La revolució de János Bolyai

András Prékopa
Membre de l'Acadèmia Hongaresa de Ciències*

Traducció a càrrec d'Agustí Reventós i Tarrida

János Bolyai està considerat com la més gran figura de la ciència Hongaresa i se'l té com el Copèrnic de la geometria. En el seu treball de 26 pàgines publicat el 1831 i citat generalment com Apèndix, i que és un apèndix al volum I del *Tentamen*, la monumental monografia en dos volums del seu pare, Farkas Bolyai, va fer una troballa revolucionària creant l'anomenada geometria no euclidiana. Amb aquest treball János Bolyai va trencar el monopoli de la geometria euclidiana i va obrir el camí per pensar sobre l'espai des d'un altre aspecte. A través dels seus descobriments en el pensament axiomàtic Bolyai va estructurar considerablement la història de les matemàtiques com un tot. Es pot afirmar que el desenvolupament de la matemàtica moderna en els segles XIX i XX pot ser atribuït, en gran mesura, al descobriment de János Bolyai. No obstant, la importància dels seus resultats no va ser reconeguda fins després de la seva mort i inclús llavors no sense resistència. Durant la seva vida, les seves brillants idees, que havien estat madurades a l'edat de 21 anys, no van ser enteses. Les va presentar amb la bravesa revolucionaria de la joventut, sense por a les critiques de la classe dirigent científica. Naturalment, en aquesta actitud hi havia realment un gran grau d'ingenuïtat, perquè ell pensava que els grans descobriments, incloent els seus, portarien al reconeixement i la fama. Però qui sí va entendre les idees de Bolyai, i.e., Gauss 'el príncep de les matemàtiques' va ser injust amb János Bolyai quan va formar la seva opinió sobre l'Apèndix en 1832. Va dir, en la seva carta a Farkas Bolyai, que era incapaç d'alabar el treball de János perquè seria com alabar-se ell mateix ja que els resultats de l'Apèndix i el camí que havia portat a ells coincidien quasi literalment amb les seves pròpies meditacions de trenta o trenta cinc anys enrera. Després de la mort de Gauss el 1885 el seu llegat va ser recopilat i no es va trobar cap prova escrita de l'anterior afirmació. A més, una posterior conducta de Gauss és també reprensible. Quan va saber que el rus Lobatxevski havia descobert el mateix, en essència, que János Bolyai -va ser el primer membre electe estranger de la Real Societat de Göttingen en 1842- no va informar Lobatxevski que hi havia una altra persona que havia obtingut resultats similars.

S'ha dit moltes vegades que després del seu retir el 1833 János Bolyai va escriure poques coses, incloent això sí una de molt important sobre la fonamen-

*Resum d'un article escrit en hongarès a Természet Világa, Setembre 2002 tació dels números complexos, i que la manca de reconeixement el va portar a un estat de depressió i que va renunciar de fet a la recerca creativa en matemàtiques. Va ser Elemér Kiss, Professor a Marosvásárhely, qui va refutar aquesta opinió: Havent consultat els manuscrits que Bolyai ens va deixar al llarg d'una dècada va trobar significants 'gemmes' matemàtiques en ells que es podien considerar completament noves en aquell moment.

La vida de János Bolyai

Farkas Bolyai i el seu fill eren descendents d'una família Hongaresa d'antic llinatge. L'origen de la família era Bolya prop de Nagyszeben. Farkas va néixer allà. El castell fortificat de Bolya havia estat concedit a la família a principis del segle catorze. Membres de la família van ser valents soldats però durant la primera meitat del segle disset un d'ells, un altre János Bolyai, va perdre el castell mentre estava captiu a Turquia. Es van anar empobrint més i més i Gáspár Bolyai, pare de Farkas, va heretar tan sols una petita propietat prop de Bolya el qual pertanyia en aquells temps al comptat Nagy-Küküllö. A aquesta propietat es va afegir un minifundi pròxim a Domáld, herència de Krisztina Pávaia Vajna, esposa de Gáspár Bolyai.

