Gauss e a Xeometría

Xeodesia e Xeometría non euclidiana

Primeira sesión do seminario

VIDAL ABASCAL

Xeometría

- I. Xeometría euclidiana.
- II. Xeometría non euclidiana.
- III. Xeodesia.
- IV. Xeometría diferencial (Superficies).
- V. Gd-Gne.

Xeometría

- I. Xeometría euclidiana.
- II. Xeometría non euclidiana. Bolyai
- III. Xeodesia.
- IV. Xeometría diferencial (Superficies).
- V. Gd-Gne.

Xeometría

- I. Xeometría euclidiana.
- II. Xeometría non euclidiana. Bolyai
- III. Xeodesia.
- IV. Xeometría diferencial (Superficies).
- V. Gd-Gne. Bolyai

I. Xeometría euclidiana

1796

- 29 de marzo de 1796. Dezasete lados.
- Carta a Gerling 1819.

1796

- 29 de marzo de 1796. Dezasete lados.
- Carta a Gerling 1819.

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29 März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran.

La historia de este descubrimiento no se ha mencinado hasta ahora; la puedo explicar muy exactamente. Fue el dia 29 de marzo de 1796, y la coincidencia nada tuvo que ver en ella.

1796

- 29 de marzo de 1796. Dezasete lados.
- Carta a Gerling 1819.

Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en zwei Gruppen [...]

Todo està en dividir las raíces de la ecuación...

1796

- 29 de marzo de 1796. Dezasete lados.
- Carta a Gerling 1819.

[...] glückte es mir bei einem Ferenaufenthalt en Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.

Durante unas vacaciones en B. una mañana (antes de levantarme de la cama) vi claramente todas las correlaciones y apliqué al polígono de 17 lados la correspondiente confirmación numérica.

O Diario

- Ó día seguinte, 30 de marzo de 1796, empezou o Diario, un mes antes de cumprir 19 anos.

As entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], fan referencia a polígonos. Nace a Teoría de Galois.

O Diario

- Ó día seguinte, 30 de marzo de 1796, empezou o Diario, un mes antes de cumprir 19 anos.

  As entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], fan referencia a polígonos. Nace a Teoría de Galois.

  [1] *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*

O Diario

- Ó día seguinte, 30 de marzo de 1796, empezou o Diario, un mes antes de cumprir 19 anos.

As entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116], fan referencia a polígonos. Nace a Teoría de Galois.

[1] *Os principios dos que depende a división do círculo, e a divisibilidade xeométrica do mismo en dezasete partes, etc.*

Braunschweig

Göttingen

II. Xeometría non euclidiana

1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 *Jahren (seit* 1792*) dieselbe Überzeugung habe.*

.. He tenido la misma opinión durante 54 años (desde 1792)

1792

- Carta a Schumaker (09-28-1846)

Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 *Jahren (seit* 1792*) dieselbe Überzeugung habe.*

.. He tenido la misma opinión durante 54 años (desde 1792)

Tiña 15 anos!

1794

- Carta a Gerling (10-10-1846)

Der Satz, den Ihnen Hr. Schweikart erwähnt hat, dass en jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von $360°$ um eine Grösse verschieden ist, [....] welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als nothwending erkannte.

El teorema que Mr. S. le menciona a usted, que en cada Geometría la suma .. es el primer teorema en el umbral de esta teoría, de lo que ya me di cuenta en el año 1794.

O Diario

- 28 de xullo de 1797.

[72] *Plani possibilitatem demonstravi.*

O Diario

- Setembro 1799.

[99] *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.*

Parallelentheorie

- Notas atopadas entre os papeis de Gauss de 1831.
- Sabemos o que pensaba sobre o tema gracias a unhas cantas cartas.
- Non entanto, tódolos resultados sobre *Xeometría astral* que aparecen nestas cartas pódense deducir directamente da *analoxía de Lambert*.

Lambert (1728-1777)

- Lambert suxire que a *Xeometría do ángulo agudo* corresponde á Xeometría sobre unha esfera de radio imaxinario.
- Gauss consulta o traballo de Lambert na biblioteca de Göttingen o 24 de outubro de 1795 e o 2 de xaneiro de 1797.
- A *analoxía* foi desenrolada por Taurinus (1794-1874).

Analoxía

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}$.

Defecto

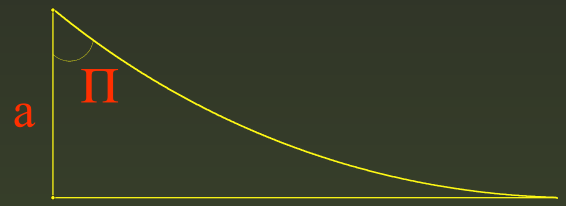
A analoxía en trigonometría:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}$$

Polo tanto $\alpha < \pi/3$.

- $\alpha + \alpha + \alpha < \pi$

Ángulo de paralelismo



$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R}$$

$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

Algunhas cartas

Carta a Farkas Bolyai (12-16-1799)

- *Wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegeben Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun whol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht;*

Si se pudiera probar que existe un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces yo estaría en condiciones de probar rigurosamente toda la Geometría. Mucha gente tomaría esto como un axioma, pero yo no.

Carta a **Gerling** (11-04-1816)

- *Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel* $= 59°59'59''.99999$.

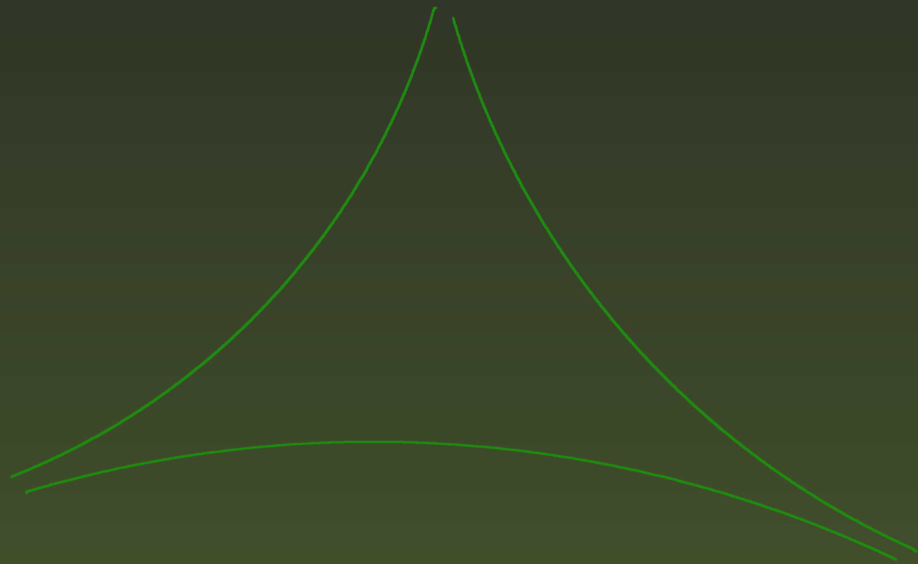
Sería incluso deseable que la GE no fuera cierta, porque entonces tendríamos una unidad de medida a priori. Por ejemplo, el lado de un triángulo equilátero...

Carta a Gerling (16-03-1819)

- *Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen* 180° *ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthalten Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist*

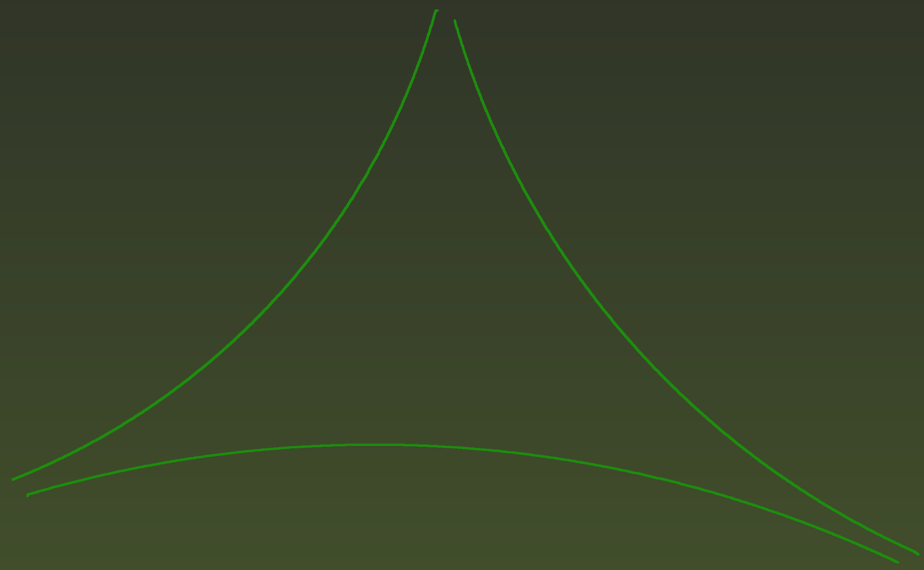
  El defecto no es sólo más grande cuando el área se hace más grande, sino que es exactamente proporcional a ella, de tal manera que el área tiene una cota que no se puede alcanzar, y esta cota es igual al área encerrada por 3 líneas asintóticas. La fórmula para esta cota es

Mesma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Mesma carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \operatorname{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Carta a **Schumaker** (05-17-1831)

- *Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.*

Hace algunas semanas que he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de 40 años atrás. Nunca las había redactado, y ello me ha obligado a empezar mi trabajo de nuevo tres o cuatro veces. No quisiera que esto muriese conmigo.

Carta a Schumaker (12-07-1831)

- Nesta carta dá tamén a lonxitude dunha circunferencia de radio r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

e comenta que para que as medidas coincidan coa experiencia, k tería que ser infinitamente grande.

Carta a Schumaker (12-07-1831)

- Nesta carta dá tamén a lonxitude dunha circunferencia de radio r:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

  e comenta que para que as medidas coincidan coa experiencia, k tería que ser infinitamente grande.

- Gauss interrompe a escritura en 1832, cando coñece o traballo de János Bolyai.

Carta a **Gerling** (14-02-1832)

- *Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet,*

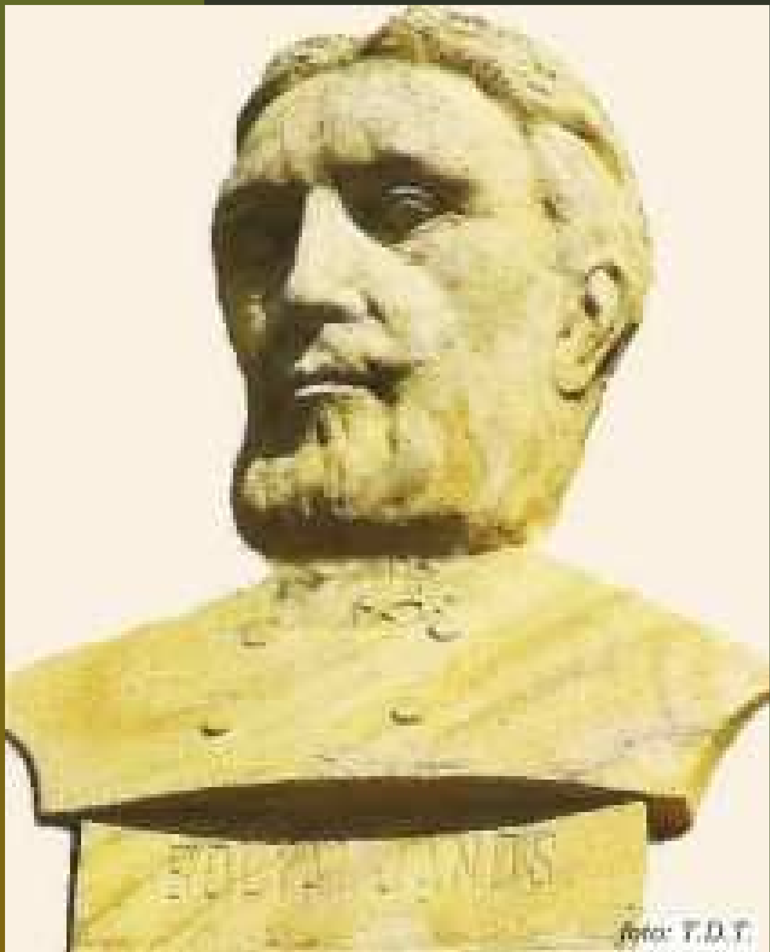
Te comento también que he recibido estos días un pequeño trabajo desde Hungría, sobre Geometrías no euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados desarrollados muy elegantemente.

