Altres geometries

ESTALMAT

16 febrer 2008

AGUSTÍ REVENTÓS JUDIT ABARDIA

Guió

- Euclides
- Arquimedes
- Lambert
- Gauss
- Riemann

Guió

- Euclides
- Arquimedes
- Lambert
- Gauss
- Riemann

$$0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Guió

- Euclides $$0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Arquimedes $$A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Lambert
- Gauss
- Riemann

Guió

- Euclides $$0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Arquimedes $$A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Lambert $$-A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Gauss
- Riemann

Guió

- Euclides $$0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Arquimedes $$A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Lambert $$-A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Gauss $$K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
- Riemann

Guió

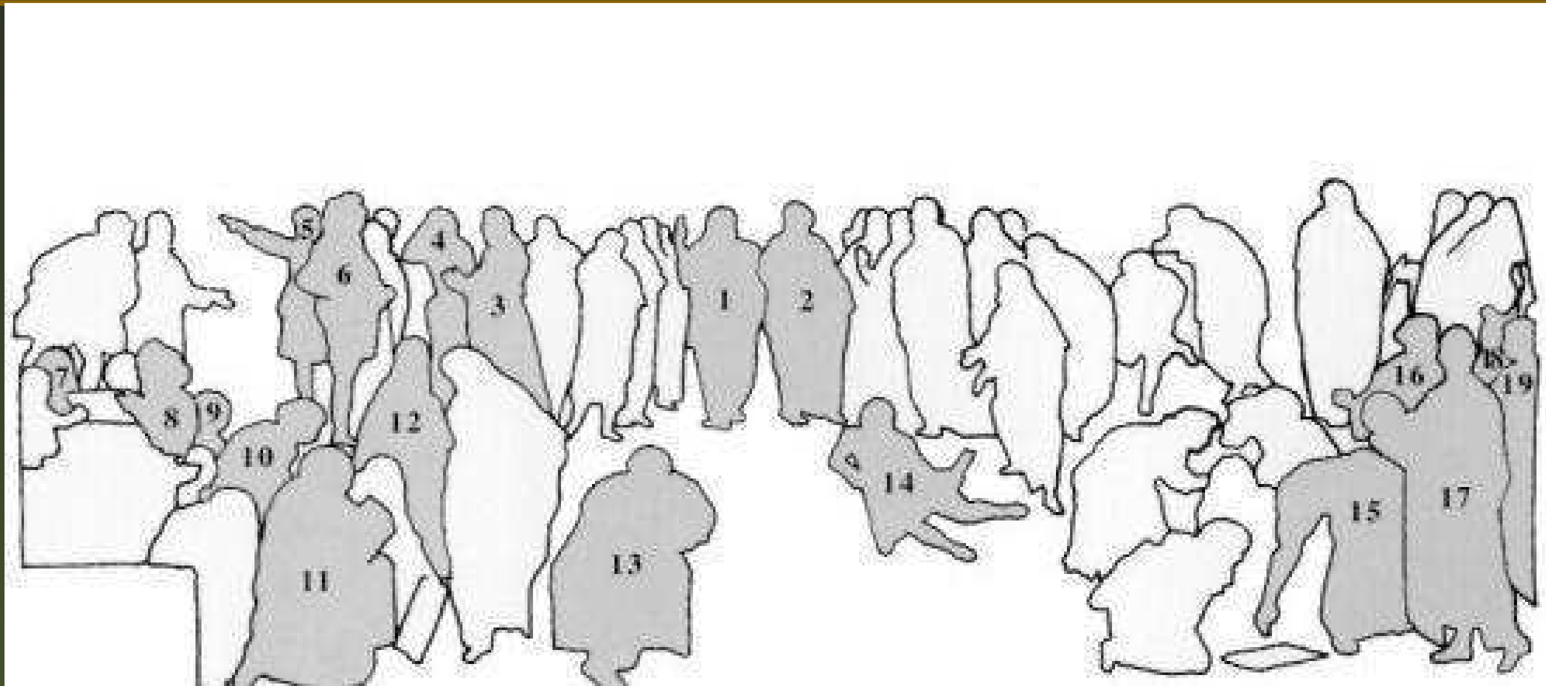
- Euclides $\qquad 0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Arquimedes $\qquad A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Lambert $\qquad -A/R^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Gauss $\qquad K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
- Riemann $\qquad$ En quin món vivim?

I. Euclides

Euclides $\sim 325 - 265aC.$

Escola d’Atenes. **Raffaello** 1510

Escola d'Atenes

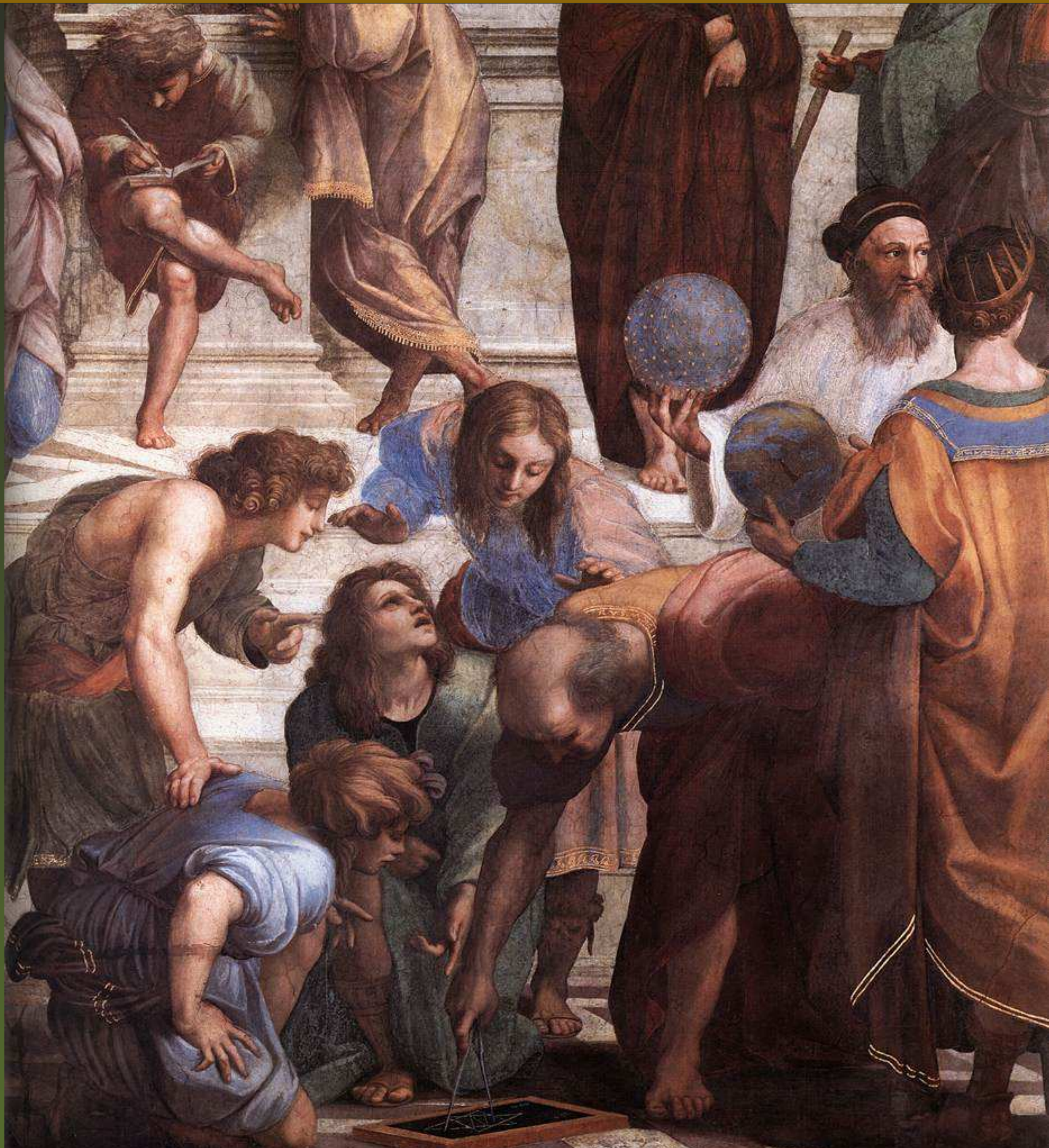


1. Plató 2. Aristòtil 3. Sòcrates
7. Zenó 11. Pitàgores 13. Heràclit

15. Euclides

17. Ptolemeu 18. Autoretrat de Raphael

Euclides amb un compàs



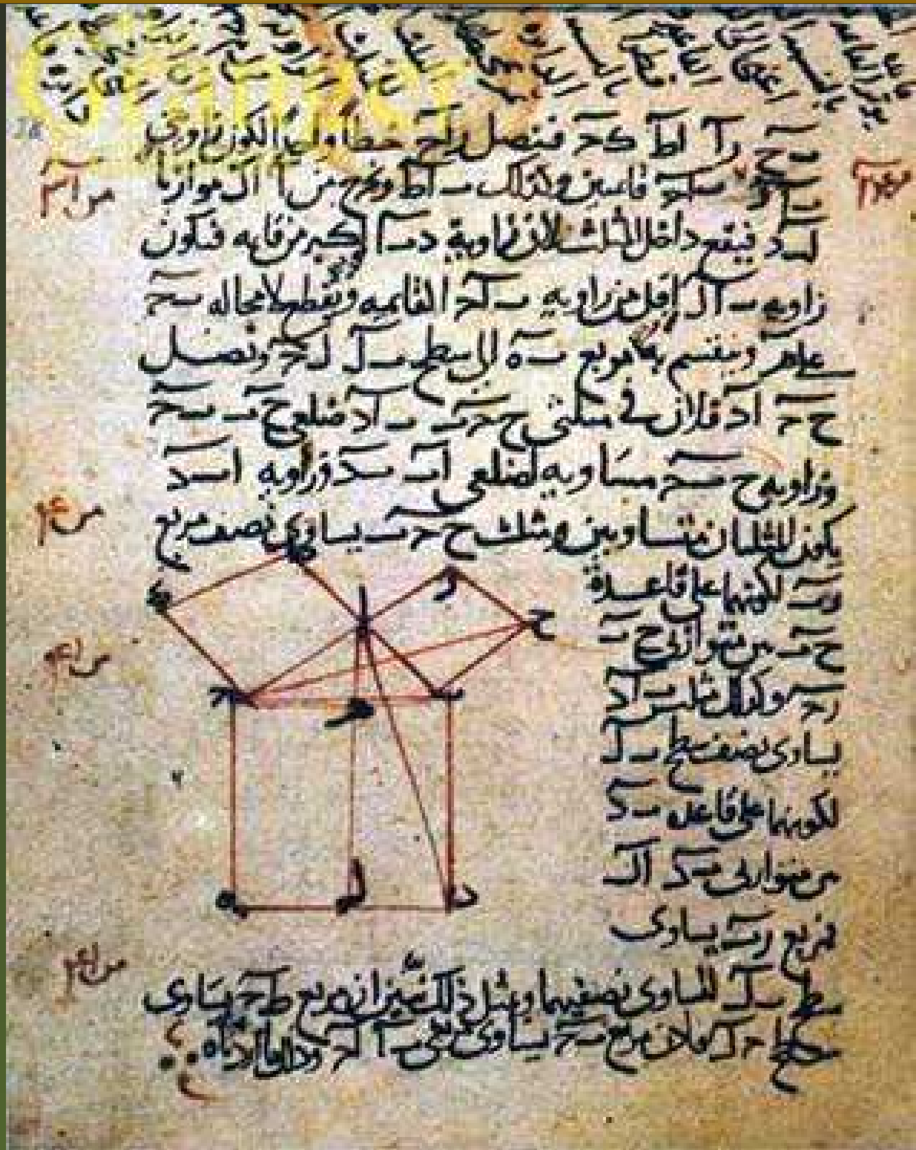
Els Elements

Bodleian Library, Oxford, 888.

Els Elements

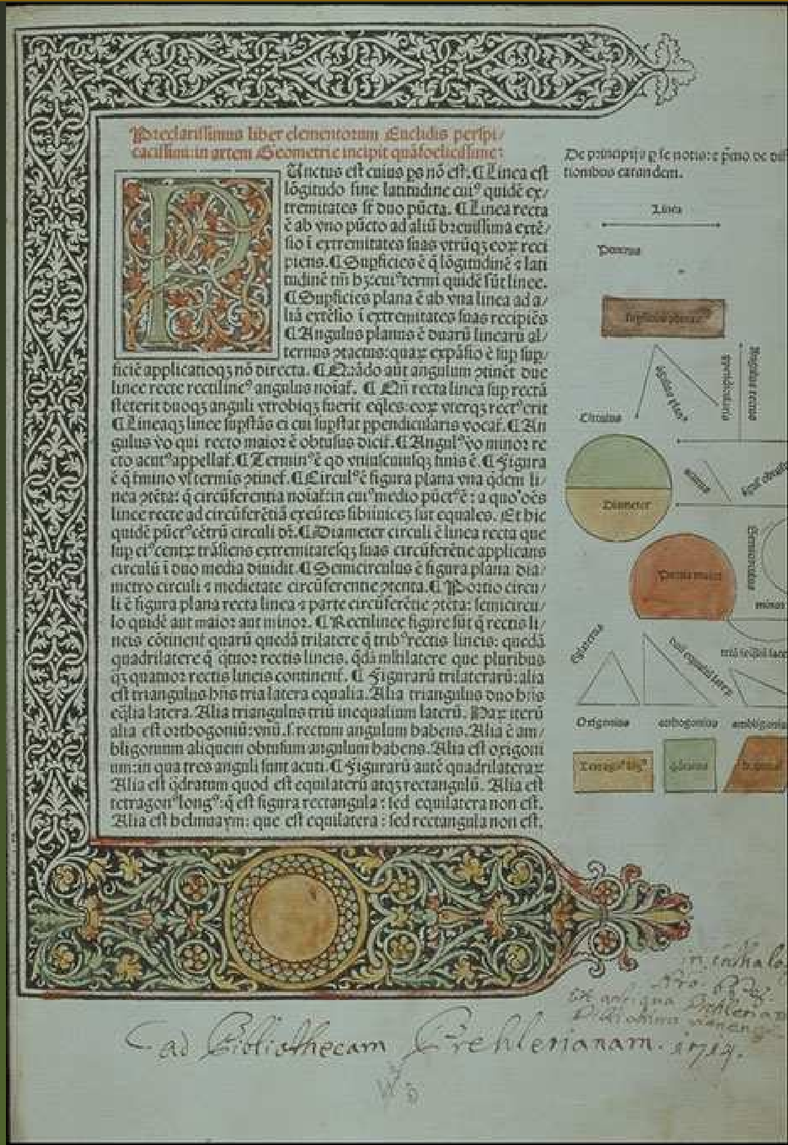
Pergamí grec. Segle IX. Vaticà.

