Gauss eta Geometria

Geodesia eta Geometria ez-Euklidiarra

Geometrian Barrenako Ibilaldia

Geometria

- I. Geometria Euklidiarra.
- II. Geometria ez-Euklidiarra.
- III. Geodesia.
- IV. Geometria diferentzial (gainazalak).
- V. Gd-Gne.

Geometria

- I. Geometria Euklidiarra.
- II. Geometria ez-Euklidiarra. Bolyai
- III. Geodesia.
- IV. Geometria diferentztial (gainazalak).
- V. Gd-Gne.

Geometria

- I. Geometria Euklidiarra.
- II. Geometria ez-Euklidiarra. Bolyai
- III. Geodesia.
- IV. Geometria diferentzial (gainazalak).
- V. Gd-Gne. Bolyai

I. Geometria Euklidiarra

1796

- 1796ko martxoak 29. Hamazazpi alde.

1796

- 1796ko martxoak 29. Hamazazpi alde.
- Gerling-i bidalitako eskutitza 1819.

1796

- 1796ko martxoak 29. Hamazazpi alde.
- Gerling-i bidalitako eskutitza 1819.

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29 März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran.

La historia de este descubrimiento no se ha mencionado hasta ahora; la puedo explicar muy exactamente. Fue el dia 29 de marzo de 1796, y la coincidencia nada tuvo que ver en ella.

1796

- 1796ko martxoak 29. Hamazazpi alde.
- Gerling-i bidalitako eskutitza 1819.

Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

en zwei Gruppen [...]

Todo está en dividir las raíces de la ecuación...

1796

- 1796ko martxoak 29. Hamazazpi alde.
- Gerling-i bidalitako eskutitza 1819.

[...] glückte es mir bei einem Ferenaufenthalt en Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.

Durante unas vacaciones en B. una mañana (antes de levantarme de la cama) vi claramente todas las correlaciones y apliqué al polígono de 17 lados la correspondiente confirmación numérica.

Egunkaria

- Biharamunean, 1796ko martxoaren 30ean, egunkaria idazten hasi zen, 19 urte bete baino hilabete bat lehenago.

  [1],[3],[55],[65],[66],[116], sarrerak poligonoei dagokie. Galois-en Teoria jaio da.

Egunkaria

- Biharamunean, 1796ko martxoaren 30ean, egunkaria idazten hasi zen, 19 urte bete baino hilabete bat lehenago.

  [1],[3],[55],[65],[66],[116], sarrerak poligonoei dagokie. Galois-en Teoria jaio da.

  [1] *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*

Braunschweig

Göttingen

II. Geometria ez-Euklidiarra

1792

- Schumaker-i bidalitako eskutitza 1846

Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe.

.. Sabes que durante 54 años he compartido los mismos puntos de vista [1792]

1792

- Schumaker-i bidalitako eskutitza 1846

Ein gewisser Schweikart nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatchevski imaginäire Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 *Jahren (seit* 1792*) dieselbe Überzeugung habe.*

.. Sabes que durante 54 años he compartido los mismos puntos de vista [1792]

Tenia 15 años!

1794

- Gerling-i bidalitako eskutitza 1846.

  Der Satz, den Ihnen Hr. Schweikart erwähnt hat, dass en jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von 360° *um eine Grösse verschieden ist, [....] welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr* 1794 *als nothwending erkannte.*

  El teorema que Mr. S. le menciona a usted, que en cada Geometría la suma .. es el primer teorema en el umbral de esta teoría, de lo que ya me di cuenta en el año 1794.

Egunkaria

- 1797ko uztailak 28.

[72] *Plani possibilitatem demonstravi.*

Egunkaria

- 1799ko iraila.

[99] *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.*

Parallelentheorie

- Gaussen paperen artean aurkituriko oharrak (1831).
- Gai honen gaineko bere iritzia ezagutzen dugu eskutitz batzuen ezker. Sabemos lo que pensaba gracias a unas cuantas cartas
- Dena dela, eskutitz hauetan agertzen diren Geometria Astralari buruzko emaitzak Lambertekiko analogiaz zuzenean ondoriozta daitezke. Todos los resultados sobre Geometria astral que aparecen en estas cartas se pueden deducir directamente de la *analogia de Lambert*.

Lambert (1728-1777)

- Lambertek aipatzen *du angelu agudoaren geometria* erradio irudikariko esfera baten gaineko geometriari dagokiola.

- Gaussek Lamberten lana konsultatu zuen Gottingeneko bibliotekan 1795ko urriaren 24an eta 1797ko urtalirraren 2an.

- Taurinusek analogia garatu zuen.

Analogia

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}.$

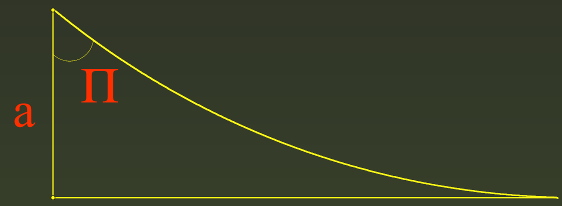
Defektu

Analogia trigonometrian:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{R}}{1+\cosh\frac{a}{R}}$$

- $\alpha < \pi/3$
- $\alpha + \alpha + \alpha < \pi$

Paralelismo angelua



$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R}$$

$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

Eskutitz batzuk

F. Bolyai-i bidalitako eskutitza 1799

- *Wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegeben Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun whol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht;*

Si se pudiera probar que existe un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces yo estaría en condiciones de probar rigurosamente toda la Geometría. Mucha gente tomaría esto como un axioma, pero yo no.

Gerling-i bidalitako eskutitza 1816

- *Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel* $= 59°59'59''.99999$.

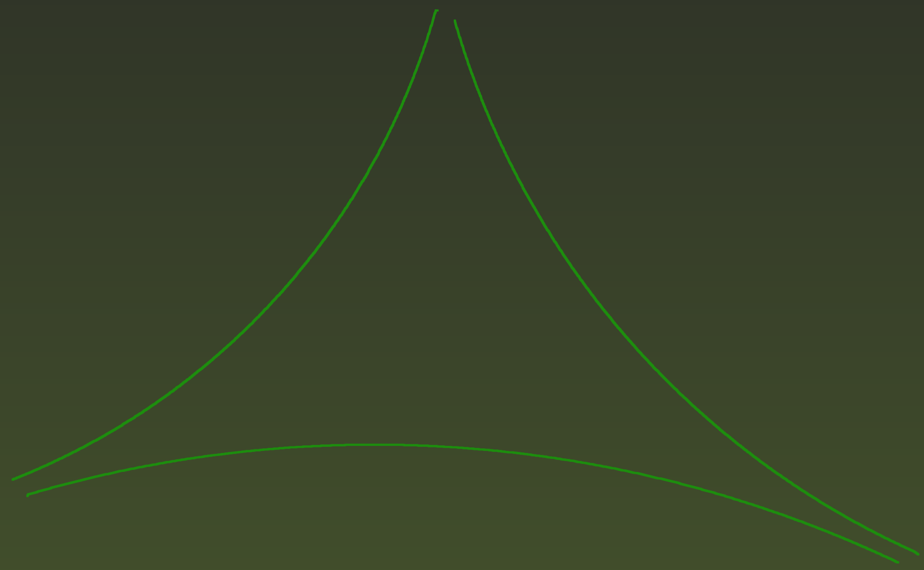
Sería incluso deseable que la GE no fuera cierta, porque entonces tendríamos una unidad de medida a priori. Por ejemplo, el lado de un triángulo equilátero...

Gerling-i bidalitako eskutitza 1819

- *Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen* 180° *ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthalten Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist*

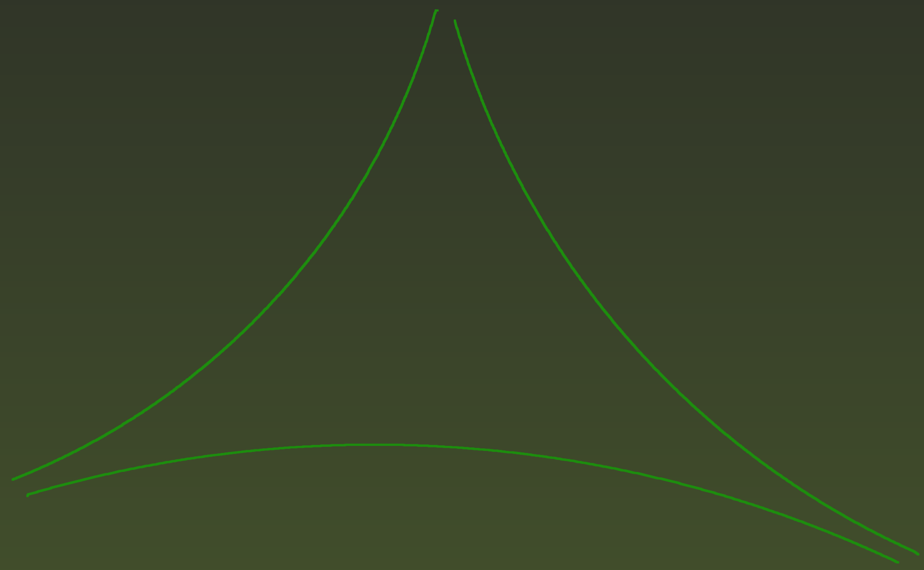
El defecto no es sólo más grande cuando el área se hace más grande, sino que es exactamente proporcional a ella, de tal manera que el área tiene una cota que no se puede alcanzar, y esta cota es igual al área encerrada por 3 líneas asintóticas. La fórmula para esta cota es

Gerling-i bidalitako eskutitza 1819



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log\text{ hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Gerling-i bidalitako eskutitza 1819



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1831

- *Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.*

Hace algunas semanas que he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de 40 años atrás. Nunca las había redactado, y ello me ha obligado a empezar mi trabajo de nuevo tres o cuatro veces. No quisiera que esto muriese conmigo.