Carta a **Gerling** (14-02-1832)

- *Der Verfasser ist ein sehr junger ósterreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren [...] Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse...*

  El autor es un joven oficial austríaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí en 1978, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación actual. Tengo a este joven geómetra v. Bolyai como uno de los más grandes genios.

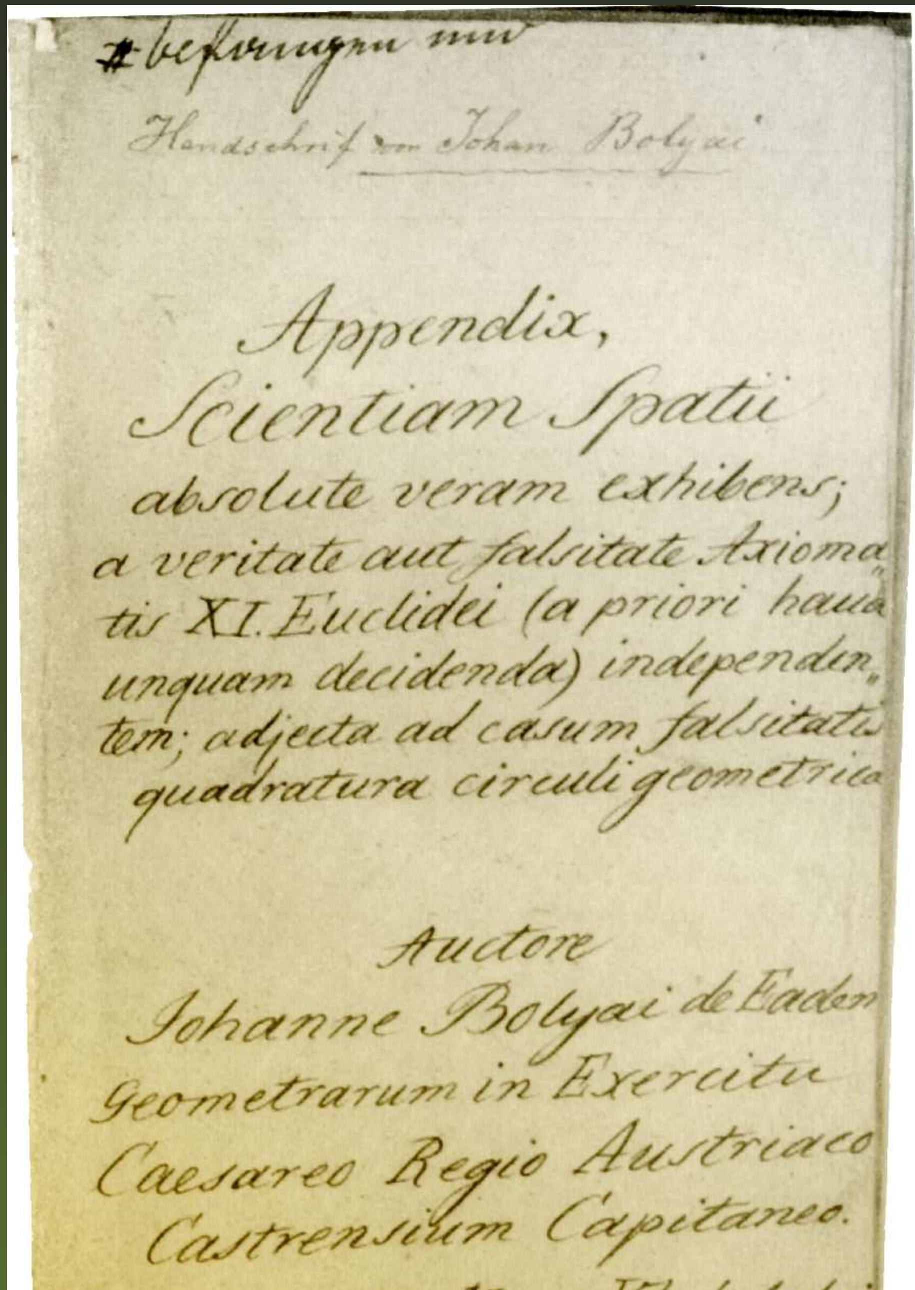
János Bolyai (1802-1860)



Farkas a János. Abril de 1820

Polo amor de Deus! Deixa as paralelas tranquilas, abxura delas como dunha charla indecente, quitaranche (coma a min) todo o teu tempo, saúde, tranquilidade e a felicidade da túa vida.

Tentamen


Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Carta a Farkas Bolyai (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

Carta a Farkas Bolyai (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

- Cánto houbera podido cambia-la historia se Gauss houbese feito pública a súa boa opinión do traballo de János Bolyai!

III. Xeodesia

Xeodesia

O máis refinado xeómetra e o perfecto astrónomo, estes son dous títulos separados que amo con todo o meu corazón, e que adoro con paixón sempre que están unidos.

Hannover

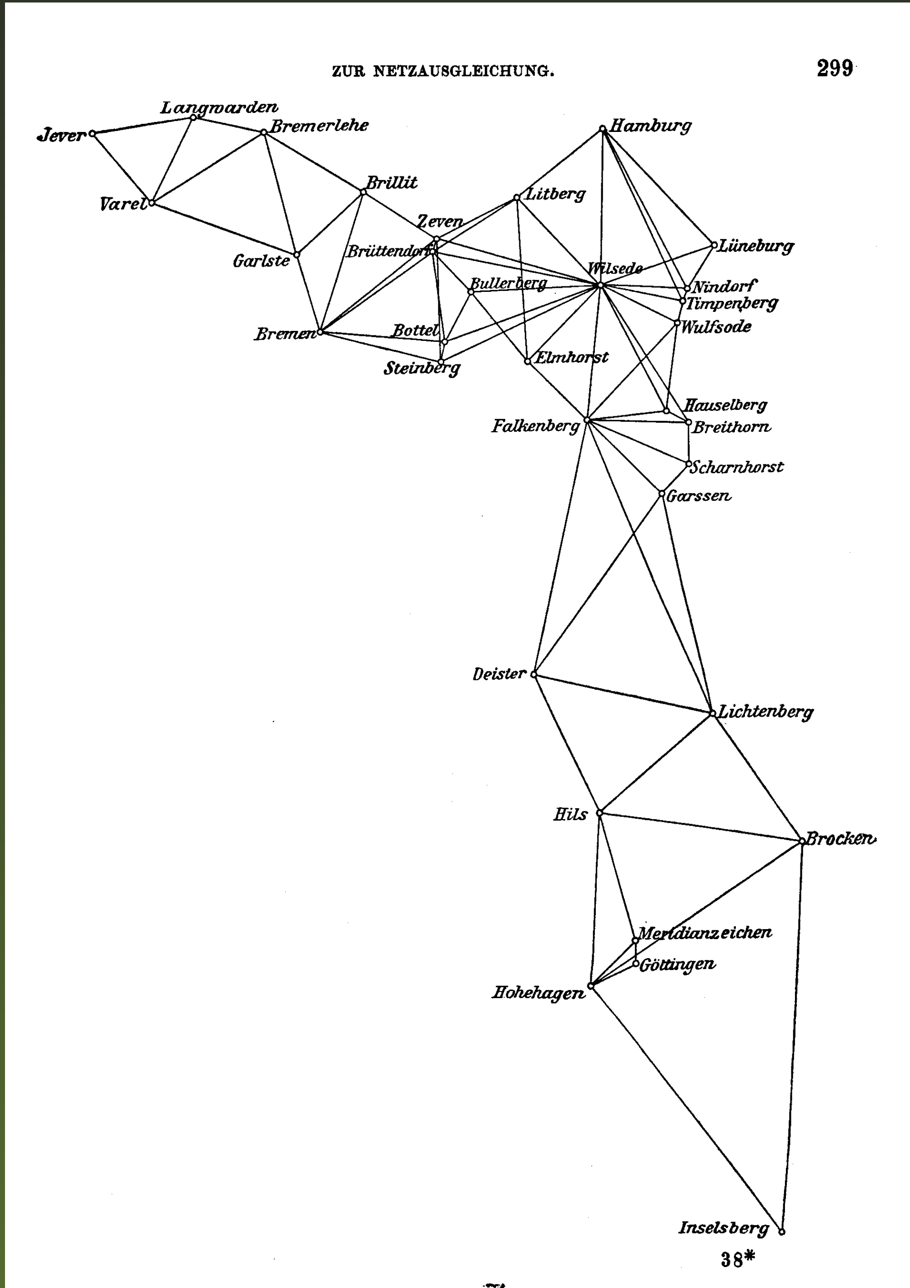
O rei George III de Gran Bretaña, Elector de Hannover, encargou en 1818 a Gauss a triangulación do reino de Hannover.

Hannover

O rei George III de Gran Bretaña, Elector de Hannover, encargou en 1818 a Gauss a triangulación do reino de Hannover.

- Dedicou a elo uns 8 anos.
- Utilizou o método de mínimos cadrados.
- Inventou o heliótropo.
- Os resultados non foron suficientemente satisfactorios (línea base).
- Bessel comentou ó propio Gauss que o seu traballo xeodésico podería ser feito por alguén de menor estatura matemática.

Hannover


ZUR NETZAUSGLEICHUNG.
299
Jever
Langwarden
Bremerlehe
Varel
Brillit
Garlste
Zeven
Litberg
Hamburg
Brüttendorf
Bullerberg
Wilsede
Lüneburg
Nindorf
Timpenberg
Wulfsode
Bremen
Bottel
Steinberg
Elmhorst
Hauselberg
Falkenberg
Breithorn
Scharnhorst
Garssen
Deister
Lichtenberg
Hils
Brocken
Meridianzeichen
Göttingen
Hohehagen
Inselsberg
38*

Hannover

[3.]

[Zusammenstellung der beobachteten Dreiecke und ihrer Widersprüche.]

Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess	Nr.	Eck-punkt	Winkel	Excess
	1	115° 58′ 47″,435			8	23° 11′ 52″,206			12	27° 27′ 12″,046	
1	2	48 19 36,048		10.	9	99 14 52,452		19	13	148 10 28,108	
	3	15 41 35,239			10	57 33 19,258			15	4 22 19,354	
		179 59 58,722	0″,158			180 0 3,916	4″,245			179 59 59,508	0″,321
		−1,436				−0,329				−0,813	
	2	119 37 29,268			9	87 32 16,986			13	34 25 46,752	
2	3	42 31 25,667		11	10	21 0 11,004		20	14	109 38 36,566	
	4	17 51 7,707			11	71 27 33,968			15	35 55 37,227	
		180 0 2,642	1,348			180 0 1,958	0,758			180 0 0,545	1,295
		+1,294				+1,200				−0,750	
	3	52 29 10,876			10	22 10 9,986			14	80 10 54,559	
3	4	84 40 26,895		12	11	64 11 24,606		21	15	15 24 48,626	
	5	42 50 30,659			12	93 38 25,839			16	84 24 15,820	
		180 0 8,430	6,568			180 0 0,431	0,759			179 59 59,005	0,349
		+1,862				−0,328				−1,344	
	3	86 13 58,366			10	8 0 47,395			15	7 35 56,089	
4	5	53 6 45,642		13	12	28 17 42,299		22	16	96 37 6,464	
	6	40 39 30,165			13	143 41 29,140			17	75 46 59,128	
		180 0 14,173	14,853			179 59 58,834	0,202			180 0 1,681	0,176
		−0,680				−1,368				+1,505	

Hannover

1. $0 = -0{,}718 \quad +3(1)-(2)$
2. $0 = +0{,}647 \quad -(1)+3(2)+(3)$
3. $0 = +0{,}931 \quad +(2)+3(3)-(4)-(5)$
4. $0 = -0{,}340 \quad -(3)+3(4)$
5. $0 = -0{,}331 \quad -(3)+3(5)-(6)$
6. $0 = -0{,}032 \quad -(5)+3(6)-(7)-(8)$

(7. $0 = +0{,}233.5 -(6)+3(7)+(8)+(9)-(10)$)

8. $0 = +0{,}510.5 -(6)+(7)+3(8)-(9)+(10)$
9. $0 = -0{,}442 \quad +(7)-(8)+3(9)+(10)-(11)$
10. $0 = -0{,}164.5 -(7)+(8)+(9)+3(10)-(11)$
11. $0 = +0{,}600 \quad -(9)-(10)+3(11)-(12)$
12. $0 = -0{,}164 \quad -(11)+3(12)-(13)-(14)$

(13. $0 = -0{,}684 \quad -(12)+3(13)+(14)-(15)-(16)-(19)$)

14. $0 = -0{,}569.5 -(12)+(13)+3(14)+(16)+(17)-(18)+(19)$

(15. $0 = +0{,}886.5 -(13)+3(15)+(16)-(17)+(20)$)

16. $0 = +0{,}521 \quad -(13)+(14)+(15)+3(16)+(17)-(18)-(19)-(20)$
17. $0 = -0{,}740.5 +(14)-(15)+(16)+3(17)-(18)+(20)-(21)$
18. $0 = -0{,}918.5 -(14)-(16)-(17)+3(18)-(27)-(28)$
19. $0 = -0{,}406.5 -(13)+(14)-(16)+3(19)+(20)$
20. $0 = -0{,}375 \quad +(15)-(16)+(17)+(19)+3(20)-(21)$
21. $0 = -0{,}672 \quad -(17)-(20)+3(21)-(22)-(23)$
22. $0 = +0{,}752.5 -(21)+3(22)+(23)-(24)-(25)+(38)$
23. $0 = -0{,}228 \quad -(21)+(22)+3(23)+(25)+(26)-(29)-(38)$
24. $0 = +0{,}660 \quad -(22)+3(24)+(25)-(26)+(39)$
25. $0 = +0{,}108 \quad -(22)+(23)+(24)+3(25)+(26)-(29)+(38)-(39)$
26. $0 = -0{,}688.5 +(23)-(24)+(25)+3(26)-(29)+(39)$
27. $0 = -1{,}577.5 -(18)+3(27)+(28)-(29)+(30)+(31)$
28. $0 = -0{,}914 \quad -(18)+(27)+3(28)-(32)+(33)$
29. $0 = -0{,}600.5 -(23)-(25)-(26)-(27)+3(29)-(30)-(31)$
30. $0 = -0{,}378 \quad +(27)-(29)+3(30)+(31)-(32)-(34)+(35)-(40)$
31. $0 = -0{,}900 \quad +(27)-(29)+(30)+3(31)-(35)-(37)+(40)$
32. $0 = +0{,}290 \quad -(28)-(30)+3(32)$ …

Hannover

[8.]

Ausgleichungswerthe.

Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten	Nr.	Eck-punkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten
	1	115° 58′ 47,″885	4,221 7939		7	66° 1′ 19,″251	4,780 5184
1	2	48 19 36, 540	4,141 3507	7	8	66 39 58, 719	4,782 6578
	3	15 41 35, 731	3,700 2059		9	47 18 48, 840	4,686 0435
	2	119 37 28, 959	4,674 4426		7	55 34 15, 737	4,848 5425
2	3	42 31 25, 063	4,565 1592	8	8	89 51 50, 793	4,932 1822
	4	17 51 7, 328	4,221 7939		10	34 34 2, 142	4,686 0435
	3	52 29 10, 229	4,741 3374		7	10 27 3, 514	4,449 6103
3	4	84 40 26, 275	4,840 0752	9	9	146 33 41, 664	4,932 1822
	5	42 50 30, 066	4,674 4426		10	22 59 17, 205	4,782 6579
	3	86 13 58, 691	5,025 2012		8	23 11 52, 074	4,449 6103
4	5	53 6 45, 967	4,929 1248	10	9	99 14 52, 824	4,848 5425
	6	40 39 30, 195	4,840 0752		10	57 33 19, 347	4,780 5184
	4	49 57 23, 197	4,627 7548		9	87 32 16, 652	4,472 3562
5	5	46 6 58, 284	4,601 5606	11	10	21 0 10, 563	4,027 1430
	7	83 55 42, 791	4,741 3374		11	71 27 33, 545	4,449 6103

Hannover

Hannover

Transformacións conformes

Transformacións conformes

- Carta a Schumaker (5-07-1816).

Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich:

> *allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original en den kleinsten Theilen ähnlich werde.*

Ein specialler Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projectionen particuläre Auflösungen.

Transformacións conformes

- Carta a Schumaker (5-07-1816).

  Pensei nun problema interesante [para poñer nunha competición]:

  > *no caso xeral, proxectar (aplicar) unha superficie dada sobre outra, tamén dada, de manera que a imaxe e a orixinal sexan infinitesimalmente similares.*

  Un caso especial dase cando a primeira superficie é unha esfera e a segunda un plano. Entón as proxeccións estereográfica e de Mercator son solucións particulares.

Transformacións conformes

- Esta pregunta foi publicada pola *Copenhagen Scientific Society* en 1821.
- A resposta douna o propio Gauss o 11-12-1822.

Coordenadas isotermais

- Ó día seguinte, 12-12-1822, escribe nas súas notas privadas, que él mesmo titula *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

Coordenadas isotermais

- Ó día seguinte, 12-12-1822, escribe nas súas notas privadas, que él mesmo titula *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$. Esta fórmula non aparece (explicitamente) no *Disquisitiones*.

Coordenadas isotermais

- O día seguinte, 12-12-1822, escribe nas súas notas privadas, que él mesmo titula *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- *Das Krümmungsmass behält denselben Werth bei allen Umformungen der Fläche, die deren Linienelement* $m(du^2 + dv^2)$ *unverändert lassen.*

  La curvatura toma el mismo valor bajo todas las transformaciones de la superfície que dejan el elemento de línea invariante.

Transformacións conformes

- A resposta á pregunta formulada en 1821, foi dada en 1822, pero non se publicou ata 1825 en Astronomische Abhandlungen, Altona:

  Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten en den Kleinsten Theilen ähnlich wird.

  Una solución general al problema de aplicar una superficie dada sobre otra superficie de manera que la imagen y la suprficie aplicada sean infinitesimalmente similares.

Transformacións conformes

- A resposta á pregunta formulada en 1821, foi dada en 1822, pero non se publicou ata 1825 en Astronomische Abhandlungen, Altona:

  Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten en den Kleinsten Theilen ähnlich wird.

Ab his via sternitur ad maiora.

Siguiendo a Newton en ’De quadratura curvarum’, preludio del calculo de fluxiones.

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Poñemos $ds^2 = 0$ e despexamos dt.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad \left(dt + i \frac{du}{\sin u}\right)\left(dt - i \frac{du}{\sin u}\right) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Poñemos $ds^2 = 0$ e despexamos dt.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\quad (dt + i \frac{du}{\sin u})(dt - i \frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- Integrando
- $t \pm i \log \cot \frac{u}{2} = constante$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$
- Poñemos $ds^2 = 0$ e despexamos dt.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- Integrando
- $t \pm i \log \cot \frac{u}{2} = constante$
- $p = t, \; q = \log \cot \frac{u}{2}$
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u (dp^2 + dq^2)$

Ab his via sternitur ad maiora

$$P+iQ=f(p+iq)$$

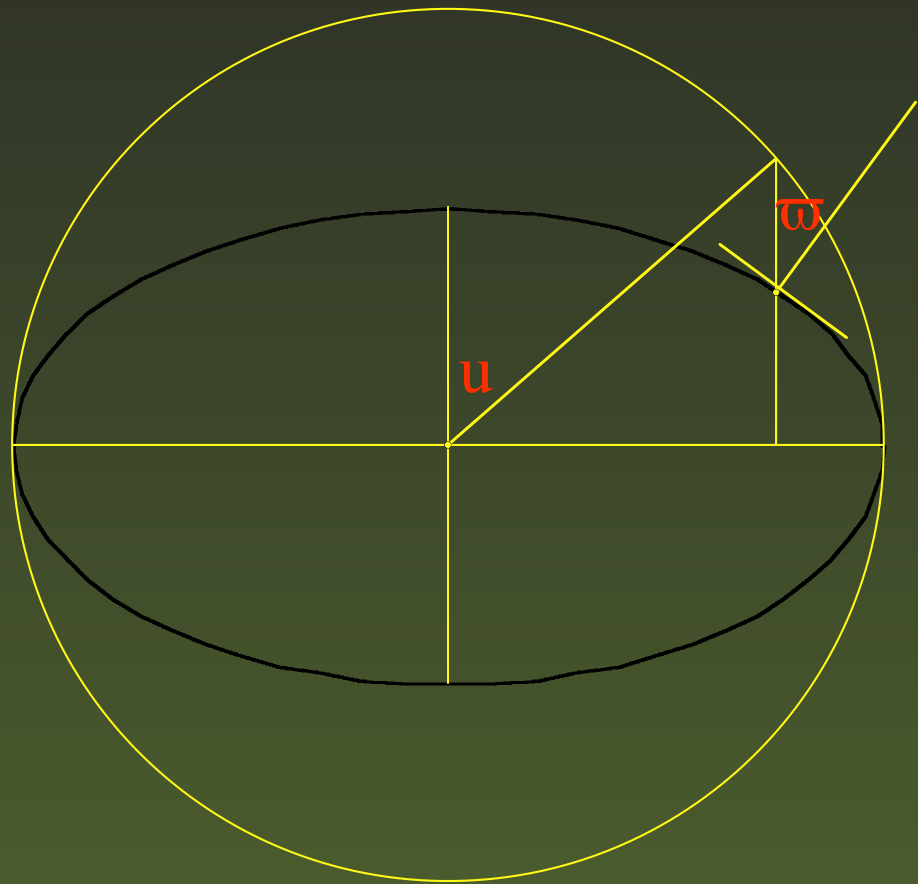
Ab his via sternitur ad maiora

- Elipsoide $\longrightarrow$ Esfera

$$T + i \log\cot\frac{U}{2} = f(t + i\log(\cot\frac{\omega}{2}\cdot(\frac{1-e\cos\omega}{1+e\cos\omega})^{\frac{e}{2}}))$$

- T e $90-U$ a lonxitude e latitude sobre a esfera.
- t e $90-\omega$ a lonxitude e latitude sobre o elipsoide.