Els Elements



Abu Jafar Muh. b. al-Hasan Nasiraddin at-Tusi, 1258

Els Elements



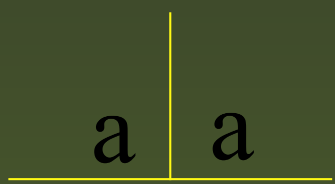
Primera edició impresa. Venecia 1482

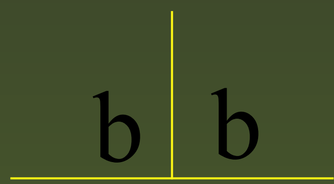
POSTULATS

1. 2. 3.

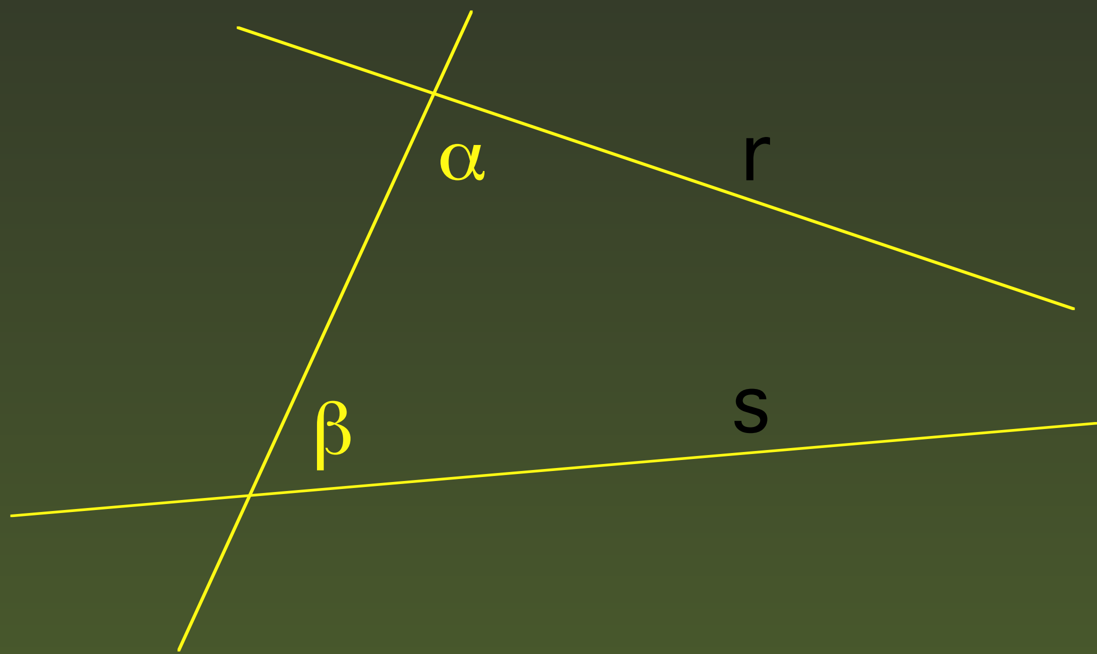
POSTULATS

4. Tots els angles rectes són iguals.



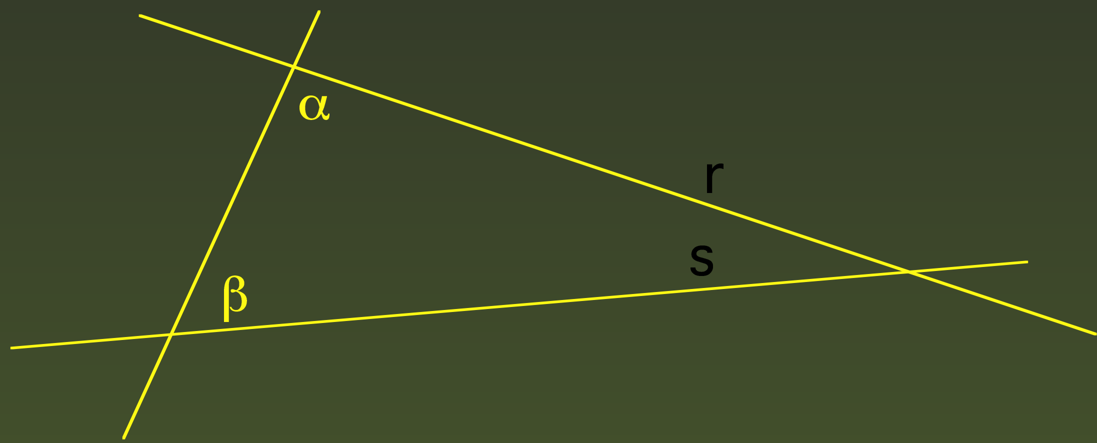


CINQUÈ POSTULAT



Si $\alpha + \beta < \pi$, r i s es tallen.

CINQUÈ POSTULAT



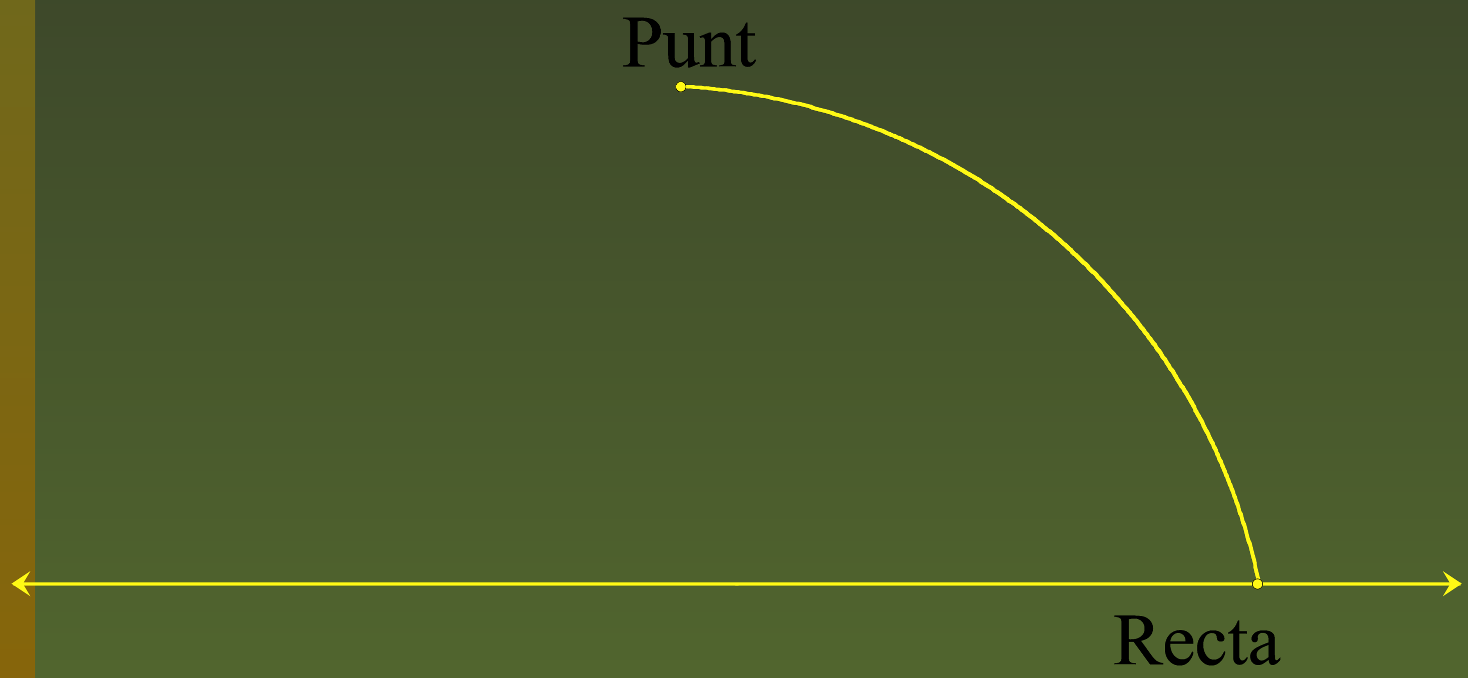
Ja s’han tallat.

Enunciats equivalents

1. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.
2. Tres punts no alineats determinen una circumferència.
3. Existeixen triangles semblants.
4. Hi ha triangles d’àrea tan gran com vulguem.
5. Els angles d’un triangle sumen el mateix que dos angles rectes.
6. Les equidistants són rectes.

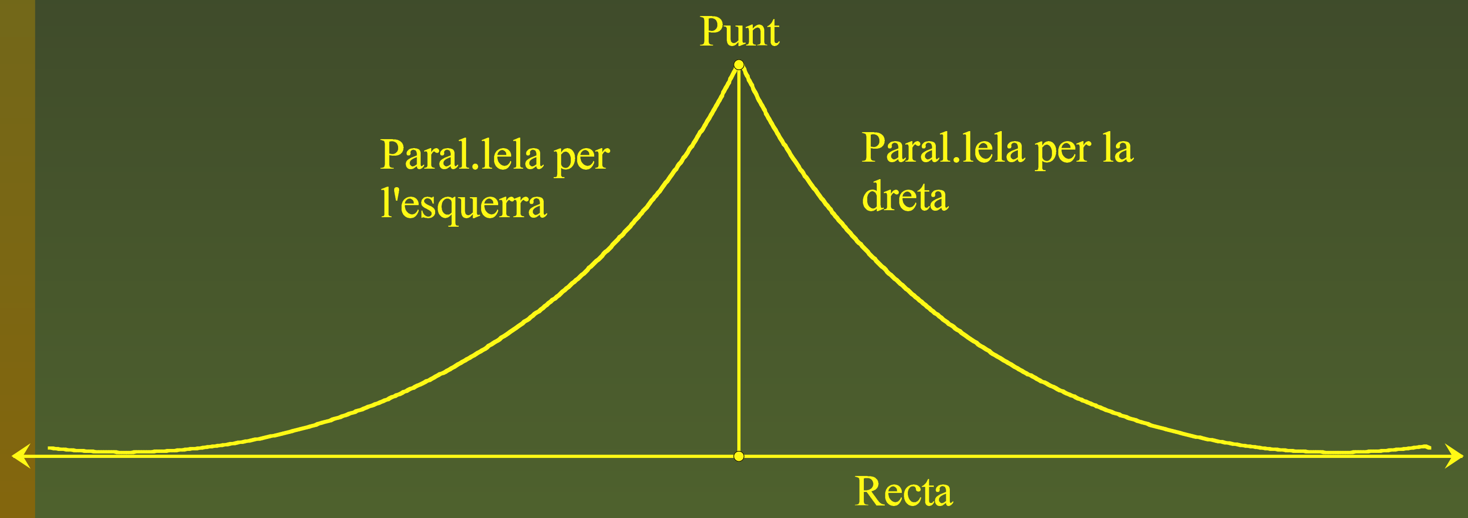
Negació del cinquè postulat

- *Donada una recta i un punt exterior, tota recta per aquest punt talla la recta donada.*