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1831

- Eskutitz honetan esaten du r erradioko zirkunferentzia baten luzera:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

dela, eta komentatzen du harturiko neurriak datu esperimentalekin bat etortzeko, k infinitua izatea beharrezkoa dela.

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1831

- Eskutitz honetan esaten du r erradioko zirkunferentzia baten luzera:

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

dela, eta komentatzen du harturiko neurriak datu esperimentalekin bat etortzeko, k infinitua izatea beharrezkoa dela.

- Gauss idazteari utzi zuen 1832-n, János Bolyai-ren lana ezagutzean.

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1832

- *Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwicklet.*

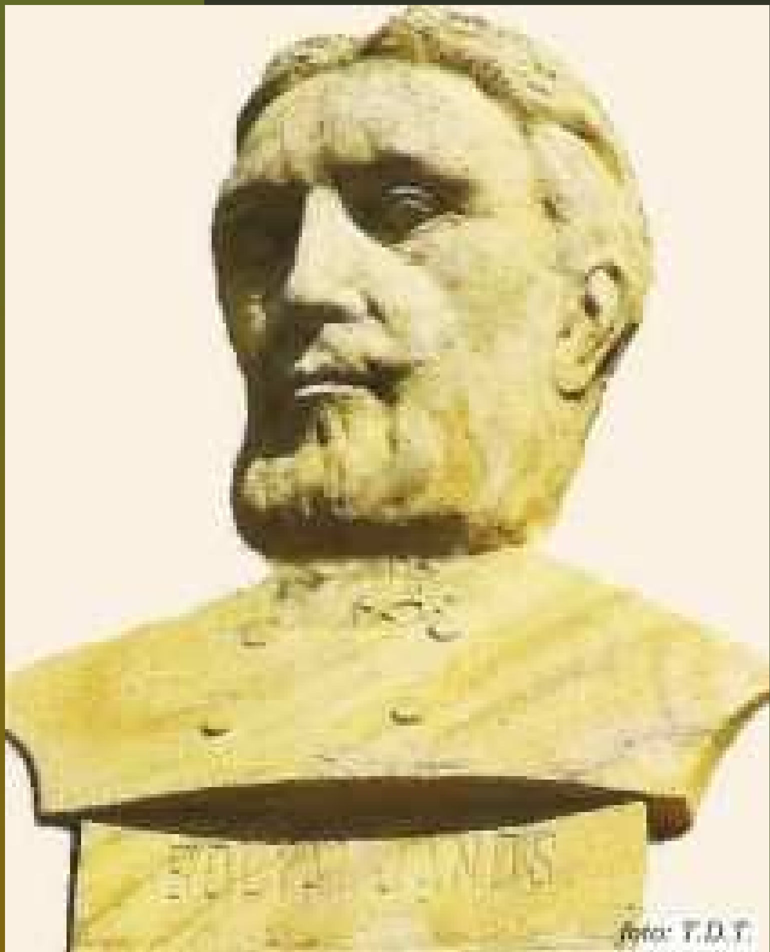
Te comento también que he recibido estos días un pequeño trabajo desde Hungría, sobre Geometrías no Euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados desarrollados muy elegantemente.

Gerling-i bidalitako eskutitza 1832

- *Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren [...] Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse...*

  El autor es un joven oficial austríaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí en 1978, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación actual. Tengo a este joven geómetra v. Bolyai como uno de los más grandes genios.

János Bolyai (1802-1860)

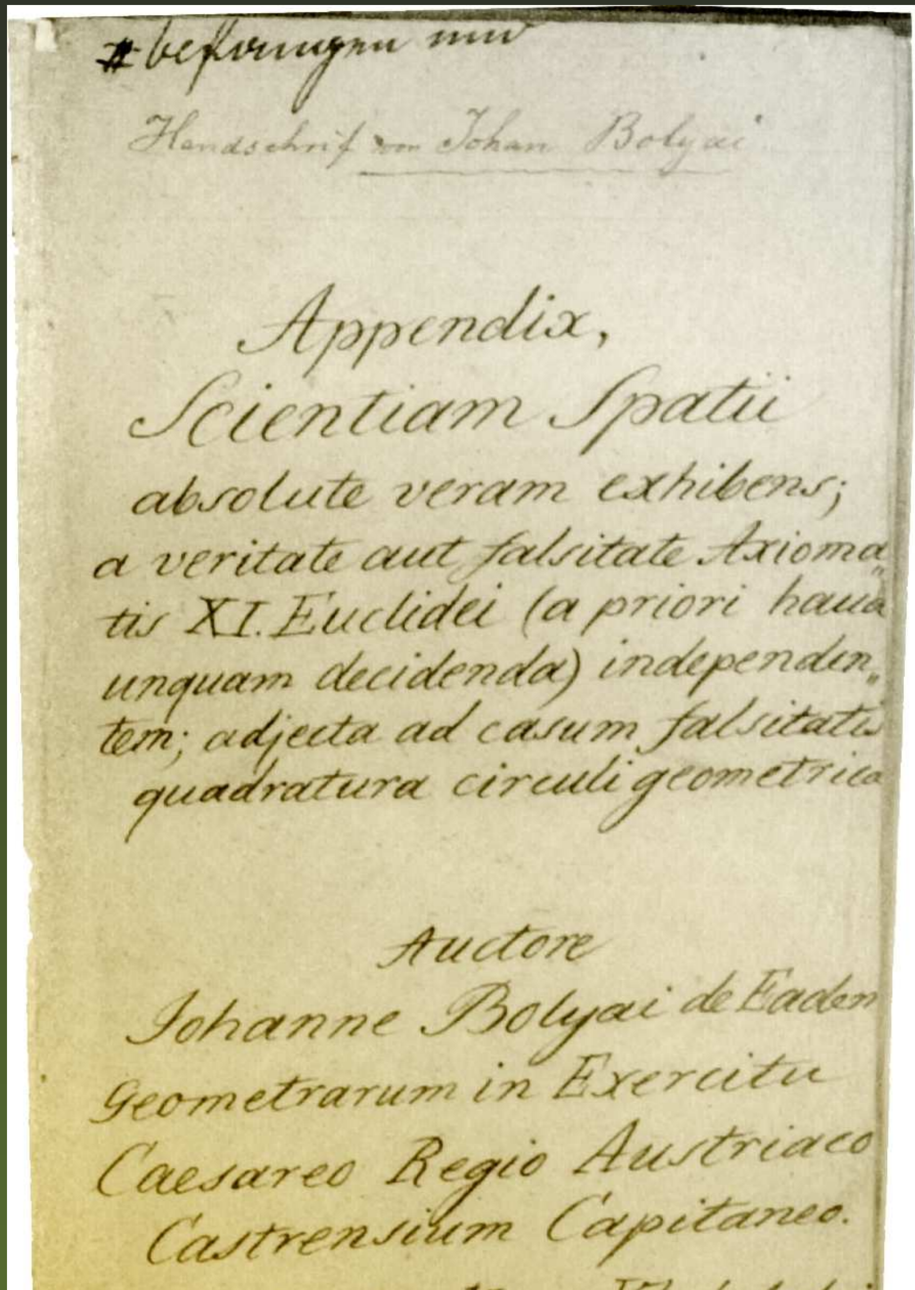


Farkas János-i. 1820ko apirila

Jainkoaren izenean! Utzi bakean zuzen paraleloak. Arnega ezazu haietaz elkarrizketa lotsagarri batez bezala: denbora, osasuna, lasaitasuna eta zure bizitzaren zoriontasun osoa kenduko dizute, niri gertatu zait legez.

Por el amor de Dios! Deja las paralelas tranquilas, abjura de ellas como de una charla indecente, te quitaran (como a mí) todo tu tiempo, salud, tranquilidad y la felicidad de tu vida.

Tentamen


Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Carta a **Farkas Bolyai** (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

Carta a Farkas Bolyai (6-03-1832)

- *Und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.*

  Y es una gran alegría para mí que sea justamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de manera tan remarcable.

- Bai Historia aldatuko litzakeela Gaussek János Bolyai-ren lanari buruzko bere iritzi ona argitaratu izan balu!

III. Geodesia

Geodesia

Geometrilaririk dotoreena eta astronomorik perfektuena, hauek dira bihotz-bihotzetik maitatzen ditudan eta desberdinak diren bi titulu, zeinak pasio osoz atsegin ditudan, biak elkarrekin daudenean.

