El teorema del Defecte

Agustí Reventós Tarrida

Maig 2011

Resum

Adaptem la prova del Disquisitiones a coordenades polars geodèsiques.[1]

1 Equació de les geodèsiques

Theorem 1.1 *Siguin p, q coordenades polars geodèsiques sobre una superfície. Suposarem que p és la longitud de la geodèsica que uneix $P = (p, q)$ a un punt donat $O = (0, 0)$, orígen de les coordenades, i q l'angle de la geodèsica PO amb una geodèsica fixada que surt de O. Si la métrica en aquests coordenades s'expressa com*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

i denotem per θ l'angle que forma una geodèisca donada amb les corbes $q = constant$, tenim

$$d\theta = -\frac{dm}{dp}dq, \qquad m^2 = G$$

Demostració. Considerem les corbes $p_t(q)$ donades en coordenades per

$$p_t(q) = (p(t, q), q)$$

i fem la hipòtesi de que totes comencen i acaben en els mateixos punts que comença i acaba la geodèsica inicial $p = p(q)$. És a dir $p(t, 0) = p(0)$ i $p(t, A) = p(A)$, si $0 \leq q \leq A$, per a tot t.

La longitud d'aquestes corbes està donada per

$$L_t = \int_0^A \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial q} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial q} \\ 1 \end{pmatrix}}\, dq = \int_0^A \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^2 + G}\ dq$$

[1] Notes escrites en motiu d'un parell de classes impartides en substitució de J. Girbau.

La condició de geodèsica és

$$0 = \frac{dL_t}{dt}_{t=0} = \int_0^A \frac{2(\frac{\partial p}{\partial q})_{t=0}(\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial q})_{t=0} + \frac{\partial G}{\partial p}_{t=0}\frac{\partial p}{\partial t}_{t=0}}{2\frac{ds}{dq}} \, dq$$

Hem usat que l'arrel quadrada anterior, en $t = 0$, és la norma del vector tangent a la geodèsica inicial i per tant, denotant per s el paràmetre arc d'aquesta geodèsica,

$$\frac{ds}{dq} = \sqrt{(\frac{dp}{dq})^2 + G}$$

Observem també que $G = G(p, q) = G(p(t, q), q)$ i per tant, per la regla de la cadena,

$$\frac{dG}{dt}_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial p}_{t=0}\frac{\partial p}{\partial t}_{t=0}.$$

Per simplificar omitirem el subindex $t = 0$ i denotarem, com Gauss,

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial t}_{t=0}.$$

Utilitzant integració per parts tindrem

$$0 = \left[\frac{\frac{\partial p}{\partial q}}{\frac{ds}{dq}}\delta p\right]_{q=0}^{q=A} - \int_0^A \left(\delta p \cdot \frac{d}{dq}(\frac{\frac{\partial p}{\partial q}}{\frac{ds}{dq}}) - \frac{\delta p \cdot \frac{\partial G}{\partial p}}{2\frac{ds}{dq}}\right) \, dq$$

Però com la variació que fem de la geodèsica és d'extrems fixats, tenim que $\delta p = 0$, tant a $q = 0$ com a $q = A$, de manera que el terme que la integració per parts ens treu fora de la integral és zero.

Per ser aquesta integral igual a zero per a tota variació l'integrand ha de ser zero. És a dir,

$$\frac{d}{dq}(\frac{\frac{\partial p}{\partial q}}{\frac{ds}{dq}}) - \frac{\frac{\partial G}{\partial p}}{2\frac{ds}{dq}} = 0. \tag{1}$$

Observem que, per definició de l'angle θ, tenim

$$(\frac{\partial p}{\partial q}, 1) \cdot (1, 0) = |(\frac{\partial p}{\partial q})| \cdot |(1, 0)| \cos\theta$$

És a dir

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \sqrt{(\frac{dp}{dq})^2 + G} \ \cos\theta = \frac{ds}{dq}\cos\theta \tag{2}$$

Ara és immediat que

$$\frac{ds}{dq}\sin\theta = \sqrt{G}. \tag{3}$$

Substituint (2) a (1) tenim

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dq} = \frac{\frac{\partial G}{\partial p}}{2\frac{ds}{dq}}$$

I usant ara (3),

$$\frac{d\theta}{dq} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial p}}{2\sqrt{G}} = -\frac{dm}{dp}. \quad \square$$

2 Curvatura de Gauss

Theorem 2.1 *En la mateixa situació i amb la mateixa notació que en el teorema anterior tenim:*

$$K = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}$$

on K denota la curvatura de Gauss.