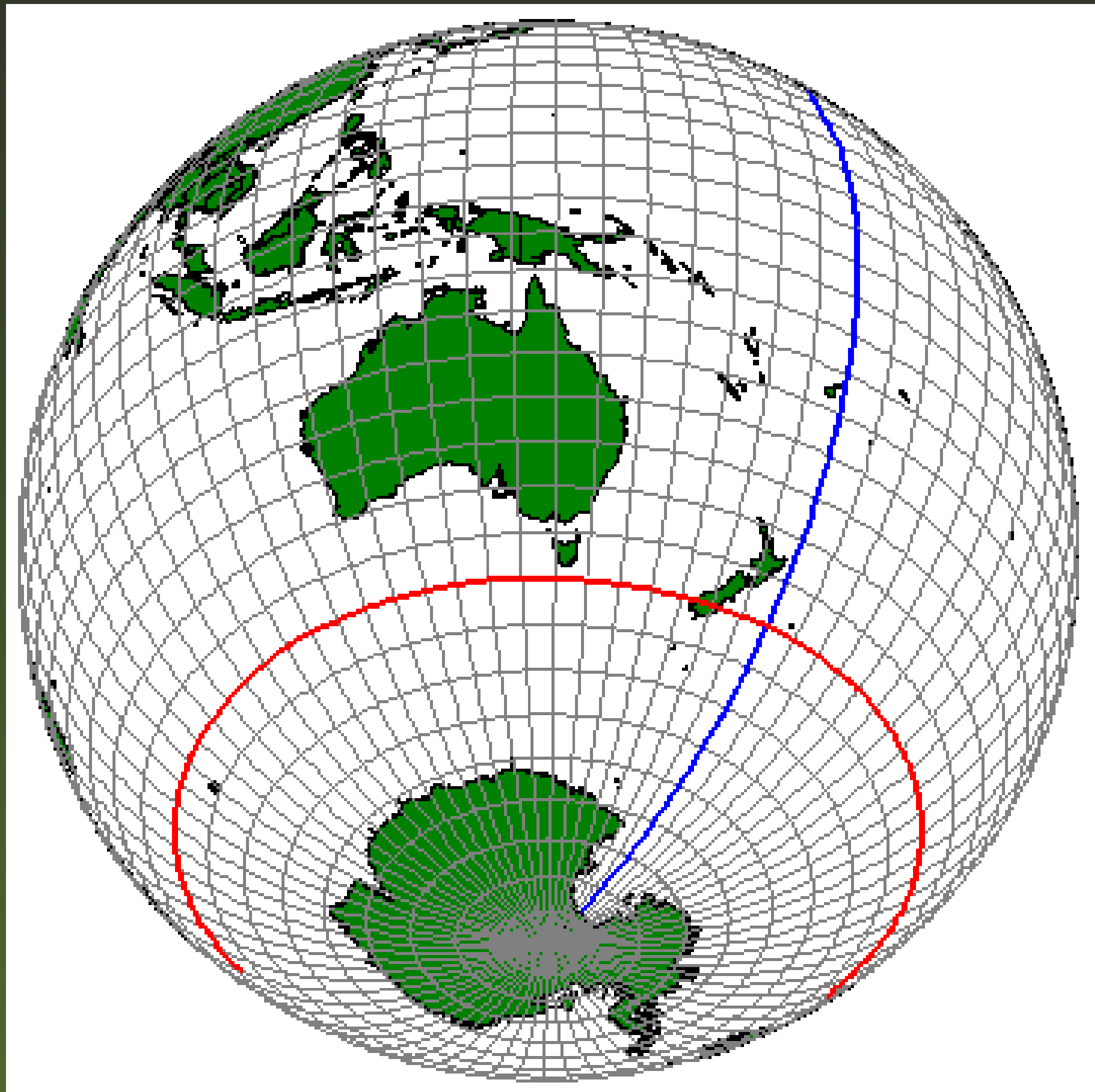


Negació del cinquè postulat

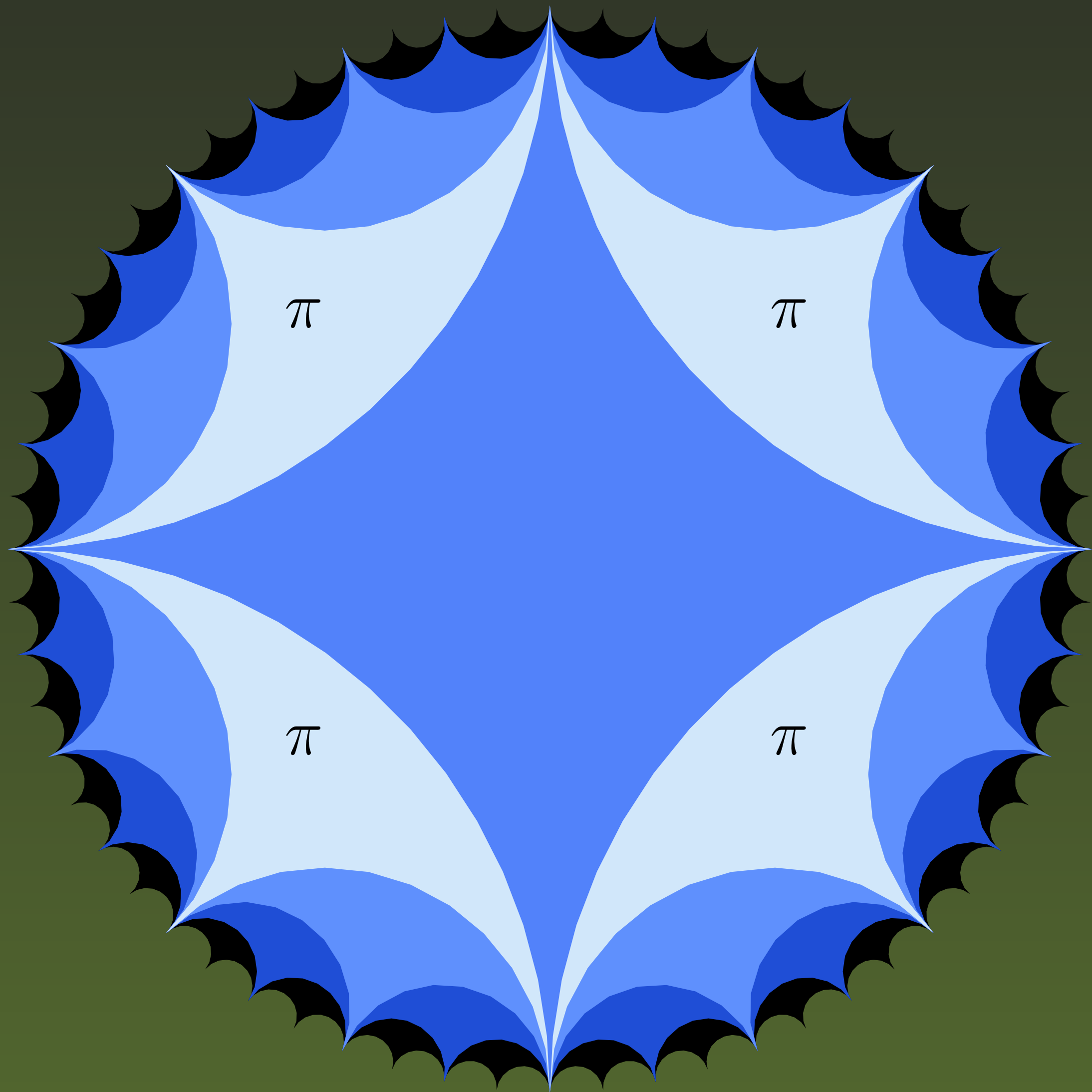
- *Donada una recta i un punt exterior, passen per aquest punt més d'una rectes que no tallen la recta donada.*



Geometria Esfèrica



Geometria Hiperbòlica



El primer geòmetra no-euclidià

Aristòtil 384 – 322 **aC.**

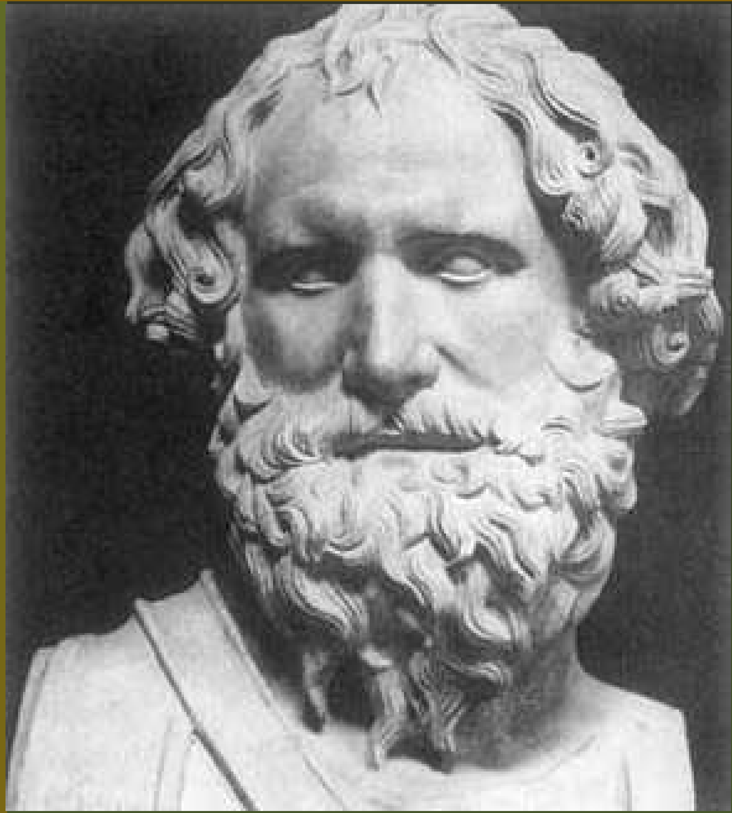
Aristòtil 384 – 322 **aC.**

Si és impossible que els angles d'un triangle sumin dos rectes, llavors el costat del quadrat és commensurable amb la diagonal.

'De Caelo' (El Cel)

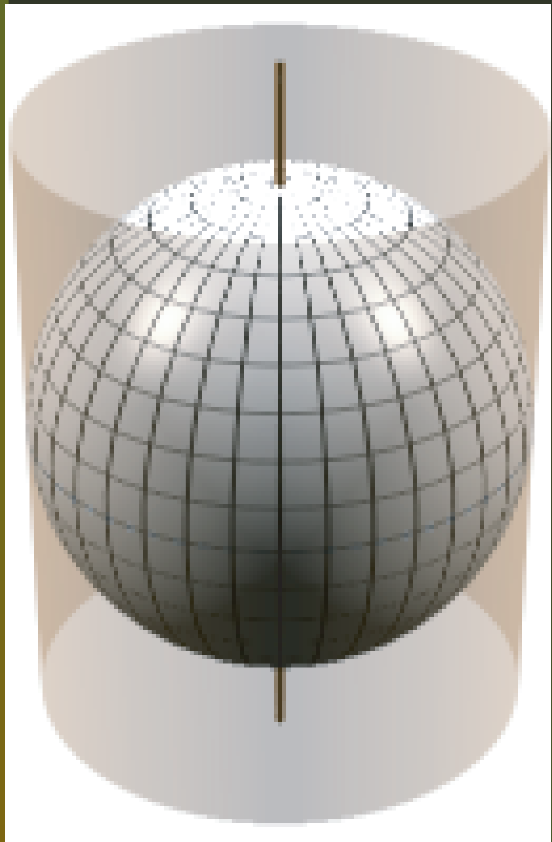
II. Arquimedes

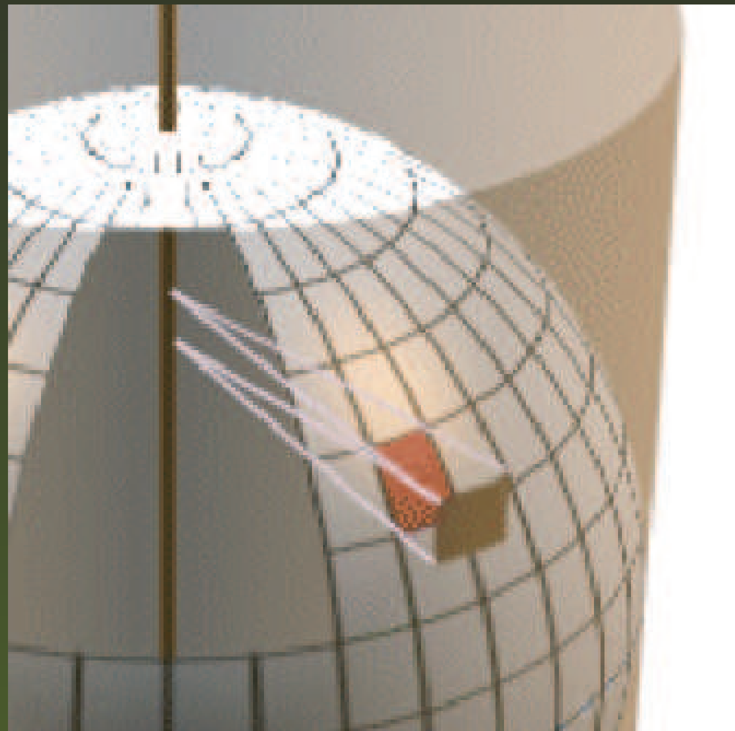
Àrea de l'esfera



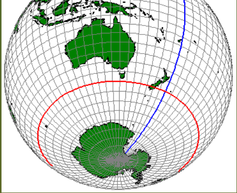
Arquimedes ($287 - 212$ aC) Àrea $= 4\pi R^2$

Àrea de l’esfera

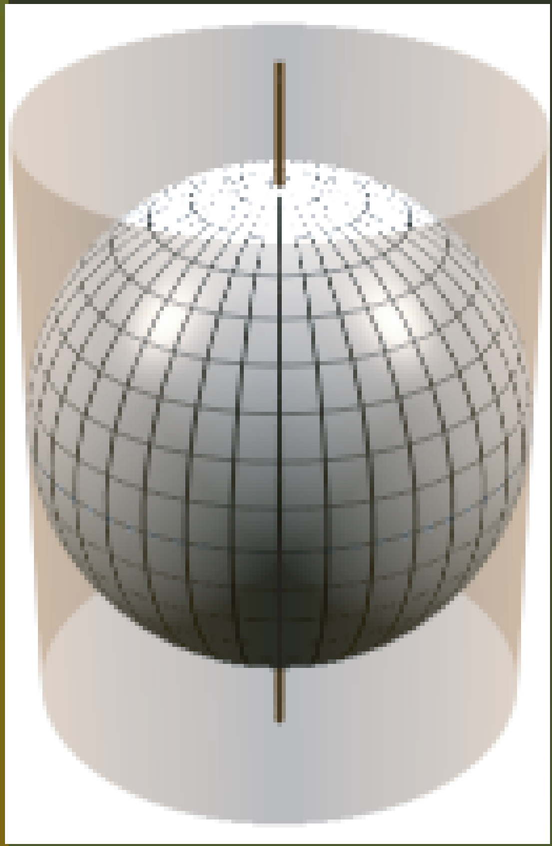


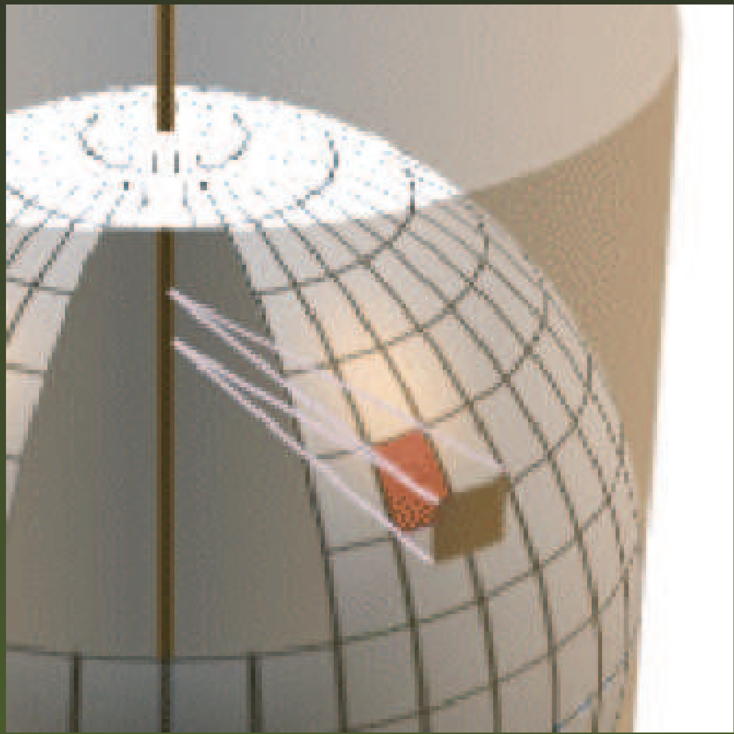


$$A = 2\pi R.2R$$



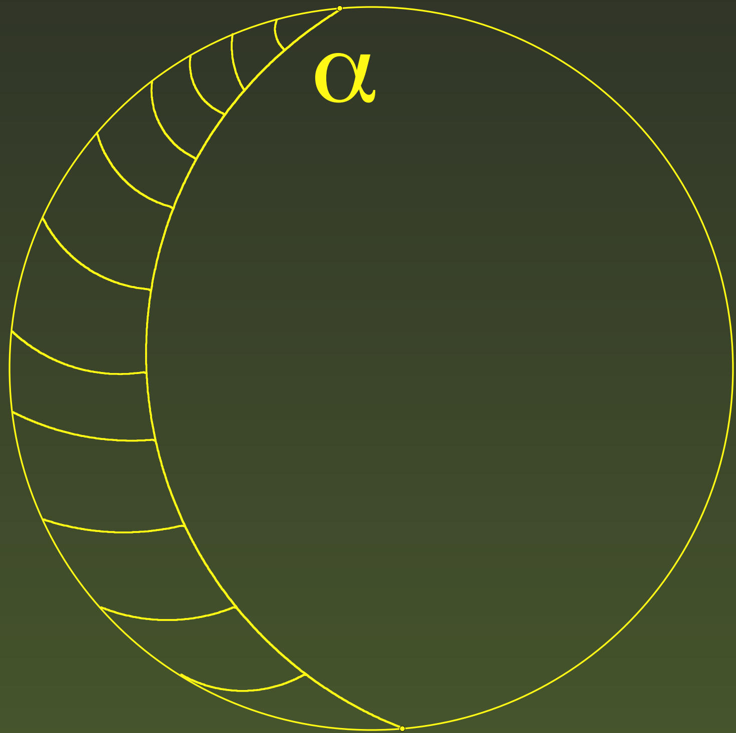
Àrea de l'esfera





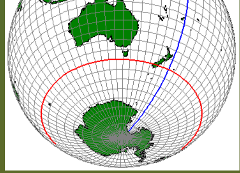
$$A = 2\pi R.2R$$
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2.2R$$

Àrea d'un fus



Àrea d'un fus esfèric: $\left\{\begin{array}{ccc} 2\pi & \longrightarrow & 4\pi R^2 \\ \alpha & \longrightarrow & F_\alpha \end{array}\right.$

$$F_\alpha = 2R^2\alpha.$$



Àrea triangle esfèric

$$\text{Àrea} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \text{ Excés}$$

III. Lambert

Geometria Absoluta

- G. Saccheri (1667 – 1733): *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.*

- J. H. Lambert (1728 – 1777): *Theorie der Parallellinien.*

Geometria Absoluta

- Saccheri rebutja *l'hostil hipòtesi de l'angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

Geometria Absoluta

- Saccheri rebutja *l'hostil hipòtesi de l'angle agut* perquè obté resultats *que repugnen la natura de la línia recta*.