Hannover

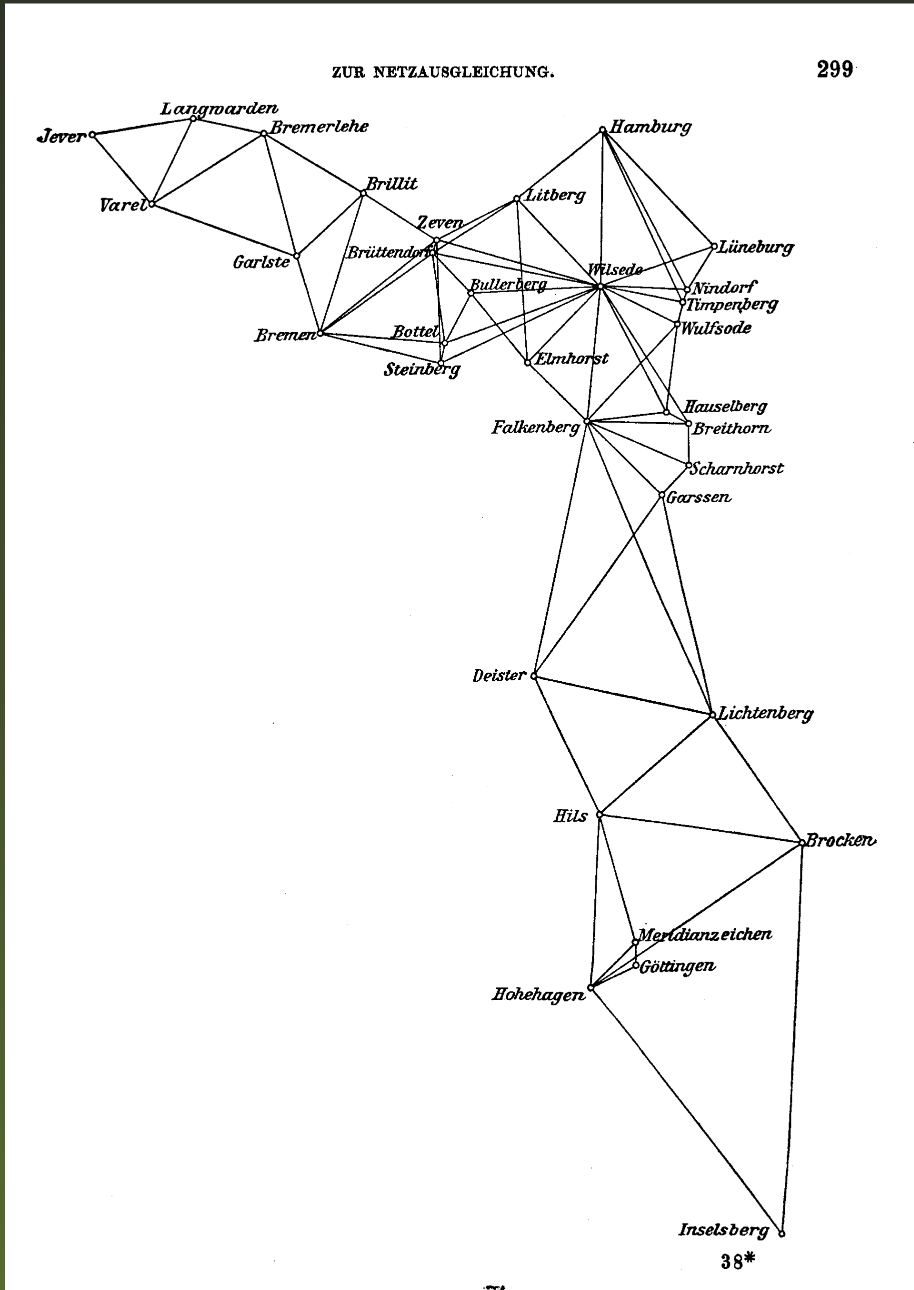
Britainia Handiko erregea George III.ak, Hannoverreko hautesle, Hannover Erresuma triangulatzeko agindua eman zion Gauss 1818an.

Hannover

Britainia Handiko erregea George III.ak, Hannoverreko hautesle, Hannover Erresuma triangulatzeko agindua eman zion Gauss 1818an.

- 8 urte edo eman zion honek.
- Karratu minimoen metodoa erabili zuen.
- Heliotropoa asmatu zuen.
- Emaitzak ez ziren guztiz behar bezalakoak. Los resultados no fueron suficientemente satisfactorios
- Besselek komentatu zuen Gauss-i berak geodesikoei buruzko egindako lana, adimen matematiko gutxiagoko beste norbaitek egin lezakeela.

Hannover


ZUR NETZAUSGLEICHUNG.
299
Langwarden
Jever
Bremerlehe
Varel
Brillit
Hamburg
Litberg
Zeven
Garlste
Brüttendorf
Lüneburg
Wilsede
Bullerberg
Nindorf
Timpenberg
Bremen
Bottel
Wulfsode
Elmhorst
Steinberg
Hauselberg
Falkenberg
Breithorn
Scharnhorst
Garssen
Deister
Lichtenberg
Hils
Brocken
Meridianzeichen
Göttingen
Hohehagen
Inselsberg
38*

Hannover

[3.]

[Zusammenstellung der beobachteten Dreiecke und ihrer Widersprüche.]

Nr.	Eckpunkt	Winkel	Excess
1	1 2 3	115° 58′ 47″,435 48 19 36,048 15 41 35,239 179 59 58,722 −1,436	0″,158
2	2 3 4	119 37 29,268 42 31 25,667 17 51 7,707 180 0 2,642 +1,294	1,348
3	3 4 5	52 29 10,876 84 40 26,895 42 50 30,659 180 0 8,430 +1,862	6,568
4	3 5 6	86 13 58,366 53 6 45,642 40 39 30,165 180 0 14,173 −0,680	14,853

Nr.	Eckpunkt	Winkel	Excess
10.	8 9 10	23° 11′ 52″,206 99 14 52,452 57 33 19,258 180 0 3,916 −0,329	4″,245
11	9 10 11	87 32 16,986 21 0 11,004 71 27 33,968 180 0 1,958 +1,200	0,758
12	10 11 12	22 10 9,986 64 11 24,606 93 38 25,839 180 0 0,431 −0,328	0,759
13	10 12 13	8 0 47,395 28 17 42,299 143 41 29,140 179 59 58,834 −1,368	0,202

Nr.	Eckpunkt	Winkel	Excess
19	12 13 15	27° 27′ 12″,046 148 10 28,108 4 22 19,354 179 59 59,508 −0,813	0″,321
20	13 14 15	34 25 46,752 109 38 36,566 35 55 37,227 180 0 0,545 −0,750	1,295
21	14 15 16	80 10 54,559 15 24 48,626 84 24 15,820 179 59 59,005 −1,344	0,349
22	15 16 17	7 35 56,089 96 37 6,464 75 46 59,128 180 0 1,681 +1,505	0,176

Hannover

1\. $0 = -0{,}718 \quad + 3(1) - (2)$

2\. $0 = +0{,}647 \quad - (1) + 3(2) + (3)$

3\. $0 = +0{,}931 \quad + (2) + 3(3) - (4) - (5)$

4\. $0 = -0{,}340 \quad - (3) + 3(4)$

5\. $0 = -0{,}331 \quad - (3) + 3(5) - (6)$

6\. $0 = -0{,}032 \quad - (5) + 3(6) - (7) - (8)$

(7\. $0 = +0{,}233.5 - (6) + 3(7) + (8) + (9) - (10))$

8\. $0 = +0{,}510.5 - (6) + (7) + 3(8) - (9) + (10)$

9\. $0 = -0{,}442 \quad + (7) - (8) + 3(9) + (10) - (11)$

10\. $0 = -0{,}164.5 - (7) + (8) + (9) + 3(10) - (11)$

11\. $0 = +0{,}600 \quad - (9) - (10) + 3(11) - (12)$

12\. $0 = -0{,}164 \quad - (11) + 3(12) - (13) - (14)$

(13\. $0 = -0{,}684 \quad - (12) + 3(13) + (14) - (15) - (16) - (19))$

14\. $0 = -0{,}569.5 - (12) + (13) + 3(14) + (16) + (17) - (18) + (19)$

(15\. $0 = +0{,}886.5 - (13) + 3(15) + (16) - (17) + (20))$

16\. $0 = +0{,}521 \quad - (13) + (14) + (15) + 3(16) + (17) - (18) - (19) - (20)$

17\. $0 = -0{,}740.5 + (14) - (15) + (16) + 3(17) - (18) + (20) - (21)$

18\. $0 = -0{,}918.5 - (14) - (16) - (17) + 3(18) - (27) - (28)$

19\. $0 = -0{,}406.5 - (13) + (14) - (16) + 3(19) + (20)$

20\. $0 = -0{,}375 \quad + (15) - (16) + (17) + (19) + 3(20) - (21)$

21\. $0 = -0{,}672 \quad - (17) - (20) + 3(21) - (22) - (23)$

22\. $0 = +0{,}752.5 - (21) + 3(22) + (23) - (24) - (25) + (38)$

23\. $0 = -0{,}228 \quad - (21) + (22) + 3(23) + (25) + (26) - (29) - (38)$

24\. $0 = +0{,}660 \quad - (22) + 3(24) + (25) - (26) + (39)$

25\. $0 = +0{,}108 \quad - (22) + (23) + (24) + 3(25) + (26) - (29) + (38) - (39)$

26\. $0 = -0{,}688.5 + (23) - (24) + (25) + 3(26) - (29) + (39)$

27\. $0 = -1{,}577.5 - (18) + 3(27) + (28) - (29) + (30) + (31)$

28\. $0 = -0{,}914 \quad - (18) + (27) + 3(28) - (32) + (33)$

29\. $0 = -0{,}600.5 - (23) - (25) - (26) - (27) + 3(29) - (30) - (31)$

30\. $0 = -0{,}378 \quad + (27) - (29) + 3(30) + (31) - (32) - (34) + (35) - (40)$

31\. $0 = -0{,}900 \quad + (27) - (29) + (30) + 3(31) - (35) - (37) + (40)$

32\. $0 = +0{,}290 \quad - (28) - (30) + 3(32)$

Hannover

[8.]

Ausgleichungswerthe.