Ab his via sternitur ad maiora



$$\tan\omega = \frac{b}{a}\tan u$$

Xeodesia avanzada

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie. I, II.

1844 e 1847 en *Abhanlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

Xeodesia avanzada

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie. I, II.

1844 e 1847 en *Abhanlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.

- I. Elipsoide $\longrightarrow$ Esfera.
- II. Trigonometría elipsoidal.

Xeodesia avanzada I

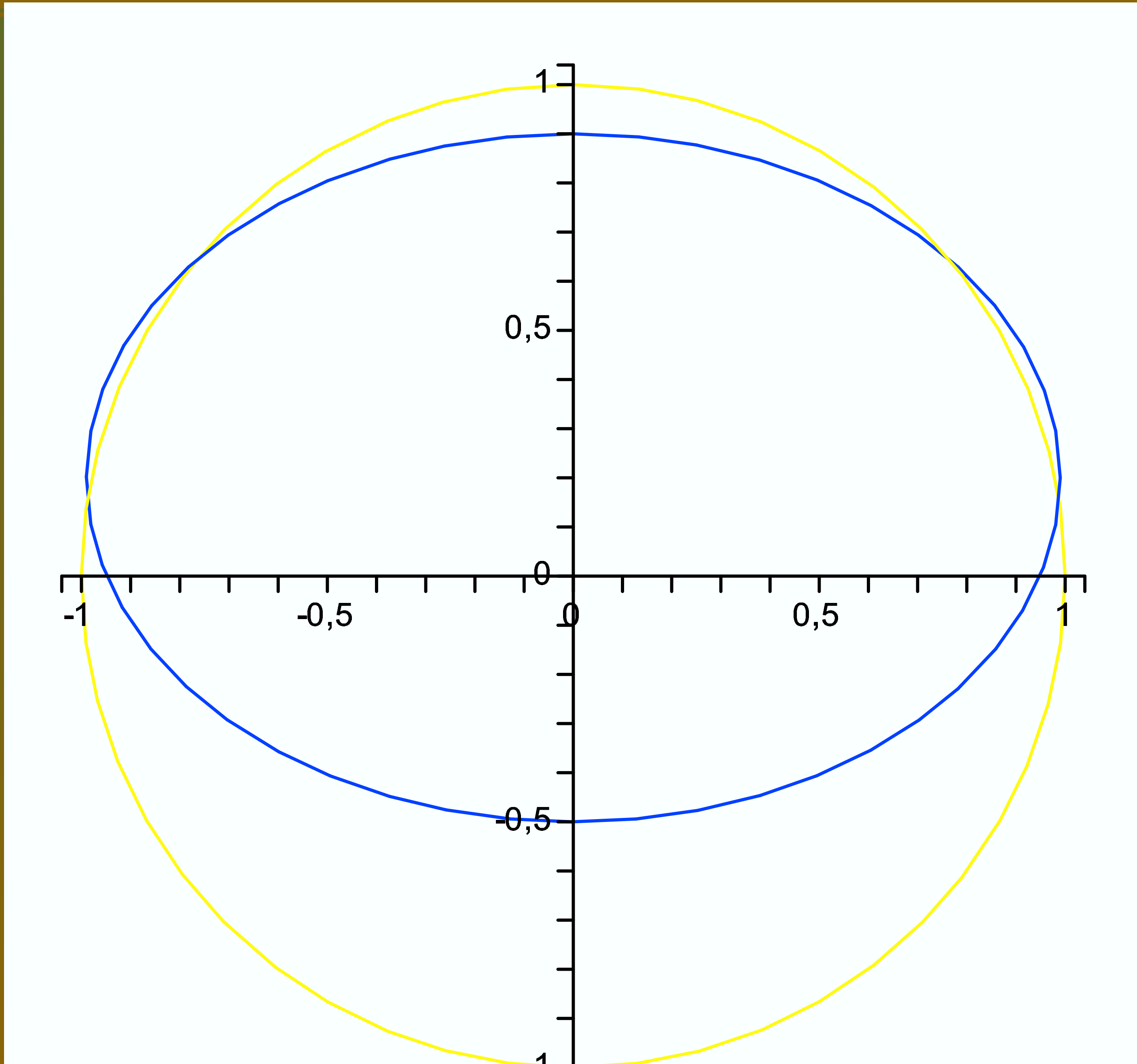
- Toma como aplicación holomorfa $f(z) = \alpha z - i \log k$, con α, k e A (radio da esfera) determinados para ter isometría ($m = 1$) no paralelo medio de Hannover, $Q = 52^\circ\ 40'\ 0''$.

Xeodesia avanzada I

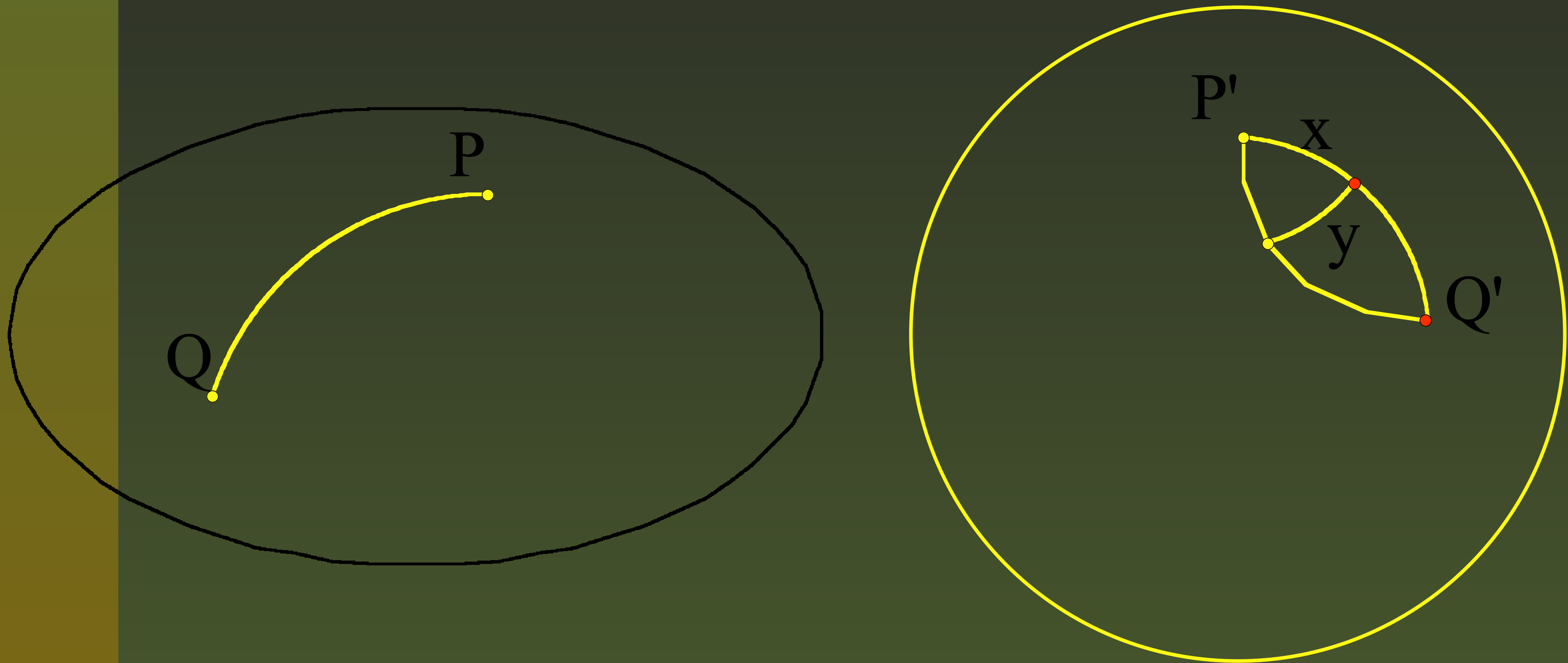
- Toma como aplicación holomorfa $f(z) = \alpha z - i \log k$, con α, k e A (radio da esfera) determinados para ter isometría ($m = 1$) no paralelo medio de Hannover, $Q = 52^\circ\ 40'\ 0''$.

$$\begin{aligned}
\log a &= 6.5148235337 \quad \text{Toise} \\
\log e &= 8.9122052079 \\
P &= 52^o\ 42'\ 2.53251'' \\
\log \frac{1}{k} &= 0.0016708804 \\
\log \alpha &= 0.0001966553 \\
\log A &= 6.5152074703 \quad \text{Toise}
\end{aligned}$$

Xeodesia avanzada I



Xeodesia avanzada I



$$d(P,Q) = \frac{d(P',Q')}{\sqrt{m_p m_Q}}$$

IV. Xeometría diferencial

Conxetura

- Gauss podería ter extendido a *analoxía* de Lambert á Xeometría diferencial, coa idea de atopar unha superficie que representara a esfera imaxinaria. En particular, de curvatura negativa.