- Lambert veu possible una geometria sense el cinquè postulat: *M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari*.

Esfera imaginària

- $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$
- $A = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$

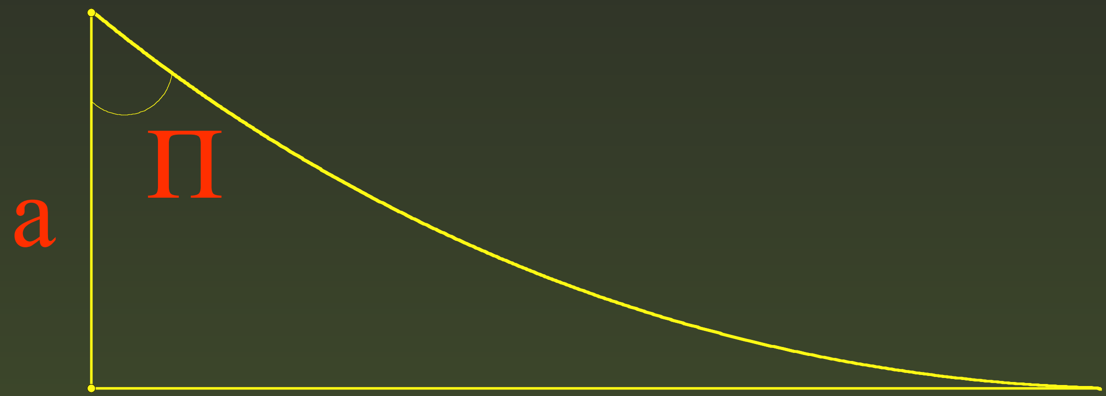
- Aquesta fórmula suggereix canviar R per Ri.

$$\boxed{\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.}$$

Analogia

$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$	$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cdot\cosh\frac{c}{R}$
A $= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$	A$= R^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$
L$= 2\pi R\sin\frac{r}{R}$	L$= 2\pi R\sinh\frac{r}{R}.$

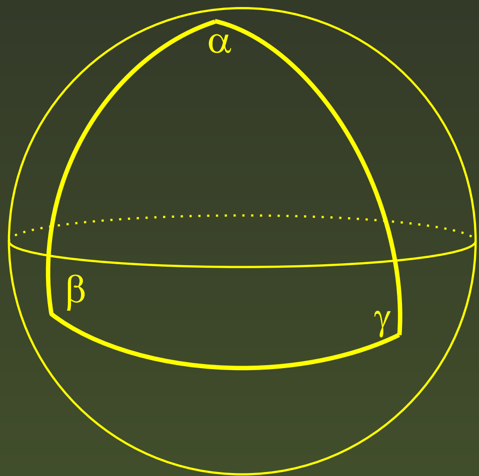
Angle de paral·lelisme



$$\boxed{\Pi(a) = 2\arctan e^{-a/R}}$$

K=1,0,-1 $\quad \Sigma = \alpha + \beta + \gamma$

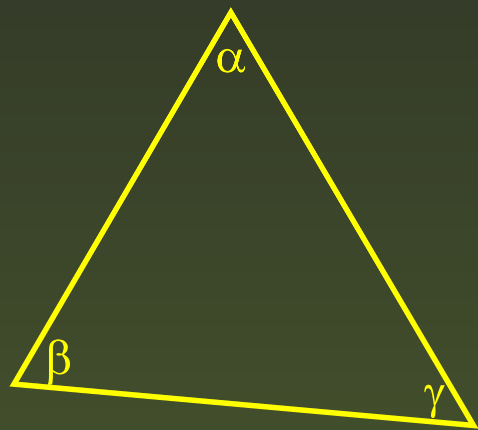
$\mathbb{S}^2(1)$



$$\Sigma > \pi$$

$$A = \Sigma - \pi$$

$\mathbb{E}^2$



$$\Sigma = \pi$$

$\mathbb{S}^2(i)$

$$\Sigma < \pi$$

$$A = \pi - \Sigma$$

IV. C. F. Gauss

El **diari**

- 29 de Març de 1796. Disset costats.
- L’endemà comença el diari, un mes abans de complir 19 anys.

[1] *Els principis dels quals depèn la divisió del cercle, i la divisibilitat geomètrica del mateix en disset parts, etc.*

Braunschweig

Göttingen

El diari

- 28 de Juliol de 1797.

[72] *He demostrat la possibilitat del pla.*

El diari

- Setembre de 1799.

[99] *Hem fet excepcionals progressos en els principis de la Geometria.*

1792

- Carta a Schumaker $(28 - 09 - 1846)$

El que Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatchevski anomena geometria imaginària. Saps que durant 54 *anys [*1792*] he compartit els mateixos punts de vista.*

1792

- Carta a Schumaker $(28 - 09 - 1846)$

  El que Schweikart va anomenar geometria astral, Lobatchevski anomena geometria imaginària. Saps que durant 54 *anys [*1792*] he compartit els mateixos punts de vista.*

  Tenia 15 anys!

1794

- Carta a Gerling $(10 - 10 - 1846)$

El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de $360°$ *per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

1794

- Carta a Gerling $(10-10-1846)$

  El teorema que el sr. Schweikart li menciona a vostè, que en qualsevol geometria la suma de tots els angles exteriors d'un polígon difereix de $360°$ *per una quantitat, [....] que és proporcional a l'àrea, és el primer teorema que es troba en el llindar d'aquesta teoria, un teorema la necessitat del qual vaig reconèixer ja el* 1794.

  Tenia 17 anys!

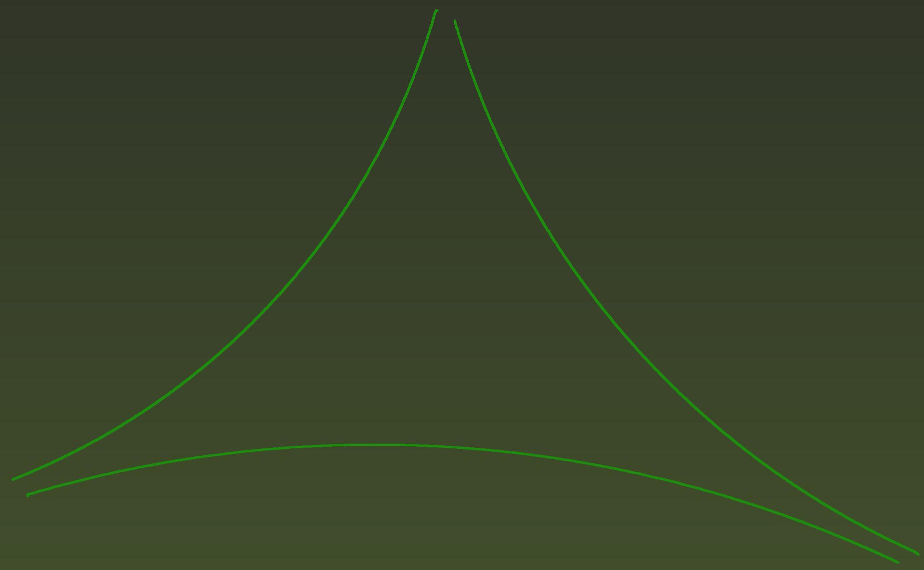
Carta a **Farkas Bolyai** 1799

- *Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com vulguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclidiana. Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no! És possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit.*

Carta a **Gerling** 1819

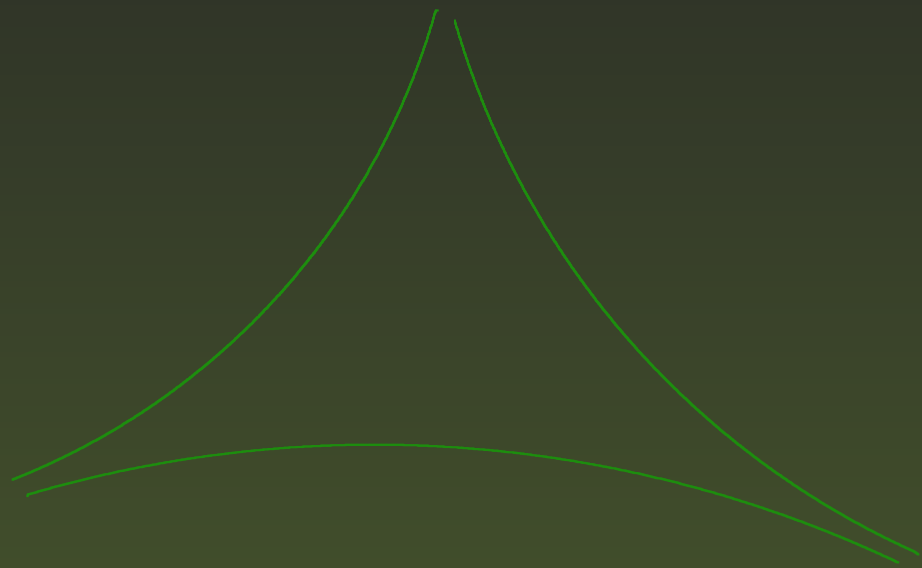
- *El defecte de la suma dels angles en el triangle pla respecte de 180° és, per exemple, no únicament més gran quan l'àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a ella, de manera que l'àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l'àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.*

Mateixa carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

Mateixa carta



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \text{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}$$

Carta a **Schumaker** 1831

- *Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria, però, que això morís amb mi.*

Carta a **Schumaker** 1831

- *Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrere, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria, però, que això morís amb mi.*

- Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

Carta a **Gerling** 1832

- *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.*

Carta a **Gerling** 1832

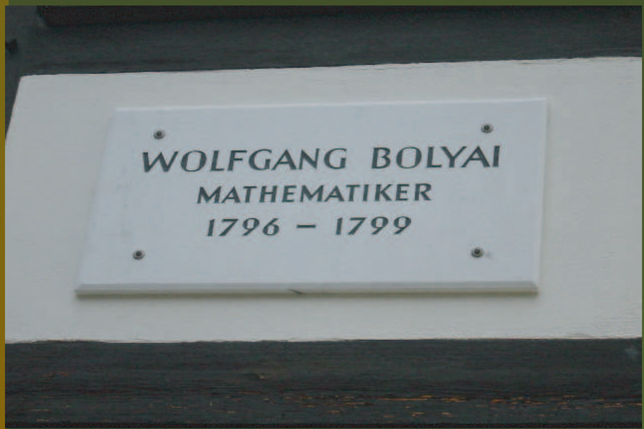
- *Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.*

- *L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el* 1798*, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.*

V. Bolyai

Farkas al seu fill. 1820

- Per l’amor de Deu! *Deixa les paral·leles tranquil·les*, abjura d’elles com d’una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida.



János al seu pare. 1823

- He descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més:

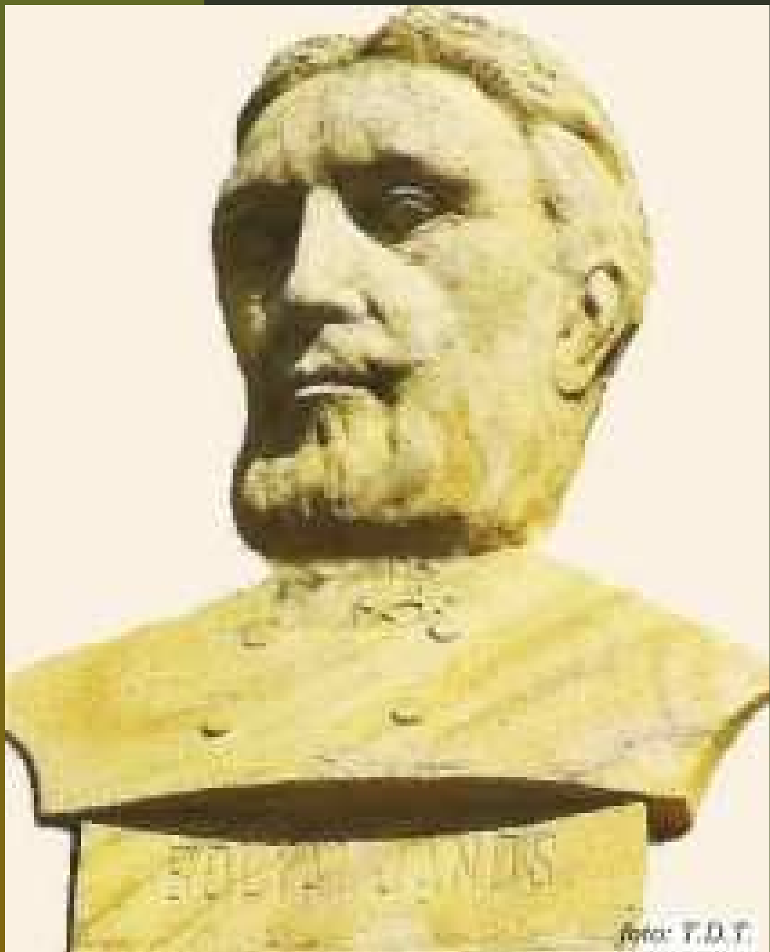
del no-res he creat un món nou i diferent!

