

[31] *On the curvature of Space.* Zeitschrift für Physik, 1922. Demostra que el radi de curvatura de l'univers ha de ser una funció creixent o periòdica del temps. Primer va ser criticat per Einstein, però posteriorment Einstein va rectificar i va escriure, en el *Zeitschrift für Physik*: "In my previous note I criticised [Friedmann's work On the curvature of Space]. However, my criticism, as I became convinced by Friedmann's letter communicated to me by Mr Krutkov, was based on an error in my calculations. I consider that Mr Friedmann's results are correct and shed new light".

a trobar amb la necessitat de considerar objectes quadridimensionals del tipus (x, y, z, t) per descriure una galàxia que està en el punt (x, y, z) a l'instant t.

Robertson i Walker van proposar com a model de l'univers una varietat diferenciable (objecte matemàtic abstracte) del tipus $S \times \mathbb{R}$, on S és una varietat de dimensió 3. Els típics arguments d'homogeneïtat i isotropia ens diuen que sobre S hi ha una mètrica de curvatura constant K. Actualment es fan experiments per determinar el valor d'aquesta K.[32] Si K fos negativa, llavors la geometria de S seria (potser només localment) la geometria hiperbòlica.[33]

---

[32] Resultats recents diuen que $K = 0$, és a dir que l'univers és pla. Vegeu *El big bang: una cosmologia per al segle* XXI. Lliçó inaugural del curs 2004–2005 de la UAB, a càrrec de J. A. Grífols.

[33] J. Girbau. *Geometria diferencial i relativitat.* Bellaterra: Publicacions de la UAB, 1993. Manuals de la UAB, 10.