Conxetura

- Gauss podería ter extendido a *analoxía* de Lambert á Xeometría diferencial, coa idea de atopar unha superficie que representara a esfera imaxinaria. En particular, de curvatura negativa.
- Podería ser este o camiño diferente tomado por Gauss para probar o V postulado, e ó cal se refire na súa carta a Schumaker? [(1846) falando sobre o traballo de Lobatschewsky]:

  [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

Conxetura

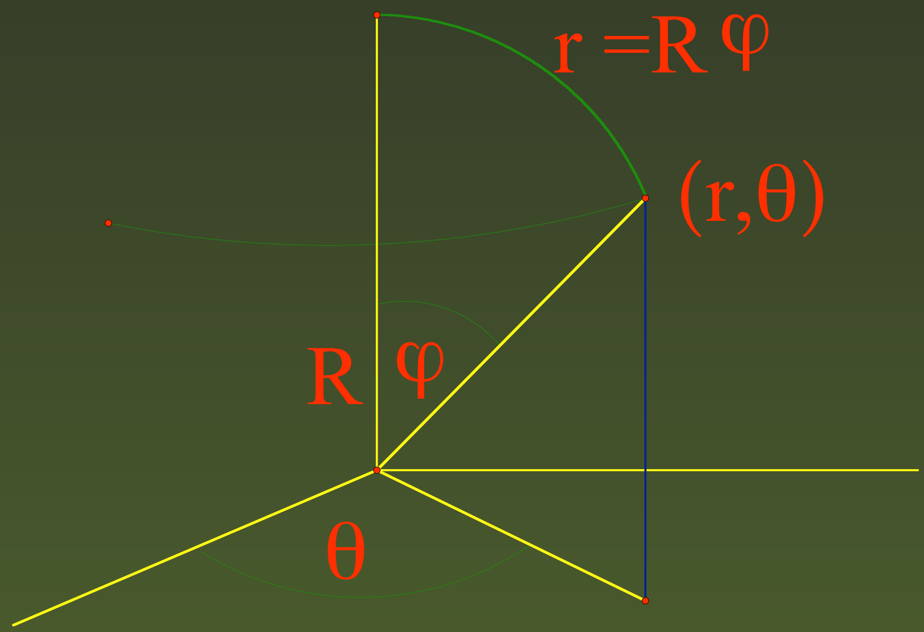
- Gauss podería ter extendido a *analoxía* de Lambert á Xeometría diferencial, coa idea de atopar unha superficie que representara a esfera imaxinaria. En particular, de curvatura negativa.
- Podería ser este o camiño diferente tomado por Gauss para probar o V postulado, e ó cal se refire na súa carta a Schumaker? [(1846) falando sobre o traballo de Lobatschewsky]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

- Foi o Disquisitiones escrito [parcialmente] con esta idea?

Elemento de lonxitude

- $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$



Obxetivo

- Encontrar unha superficie con

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

7 de Outubro de 1827

Carta a **Schumaker** (21-11-1825)

- *Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Theil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projectirten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen.*

Recientemente he retomado parte de mis investigaciones sobre superficies curvas, que habrán de formar parte de mi proyectado ensayo sobre geodesia avanzada.

Carta a **Schumaker** (21-11-1825)

- *Ich finde leider, dass ich dabei sehr weit werde ausholen müssen, da auch das Bekannte en einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muss.*

Desafortunadamente debo ir muy atras en la exposición, porque incluso lo que es conocido se debe desarrollar de diferente manera, adaptada a las nuevas investigaciones.

Disquisitiones

- 40 páxinas; 29 seccións.
- 5 novos (?) conceptos; 10 teoremas.
- Menciona Euler (§8), e Legendre (§27).
- A única superficie que aparece é a esfera.

Proxecto inacabado (?)

- *Attamen uberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.* §6

- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13

- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c*;* §26

Proxecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para outra ocasión unha exposición máis detallada da teoría destas figuras.* §6

- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13

- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Proxecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para outra ocasión unha exposición máis detallada da teoría destas figuras.* §6

- *O estudio dos cales abre á Xeometría un campo novo e fértil...* §13

- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Proxecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para outra ocasión unha exposición máis detallada da teoría destas figuras.* §6
- *O estudio dos cales abre á Xeometría un campo novo e fértil...* §13
- *A consideración do triángulo rectilíneo de lados iguais a* a, b, c *é dunha grande utilidade;* §26

Proxecto inacabado (?)

- *Debemos reservar para outra ocasión unha exposición máis detallada da teoría destas figuras.* §6
- *O estudio dos cales abre á Xeometría un campo novo e fértil...* §13
- *A consideración do triángulo rectilíneo de lados iguais a* a, b, c *é dunha grande utilidade;* §26
- Non encontra a esfera imaxinaria.

Novos conceptos

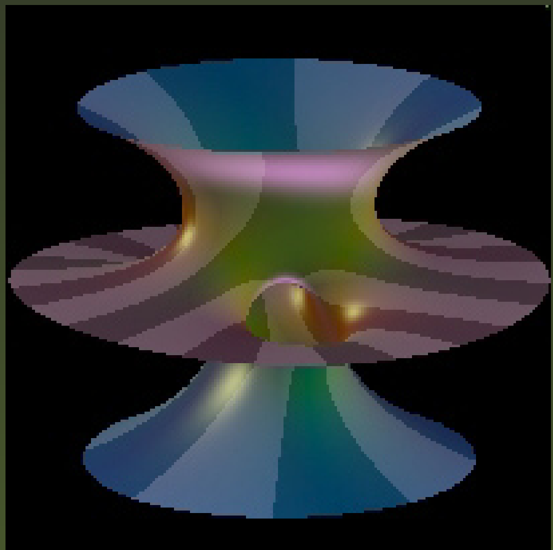
- Aplicación de Gauss. §6
- Curvatura de Gauss. §6
- Curvatura total. §6
- Variación angular. §17
- Carta absciso-xeodésica ortogonal. §19

Novos teoremas

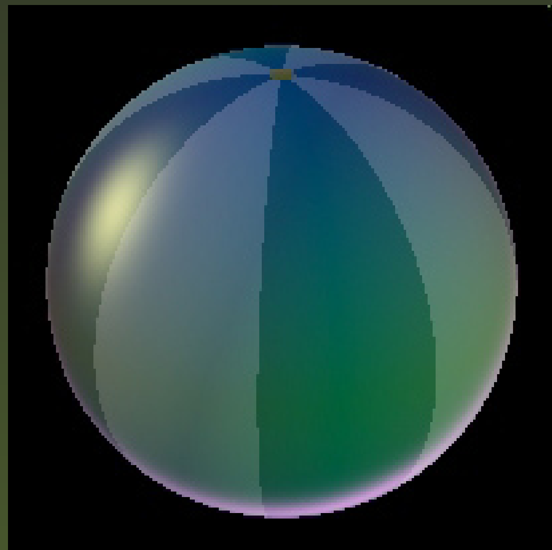
- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema egrexio. §12
- Lema de Gauss. §16
- $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. §19
- Teorema do defecto. §20
- $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$. §27

Curvatura. §6

$\gamma : S \longrightarrow S^2$ aplicación de Gauss.



$\longrightarrow$



$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Área de } \gamma(S)}{\text{Área de } S}$$

Curvatura de Euler. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Curvatura de Euler. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Xusto antes di: *Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curvatura superficierum curvarum primus docuit*

Curvatura de Euler. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Xusto antes di: *Estas conclusións conteñen case todo o que o il. Euler foi o primeiro de probar sobre curvatura de superficies.*

Olinde Rodrigues (1794-1851)

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, Vol 3, pag.$162 - 182$, 1815.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Aplicación de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Aplicación de Gauss.
- Curvatura de Gauss.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

- Gauss coñecía os 3 primeiros puntos antes de 1813 (non publicado).

O teorema egrexio. §11

$$\begin{aligned}
4 \quad & (EG-FF)^2\, k = E\Big(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \big(\frac{dG}{dp}\big)^2\Big) \\
+ \quad & F\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\Big) \\
+ \quad & G\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \big(\frac{dE}{dq}\big)^2\Big) \\
- \quad & 2(EG-FF)\Big(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp\cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\Big).
\end{aligned}$$

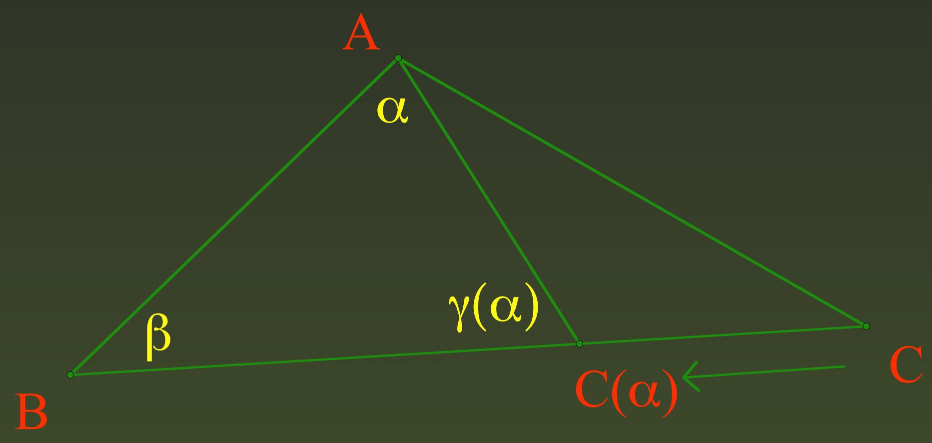
O teorema egrexio. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA *Si superficies curva en quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae en singulis punctis invariate manet.*

Variación angular

Variación angular no plano



α+β+γ=π;   1+γ' =0

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1}$$

- Observemos $\gamma(0) = \pi - \beta$.

Variación angular na esfera

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{b(\alpha)}{R}}$$

Área dun triángulo en $S^2(R)$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} R \sin \frac{r}{R} dr d\theta \\ &= R^2 \alpha - \int_0^{\alpha} R^2 \cos \frac{r(\theta)}{R} d\theta \end{aligned}$$

Área dun triángulo en $S^2(R)$

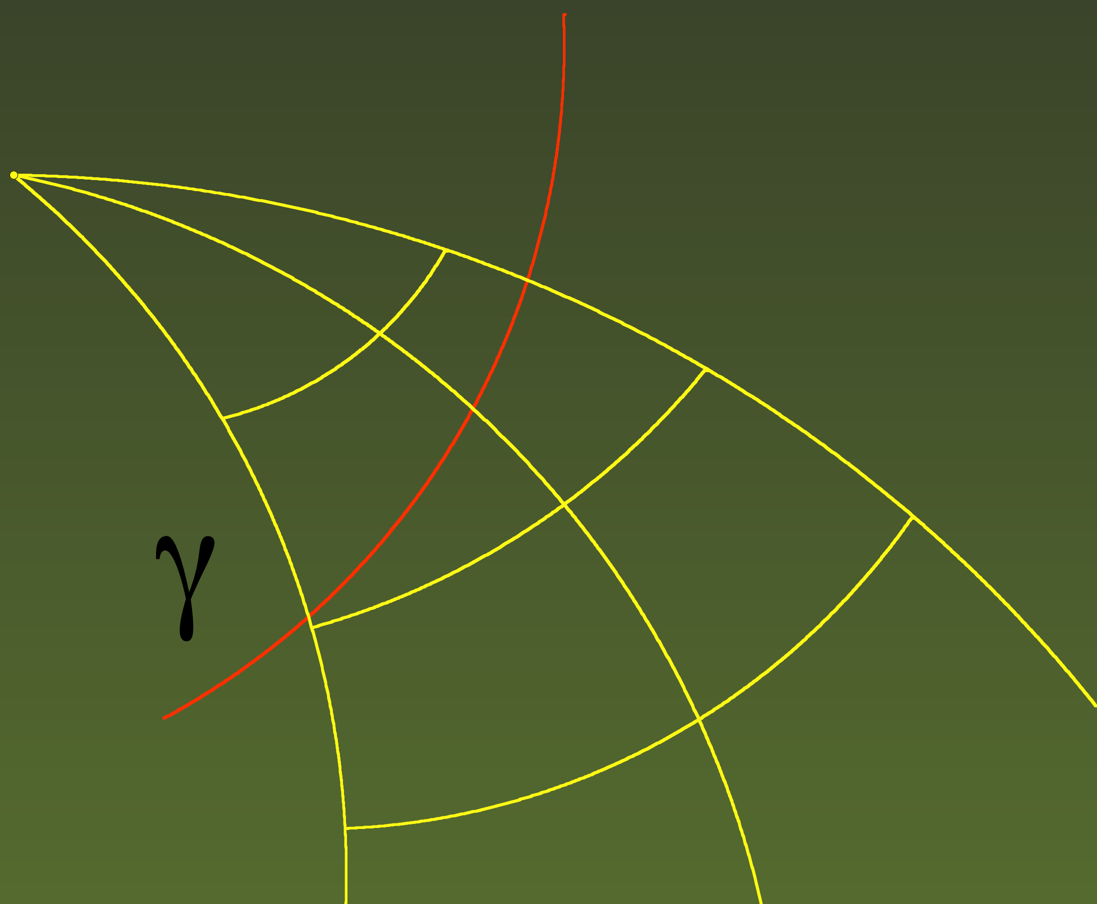
$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \\
&= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha)-\gamma(0)) \\
&= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\
&= R^2\cdot \text{Exceso}.
\end{aligned}$$

Disquisitiones (continuación)

Variación angular. §19

Elemento de lonxitude nuna carta absciso-geodésica ortogonal:

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2$$



Variación angular. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

Variación angular. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

- Coordenadas polares no plano:

$$G = r^2; \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -1$$

- Coordenadas polares na esfera:

$$G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}; \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -\cos\frac{r}{R}$$

Curvatura. §19

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Implica o teorema egrexio.