Farkas i János Bolyai

Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi. 1832

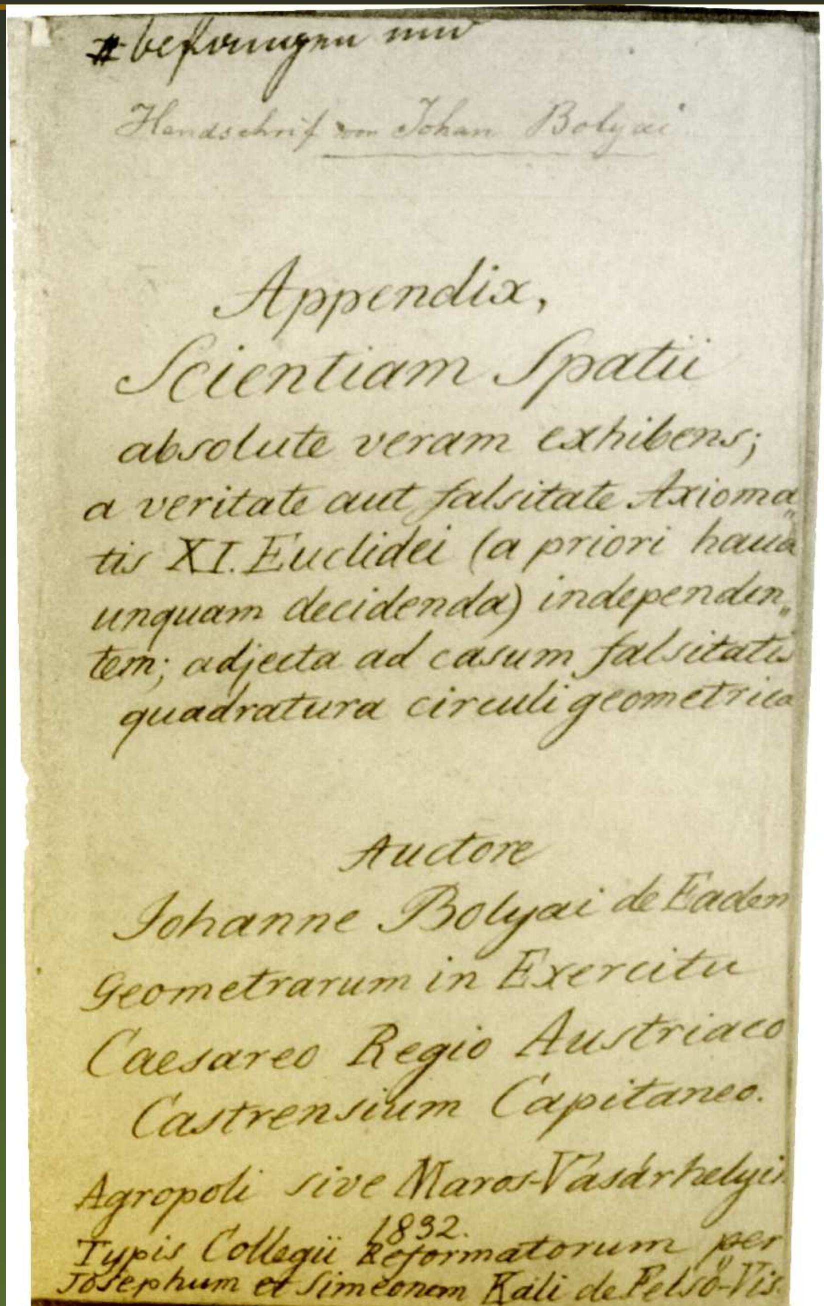
Marosvásárhely

János Bolyai 1802 – 1860



Marosvásárhely (Tirgu Mures, Transilvania, Rumania)

János Bolyai



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

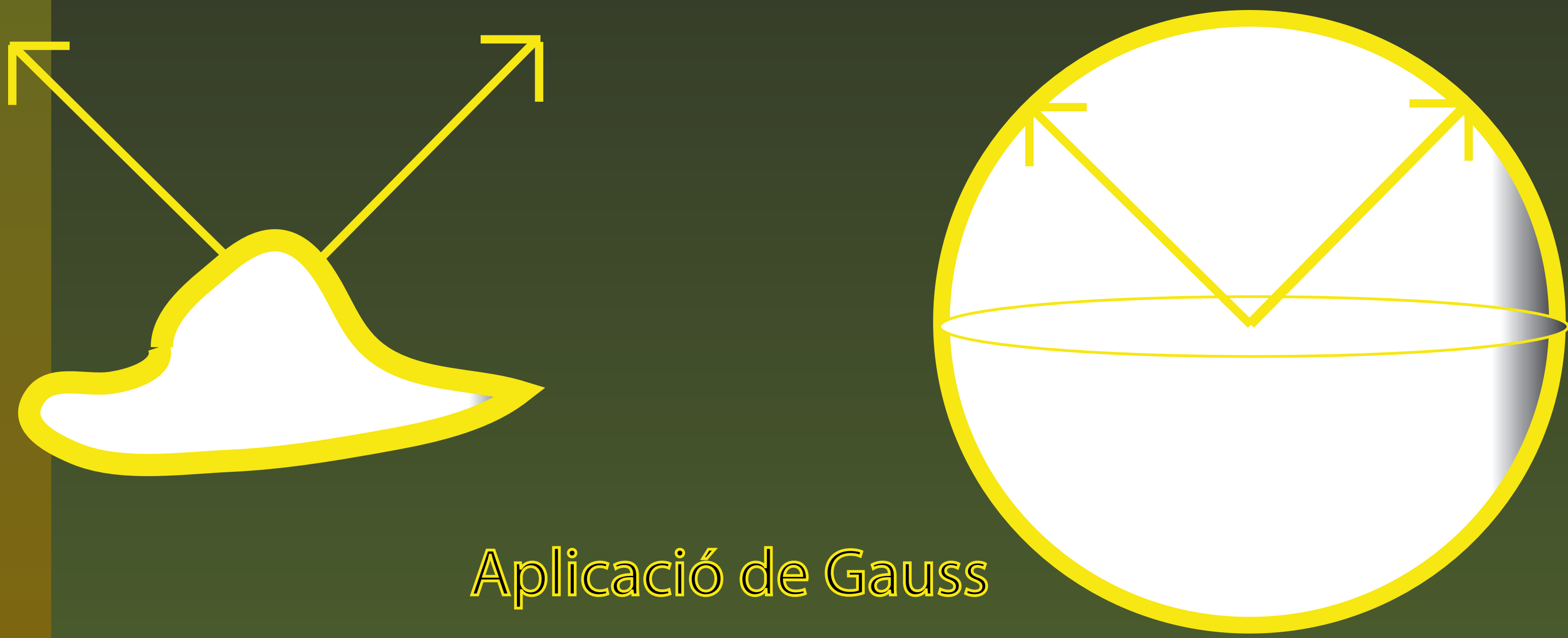
Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

VI. Gauss i el Disquisitiones

1827

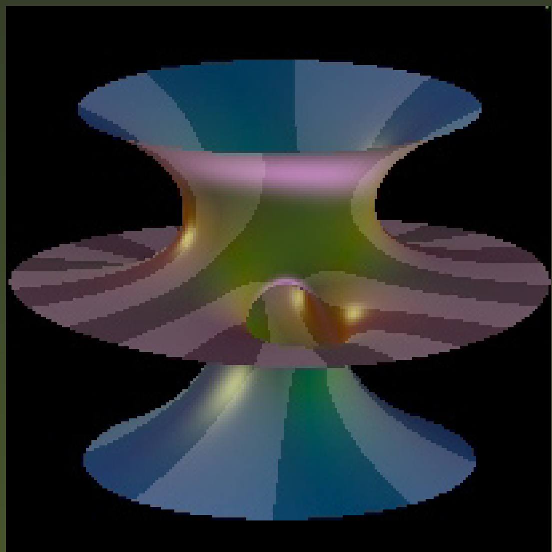
Curvatura. §6

Aplicació de Gauss $\qquad \gamma : S \to S^2$

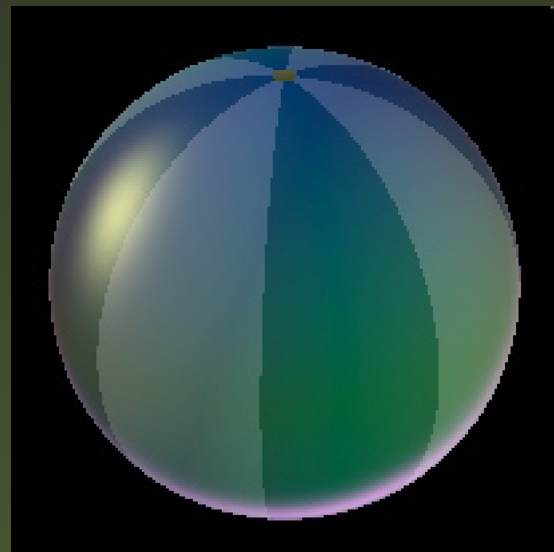


Curvatura. §6

Aplicació de Gauss $\qquad \gamma : S \to S^2$

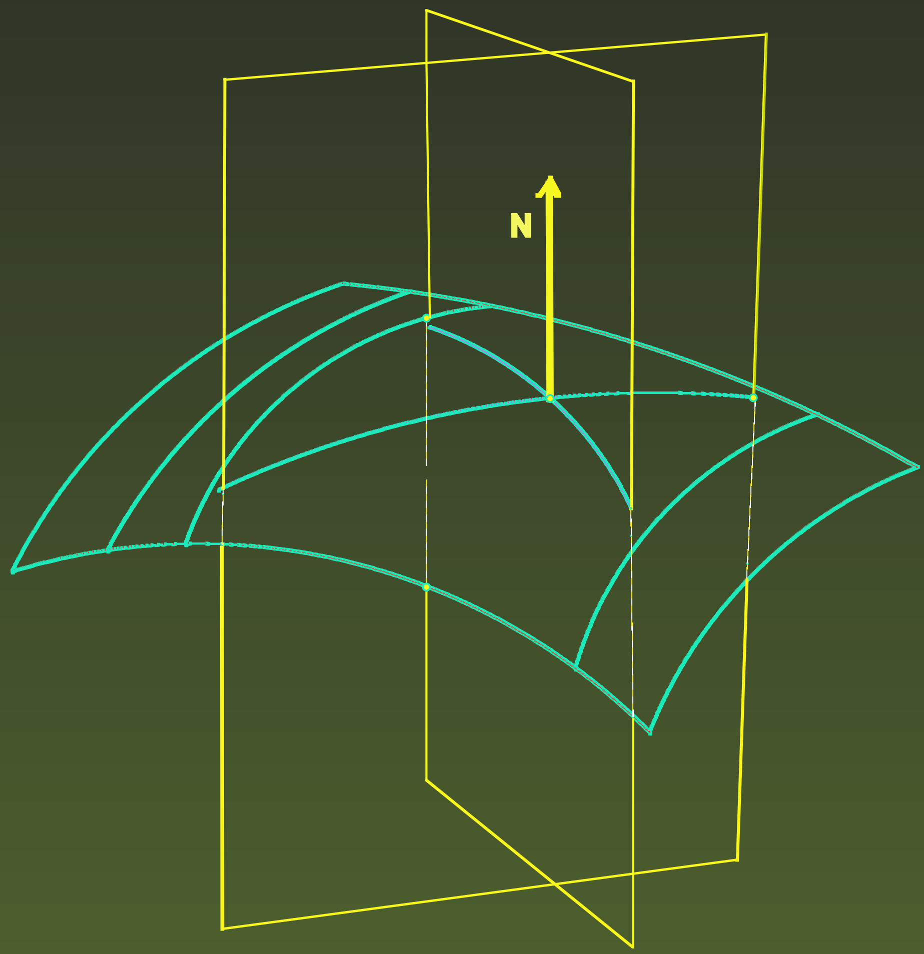


$\longrightarrow$



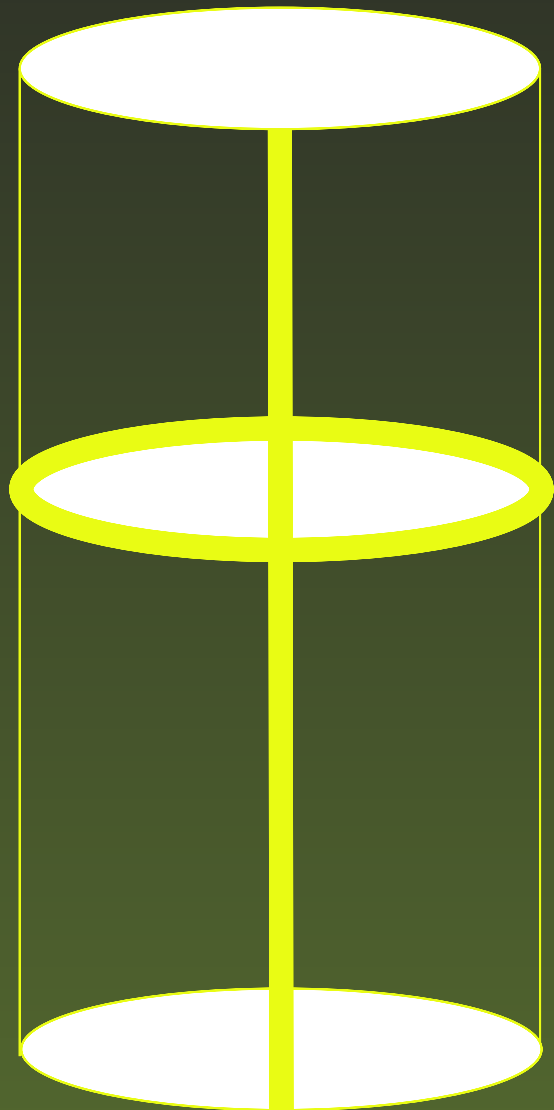
$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Àrea de } \gamma(S)}{\text{Àrea de } S}$$