Farkas Bolyai va ser un rellevant matemàtic de la seva època però era també expert en altres diversos camps. Va ser nomenat professor per explicar matemàtiques, física i química i va mantenir el càrrec fins a la seva jubilació en 1851. A més, estava interessat en la construcció d'estufes per estalviar energia, horticultura, silvicultura i dramatúrgia. També era inventor. El Tentamen, publicat el $1832-33$, és el seu treball més important. La seva recerca matemàtica girava al voltant de la demostració del $\mathrm{V}^{\grave{\mathrm{e}}}$ postulat d'Euclides.

Farkas va passar els anys $1786-1789$ a la Universitat de Göttingen, estudiant matemàtiques, i allà va conèixer Gauss. Va néixer una amistat entre aquests dos joves que va durar tota la vida. Personalment no es van retrobar gaire sovint però van estar en contacte entre ells a través de correspondència.

Després que Farkas tornés a Transylvania, en aquell temps un gran ducat Hongarès governat pels Habsburgs, va esdevenir professor a la ciutat de Kolozsvar. Es va casar amb Zsuzsanna Árkosi Benkó i la parella es va traslladar a Domáld.

János Bolyai va néixer el 15 de desembre de 1802 a Kolozsvar on s'havien traslladat els seus pares perquè allà hi haurien millors condicions pel naixement del nen. La casa on János va néixer pertanyia a la família de la seva mare. Encara existeix i hi ha en ella una placa commemorativa. Al cap de dos anys la família es va traslladar a Marosvásárhely quan Farkas Bolyai va ser contractat com professor en el College d'allà.

A partir de la recerca de János Bolyai, el seu fill, hem aprés que el $\mathrm{V}^{\grave{\mathrm{e}}}$ postulat no es pot demostrar a partir dels altres postulats d'Euclides. Però després de tot, el treball rellevant de Farkas va ser conegut a tot el mon com a conseqüència de les formulacions equivalents d'aquest postulat.

El geni de János Bolyai es va manifestar ja durant la seva infantesa. Quan tenia sis anys va aprendre a llegir pràcticament sol. Un any després va aprendre Alemany i a tocar el violí. Tenia nou anys quan el seu pare li va començar a explicar matemàtiques; als 14 anys tenia una bona formació en matemàtica superior i treballava amb càlcul diferencial i integral fàcilment i hàbilment. Això està explicat en la carta del seu pare de 16 d'abril de 1816 a Gauss. En aquesta edat va progressar en l'estudi del violí; havia ja tocat difícils peces de concert. Als 12 anys es va convertir en estudiant del College. Va ometre els tres primers graus i es va matricular a quart. Això correspon al vuitè grau de l'escola elemental d'avui dia [1]. Va aprovar l'examen final al juny de 1817.

El problema de la posterior educació de János va aparèixer ben aviat. A Transylvania en aquell temps no hi havia universitats i a la Universitat de Budapest i a la Universitat de Viena no hi havia professors de matemàtiques de nivell suficient, dels quals el jove geni hagués pogut aprendre. Es va fer evident que calia enviar János amb Gauss a Göttingen. No sabem si una solució semblant a la de Farkas Bolyai, concretament, contractar-se com tutor del fill d'una família acomodada per cobrir les despeses necessàries dels estudis[2], s'havia plantejat. En aquella època, molts dels estudiants a universitats alemanyes portaven una vida dissoluta. Farkas sabia bé això i potser per aquest motiu buscava resoldre la posterior educació de János a Göttingen enviant-lo a casa de Gauss. Tant més, en quant que Jänos tenia només 15 anys el 1817 i Farkas en tenia 21 quan va anar a Göttingen en 1796. Tenint en ment que els propers estudis del seu fill començarien el 1817 a Göttingen, Farkas va escriure una carta a Gauss el 10 d'abril de 1816 en la que li demanava a Gauss que acceptés el seu fill a casa seva durant tres anys, i que el reembossaria per les despeses. Però després d'aquesta petició ho va destruir tot quan li demana a Gauss que contesti sincerament les següents qüestions: "1. No tens pas una filla que pugui esdevenir (recíprocament) perillosa en aquesta època...? 2. Estàs sa i no ets pobre? Estàs satisfet i no reganyaire? I, principalment, és la teva dona excepcional entre totes les dones? No és ella més variable que un penell. És imprevisible com el canvi d'un baròmetre?..." Gauss no va contestar aquesta carta.