Demostració. Consequència de l'expressió que troba Gauss de la curvatura en la demostració del teorema egregi.$\square$

Theorem 2.2 *En la mateixa situació i amb la mateixa notació que en els teoremes anterios tenim*

$$\frac{dm}{dp}_{p=0} = 1.$$

Demostració. Per a p petits, les corbes $p = constant$ són com circumferències de manera que la longitud de la corba $p = \epsilon$ entre $q = 0$ i $q = \Delta q$ és molt aproximadament igual a $\epsilon\Delta q$.

Aquesta idea d'aproximació es pot escriure dient que el quocient entre la longitud de la corba i la longitud de la circumferència tendeix a 1. És a dir,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_0^{\Delta q} m(\epsilon, q)\, dq}{\epsilon\Delta q} = 1.$$

Per l'Hôpital,

$$\frac{\frac{d}{d\epsilon}_{|\epsilon=0}\int_0^{\Delta q} m(\epsilon, q)\, dq}{\Delta q} = 1$$

D'aquí deduïm

$$\left.\frac{dm}{dp}\right|_{p=0} = 1$$

com volíem.[2] □

3 Teorema del Defecte

Theorem 3.1 *Sigui $T = \triangle ABC$ un triangle geodèsic. Llavors*

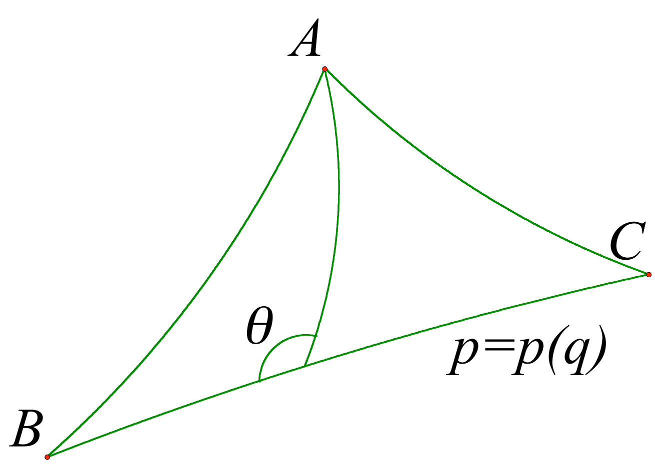
$$\int_T K dS = A + B + C - \pi$$

on dS és l'element d'àrea i K la curvatura de Gauss.

Demostració. Pel teorema 2.1 tenim

$$\int_T K dS = \int_T K m \, dp \, dq = -\int_T \frac{d^2 m}{dp^2} \, dp \, dq$$

La figura ens diu que els límits d'integració són $0 \leq p \leq p(q)$, $0 \leq q \leq A$. La geodèsica BC té equació $p = p(q)$. El vèrtex A és l'origen de les coordenades polars. Les lletres A, B, C indiquen a la vegada els vèrtexs i la mesura dels angles en el corresponent vèrtex. En B, $q = 0$; en C, $q = A$.



[2] Aquesta és essencialment la demostració de Gauss. Bé, ell no dóna pas tants detalls (Vegeu Struik, *Geometria Diferencial Clàssica*, pàgina 158). En podeu trobar una més detallada al Volum II de Spivack.

Així, usant el teorema 2.2, tenim

$$\int_T K dS = -\int_0^A \left[\frac{dm}{dp}\right]_0^{p(q)} dq = \int_0^A (1-\frac{dm}{dp})dq = A - \int_0^A \frac{dm}{dp}\, dq$$

Pel teorema 1.1 tenim

$$\int_T K dS = A + \int_{q=0}^{q=A} d\theta = A + C - (\pi - B) = A + B + C - \pi. \quad \square$$

4 Gauss-Bonnet

Theorem 4.1 *Sigui S una superficie orientable compacta i sense vora. Llavors*

$$\int_S K\, dS = 2\pi \cdot \chi.$$

Demostració. Dividim la superficie en triangles geodèsics, apliquem a cada un d'ells el teorema del defecte i sumem. Observem que la característica d'Euler χ val

$$\chi = C + V - A = V - \frac{C}{2}$$

ja que $3C = 2A$. Així

$$\int_S K dS = \text{suma dels defectes de cada triangle} = 2\pi V - C\pi = 2\pi\chi.$$

5 Triangles no geodèsics

La millora que Bonnet fa del torema del defecte és la següent.