Nr.	Eckpunkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten	Nr.	Eckpunkt	Ausgeglichene Winkel	Log. der Seiten
	1	115° 58′ 47″,885	4,221 7939		7	66° 1′ 19″,251	4,780 5184
1	2	48 19 36, 540	4,141 3507	7	8	66 39 58, 719	4,782 6578
	3	15 41 35, 731	3,700 2059		9	47 18 48, 840	4,686 0435
	2	119 37 28, 959	4,674 4426		7	55 34 15, 737	4,848 5425
2	3	42 31 25, 063	4,565 1592	8	8	89 51 50, 793	4,932 1822
	4	17 51 7, 328	4,221 7939		10	34 34 2, 142	4,686 0435
	3	52 29 10, 229	4,741 3374		7	10 27 3, 514	4,449 6103
3	4	84 40 26, 275	4,840 0752	9	9	146 33 41, 664	4,932 1822
	5	42 50 30, 066	4,674 4426		10	22 59 17, 205	4,782 6579
	3	86 13 58, 691	5,025 2012		8	23 11 52, 074	4,449 6103
4	5	53 6 45, 967	4,929 1248	10	9	99 14 52, 824	4,848 5425
	6	40 39 30, 195	4,840 0752		10	57 33 19, 347	4,780 5184
	4	49 57 23, 197	4,627 7548		9	87 32 16, 652	4,472 3562
5	5	46 6 58, 284	4,601 5606	11	10	21 0 10, 563	4,027 1430
	7	83 55 42, 791	4,741 3374		11	71 27 33, 545	4,449 6103

Hannover

Hannover

Transformazio konformeak

Transformazio konformeak

- Schumaker-i bidalitako eskutitza 1816.

Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich:

> *allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original en den kleinsten Theilen ähnlich werde.*

Ein specialler Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projectionen particuläre Auflösungen.

Transformazio konformeak

- Schumaker-i bidalitako eskutitza 1816.

  Problema interesgarri bat asmatu dut [txapelketa batean planteatzeko]:

  > *kasu orokorrean, proiektatu (aplikatu) emandako gainazal bat emandako beste baten gainean, halako moduan non irudia eta jatorrizkoa infinitesimalki antzekoak diren.*

  Kasu bereizi bat dugu lehenengo gainazala esfera bat eta bigarrena plano bat denean. Orduan, proiekzio estereografikoa baita Mercatorrena ebazpen partikularrak dira.

Transformazio konformeak

- Galdera hau *Copenhagen Scientific Society*-k argitaratua zen 1821en.
- Gaussek berak eman zuen erantzuna 1822ko abenduaren 11an.

Koordenatu isotermalak

- Biharamunean, 1822ko abenduaren 12an, bere ohar pribatuetan ondorengoa idazten du ondorengo titulupean *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

Koordenatu isotermalak

- Biharamunean, 1822ko abenduaren 12an, bere ohar pribatuetan ondorengoa idazten du ondorengo titulupean *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$. Formula hau ez da agertzen esplizituki *Disquisitiones* liburuan.

Koordenatu isotermalak

- Biharamunean, 1822ko abenduaren 12an, bere ohar pribatuetan ondorengoa idazten du ondorengo titulupean *Stand meiner untersuchung über die umformung der Flächen*:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)$$

- *Das Krümmungsmass behält denselben Werth bei allen Umformungen der Fläche, die deren Linienelement* $m(du^2 + dv^2)$ *unverändert lassen.*

  La curvatura toma el mismo valor bajo todas las transformaciones de la superfície que dejan el elemento de línea invariante.

Transformazio konformeak

- 1821an egindako galdera 1822n erantzun zen, baina erantzuna 1825 arte ez zen argitaratu, Astronomische Abhandlungen, Altona aldizkarian:

  Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten en den Kleinsten Theilen ähnlich wird.

  Una solución general al problema de aplicar una superficie dada sobre otra superficie de manera que la imagen y la superficie aplicada sean infinitesimalmente similares.

Transformazio konformeak

- 1821an egindako galdera 1822n erantzun zen, baina erantzuna 1825 arte ez zen argitaratu, Astronomische Abhandlungen, Altona aldizkarian:

  Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten en den Kleinsten Theilen ähnlich wird.

Ab his via sternitur ad maiora.

Siguiendo a Newton en ’De quadratura curvarum’, preludio del calculo de fluxiones.

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 du^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u\, dt^2 + a^2 du^2$
- $ds^2 = 0$ jartzen dugu eta dt askatzen dugu.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\quad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u\, dt^2 + a^2 du^2$
- $ds^2 = 0$ jartzen dugu eta dt askatzen dugu.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\quad\quad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- Integratuz $q = \log \cot \frac{u}{2}$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u\, dt^2 + a^2 du^2$
- $ds^2 = 0$ jartzen dugu eta dt askatzen dugu.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\qquad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- Integratuz $q = \log \cot \frac{u}{2}$
- $\qquad (dt + idq)(dt - idq) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$

Ab his via sternitur ad maiora

- Esfera $\longrightarrow$ Plano
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u\, dt^2 + a^2 du^2$
- $ds^2 = 0$ jartzen dugu eta dt askatzen dugu.
- $dt = \pm i \frac{du}{\sin u}$ $\quad (dt + i\frac{du}{\sin u})(dt - i\frac{du}{\sin u}) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- Integratuz $q = \log \cot \frac{u}{2}$
- $(dt + idq)(dt - idq) = \frac{1}{a^2 \sin^2 u} ds^2$
- $ds^2 = a^2 \sin^2 u (dt^2 + dq^2)$

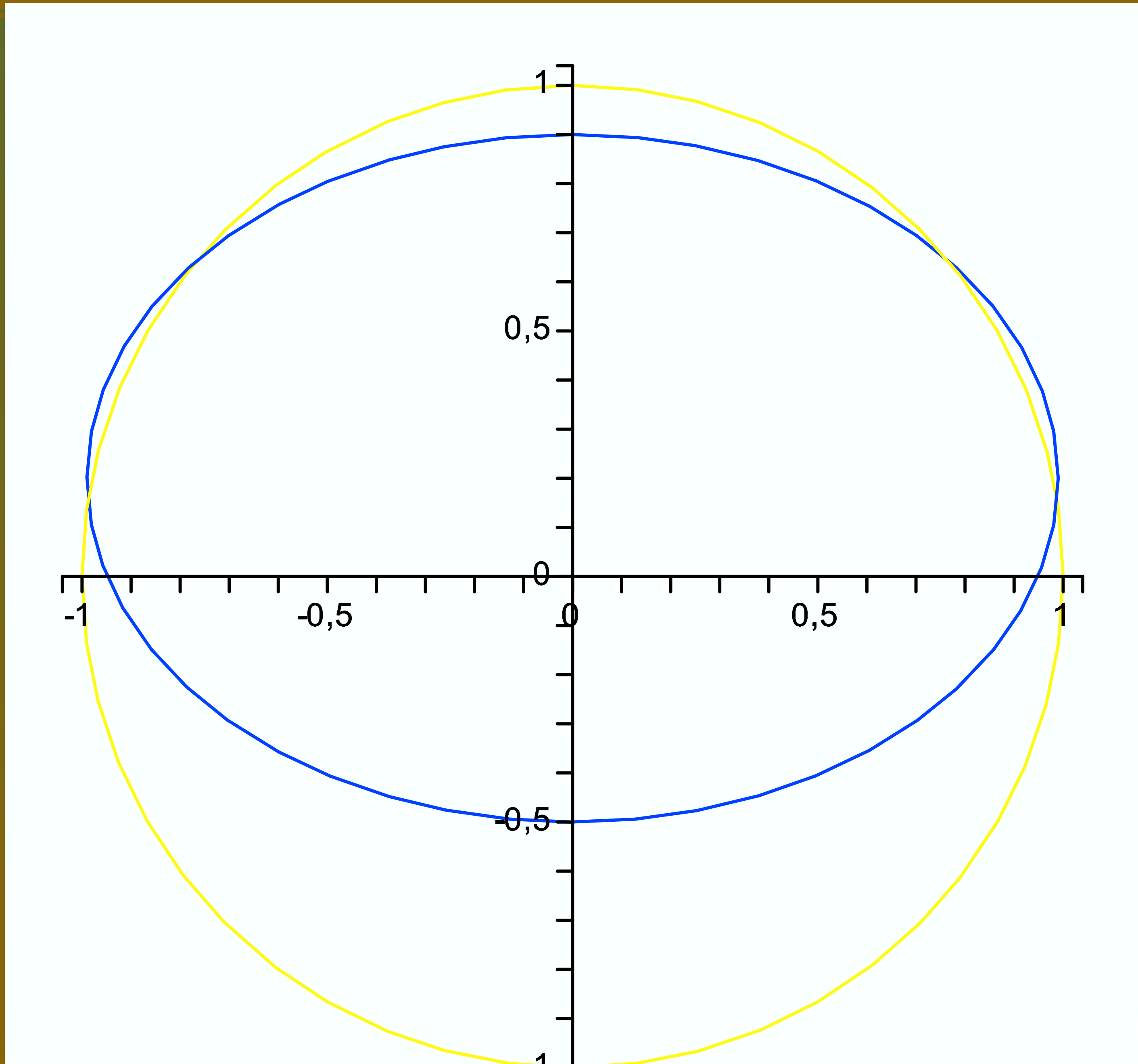
Goi Geodesia

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie. I, II.

Abhanlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1844, 1847.

- I. Elipsoide $\longrightarrow$ Esfera.
- II. Trigonometria elipsoidean.

Goi Geodesia I



IV. Geometria diferentzial

Aierua

- Gaussek Lambert-en analogia hedatu ahal izan zuen Geometria diferentzialaren arlora, esfera irudikaria adierazten duen gainazal bat aurkitzeko asmoz. Hortaz, kurbadura negatibokoa.