Després d'això la possibilitat d'estudiar a l'Acadèmia de Viena d'Enginyers Militars va augmentar. Durant el seu viatge a Göttingen Farkas va visitar l'Acadèmia i se'n va enamorar. Quasi s'hi queda! Així, va poder recomanarla al seu fill amb tot el seu cor. No obstant, no va poder reunir els diners immediatament i per tant va inscriure János a la Facultat d'Arts en el College de Marosvásárhely el 1817. Posteriorment els diners per l'educació a Viena van ser proveïts entre d'altres pel tresorer del College, compte Miklós Kemény (1791-1829), que vivia a Kolozsvár, així que un cop superat l'examen d'entrada el 1818 es va permetre a János que comencés els seus estudis a la Imperial i Reial Acadèmia d'Enginyers Militars que consistien en vuit anys. Es podia començar en el quart curs o inferior. János va ser matriculat al quart curs de manera que es van preveure 4 anys d'estudi. Malgrat que la totalitat de les despeses de l'educació estaven cobertes com hem dit pel compte Miklós Kemény i altres,

[1] nt:A Hongria

[2] Era costum que els bons estudiants que necessitaven diners fessin de tutors d'altres estudiants de famílies acomodades

hi havia despeses extres (per exemple, per muntar a cavall) de manera que la contribució econòmica del seu pare era necessària també. Això no era una tasca fàcil ja que la situació econòmica a Transylvania també va començar a deteriorar-se a causa de les guerres amb França que duraven des de 1792. El 1817 la moneda es va devaluar fins dos cinquens. Sabem que el salari anual de Farkas era de 200 Rhenish Ft[3] de plata el 1820, no obstant, aquesta quantitat no arribava a temps sinó que es retardava i, a vegades, no arribava completa. El cost anual de l'educació de János era aproximadament de 900 Ft. D'aquesta quantitat 130 Ft s'havien de pagar amb plata. El primer fardell de coses necessàries per a un estudiant costava quasi 220 Ft.

János era un estudiant eminent considerat el primer d'entre tots els estudiants pels seus professors però els seus companys de curs el posaven en segon ordre i també estava en aquesta posició a la suma dels rankings. La raó més important per no estar considerat el primer eren els fluixos treballs de dibuix: János s'avorria amb el dibuix. Durant els anys a l'Acadèmia d'Enginyers Militars, des de 1820, havia estat dedicat intensivament a la investigació de les paral·leles. Volia demostrar el V$^{\text{è}}$ postulat que els seu pare havia tractat de resoldre durant molt temps. Farkas, també, prevenia al seu fill en contra de fer això a la seva carta del 4 d'abril de 1820:"*Per l'amor de Deu! Deixa les paral·leles tranquil·les, abjura d'elles com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la salut, la tranquil·litat i la felicitat de la teva vida. Aquesta foscor sense fons pot devorar un miler d'altes torres de Newton*[4] *i mai més tornarà a brillar a la terra...*"

János Bolyai va acabar els seus estudis a l'Acadèmia d'Enginyers Militars el 1822 però va continuar allà per prosseguir posteriors estudis per un any més ja que va ser un dels dos millors estudiants.

Llavors a primers de setembre de 1823 va ser nomenant sub-lloctinent, i va ser assignat a la Direcció de Fortificacions de Temesvár. Des d'aquí va escriure al seu pare la carta de 3 de novembre de 1823 que va esdevenir extensament coneguda a tot el mon: "*Apreciat pare! Tinc moltes coses per escriure-us sobre els meus nous descobriments però, de moment, no puc sinó evitar la seva discussió en profunditat aquí i us els escriuré en unes quartilles... Estic determinat a publicar un treball sobre les paral·leles tan aviat com l'hagi arreglat i preparat i hi hagi una oportunitat de fer això; de moment encara no està descobert però el camí que he seguit promet aconseguir la meva meta si d'alguna manera és possible; encara no està llest però he descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més: de no res he creat un mon nou i diferent; totes les altres coses que us he enviat som com un castell de cartes comparat amb una torre*".