Theorem 5.1 *Sigui $T = \triangle ABC$ un triangle no geodèsic. Llavors*

$$\int_T K\, dS = A + B + C - \pi - \int_{\partial T} k_g$$

Demostració. Suposarem el triangle situat en una regió de la superficie en la que tenim definides coordenades ortogonals ($F = 0$). L'expressió de la curvatura és llavors

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

L'expressió de la curvatura geodèsica de la corba $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, essent u el paràmetre arc, està donada per[3]

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\theta}{ds}$$

on θ és l'angle positiu entre $\frac{\partial}{\partial u}$ i $\gamma'(s)$.

Si considerem la 1-forma $\omega = Adu + Bdv$ amb

$$A = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \qquad B = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$$

tenim

$$k_g(s)ds = \omega + d\theta$$

i també

$$\begin{aligned} dw &= -(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u})\, du \wedge dv \\ &= \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) du \wedge dv \\ &= -K\sqrt{EG} du \wedge dv \\ &= -K dS \end{aligned}$$

Pel teorema de Stokes tenim

$$\int_T K\, dS = -\int_T d\omega = -\int_{\partial T} \omega = \int_{\partial T} d\theta - \int_{\partial T} k_g(s) ds. \tag{4}$$

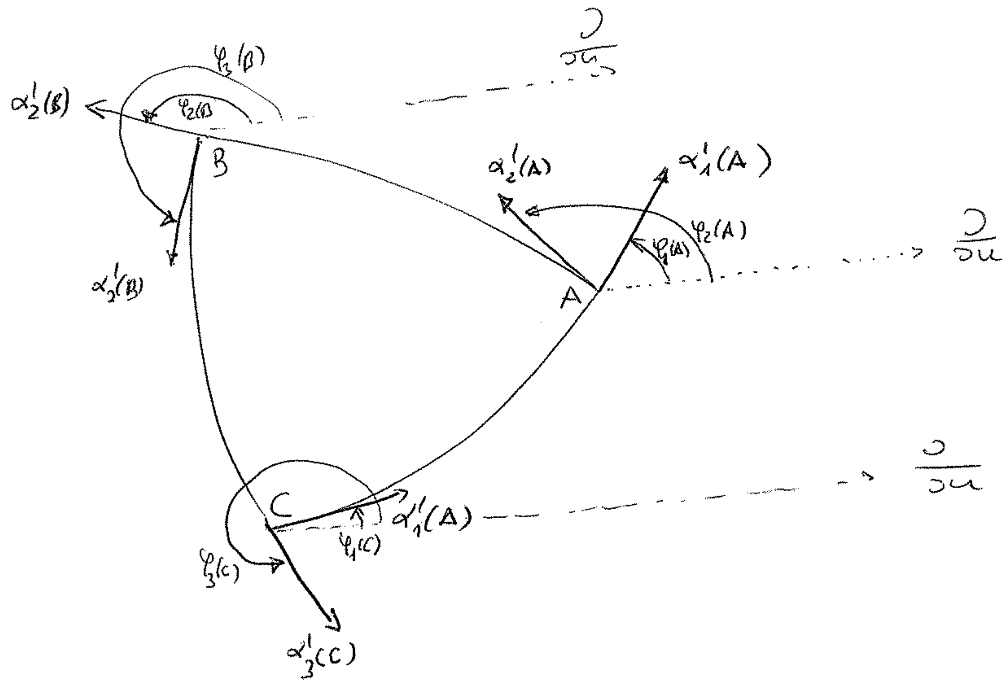
Ara bé, integrar sobre la vora del triangle (no geodèsic) vol dir parametritzar per l'arc cadascun dels costats, integrar sobre cadascun d'ells i sumar.