Teorema do defecto. §20

- A partir de

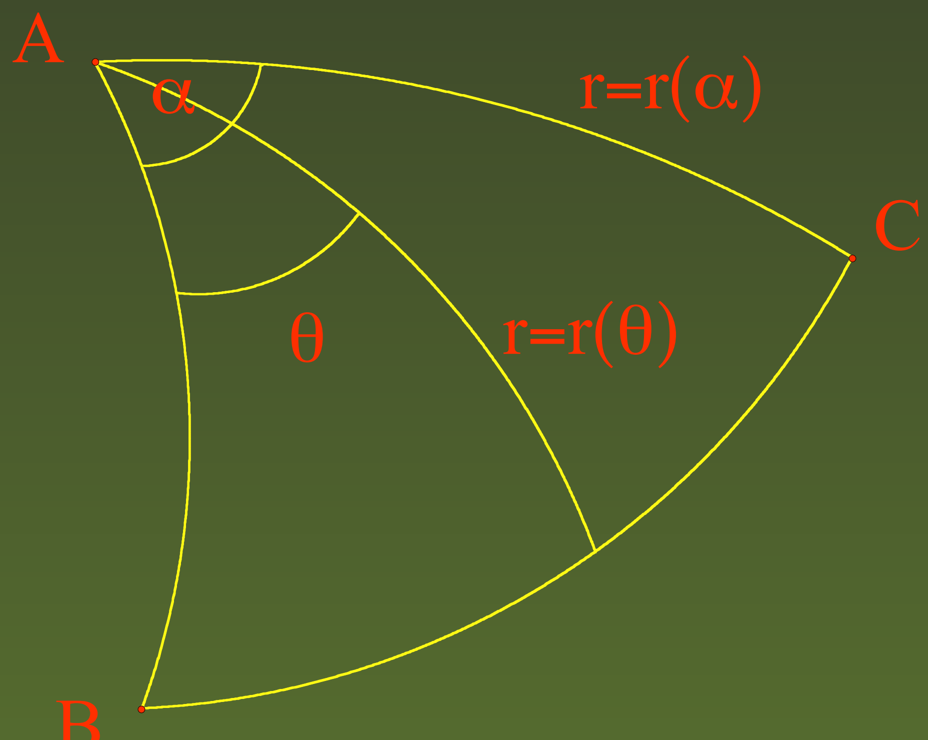
$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

Teorema do defecto. §20

- A partir de

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Integrando no triángulo



Teorema do defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$

Teorema do defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

Teorema do defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema do defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema do defecto. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Curvatura total = Área da imaxen esférica = Defecto

A versión de 1825.

- Demostra $\text{Área}(\nu(T)) = \text{Defecto}(T)$ pero di:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen, wenn der Punkt (3) innerhalb des Dreiecks fällt.

  La demostración requerirá alguna modificación e explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

A versión de 1825.

- Demostra $\text{Área}(\nu(T)) = \text{Defecto}(T)$ pero di:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen, wenn der Punkt (3) innerhalb des Dreiecks fällt.

  La demostración requerirá alguna modificación e explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

- Deduce, a partir de aquí, o teorema egrexio.

A versión de 1825.

- Demostra $\text{Área}(\nu(T)) = \text{Defecto}(T)$ pero di:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen, wenn der Punkt (3) innerhalb des Dreiecks fällt.

  La demostración requerirá alguna modificación e explicación, cuando el punto (3) es interior al triángulo.

- Deduce, a partir de aquí, o teorema egrexio.

- Defecto $\longleftrightarrow$ Egrexio

Últimas seccións

Teoremas de comparación. §26

Salvo cantidades de carto orde:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

Teoremas de comparación. §26

Salvo cantidades de carto orde:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

  - $\sigma =$ área ABC.
  - $k(A) =$ curvatura en A.
  - $A^* =$ ángulo do triángulo euclidiano con lados iguais ós lados do triángulo sobre a superficie.

A esfera §27

- As anteriores fórmulas foron primeiramente establecidas por Legendre sobre a esfera.

  $$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$$

A esfera §27

- As anteriores fórmulas foron primeiramente establecidas por Legendre sobre a esfera.

  $A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$

- Sumando, obtemos o teorema do defecto.

  $\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}$

BHI §28

Se BHI fora un triángulo esférico

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

BHI §28

Se BHI fora un triángulo esférico

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

Sobre o elipsoide terrestre *os cálculos dan*

- Hohehagen $-4''.95113$
- Brocken $-4''.95104$
- Inselsberg $-4''.95131$

BHI §28

Carta a Olbers (Marzo de 1827).

In praktischer Rücksicht ist dies zwar ganz unwichtig, weil en der That bei den grössten Dreieecken, die sich auf der Erde messen lassen, diese Ungleichheit en der Vertheilung unmerklich wird; aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, dass man die Natur dieser Ungleichheit klar begreife.

En consideraciones prácticas esto no es importante, ya que incluso en el triángulo más grande que se puede medir sobre la tierra, se hace imperceptible. Pero la dignidad de la ciencia requiere que se entienda claramente la naturaleza de esta desigualdad.

BHI. p. 314, Vol IX.

O triángulo rectilíneo con estes lados

$$\begin{aligned} HI &= 84942.45328 \\ IB &= 105974.4570 \\ BH &= 69195.07749 \end{aligned}$$

ten ángulos

$$\begin{aligned} B^* &= 53^o\ \ 6'\ 41.009760'' \\ H^* &= 86^o\ 13'\ 53.763480'' \\ I^* &= 40^o\ 39'\ 25.227360'' \end{aligned}$$

BHI. p. 314, Vol IX.

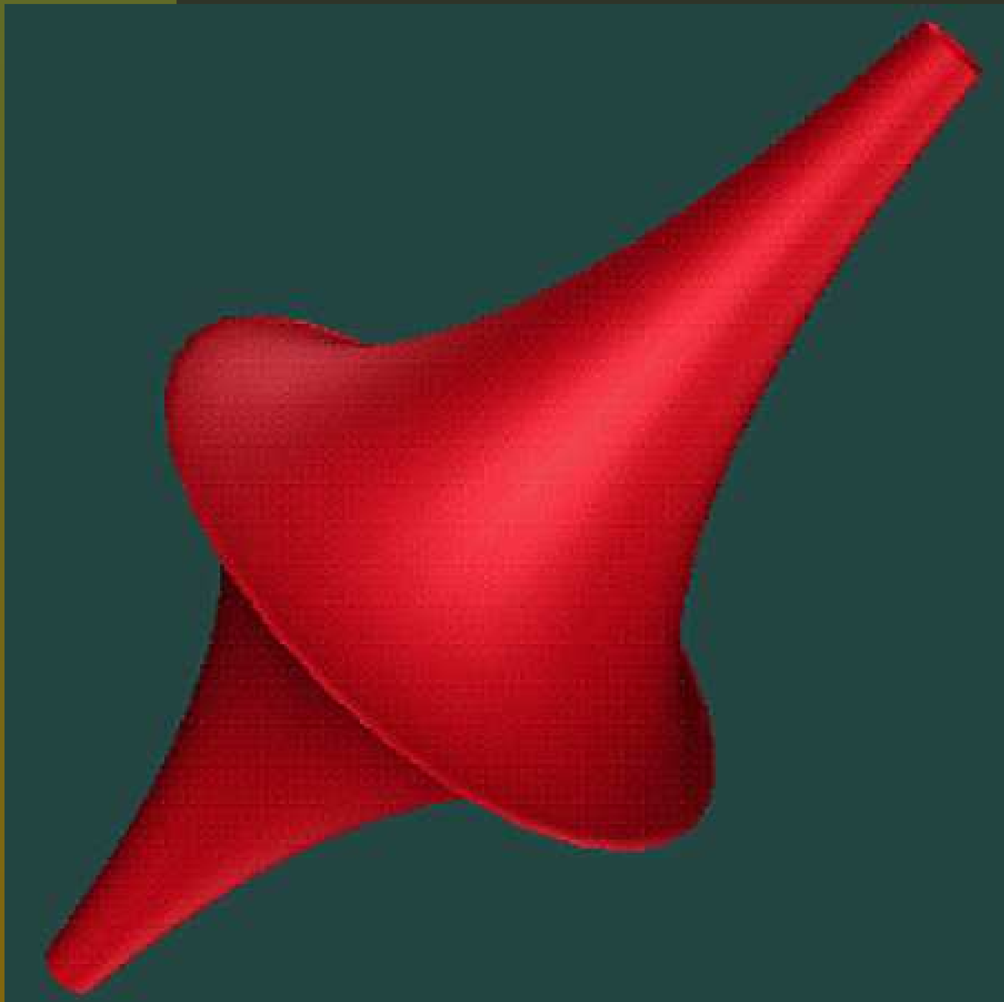
O exceso $14.8523''$ de BHI está distribuido:

$$\begin{aligned} H - H^* &= 4.9275 \\ B - B^* &= 4.9572 \\ I - I^* &= 4.9676 \end{aligned}$$

V. Gd-Gne.

Atopemos a esfera imaxinaria

Pseudoesfera. F. Minding (1840)



Tractriz

- Curva con subtanxente 1.
- $y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

Pseudoesfera

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

$x =$ ángulo de rotación; $y = e^{\tau}$, donde $\tau =$ distancia sobre a tractriz.

En coordenadas polares xeodésicas

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Pseudoesfera

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

$x =$ ángulo de rotación; $y = e^{\tau}$, donde $\tau =$ distancia sobre a tractriz.