Com és ben conegut avui dia, aquest "nou mon diferent" és el màgic mon de la geometria absoluta i hiperbòlica. En els inicis de 1825 János va visitar la seva

[3]nt:Forint, moneda hongaresa

[4]Les paraules precises de Farkas Bolyai en anglès serien:'tall towers of Newton', en el sentit de comparar científics amb torres, més altes com més gran és el científic.

família a Marosvásárhely. Va tenir un gran èxit allà. La societat aristocràtica estava fascinada per la seva elegància, personalitat i domini del violí. El seu pare es delitava amb tot això i no gens menys del geni matemàtic del seu fill. A la seva carta de 27 de febrer de 1825 a Pál Bodor escriu que János és un tipus guapo de gran i forta naturalesa. A més, János era un excel·lent espadatxí, va esdevenir famós per aquesta habilitat durant els anys acadèmics. Un cop durant la seva estada a Arad, 13 oficials de cavalleria el varen reptar a duel. Va acceptar el repte amb la condició de que entre dues parelles de duels ell pogués tocar el violí i va vèncer en tots 13 casos. Si aquesta història és certa i en els duels es van usar espases de cavalleria, que se sap que són molt pesades - els reptadors eren oficials de cavalleria-, podem concloure que János era un jove de gran força física.

El destí va voler que quan va ser transferit a Arad el 1826 el seu superior fos Johann Wolter von Eckwehr que havia estat el seu professor de matemàtiques a l'Acadèmia d'Enginyers Militars. János s'havia escrit amb von Eckwehr anteriorment. Aquell any havia enviat el seu manuscrit en alemany al seu primer professor en el que recollia les seves investigacions sobre geometria no euclidiana. Lamentablement, aquest manuscrit es va perdre.

El 1831 János va ser traslladat a Lemberg, i el 1832 Olmütz va ser la darrera estació de la seva carrera militar. De camí a Lemberg va visitar el seu pare a Marosvásárhely.

A Arad János va tenir febres recurrents. Presumiblement va agafar la malària ja que hi havien terrenys pantanosos al voltant de la ciutat. Més tard va patir també el còlera; la seva salut es va deteriorar significativament. Això es va agreujar pel fet de que en el seu viatge de Lemberg a Olmütz el seu carruatge va fer un tomb i ell va patir una seriosa ferida en el cap. Havia descuidat el seu treball, ja que estava òbviament desinteressat en les qüestions rutinàries que havia de fer. De fet, sempre mirava de tenir temps per a la solució de problemes matemàtics. Va tractar de sol·licitar un permís de 3 anys per a la seva recerca matemàtica. El 1832 la seva sol·licitut va ser presentada a l'arxiduc János, director general de l'Acadèmia d'Enginyers Militars, que la va rebutjar. Finalment, el 1833 va ser llicenciat amb una pensió com a capità de segona classe. Sobre aquesta pensió hi va jugar un paper el fet de que en el seu viatge de Lemberg a Olmütz va tenir una discussió amb oficials duaners a la frontera perquè no va voler obrir-els-hi el seu bagul i aquests van informar en contra d'ell a les autoritats.

Retornant a l'any 1831, l'esdeveniment més important va ser la publicació de l'Apèndix en llatí com a addenda al Vol. I del Tentamen, escrit també en llatí, que juntament amb l'Apèndix de János, va ser publicat el 1832. El Vol. II es va publicar el 1833. És un fet important que la data d'impressió del Tentamen és 12 d'octubre de 1829.

Farkas Bolyai va enviar a Gauss una copia de l'Apèndix, publicat com addenda, quasi immediatament, el 20 de juny de 1831, demanant-li la seva opinió. La resposta de Gauss del 6 de març de 1832 és àmpliament coneguda. En una de les parts més devastadores d'aquesta resposta diu: *"Ara deixem dir una cosa sobre el treball del teu fill. Si començo dient que no el puc alabar, restaràs* *parat per un moment. No obstant no puc fer altra cosa: Si l'alabés, m'alabaria a mi mateix ja que el total contingut del treball, el camí que segueix el teu fill i els resultats a que ha arribat coincideixen quasi completament amb les meves reflexions de fa* $30 - 35$ *anys".* Continua: ell, també, s'ha proposat escriure un treball rellevant però no ha volgut publicar res d'això durant la seva vida. En altres cartes del propi Gauss indica una data anterior en la que ell hauria estat interessat en la geometria no euclidiana. Però en la seva carta a Gerling reconeix que les seves idees de 1798 estaven lluny de la maduresa trobada en el treball de János Bolyai. Gauss també va pronunciar paraules elogioses sobre János Bolyai i el seu treball però la pena causada per les fuetades de la carta citada anteriorment no van poder ser mitigades pel jove Tità.