Aierua

- Gaussek Lambert-en analogia hedatu ahal izan zuen Geometria diferentzialaren arlora, esfera irudikaria adierazten duen gainazal bat aurkitzeko asmoz. Hortaz, kurbadura negatibokoa.
- Hau izan daiteke Gaussek Bostgarren Postulatua frogatzeko hautatu zuen bide alternatiboa. Bide hau aipatzen du berak Schumaker-ri(?) bidalitako eskutitz batean [Lobatschewsky-ren lanari buruzkoa]:

  > [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

Aierua

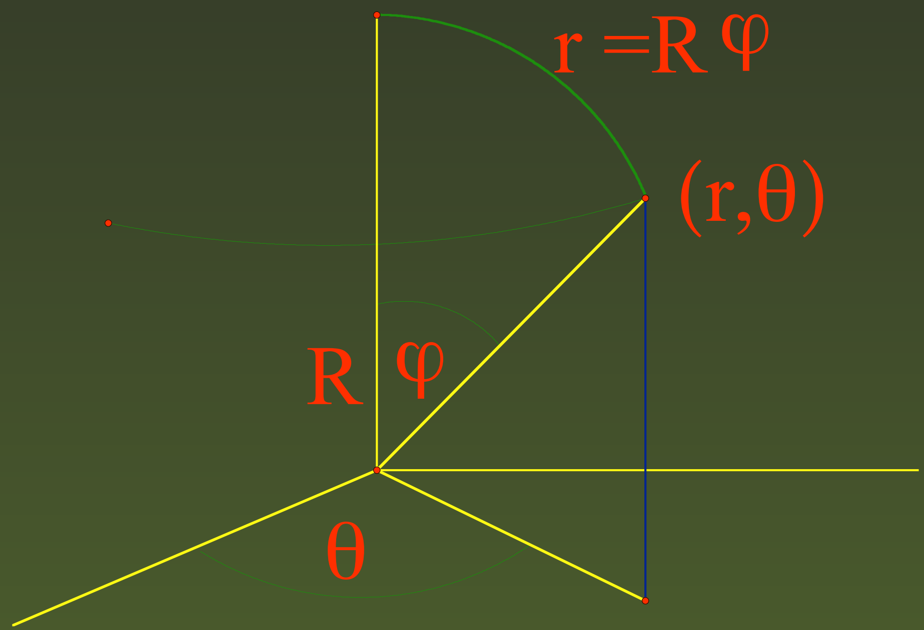
- Gaussek Lambert-en analogia hedatu ahal izan zuen Geometria diferentzialaren arlora, esfera irudikaria adierazten duen gainazal bat aurkitzeko asmoz. Hortaz, kurbadura negatibokoa.
- Hau izan daiteke Gaussek Bostgarren Postulatua frogatzeko hautatu zuen bide alternatiboa. Bide hau aipatzen du berak Schumaker-ri(?) bidalitako eskutitz batean [Lobatschewsky-ren lanari buruzkoa]:

  [...] *aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht*

- Idatzi al zuen Disquisitiones liburua (partzialki) asmo honetaz ?

Luzera-elementua

- $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$



Xedea

- Aurkitu gainazal bat non

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2$$

den.

Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

1827ko urriaren 7a

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1825

- *Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Theil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projectirten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen.*

Recientemente he retomado parte de mis investigaciones sobre superficies curvas, que habrán de formar parte de mi proyectado ensayo sobre geodesia avanzada.

Schumaker-i bidalitako eskutitza 1825

- *Ich finde leider, dass ich dabei sehr weit werde ausholen müssen, da auch das Bekannte en einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muss.*

Desafortunadamente debo ir muy atras en la exposición, porque incluso lo que es conocido se debe desarrollar de diferente manera, adaptada a las nuevas investigaciones.

Disquisitiones

- 40 orrialde; 29 atal.
- Berriak (?) diren 5 konzeptu; 10 Teorema.
- Euler (§8) eta Legendre (§27) aipatzen ditu.
- Agertzen den gainazal bakarra esfera da.

Amaitu gabeko (?) proiektua

- *Attamen uberiorem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.* §6
- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13
- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Amaitu gabeko (?) proiektua

- *Beste behin baterako utziko dugu figura hauen teoriaren garapen zehatzago baten aurkezpena.* §6
- *Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit,...* §13
- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Amaitu gabeko (?) proiektua

- *Beste behin baterako utziko dugu figura hauen teoriaren garapen zehatzago baten aurkezpena.* §6
- *...zeinen azterketak arlo berri eta emankor bat sortzen du geometriarentzat.* §13
- *Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis* a, b, c; §26

Amaitu gabeko (?) proiektua

- *Beste behin baterako utziko dugu figura hauen teoriaren garapen zehatzago baten aurkezpena.* §6

- *...zeinen azterketak arlo berri eta emankor bat sortzen du geometriarentzat.* §13

- a, b *eta* c *aldeetako triangelu lerrozuzena kontsideratzea oso erabilgarria da.* §26

Amaitu gabeko (?) proiektua

- *Beste behin baterako utziko dugu figura hauen teoriaren garapen zehatzago baten aurkezpena.* §6

- *...zeinen azterketak arlo berri eta emankor bat sortzen du geometriarentzat.* §13

- a, b *eta* c *aldeetako triangelu lerrozuzena kontsideratzea oso erabilgarria da.* §26

- Ez du aurkitzen esfera irudikaria.

Konzeptu berriak

- Gauss-en aplikazioa. §6
- Gauss Kurbadura. §6
- Kurbadura totala. §6
- Angelu-bariazioa. §17
- Karta ortogonal abszisarekiko geodesiko. §19

Teorema berriak

- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema Egregium. §12

Teorema berriak

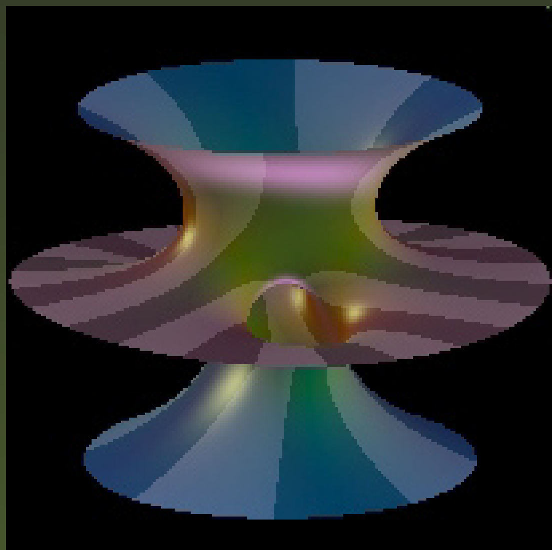
- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema Egregium. §12
- Gauss-en Lema. §16
- $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. §19
- Defektuaren Teorema. §20

Teorema berriak

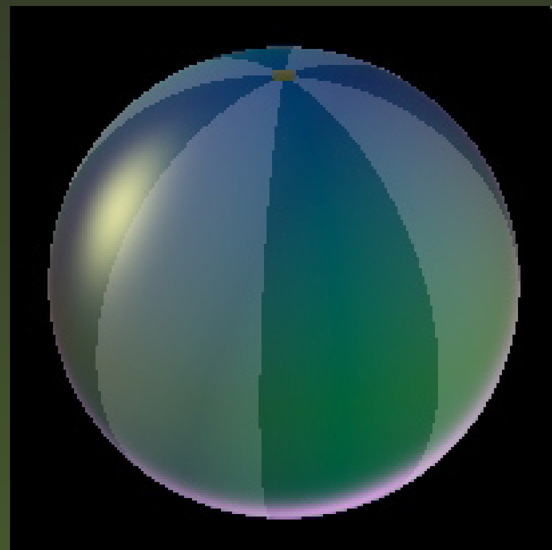
- $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. §7
- $k = k_1 \cdot k_2$. §8
- Teorema Egregium. §12
- Gauss-en Lema. §16
- $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \qquad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. §19
- Defektuaren Teorema. §20
- $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$. §27

Kurbadura. §6

$\gamma : S \longrightarrow S^2$ Gauss-en aplikazioa.



$\longrightarrow$



$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\gamma(S)\text{-ren azalera}}{S\text{-ren azalera}}$$

Euler Kurbadura. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Euler Kurbadura. §8

THEOREM. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

$$k = k_1 \cdot k_2$$

Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curvatura superficierum curvarum primus docuit

Olinde Rodrigues (1794-1851)

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, Vol 3, pag.$162-182$, 1815.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Gauss-en aplikazioa.
- Gauss kurbadura.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

Olinde Rodrigues (1794-1851)

- Gauss-en aplikazioa.
- Gauss kurbadura.
- $k = k_1 \cdot k_2$.
- $N'(t) = \lambda x'(t)$.

- Gaussek lehen hiru puntuak ezagutzen zituen 1813 aurretik (argitaratu gabe).