Així,

$$\int_{\partial T} d\theta = \int_A^B d\theta + \int_B^C d\theta + \int_C^A d\theta$$

Amb la notació de la figura tenim

[3] Vegeu el corol·lari 7.4, pàgina 13, o per exemple, Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superfícies*, Alianza Editorial, pàgina 255.



$$
\begin{aligned}
\int_A^B d\theta &= \theta_2(B) - \theta_2(A) \\
\int_B^C d\theta &= \theta_3(C) - \theta_3(B) \\
\int_C^A d\theta &= \theta_1(A) - \theta_1(C)
\end{aligned}
$$

Sumant

$$\int_{\partial T} d\theta = (\theta_1(A) - \theta_2(A)) + (\theta_2(B) - \theta_3(B)) + (\theta_3(C) - \theta_1(C))$$

I mirant la figura

$$\int_{\partial T} d\theta = (-(\pi - A)) + (-(\pi - B)) + (C + \pi) = A + B + C - \pi.$$

I per tant, substituint aquest valor a (4), tenim

$$\int_T K\, dS = A + B + C - \pi - \int_{\partial T} k_g(s) ds \quad \square$$

6 Gauss-Bonnet per a regions amb vora

Theorem 6.1 *Sigui R una regió de l'espai amb vora diferenciable. Llavors*

$$\int_R K\,dS = 2\pi - \int_{\partial R} k_g$$

Demostració. Dividim la regió en triangles interiors geodèsics[4] i altres triangles amb dos costats geodèsics i un formant part de la frontera. Aplicant el teorema del defecte a cada triangle i sumant tenim

$$\int_R K\,ds = 2\pi V_i + \pi V_e - C\pi - \int_{\partial R} k_g \tag{5}$$

on V_i és el nombre de vèrtexs interiors, V_e és el nombre de vèrtexs a la frontera i C és el nombre de triangles. Si pensem que cada aresta ho és de dues cares, excepte les de la frontera, tenim

$$3C = 2A - A_e = 2A - V_e$$

on A és el nombre d'arestes, A_e és el nombre d'arestes sobre la frontera, i V_e és el nombre de vèrtexs sobre la frontera. Com que la característica d'Euler del domini és 1 tenim

$$C + V - A = 1$$

Per tant

$$C + V - \frac{3C + V_e}{2} = 1,$$

és a dir

$$2V - C - V_e = 2,$$

o

$$2V_i + V_e - C = 2.$$

Substituint a (5) tenim el resultat. □

Exercici 6.2 *Comprovem Gauss-Bonnet en un casquet esfèric.*

L'àrea d'el casquet esfèric delimitat pel paral·lel de radi r a l'esfera de radi R és

$$A = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi), \quad \text{on} \quad \sin\varphi = \frac{r}{R}.$$

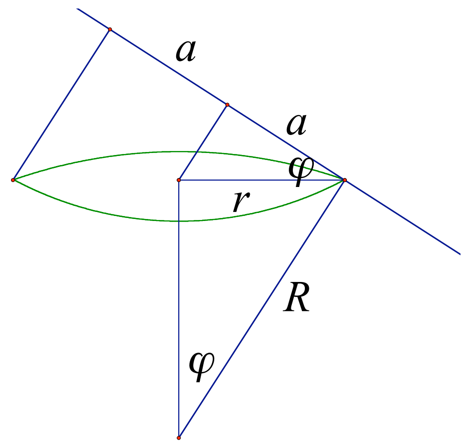
Per tant

$$\int_R K dS = 2\pi(1 - \cos\varphi).$$

[4] Per a la demostració no cal que siguin geodèsics, ho faig per simplificar.

Per altra banda la curvatura geodèsica del paral·lel es pot calcular o bé analíticament o bé amb el següent argument: La curvatura geodèsica del paral·lel en un punt P és igual a la curvatura en P de la corba plana que s'obté en projectar el paral·lel sobre el pla tangent a l'esfera en P. Vegeu secció 8.

Aquesta projecció és una el·lipse de semieixos $a = r\cos\varphi$, $b = r$, com es veu directament a la figura.



Però tothom sap que la curvatura de l'el·lilpse de semieixos a, b en el vèrtex corresponent al punt P és $k = \frac{a}{b^2}$. Per tant

$$k_g = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

I

$$\int_{\partial R} k_g = 2\pi r \cdot \frac{\cos\varphi}{r} = 2\pi\cos\varphi$$

És a dir

$$\int_R K dS = 2\pi - \int_{\partial R} k_g,$$

com volíem veure.

7 Fórmula de Liouville

Consisteix en una expressió senzilla de la curvatura geodèsica k_g d'una corba $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ on u, v són coordenades ortogonals, en funció justament de la curvatura geodèsica de les corbes coordenades $u = constant$, $v = constant$.