János Bolyai va anar amb el seu pare a Marosvásárhely el 1833 però al cap d'un any va anar a Domaáld on va viure fins 1846. Des de 1834 cohabitava amb Rozália Kibédi Orbán que procedia de bona família. El casament legal estava fora de qüestió ja que eren incapaços de dipositar els 'diners de cautela' [5] ja que János era un funcionari. Tenien dos nens: Dénes $(1837 - 1913)$ i Amália $(1840 - 1893)$. Amália no va tenir fills però Dénes en va tenir diversos fruit dels seus tres matrimonis. Un dels seus descendents, János Bolyai, besnét del nostre János Bolyai encara viu avui dia a Edelény.

L'any 1837 va portar un important esdeveniment a la vida dels dos Bolyais. La Societat Científica Jablonowski de Leipzig va anunciar una competició per a la fonamentació de la teoria dels nombres imaginaris (el text original de la competició era bastant llarg i sembla estrany per nosaltres avui dia). Els Bolyais van saber d'aquesta competició no massa abans del seu termini el novembre de 1837 però els dos hi van sotmetre un assaig. A part d'ells també hi va prendre part Ferenc Kerekes, professor del College de Debrecen $(1784 - 1850)$. Els Bolyais no varen guanyar però a Kerekes se li va concedir la meitat del premi. Aquest treball de János Bolyai conegut com *Responso* està basat en principis similars als de Hamilton que va establir la teoria dels nombres complexos. Malgrat que János Bolyai va sotmetre el seu assaig el 1837, la teoria pròpiament dita havia ja estat elaborada el 1831, abans que Hamilton sotmetés el seu article a l'Acadèmia de Dublin.

János Bolyai té altres resultats nous de matemàtiques que han estat discutits en un llibre recentment publicat d'Elemér Kiss.

El 1846 János Bolyai es trasllada a Marosvásárhely amb la seva família ja que el seu pare estava descontent amb la manera en que János administrava la propietat de Domáld i la va arrendar.

L'any 1848 va donar una sorpresa a János. Va tenir a les seves mans el treball de Lobatxevski publicat en alemany el 1840, el contingut del qual coincidia amb el de l'Apèndix en molts detalls. Primerament va sospitar que l'hi havien robat però posteriorment va fer comentaris detallats sobre aquest treball.

Durant el moviment d'alliberació de 1849 aprofitant la oportunitat de que no es demanaven els diners de cautela es va casar amb Rozália Orbán. Però

[5] Una mena de fiança que imposava l'exercit als seus oficials per tal d'evitar posteriors pagaments de possibles deutes contrets per aquests. Era una quantitat significant de diners.

això va ser invalidat després.

El 1852 János Bolyai es va separar de la seva família, deixant la casa a la seva dona i donant una considerable quantitat de diners per al manteniment dels fills. No obstant va continuar cuidant-los. Va caure malalt i va ser cuidat per l'assistent Júlia Szóts.

El 1857 amb el seu germanastre Gergely, que regentava la propietat de Bolya, van vendre Domáld per 1600 Rhenish Ft.

El 26 de gener de 1860 Júlia Szóts va escriure una carta a Gergely, demanant-li que hi anés urgentment ja que en János estava malament. Un cop signada la carta, va mirar al seu amo i va continuar la carta així: *"Mentre jo escric aquesta carta, ha mort, així que no hi ha res a dir: el Sr. Capità s'ha n'anat."*

A part de l'obligada escorta militar hi havia tres civils presents en el funeral i després dels registres formals a la Capella Calvinista es van afegir les següents notes: *" Va ser un famós matemàtic de gran intel·ligència. Va ser el primer entre els primers. És una pena que el seu talent fos desaprofitat."*

No obstant, en aquella època, gent inclús més competent que l'anterior registrador eren incapaces de valorar la grandiositat de la personalitat i del treball de János Bolyai.