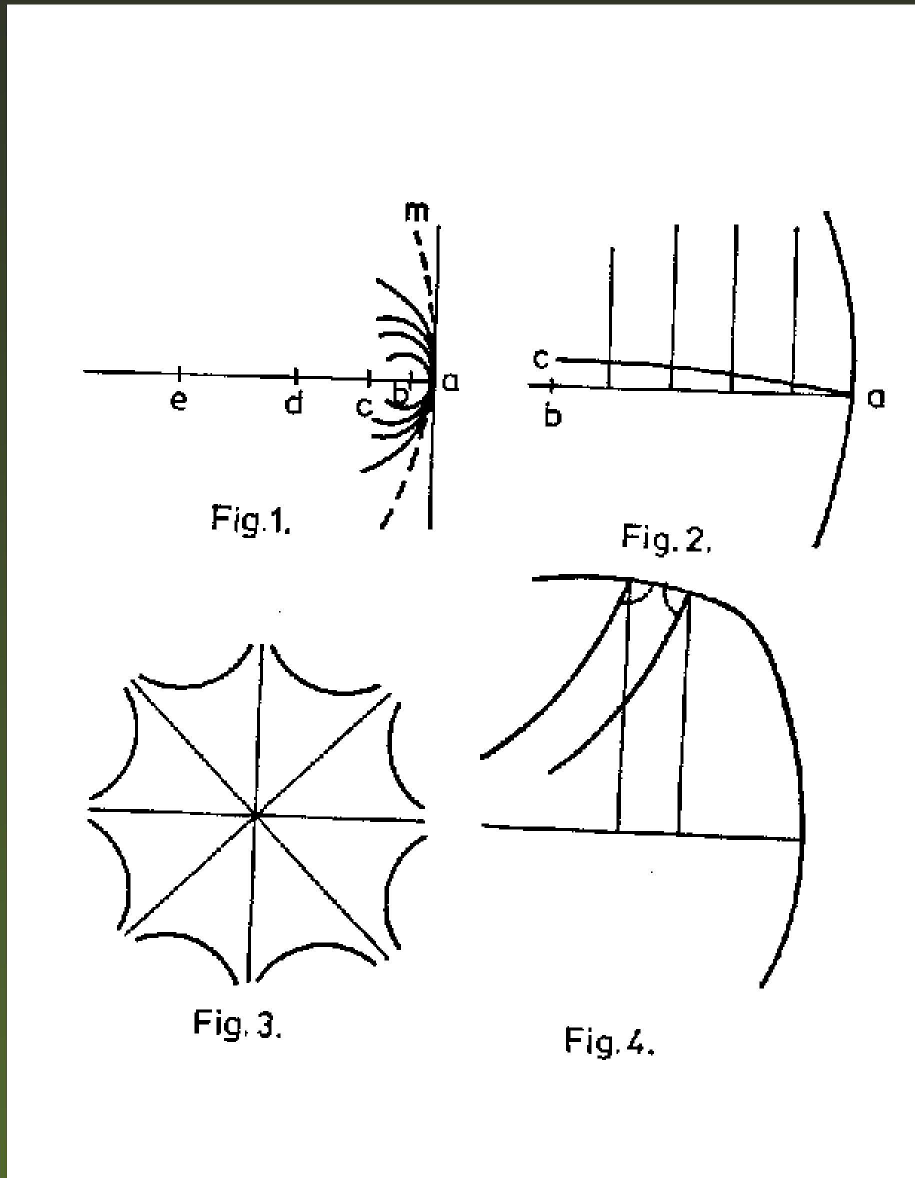
En coordenadas polares xeodésicas

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

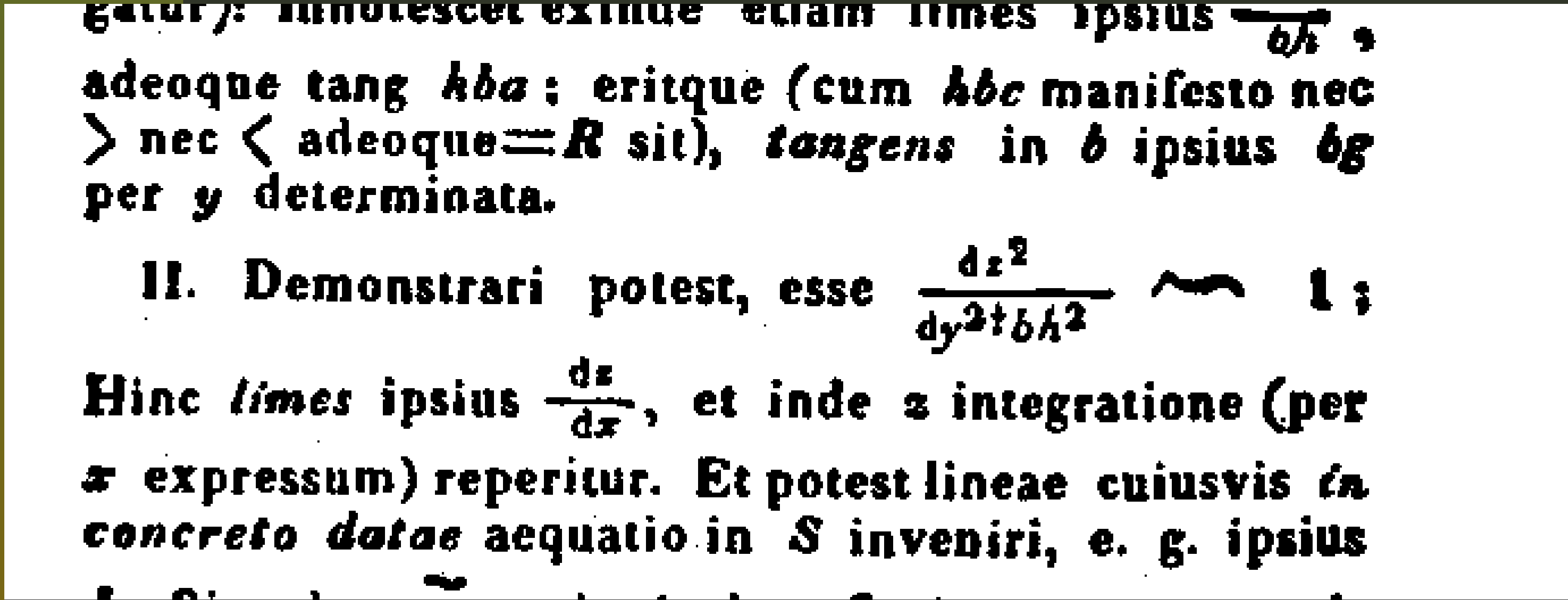
- Local

Ein Genie erster Grösse

János Bolyai



János Bolyai

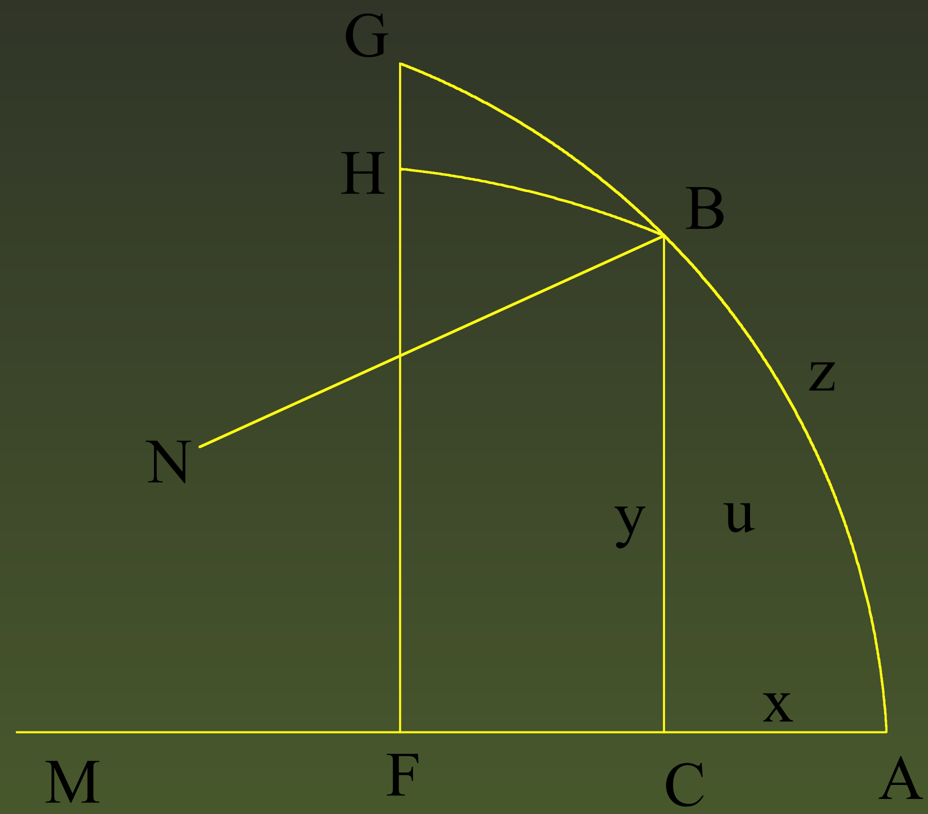


gatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{}{bh}$, adeoque tang hba; eritque (cum hbc manifesto nec > nec < adeoque $= R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$;

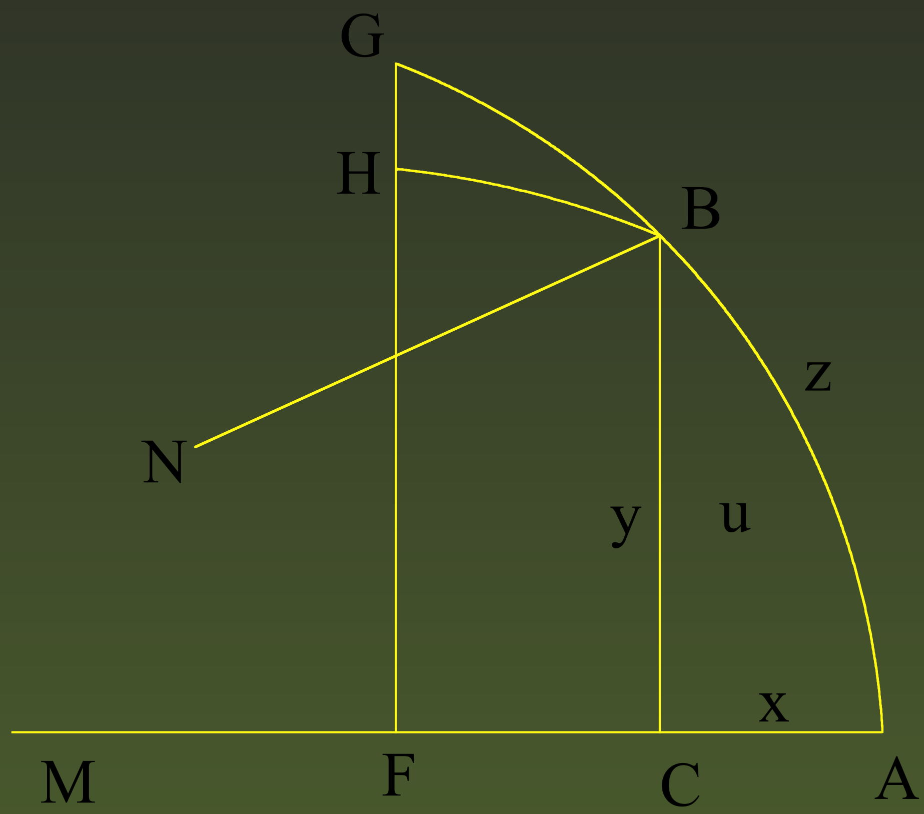
Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in S inveniri, e. g. ipsius