Definition 7.1 *Sigui* $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ *una corba parametritzada per l'arc sobre una superfície que admet un sistema de coordenades ortogonal* (u, v)*. Denotem* $\vec{t}(s) = \gamma'(s)$*, i* *denotem $\vec{u}(s)$ el vector tangent unitari ortogonal a $\vec{t}(s)$ i tal que la base $(\vec{t},\vec{u})$ és positiva respecte de la base $(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})$. Llavors*

$$k_g(s)=\vec{t}(s)\cdot\vec{u}(s)$$

Introduïm la notació

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u} \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

Aquestes igualtats s'han d'entendre en tot punt (u,v) de la superfície, és a dir que s'haurien d'escriure (no ho farem) com

$$\begin{aligned} e_1(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{E(u,v)}}\frac{\partial}{\partial u}_{|(u,v))} \\ e_2(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{G(u,v)}}\frac{\partial}{\partial v}_{|(u,v))} \end{aligned}$$

Lemma 7.1 *La curvatura geodèsica de les corbes coordenades està donada per*

$$\begin{aligned} k_{g1} &= k_{g(v=ct.)}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{de_1}{du}\cdot e_2 \\ k_{g2} &= k_{g(u=ct.)}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{de_2}{dv}\cdot e_1 \end{aligned}$$

Demostració. Sigui s_1 el paràmetre arc de la corba $(u,constant)$. Llavors

$$\frac{ds_1}{du}=|(1,0)|=\sqrt{E}.$$

Anàlogament, si s_2 és el paràmetre arc de la corba $(constant,v)$, tenim

$$\frac{ds_2}{dv}=|(0,1)|=\sqrt{G}.$$

Per definició,

$$\begin{aligned} k_g \;=\; & (\textit{Derivada respecte el paràmetre arc del vector unitari tangent a la corba})\cdot \\ & \cdot\,(\textit{vector unitari tangent a la superfície, perpendicular al vector tangent} \\ & \quad \textit{i orientat positivament}) \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} k_{g1} &= \frac{de_1}{ds_1} \cdot e_2 \\ k_{g2} &= \frac{de_2}{ds_2} \cdot (-e_1), \end{aligned}$$

Com que

$$\frac{de_i}{ds_i} = \frac{de_i}{du}\frac{du}{ds_i} + \frac{de_i}{dv}\frac{dv}{ds_i}, \qquad i = 1, 2,$$

i v és constant quan $i = 1$, i u és constant quan $i = 2$, tenim

$$\begin{aligned} k_{g1} &= \frac{de_1}{ds_1} \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{de_1}{du} \cdot e_2 \\ k_{g2} &= \frac{de_2}{ds_2} \cdot (-e_1) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{de_2}{dv} \cdot e_1 \quad \square \end{aligned}$$

Corollary 7.2 *La curvatura geodèsica de les corbes coordenades està donada per*

$$\begin{aligned} k_{g1} &= -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \\ k_{g2} &= \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \end{aligned}$$

Demostració.

$$k_{g1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}$$

Com les coordenades (u, v) són ortogonals

$$\begin{aligned} k_{g1} &= \frac{1}{E\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{1}{E\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \\ &= -\frac{1}{E\sqrt{G}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

El càlcul de k_{g2} és anàleg. $\square$

Theorem 7.3 (Fórmula de Liouville) *La relació entre la curvatura geodèsica d'una corba i les curvatures geodèsiques d'un sistema ortogonal està donada per*

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + k_{g1}\ \cos\theta + k_{g2}\ \sin\theta.$$

Demostració. Dient θ a l'angle entre les corbes $v = constant$ i γ' tenim

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ \vec{t'} &= (-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\frac{de_1}{ds} + \sin\theta\frac{de_2}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{ds}\,\vec{u} + \cos\theta\frac{de_1}{ds} + \sin\theta\frac{de_2}{ds}\end{aligned}$$

Per tant, la curvatura geodèsica serà

$$k_g = \vec{t'}\cdot\vec{u} = \frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\,\frac{de_1}{ds}\cdot\vec{u} + \sin\theta\,\frac{de_2}{ds}\cdot\vec{u}$$

Substituint $\vec{u}$ pel seu valor i tenint en compte que $\frac{de_i}{ds}\cdot e_i = 0$, $i = 1, 2$, tenim

$$\begin{aligned}k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\,\frac{de_1}{ds}\cdot(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2) + \sin\theta\,\frac{de_2}{ds}\cdot(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2) \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \cos^2\theta\,\frac{de_1}{ds}\cdot e_2 - \sin^2\theta\,\frac{de_2}{ds}\cdot e_1 \qquad (6)\end{aligned}$$