No ens ha arribat cap retrat de János Bolyai. N'hi havia un on apareixia amb uniforme però una vegada Bolyai enrabiat el va tallar a trossets amb la seva espasa. Recentment s'accepta més i més l'opinió de que un dels relleus de dalt de la façana del Palau de Cultura de Marosvásárhely el representa a ell. En cinc dels sis relleus que hi ha, s'identifica a la persona que representa realment i el seu nom es pot llegir en cadascun d'ells. A sota del sisè es pot veure el nom de János Bolyai i està just al costat del de Farkas Bolyai. Encara hi ha més proves d'això, concretament el testimoni d'aquells que van conèixer János Bolyai personalment quan es construïa el Palau i a més la gran semblança que existeix entre el aquest relleu i el retrat de György Klapka. És sabut que János Bolyai s'assemblava a György Klapka, general de l'armada revolucionària hongaresa de 1848 – 49. Basant-se en aquest relleu és que Kinga Szécheyi ha fet la placa commemorativa de l'aniversari 2002 [6].

[6] foto adjunta

1 La revolució de János Bolyai

Fa 20 anys va aparèixer publicat l'article del reputat matemàtic de Princeton John Milnor, 'Hyperbolic geometry: the first 150 years'. Diu en aquest article que la geometria no euclidiana havia estat en un estat d'incertesa durant els seus primers 40 anys. Més tard va integrar les branques més establertes de les matemàtiques des de la teoria de Gauss sobre superfícies corbades fins la de Riemann sobre varietats corbades de dimensió superior. Malgrat ser cert el que Milnor diu la realitat és més complicada que tot això.

La teoria de la curvatura i geometria de superfícies no va anar més enllà de les matemàtiques, al menys, no essencialment. La interpretació de la curvatura de superfícies i l'estudi de les seves propietats es poden situar dins el sistema existent de matemàtiques. No obstant, l'estudi de la curvatura i geometria en el cas de les varietats corbades de Riemann és diferent. En aquesta teoria apareix una aproximació general a la geometria, però un quart de centúria després dels descobriments de Bolyai i Lobatxevski. Riemann va presentar la seva teoria en el seu article d'habilitació el 1854. Per aquells temps començava a ser obvi el que no ho era a l'època de la publicació dels articles de Bolyai i Lobatxevski, i.e., la geometria i la realitat poden ser diferents. La geometria es pot concebre com una classe de teories abstractes, sense renunciar a intentar aplicar-les, perquè les seves estructures es poden interpretar arbitràriament i poden ser estudiades com ho són les funcions o altres objectes matemàtics. Per cert, l'article va ser publicat després de la mort de Riemann en 1868.

Abans del descobriment de la geometria no euclidiana, se suposava que la ciència de la geometria descrivia el mon real que ens envolta, inseparablement d'ell. La Geometria era una mena de ciència de la natura. El punt, la línia recta i el pla eren el que la nostra imaginació ens imposava fortament. Hauríem de recordar que els axiomes d'Euclides van néixer només per la necessitat d'ordre en el nostre pensament. Varen ser formulats perquè poguéssim trobar el camí en mig del caos de conceptes i afirmacions i clarificar el que és evident i el que ha de ser provat. Les afirmacions òbvies i els axiomes haurien de ser com menys millor. Afirmacions que es poden deduir d'altres no s'han de considerar axiomes.

Abans del descobriment de János Bolyai els matemàtics esperaven l'arribada d'un geni que provés brillantment el V$^{\text{è}}$ postulat, a partir dels altres axiomes. Els predecessors immediats, Saccheri i Lambert, suposaven que aquest postulat era fals amb la idea d'arribar a contradicció com prova indirecta, ja que el mon és euclidià. Ells no ho deien així però pensaven així. Des del més gran filòsof de l'època, Immanuel Kant, fins l'home del carrer aquesta era la convicció. Avui, se sap que l'ensenyament de la teoria de la relativitat és diferent i que hi ha proves experimentals d'això, però aquest fet, a més, és conegut només pels més erudits. Les nostres vides i activitats de cada dia estan basades en la geometria euclidiana. Quan un nen dibuixa rectes a la seva llibreta, quan un geòmetre mesura la nostra terra, no necessita preocupar-se de si es poden dibuixar més paral·leles a una recta donada per un punt exterior a ella. Bolyai va portar la geometria al mon de les teories abstractes. Va demostrar que, lògicament, més d'una geometria eren possibles. Com va dir a la seva carta de 3 de novembre de 1823 enviada des de Temesvár al seu pare: *"Del no res he creat un nou mon diferent"*- un mon abstracte, per descomptat.