Curvatura d'Euler. §8



$$\boxed{k = k_1 \cdot k_2}$$

Curvatura d'Euler. §8



$$\boxed{k = 1 \cdot 0 = 0}$$

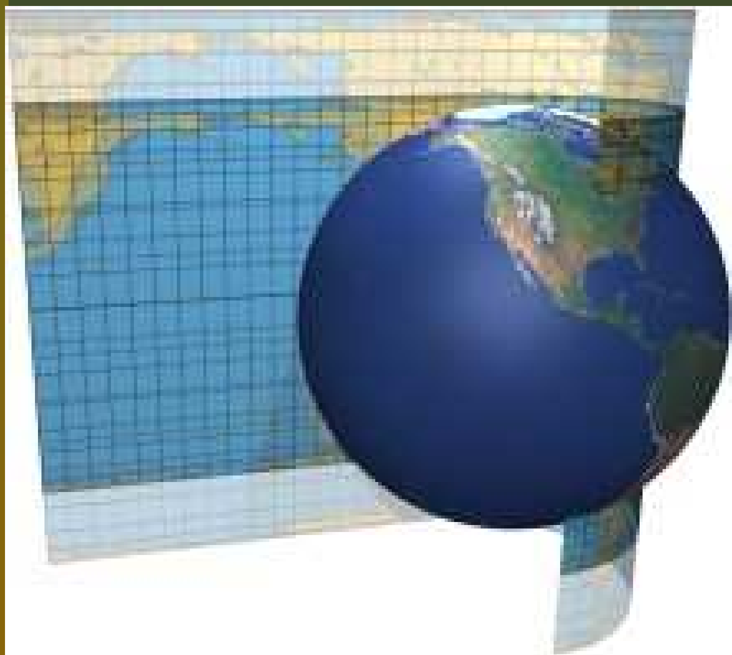
Teorema Egregi. §12

Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium

THEOREMA *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.*

No es poden fer bons mapes

Lambert



Gall-Peters

Teorema del defecte. §20

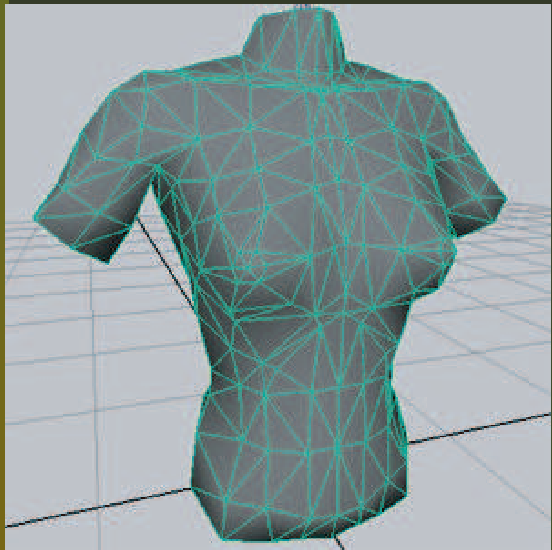
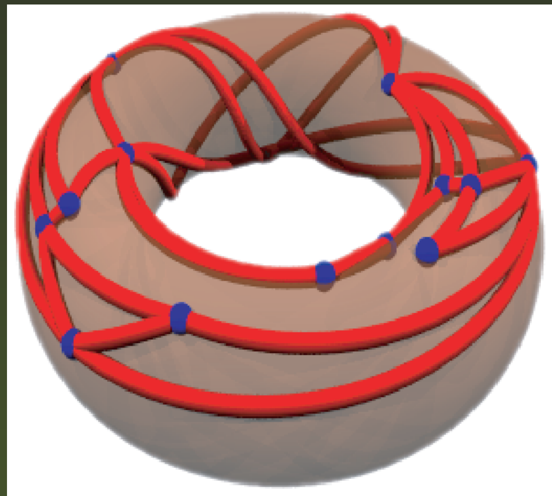
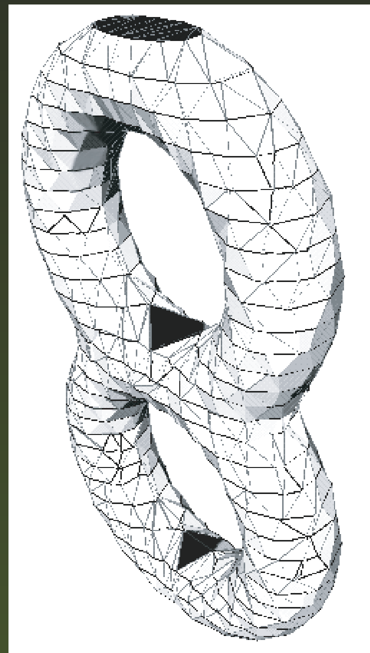
$$K = \int_T k \, dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Teorema del defecte. §20

$$K = \int_T k \, dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

- Curvatura total = Àrea imatge esfèrica = Defecte

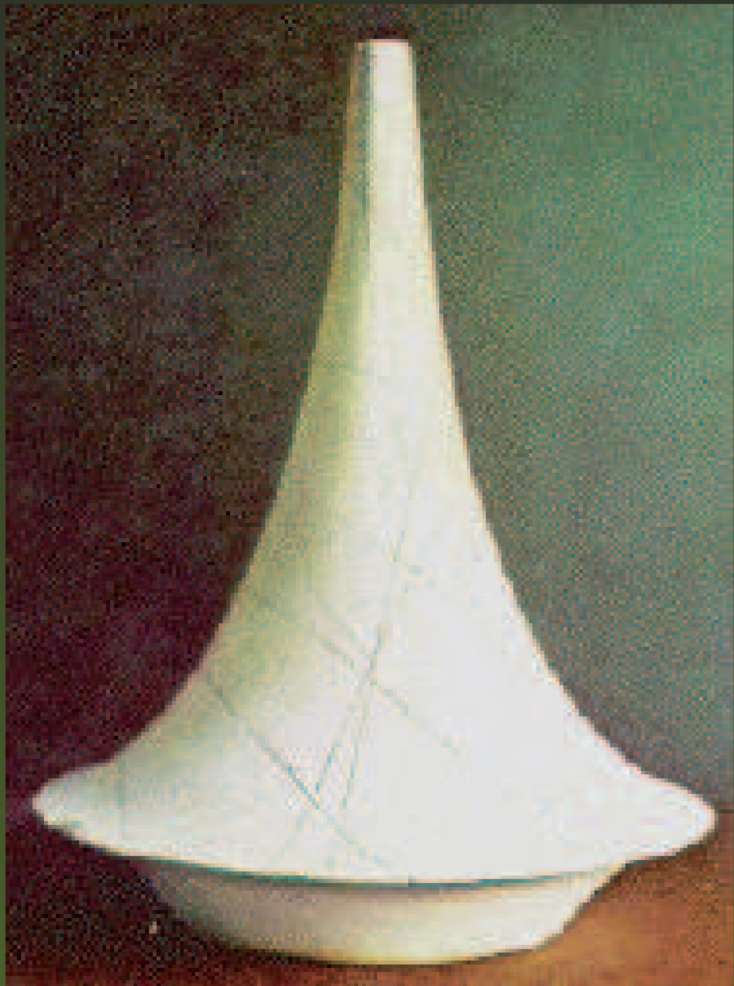
Teorema de Gauss-Bonnet

$K = 4\pi$ $K = 0$ $K = -4\pi$

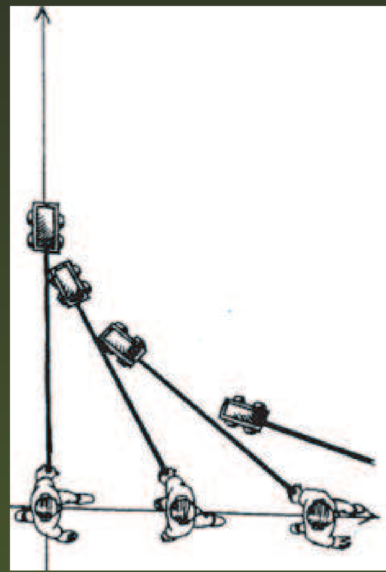
L’esfera imaginària

F. Minding 1840



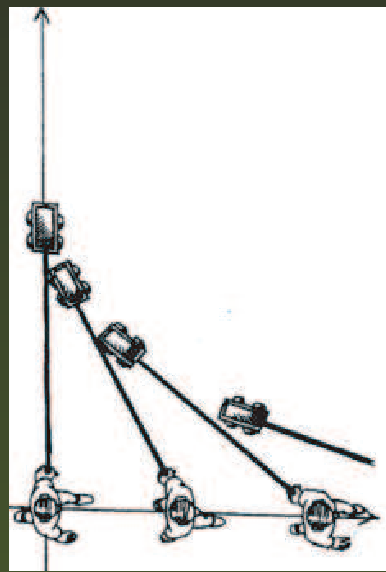
Tractriu

- Corba amb subtangent 1.

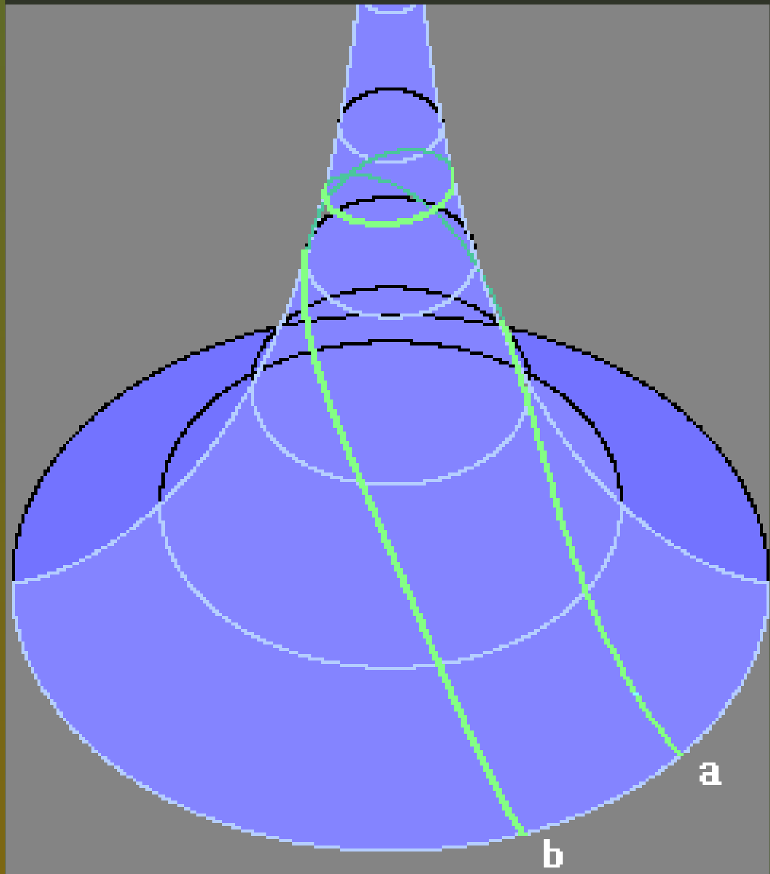


Tractriu

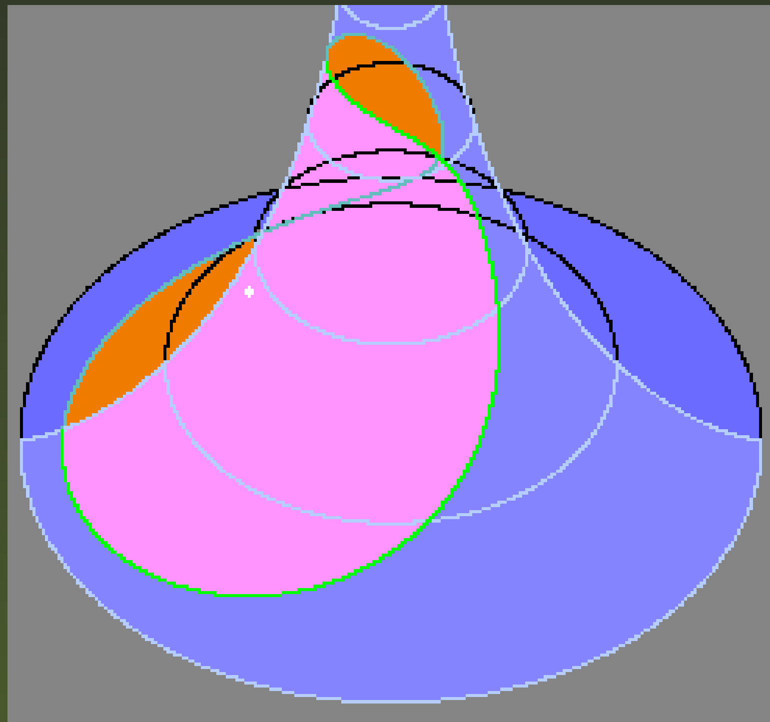
- Corba amb subtangent 1.