Com que

$$\frac{de_i}{ds} = \frac{de_i}{du}\frac{du}{ds} + \frac{de_i}{dv}\frac{dv}{ds}, \qquad i = 1, 2,$$

de les relacions

$$\begin{aligned}\vec{t}\cdot e_1 &= \cos\theta = \left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{E}} \\ 0\end{pmatrix} = \sqrt{E}\frac{du}{ds} \\ \vec{t}\cdot e_2 &= \sin\theta = \left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\end{pmatrix} = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}\end{aligned}$$

tenim

$$\frac{de_i}{ds} = \frac{de_i}{du}\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} + \frac{de_i}{dv}\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}, \qquad i = 1, 2.$$

Substituint a (6) tenim

$$\begin{aligned}k_g = \frac{d\theta}{ds} &+ \cos^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\frac{de_1}{du}\cdot e_2 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\frac{de_1}{dv}\cdot e_2\right) \\ &- \sin^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\frac{de_2}{du}\cdot e_1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\frac{de_2}{dv}\cdot e_1\right)\end{aligned}$$

Recordant l'expressió de la curvatura geodèsica de les línies coordenades i que

$$\frac{de_1}{du} \cdot e_2 + e_1 \cdot \frac{de_2}{du} = 0$$

$$\frac{de_1}{dv} \cdot e_2 + e_1 \cdot \frac{de_2}{dv} = 0$$

$$\begin{aligned} k_g = \frac{d\theta}{ds} \quad &+ \quad \cos^2\theta\,(\cos\theta \cdot k_{g1} + \sin\theta \cdot k_{g2}) \\ &- \quad \sin^2\theta\,(\cos\theta(-k_{g1}) - \sin\theta \cdot k_{g2}) \end{aligned}$$

És a dir,

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + k_{g1}\cos\theta + k_{g2}\sin\theta. \quad \square$$

Corollary 7.4 *En un sistema de coordenades ortogonals (u, v) la curvatura geodèsica d'una corba que forma un angle θ amb les línies $v =$ constant està donada per*

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds}\right) + \frac{d\theta}{ds}$$

Demostració. Substituir a la fórmula de Liouville els valors de k_{g1} i k_{g2} obtinguts en el Lema 7.2 i els valors del sinus i el cosinus de θ obtinguts més amunt. $\square$

8 Interpretació geomètrica de la curvatura geodèsica

Theorem 8.1 *Sigui γ una corba sobre una superfície i P un punt d'aquesta corba. La curvatura geodèsica k_g en P és igual a la curvatura en P de la corba que s'obté en projectar ortogonalment γ sobre el pla tangent a la superfície en P.*

Demostració. Com que la normal principal $\vec{n}$ està en el pla ortogonal a $\vec{t}$ tenim

$$k\vec{n} = k_n N + k_g \vec{u} \tag{7}$$

on k és la curvatura de la corba, N és el vector unitari normal a la superfície en P, i k_n és la curvatura normal. És clar que k_n és la curvatura de la secció normal a la superfície per P (intersecció del pla $(N, \vec{t})$ amb la superfície).

Considerem ara la superfície cilíndrica generada per γ i les rectes de vector director N que passen per tots i cadascun dels punts de γ.

Resulta llavors que γ també és una corba sobre aquesta nova superfície, la qual té en P vector normal u.

Així, doncs, es permuten els papers de les curvatures normal i geodèsica a la fórmula (7), i podem escriure

$$k\vec{n} = k_n N + k_g \vec{u} = \bar{k}_n \vec{u} + \bar{k}_g N,$$

on $\bar{k}_n$ i $\bar{k}_g$ són les curvatures normal i geodèsica de γ com a corba sobre el cilindre.

És a dir, k_g *és la curvatura normal de la corba com a corba sobre el cilindre.* Com que aquesta curvatura normal coincideix amb la curvatura de la secció normal i aquesta coincideix amb la projecció de γ sobre el pla tangent, tenim que la curvatura geodèsica k_g en P és igual a la curvatura en P de la corba que s'obté en projectar ortogonalment γ sobre el pla tangent a la superfície en P, com volíem provar. $\square$