Teorema Egregium. §11

$$
\begin{aligned}
4\quad & (EG - FF)^2\, k = E\Big(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \big(\frac{dG}{dp}\big)^2\Big) \\
+\quad & F\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\Big) \\
+\quad & G\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \big(\frac{dE}{dq}\big)^2\Big) \\
-\quad & 2(EG - FF)\Big(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp\cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\Big).
\end{aligned}
$$

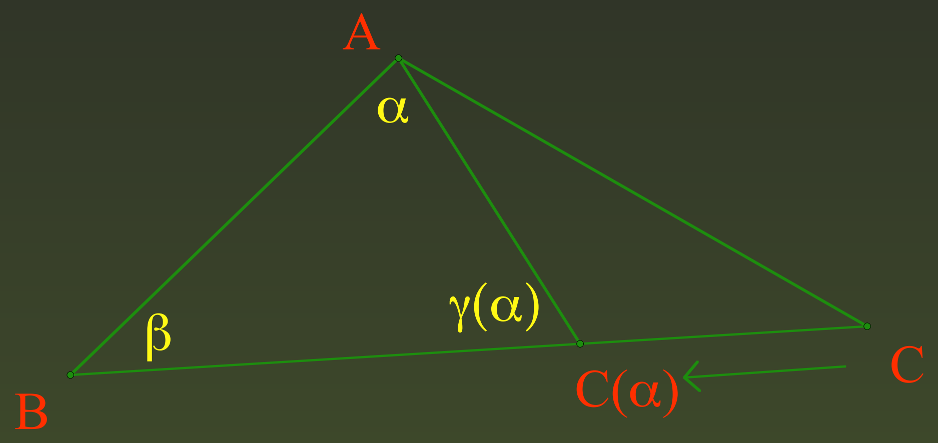
Teorema Egregium. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA *Si superficies curva en quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae en singulis punctis invariate manet.*

Angelu-bariazioa

Angelu-bariazioa planoan



α+β+γ=π;   1+γ' =0

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -1}$$

- $\gamma(0) = \pi - \beta.$

Angelu-bariazioa esferan

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\cos\frac{b(\alpha)}{R}}$$

$S^2(R)$-ko triangelu baten azalera

$$\begin{aligned}
\text{Azalera} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta
\end{aligned}$$

$S^2(R)$-ko triangelu baten azalera

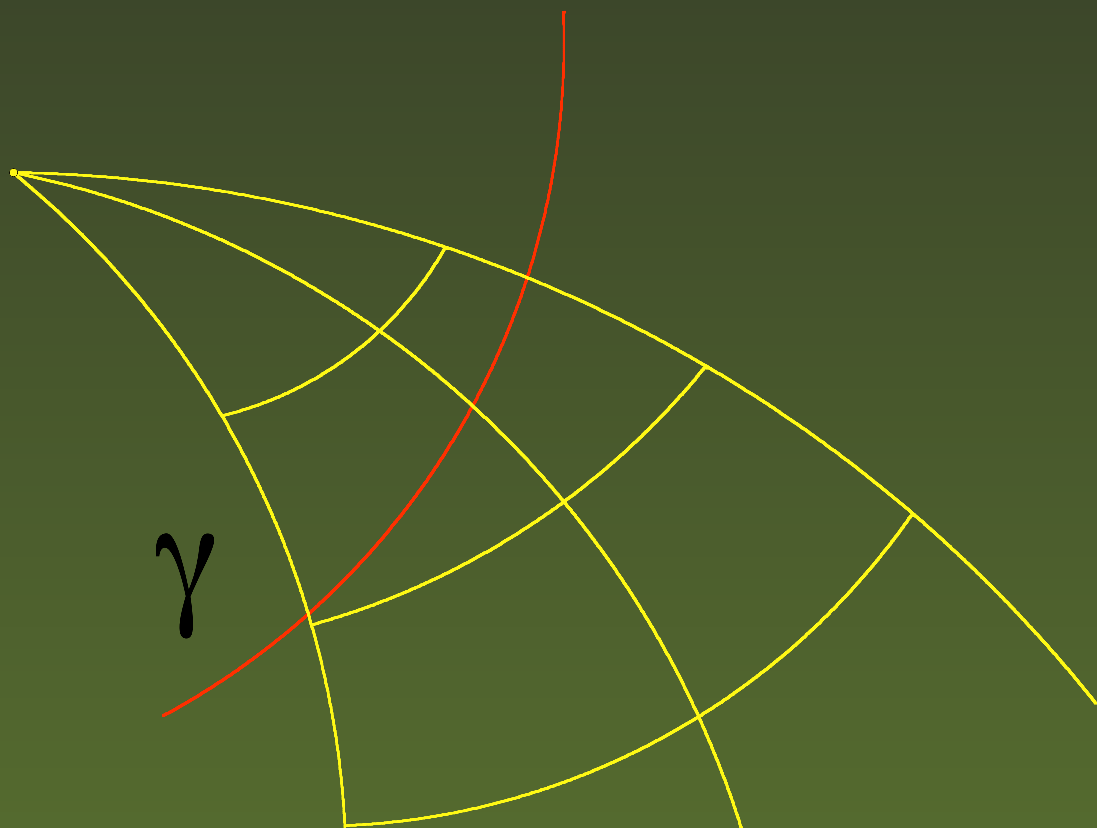
$$
\begin{aligned}
\text{Azalera} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} R\sin\frac{r}{R}\,dr\,d\theta \\
&= R^2\alpha - \int_0^{\alpha} R^2\cos\frac{r(\theta)}{R}\,d\theta \\
&= R^2\alpha + R^2(\gamma(\alpha)-\gamma(0)) \\
&= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \\
&= R^2 \cdot \text{Gehiegitza}.
\end{aligned}
$$

Disquisitiones (Jarraipena)

Angelu-bariazioa. §19

Karta abszisarekiko geodesiko eta ortogonal bateko luzera-elementua:

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2$$



Angelu-bariazioa. $\S 19$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

Angelu-bariazioa. §19

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}$$

- Koordenatu polarrak esferan:

$G = r^2;$ $$\frac{d\gamma}{d\theta} = -1$$

- Koordenatu polarrak esferan:

$G = R^2 \sin^2 \frac{r}{R};$ $$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\cos\frac{r}{R}$$

Kurbadura. §19

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Hemendik, Teorema Egregium ondorioztatzen dugu.
- Honela amaitzen da 1825ko *Disquisitiones* liburua.

Defektuaren Teorema. §20

- Hemendik abiaturik (egregium)

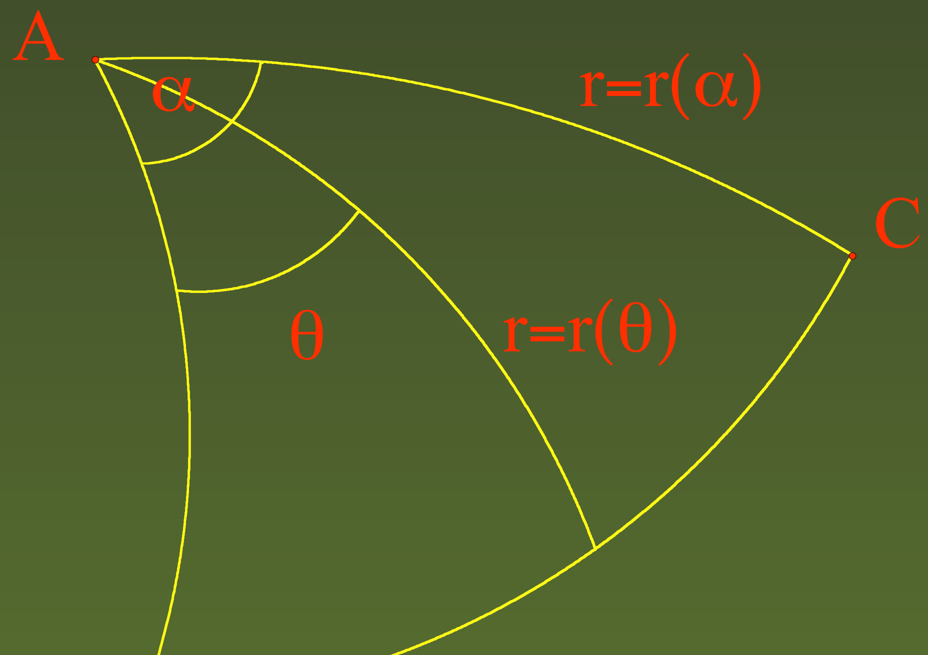
$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

Defektuaren Teorema. §20

- Hemendik abiaturik (egregium)

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

- Triangeluan integratuz



Defektuaren Teorema. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$

Defektuaren Teorema. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

Defektuaren Teorema. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Defektuaren Teorema. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Defektuaren Teorema. §20

- $\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}$
- $\int_0^{\alpha} \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta$

$$\int_T kdA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Kurbadura totala = irudi esferikoaren azalera = defektua

1825-ko bertsioa.

- Azalera$(\nu(T)) =$ Defektu(T) dela frogatzen du, baina esaten ondorengoa:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen.

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación.

1825-ko bertsioa.

- $\text{Azalera}(\nu(T)) = \text{Defektu}(T)$ dela frogatzen du, baina esaten ondorengoa:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen.

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación.

- Hemendik abiaturik, Teorema Egregium ondorioztatzen du. Deduce el teorema egregio

1825-ko bertsioa.

- $\text{Azalera}(\nu(T)) = \text{Defektu}(T)$ dela frogatzen du, baina esaten ondorengoa:

  Der Beweis wird en der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen.

  La demostración requerirá alguna modificación y explicación.

- Hemendik abiaturik, Teorema Egregium ondorioztatzen du. Deduce el teorema egregio

- Defektu $\longleftrightarrow$ Egregium

Azten atalak

Konparaketa-Teoremak. §26

Laugarren ordenako kantitateak ahaztuz:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

Konparaketa-Teoremak. §26

Laugarren ordenako kantitateak ahaztuz:

- $A^* = A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C))$

  - $\sigma =$ Azalera ABC.
  - $k(A) =$ Kurbadura A puntuan.
  - $A^* =$ Gainazalgainearen triangeluaren aldeak berdinak dauzkan triangelu euklidiarraren angelu.

Esfera §27

- Aurreko formulak Legendrek sortuak ziren lehenengoz, esferaren testuinguruan.

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$$

Esfera §27

- Aurreko formulak Legendrek sortuak ziren lehenengoz, esferaren testuinguruan.

  $$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}$$

- Batuketa eginez, Defektuaren Teorema lortzen dugu.

$$\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}$$

BHI §28

BHI angelu esferikoa izango balitz:

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

BHI §28

BHI angelu esferikoa izango balitz:

- $B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} = B - \frac{14.85348''}{3} = B - 4''.95116$

Lurrelipsoidearen gainean, kalkuluen bidez lortzen da ondorengoa:

- Hohehagen $-4''.95113$
- Brocken $-4''.95104$
- Inselsberg $-4''.95131$

BHI §28

Olbers-i bidalitako eskutitza 1827.