Pseudoesfera

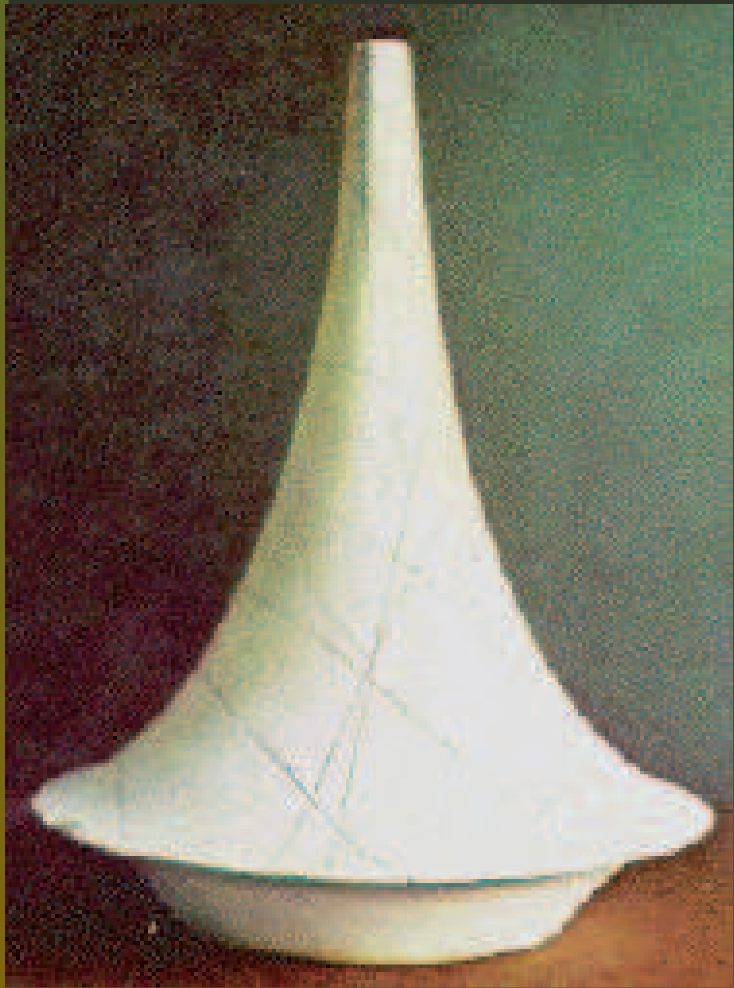


Rectes



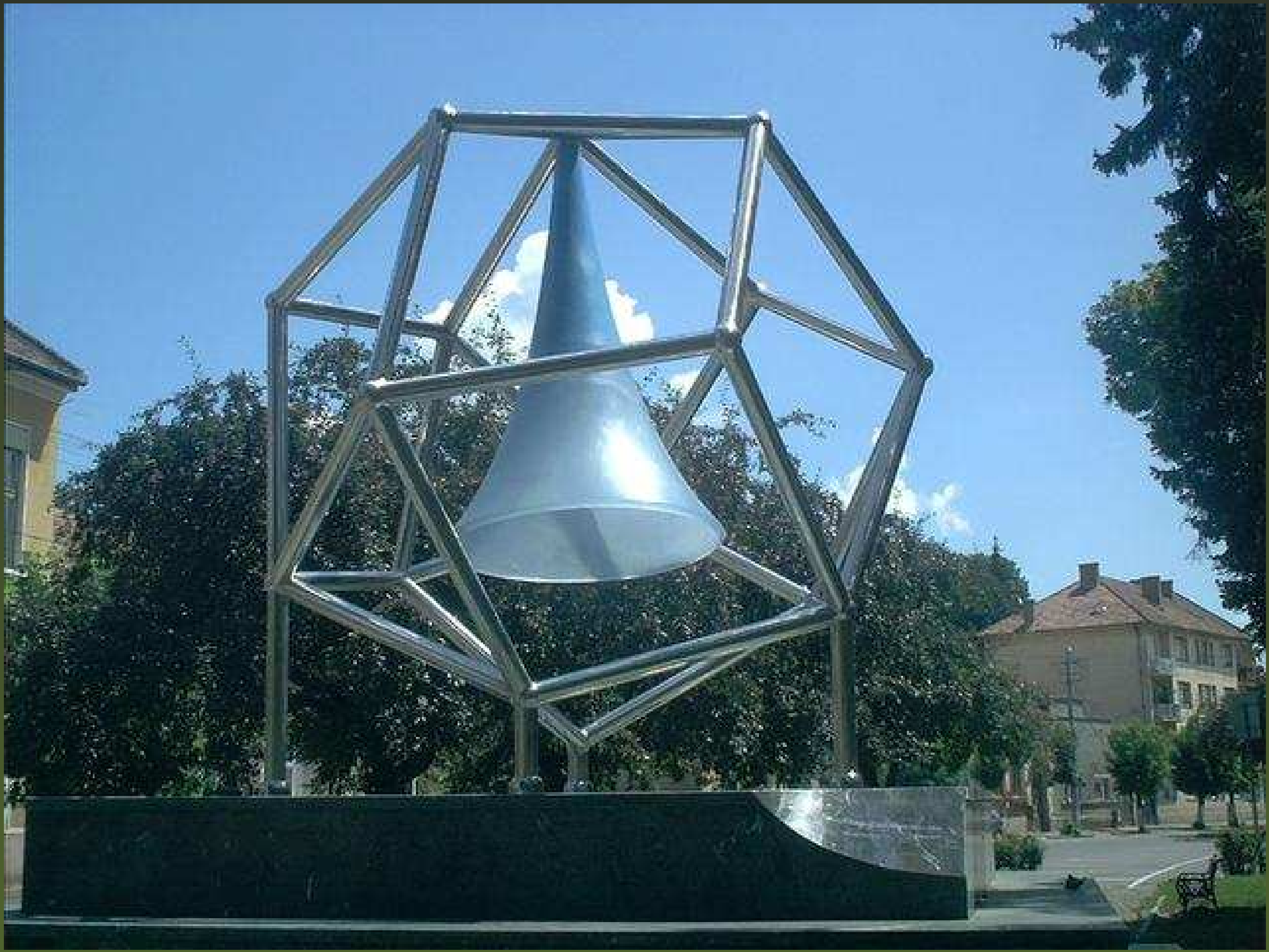
Circumferències

Pseudoesfera



$$A = (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Un nou món creat del no-res



Marosvásárhely

Poincaré. La ciència i la hipòtesi. 1902

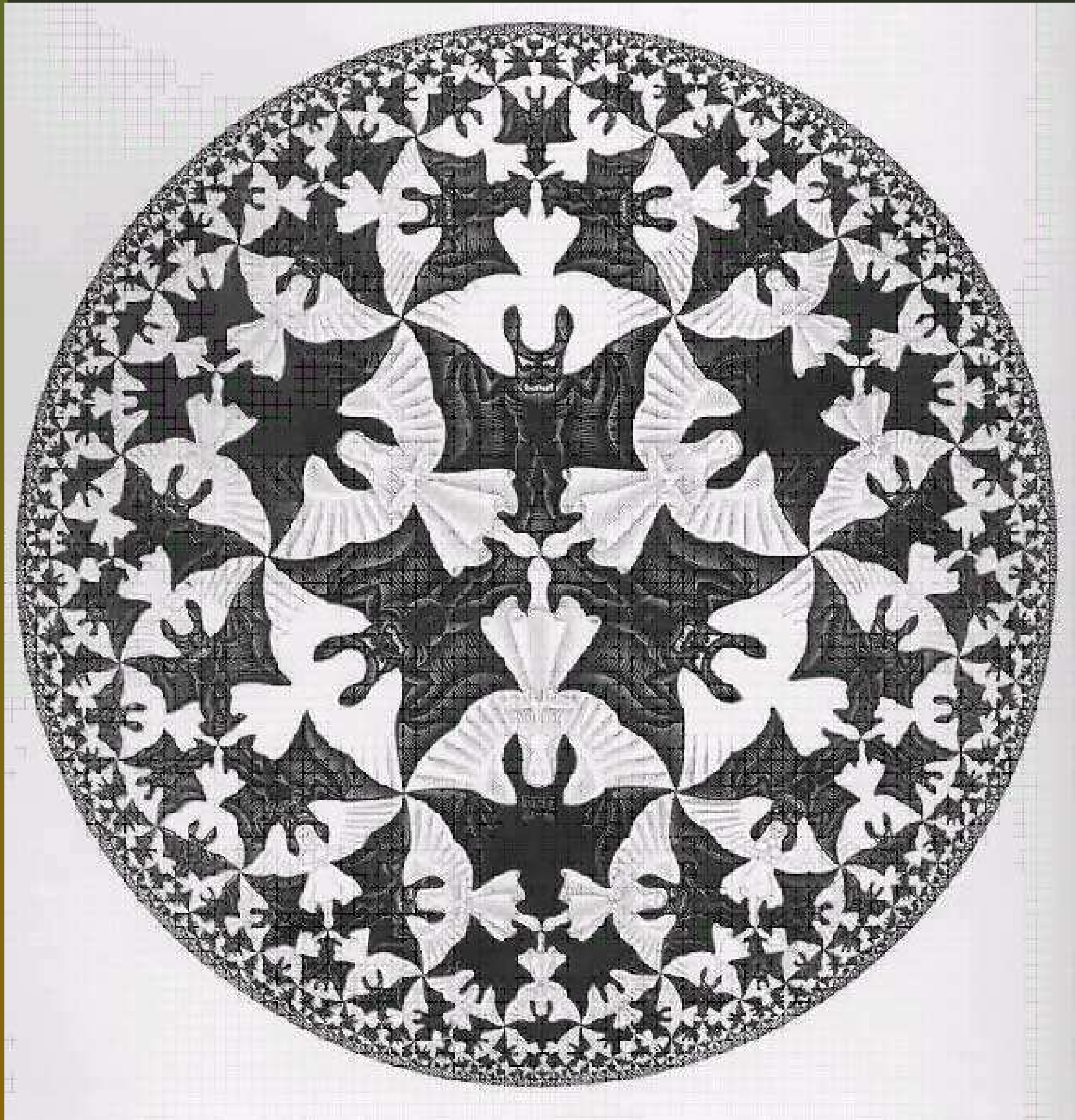
Cap experiència estarà mai en contradicció amb el postulat d'Euclides; cap experiència estarà mai en contradicció amb el postulat de Lobatchevski.

Disc de Poincaré

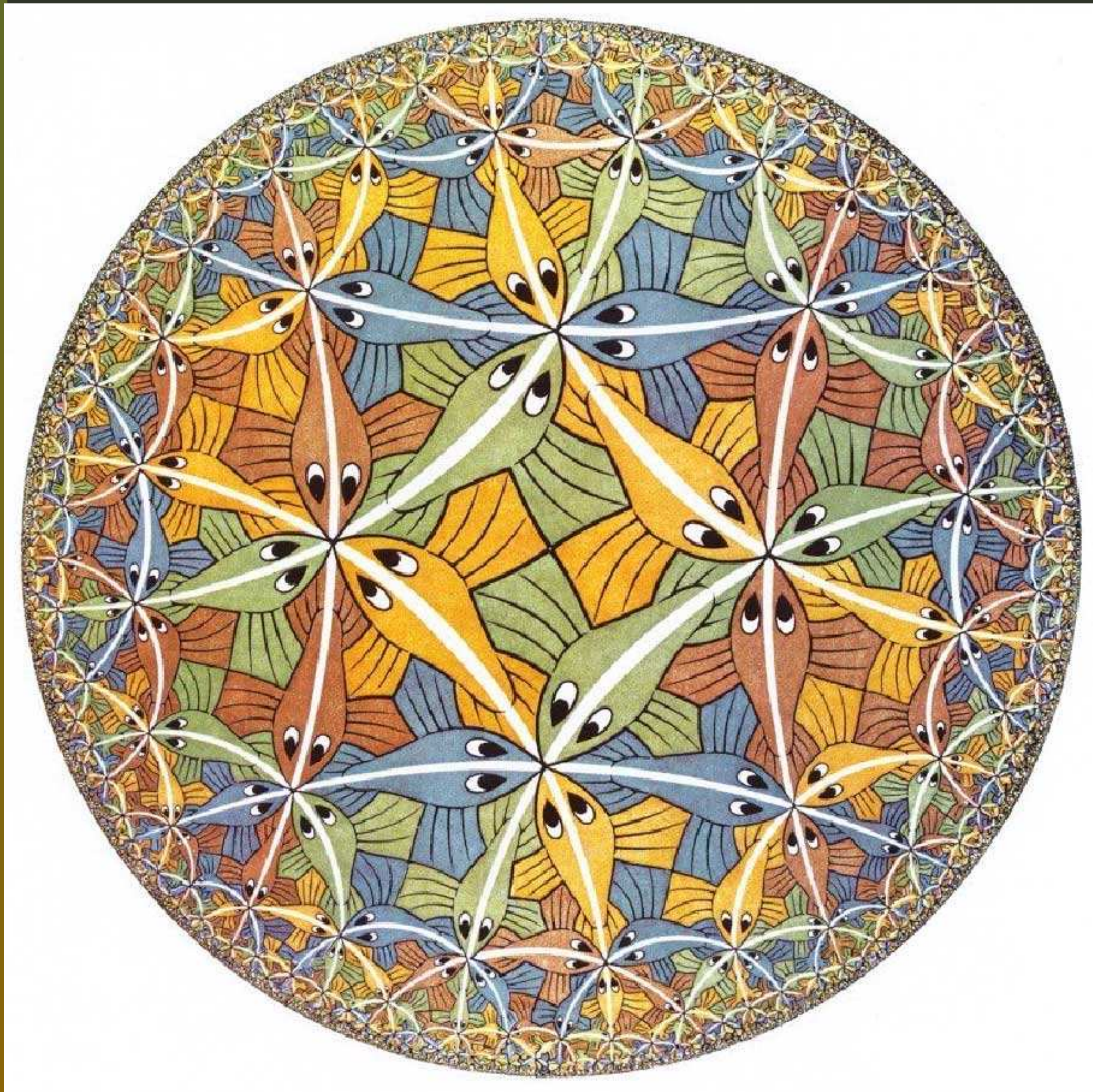
Disc de Poincaré

$$d((0,0),(x,y)) = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Disc de Poincaré



Disc de Poincaré



VII. Riemann

Riemann

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 1854

Riemann. Primera pàgina

- *La relació entre el concepte d'espai i les seves propietats bàsiques ha quedat sempre en la foscor.*
- *Des d'Euclides a Legendre aquesta foscor no ha estat dissipada ni pels matemàtics ni pels filòsofs.*
- *Les propietats que distingeixen l'Espai d'altres [varietats] concebibles només es poden deduir a partir de l'experiència.*

Varietats de Riemann

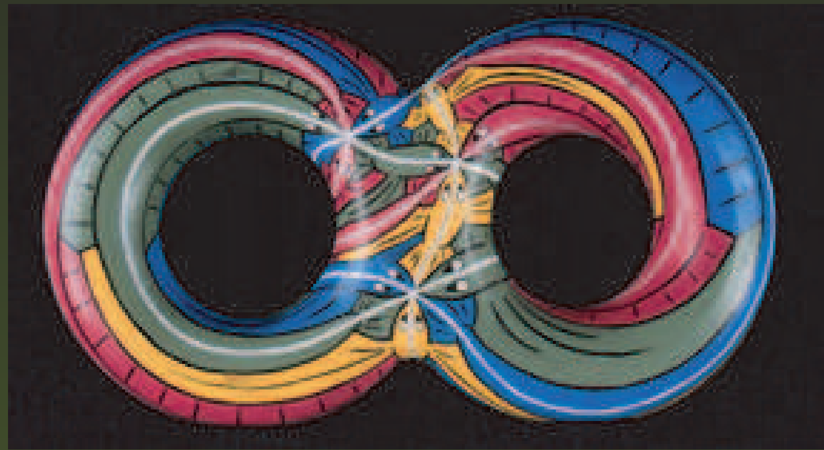
- Vivim en una varietat de Riemann de dimensió tres.
- En quina? És finita o infinita?
- Quantes n'hi ha?
- Distinció entre geometria i topologia.