János Bolyai



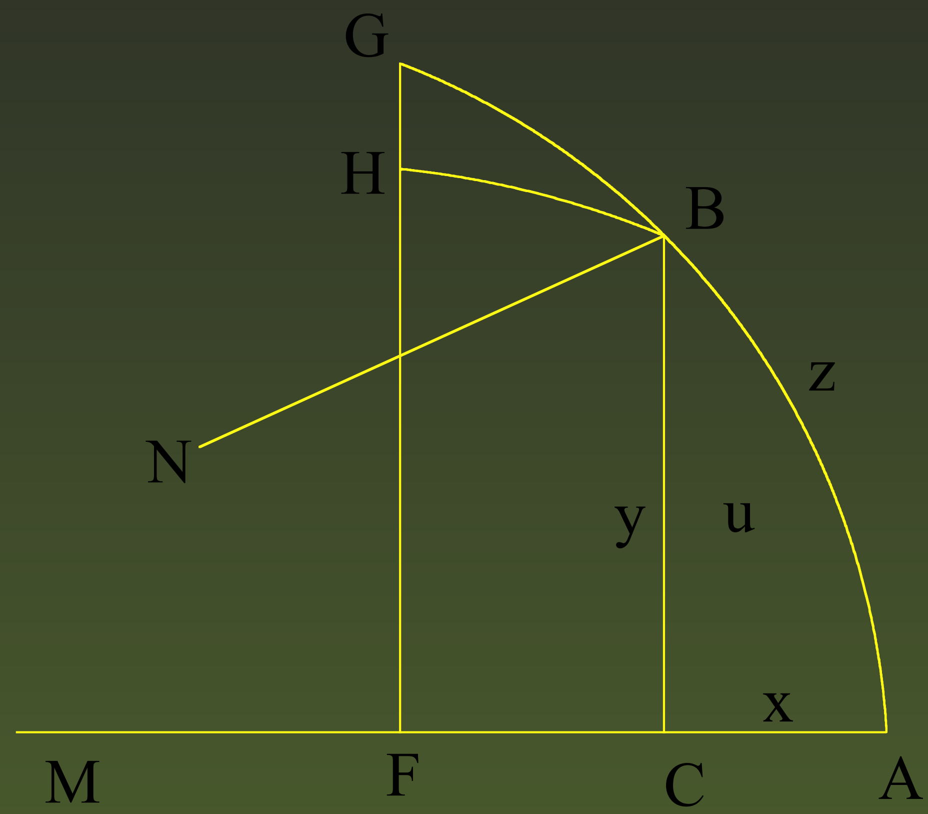
$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$

János Bolyai



$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2$$

János Bolyai

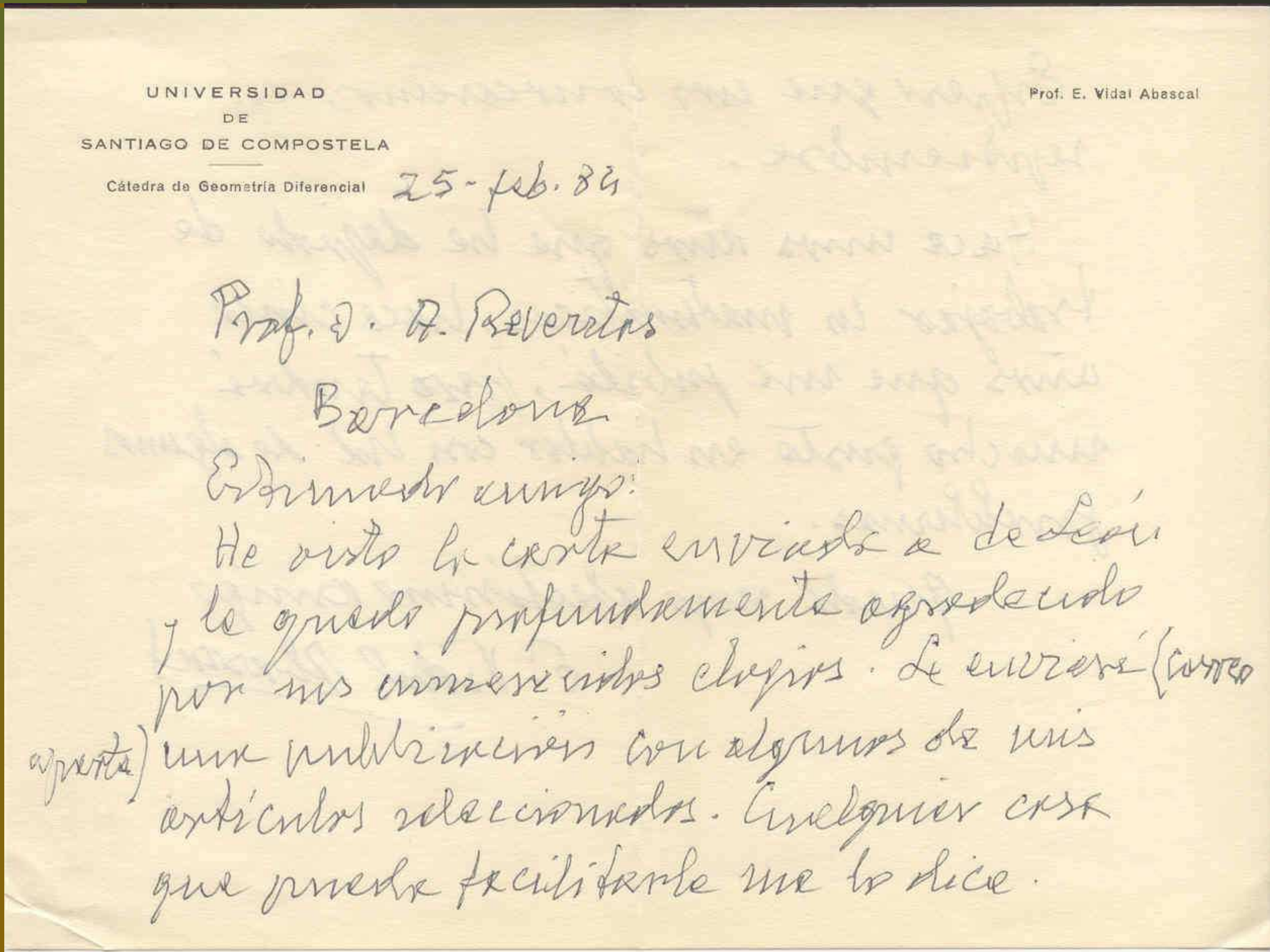


$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Un novo mundo creado da nada

Marosvásárhely

Derradeira carta



UNIVERSIDAD
DE
SANTIAGO DE COMPOSTELA
Cátedra de Geometría Diferencial

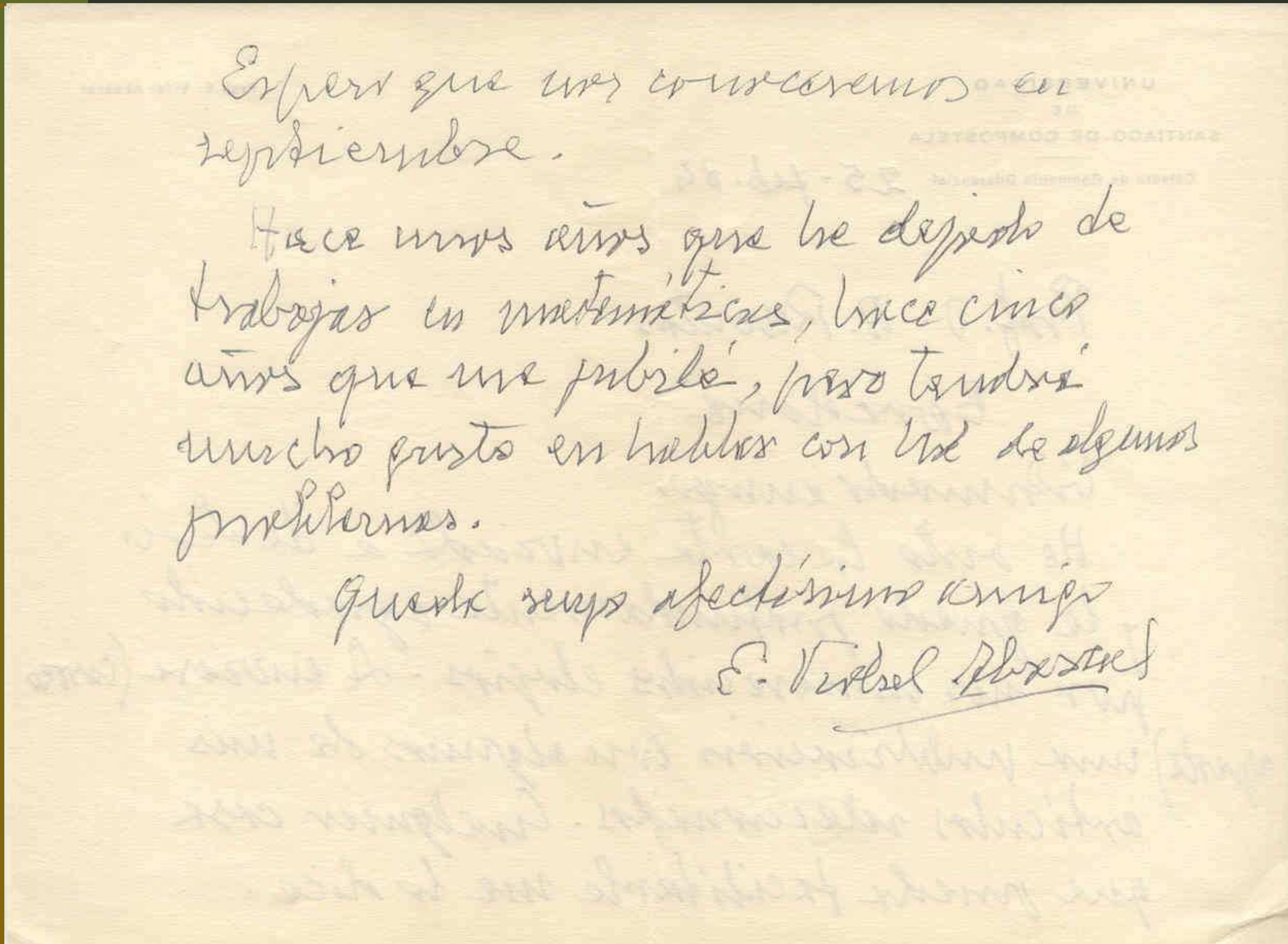
Prof. E. Vidal Abascal

25-feb. 84

Prof. D. A. Reventós
Barcelona

Estimado amigo:
He visto la carta enviada a de León y le quedo profundamente agradecido por sus inmerecidos elogios. Le enviaré (correo aparte) una publicación con algunos de mis artículos seleccionados. Cualquier cosa que pueda facilitarle me lo dice.

Derradeira carta



Espero que nos conozcamos en septiembre.

Hace unos años que he dejado de trabajar en matemáticas, hace cinco años que me jubilé, pero tendré mucho gusto en hablar con Vd. de algunos problemas.

Queda suyo afectísimo amigo

E. Vidal Abascal