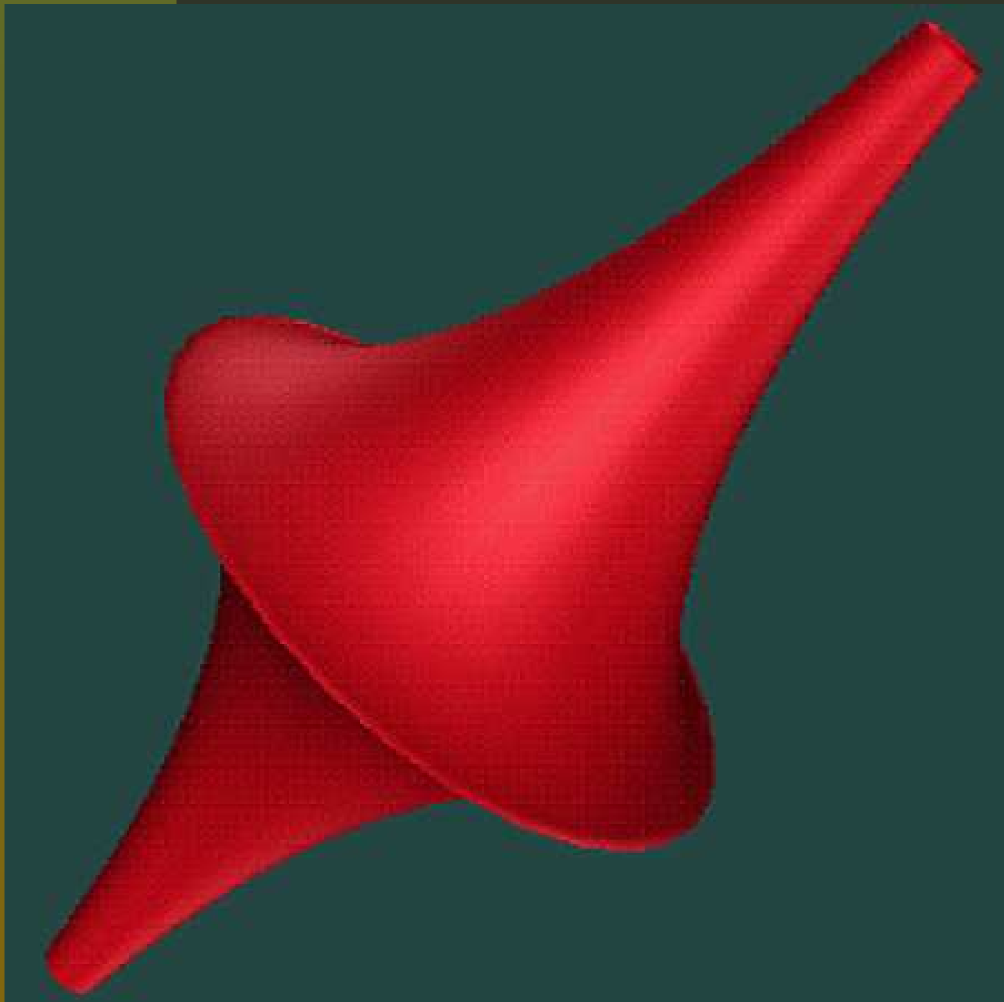
In praktischer Rücksicht ist dies zwar ganz unwichtig, weil en der That bei den grössten Dreieecken, die sich auf der Erde messen lassen, diese Ungleichheit en der Vertheilung unmerklich wird; aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, dass man die Natur dieser Ungleichheit klar begreife.

En consideraciones prácticas esto no es importante, ya que incluso en el triángulo más grande que se puede medir sobre la tierra, se hace imperceptible. Pero la dignidad de la ciencia requiere que se entienda claramente la naturaleza de esta desigualdad.

V. Gd-Gne.

Esfera irudikaria aurki dezagun

Sasiesfera. F. Minding (1840)



Traktrize

- 1 azpitangenteko kurba.
- $y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

Sasiesfera

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

$x =$ biraketa-angelua; $y = e^\tau$, $\tau =$ Traktrizearen gaineko luzera.

Koordenatu polar geodesikoetan.

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Ein Genie erster Grösse

János Bolyai

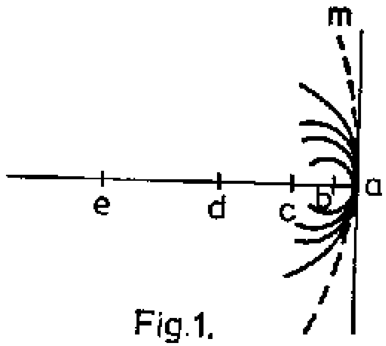


Fig.1.

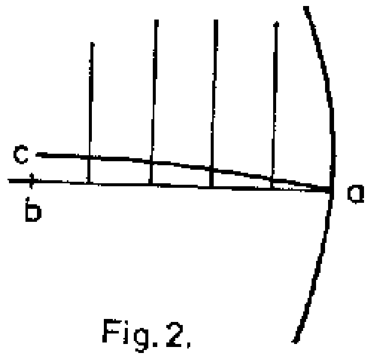


Fig.2.

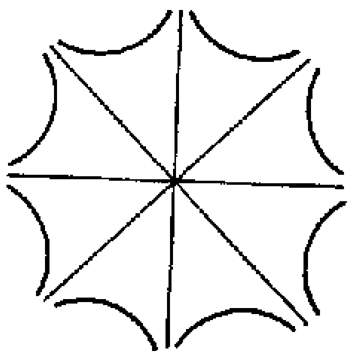


Fig.3.

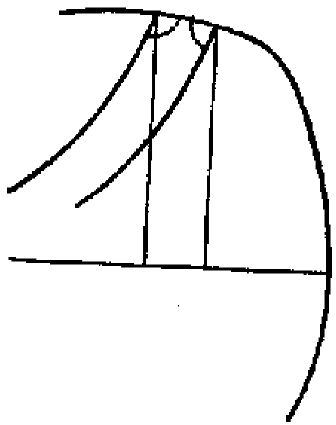


Fig.4.

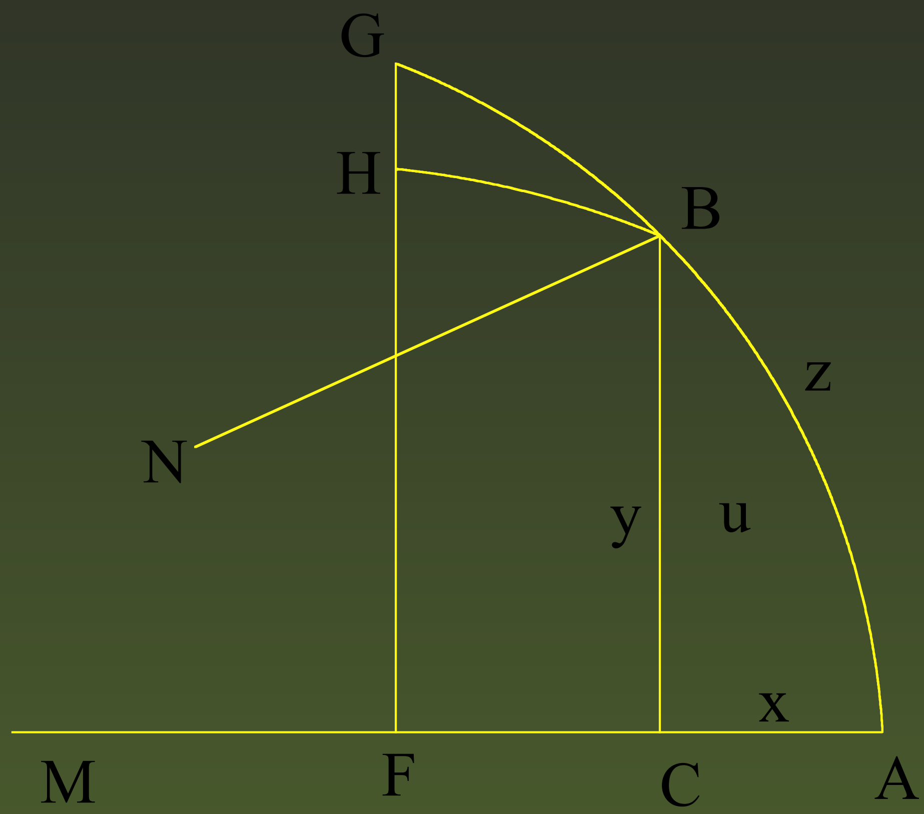
János Bolyai

gatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{\;}{bh}$,
adeoque tang *hba*; eritque (cum *hbc* manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in *b* ipsius *bg* per *y* determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \sim 1$;