Però si el mon segueix la geometria euclidiana, quina és la utilitat de tot això? Gauss no va gosar publicar els seus resultats referents a geometria no euclidiana que eren resultats parcials en comparació als de Bolyai; no va gosar publicar-los tampoc per por a que el prenguessin per boig. Per contra, Bolyai era un revolucionari; va tenir el coratge de les seves conviccions. Però per ser objectius hem de mencionar que Bolyai estava convençut que seria entès i rebria el merescut reconeixement, basat en el seu treball.

Després de la carta de novembre de 1823 Bolyai va escriure els seus resultats en alemany i va donar l'article a Johann Wolter von Eckwehr, que havia estat un cop professor seu a Viena i supervisor a Arad el 1826. El seu pare el va animar a escriure el seu article en llatí també, el qual va ser publicat a l'Apèndix del Tentamen, la monumental obra en dos volums de Farkas Bolyai. El seu títol complet és aquest: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibendis; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* És a dir: *Apèndix, L'absolutament certa Ciència de l'Espai exhibida; independentment de que l'axioma XI d'Euclides sigui cert o fals (que no es pot mai decidir a priori); en el cas en que és fals es dóna la quadratura geomètrica del cercle.*

János Bolyai no va intentar publicar el seu treball a cap de les revistes importants de matemàtiques de la seva època. Per a això, el seu pare hagués pogut tenir connexions amb l'ajuda de Gauss però aquest pensament no va aparèixer, potser, afortunadament per a János, perquè com és sabut Gauss va escriure una carta a Farkas sobre l'Apèndix que li havia estat enviat el 1831 que va fer deprimir a János. Malgrat que Gauss tenia bona opinió sobre els resultats de l'Apèndix, també va dir que ell ja els havia descobert. Ja hem citat algunes parts d'aquesta carta.

L'apèndix es va publicar en hongarès i altres llengües diverses vegades. Va ser traduït a l'anglès per George Bruce Halsted de Texas el 1891 i va ser publicat, juntament amb el prefaci del traductor a la traducció anglesa del llibre de Bonola (1911) escrit originalment en italià. Excloent les pàgines del títol etc., l'Apèndix és un treball de 24 pàgines. Sobre això el professor Halsted diu en el seu prefaci: *"Són les més extraordinàries dues dotzenes de pàgines a la història del pensament.* Bé, a part de les nostres alabances a János Bolyai, deixeu-nos familiaritzar amb alguns dels resultats característics del seu treball.

Com s'ha mencionat, Bolyai pensava encara dintre del sistema d'axiomes d'Euclides; el sistema axiomàtic més complet de Hilbert es va publicar el 1899. No obstant, pel que fa a la seva deducció a l'Apèndix i a la seva metodologia en general, Bolyai va utilitzar els grans invents dels segles anteriors, el primer i més important la geometria analítica de Descartes, així com també el càlcul diferencial i integral de Newton i Leibnitz. En certa manera, el primer invent citat va significar un nou i més alt nivell d'exactitud, no només una solució de problemes geomètrics mitjançant l'àlgebra.

El V$^{\text{è}}$ postulat d'Euclides es pot enunciar així: donada una recta l i un punt P del pla que no està a la recta l, existeix exactament una recta que passa per P i és paral·lela a l. Aquesta equivalència amb la formulació d'Euclides del V$^{\text{è}}$ postulat, és deguda a Playfair $(1748 - 1819)$.