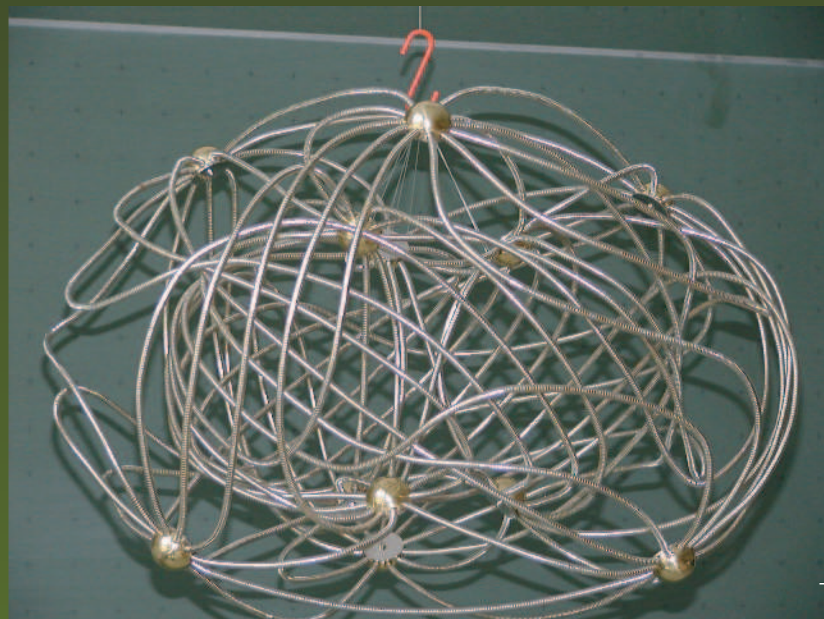
Varietats de dimensió dos

Classificació topològica

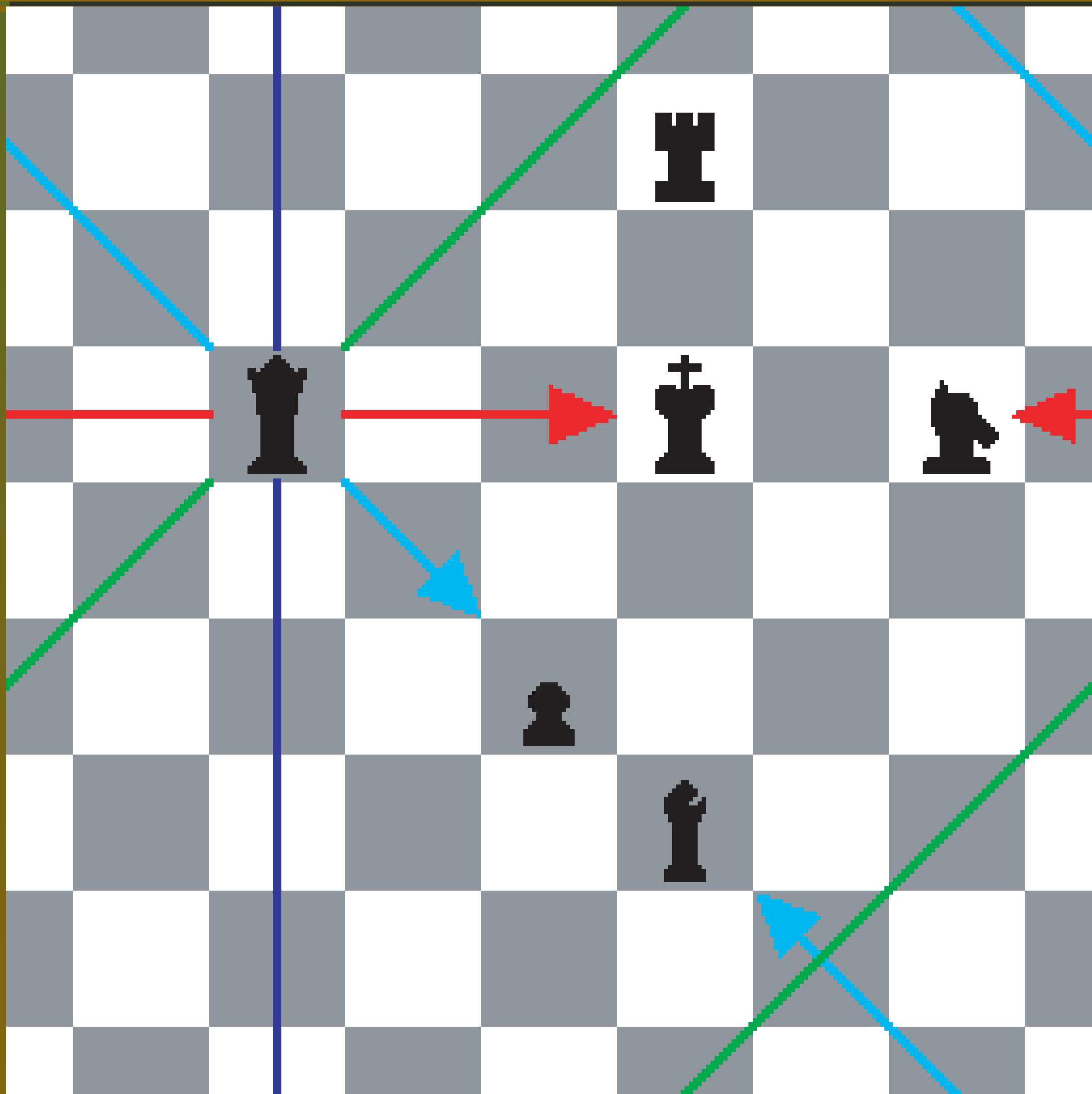
- Pla i pla amb forats.
- Esfera.
- Tor i tor múltiple amb forats.

Varietats de dimensió dos



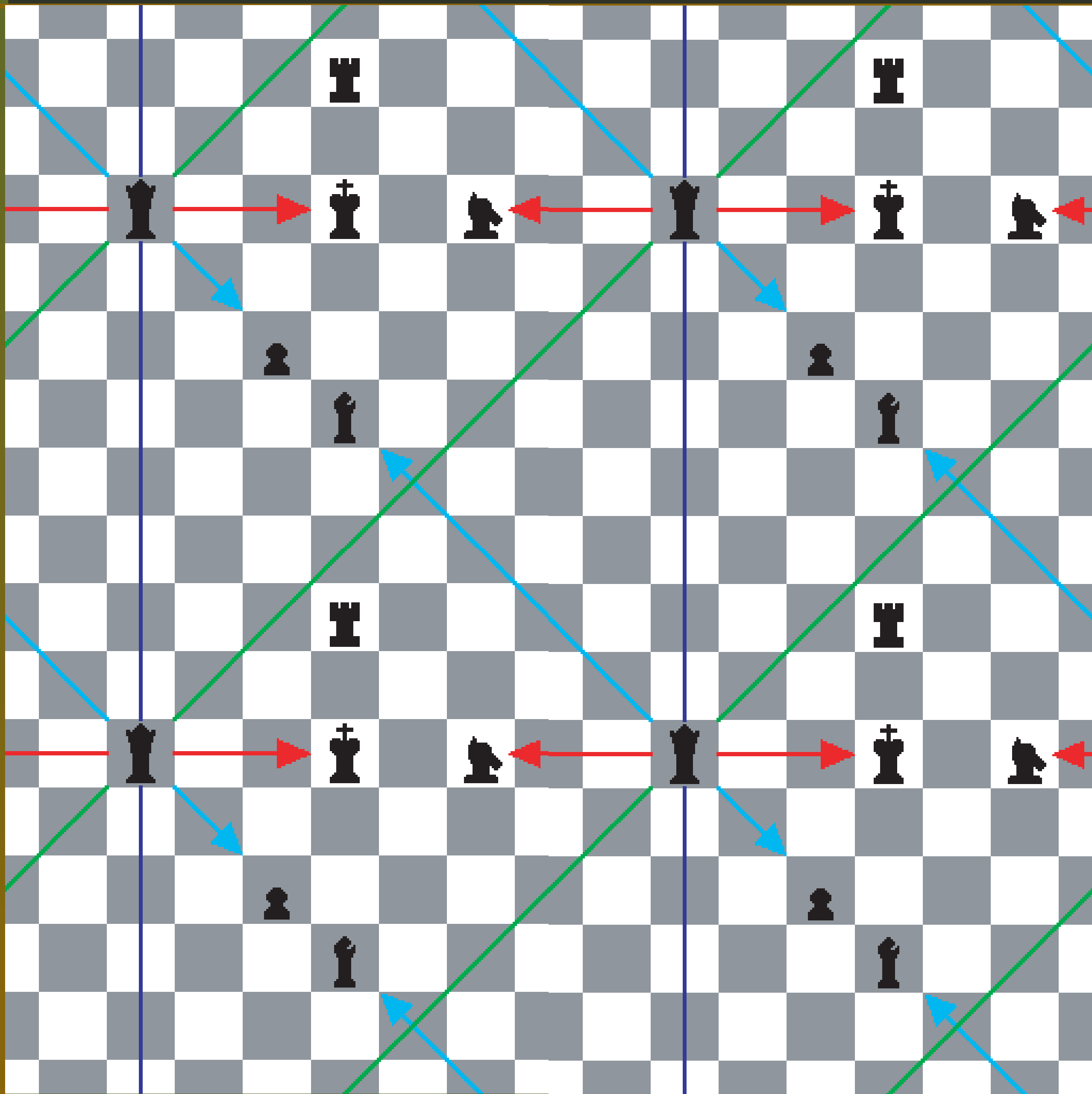


Varietat de dimensió dos finita

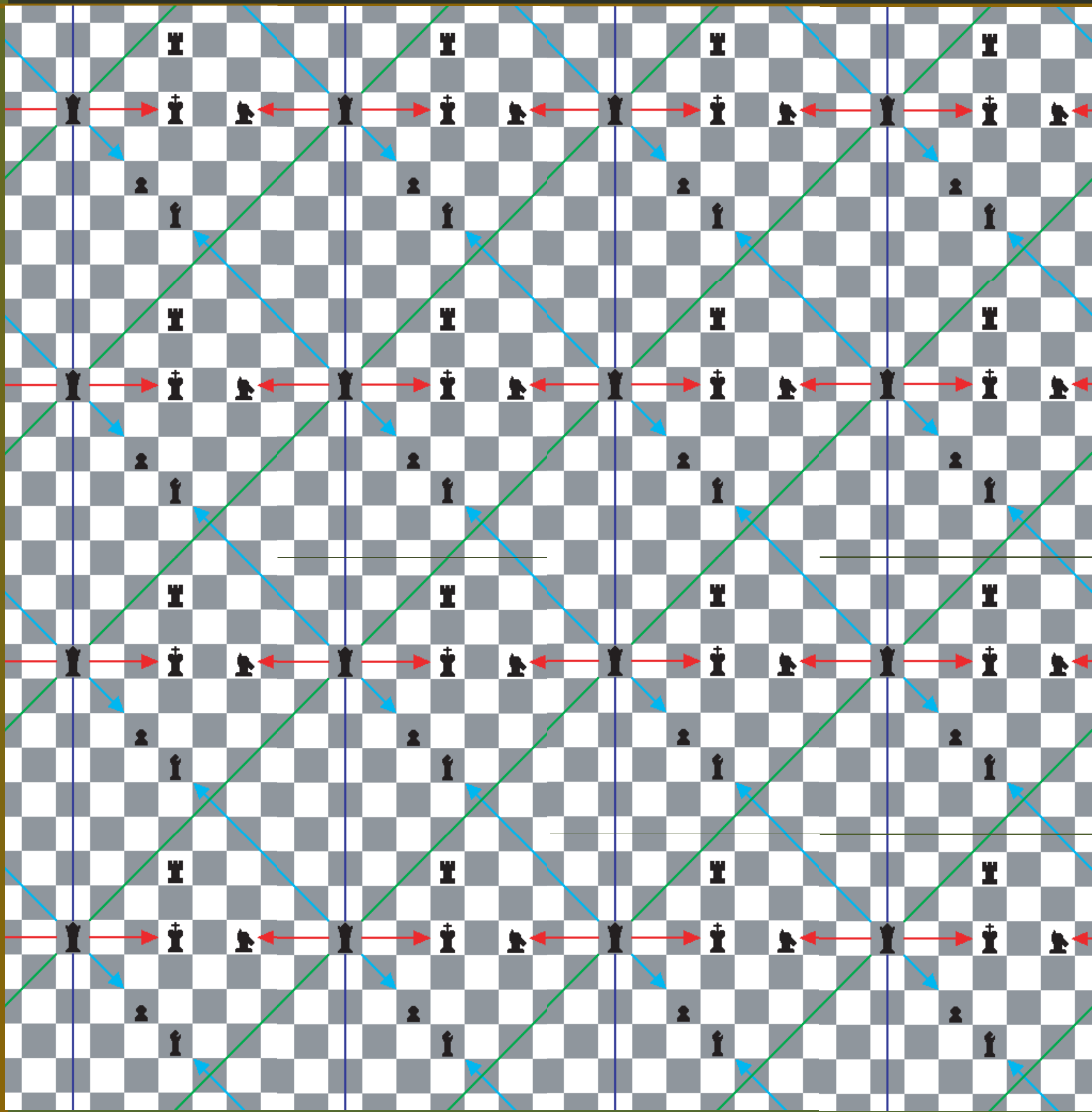


Topologia del tor, geometria del pla.

Varietat de dimensió dos finita



Tessel·lacions



Tessel·lacions

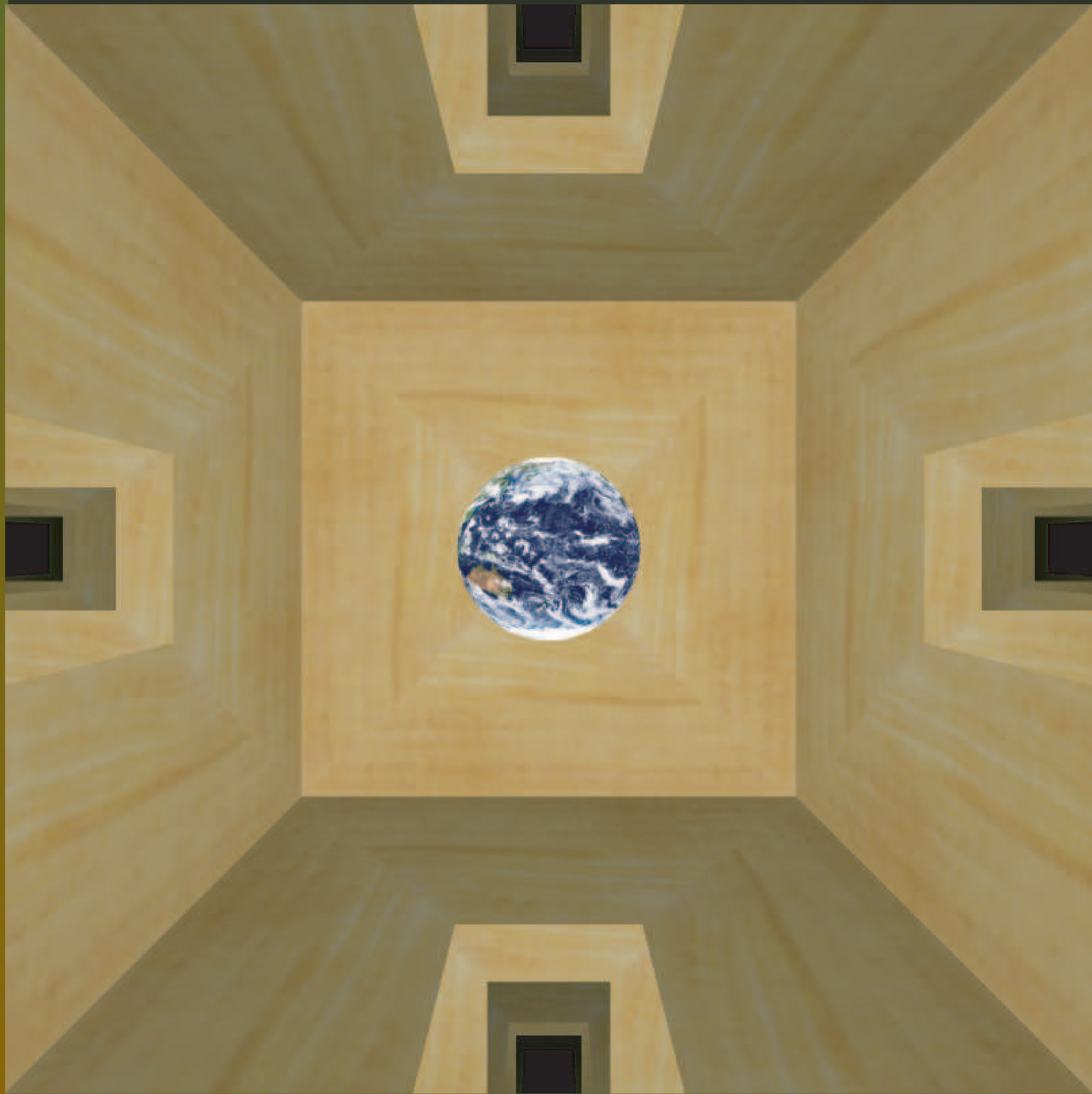
Varietats de dimensió tres

- Problema obert fins al 2006.

W. Thurston

G. Perelman

A quin espai vivim?



A quin espai vivim?

120 dodecaedres tessel.len S^3

A quin espai vivim?