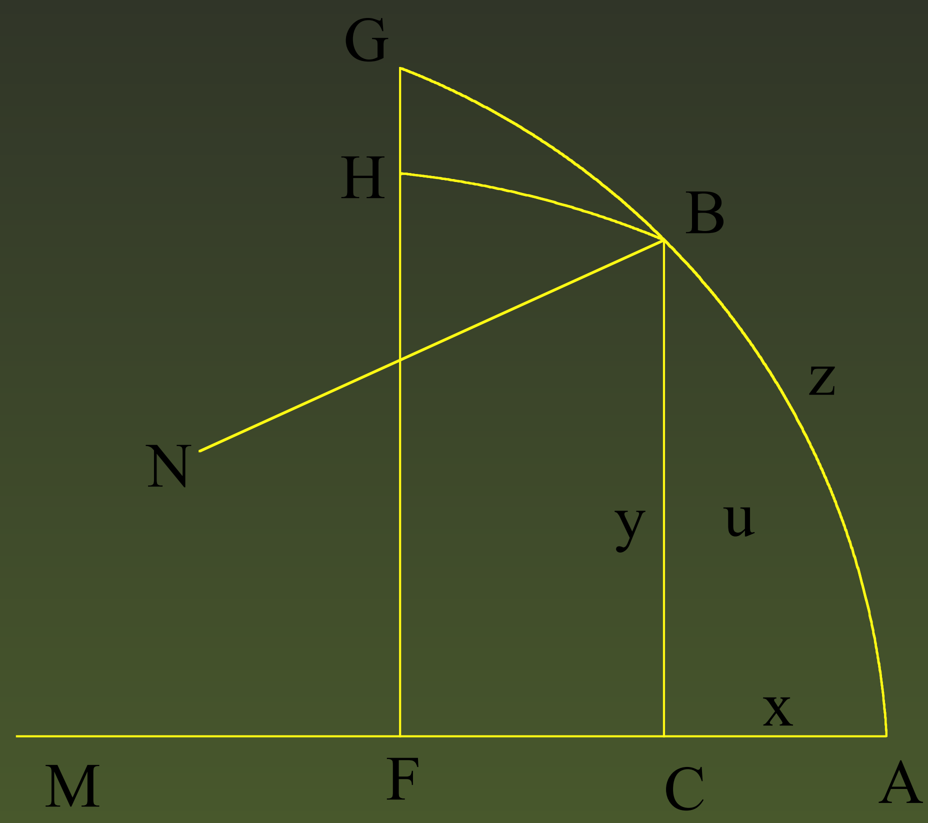
Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde *z* integratione (per *x* expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in *S* inveniri, e. g. ipsius

János Bolyai



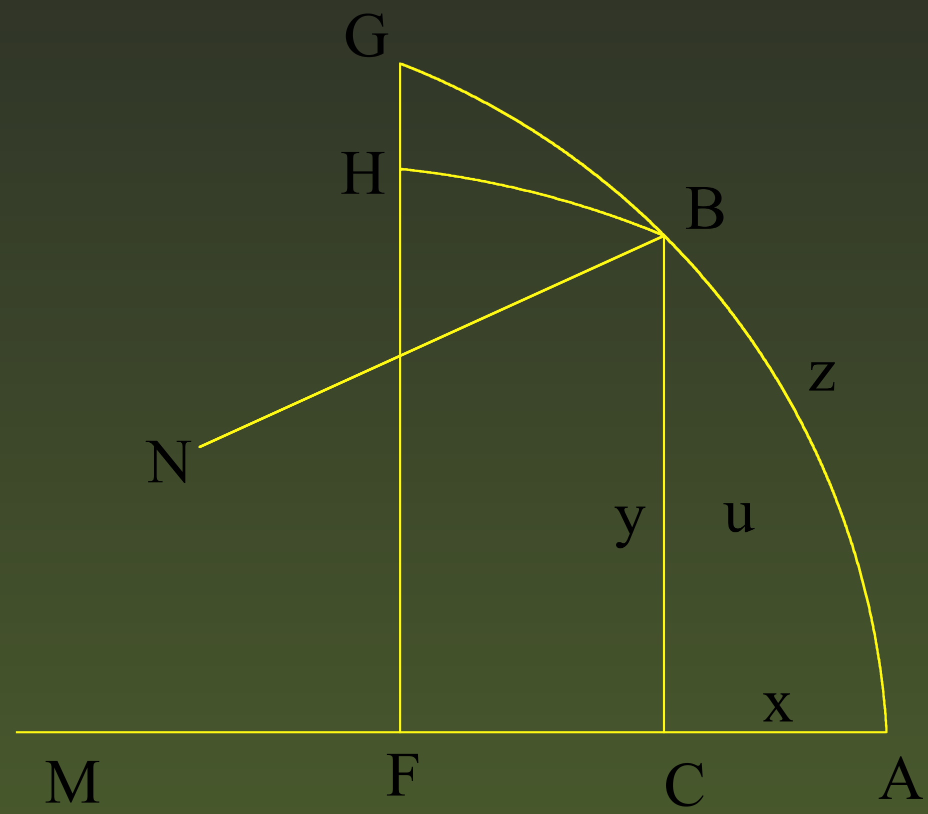
$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$

János Bolyai



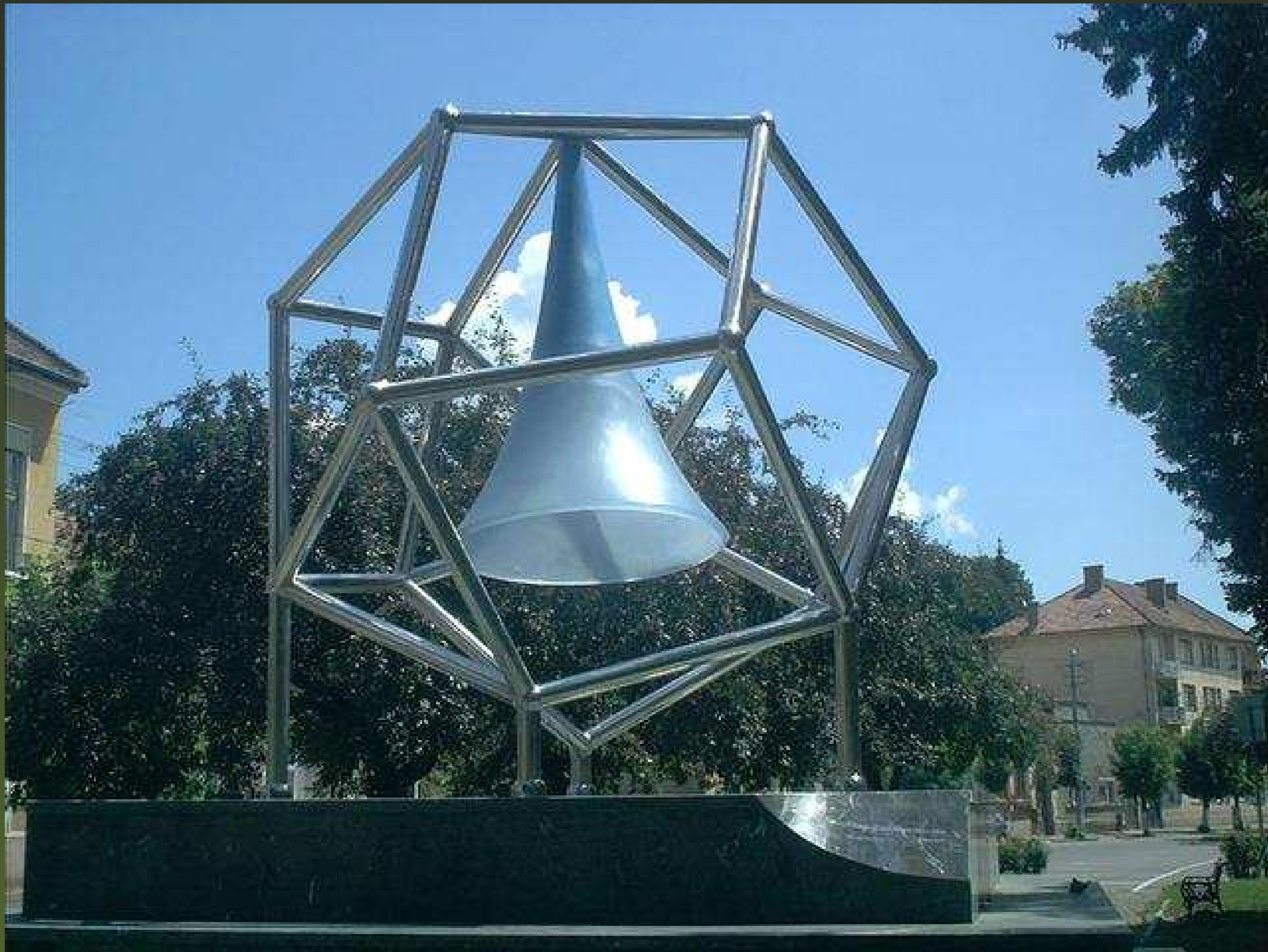
$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2$$

János Bolyai



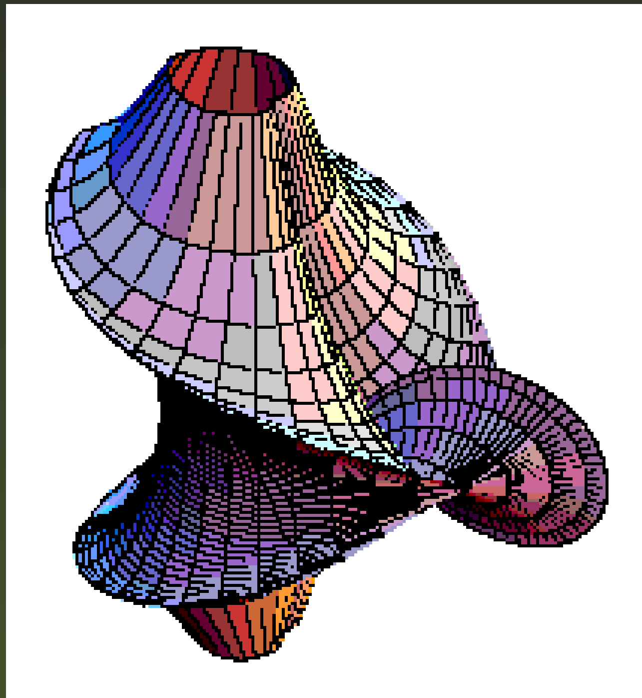
$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2$$

Ezerezatik sorturiko mundu berri bat



Marosvásárhely

Kuen-en gainazala



Kurbadura negatiboko**a**