Bolyai primerament, rebutjant el V$^{\text{è}}$ postulat (que portava el nom d'axioma XI per ell) defineix paral·lelisme. Considerem una recta l i un punt P fora de l. Si, començant amb P, dibuixem una semirecta que interseca l en una direcció, movem la intersecció cap a l'infinit, hi haurà una posició límit a partir de la qual la semirecta no tallarà més a la recta l. Podem fer el mateix en l'altra direcció. Si continuem cadascuna de les dues semirectes en la direcció oposada, obtenim dues rectes paral·leles a l. Si són diferents hi ha una infinitat de rectes entre elles que també són paral·leles a l però tenen diferents propietats. La geometria que correspon a aquest cas es diu hiperbòlica.

Remarquem ara que les rectes de Bolyai no són rectes en el sentit de cada dia malgrat que les visualitzem com si ho fossin a la figura 1. Les rectes a la geometria de Bolyai-Lobatxevski poden ser semicercles o altres objectes geomètrics.

Bolyai va desenvolupar la geometria absoluta que és independent del V$^{\text{è}}$ postulat. El teorema anterior pertany a la geometria absoluta plana. Si un punt P està a distància d d'una recta l i α és l'angle entre la recta per P ortogonal a l i la recta paral·lela a l en posició límit, llavors la fórmula de Bolyai diu:

$$\cot \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{d}{k}}.$$

Aquí k és una constant universal, independent de l'elecció de l i P. Bolyai va desenvolupar la trigonometria hiperbòlica i la va aplicar a calcular àrea i volum. Per exemple la longitud de la circumferència d'un cercle de radi r en geometria hiperbòlica està donada per

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k \sinh \frac{r}{k},$$

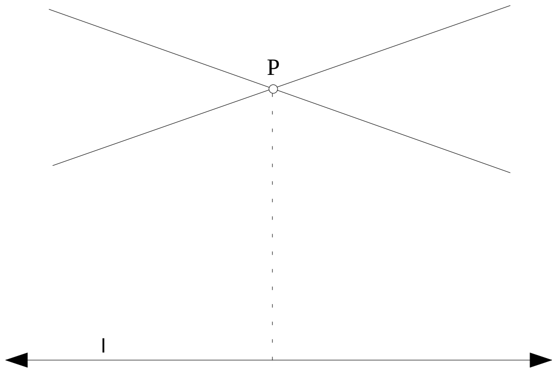

Figura 1: Rectes paral·leles

on k és la ja coneguda constant universal. En posteriors treballs matemàtics aquesta constant s'identifica amb el recíproc de la curvatura de l'espai. Si $k \to \infty$, obtenim com valor límit $2\pi r$ que és la ben coneguda fórmula de la longitud de la circumferència en geometria euclidiana.

Un del teoremes més bonics de Bolyai és el següent: Els sinus dels angles d'un triangle estan en la mateixa proporció entre ells que les longituds de les circumferències de radi igual als costats oposats als angles. Si denotem els angles per A, B, C i per a, b, c els costats oposats i per $\odot$r [7] la longitud de la circumferència de radi r, el teorema de Bolyai es pot enunciar dient:

$$\odot a : \odot b : \odot c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

En geometria euclidiana

$$\odot r = 2\pi r,$$

i per tant l'anterior fórmula esdevé

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Per altra banda, en geometria hiperbòlica tenim

$$\odot r = 2\pi k \sinh \frac{r}{k},$$

a partir de la qual obtenim

$$\sinh \frac{a}{k} : \sinh \frac{b}{k} : \sinh \frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C.$$

[7] nt: Notació de Bolyai

Ara, considerem dues rectes paral·leles a, b i prenem un punt a cadascuna d'elles: A, B. Abans hem mencionat que les rectes tenen direccions també, designem-les per M, N (vegeu figura 2). Suposem que l'angle $\angle MAB$ és igual a l'angle $\angle NBA$. Llavors els punts A, B es diuen isogonals corresponents, o breument punts corresponents, (el terme és degut a Gauss) i aquest fet s'expressa amb la relació $A \simeq B$ (notació de János Bolyai). Aquesta relació és independent del V$^{\text{è}}$ postulat, pertany al reialme de la geometria absoluta, i té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva: $A \simeq A$[8]; si $A \simeq B$, llavors $B \simeq A$; si $A \simeq B$ i $B \simeq C$, llavors $A \simeq C$. Si una relació té les anteriors propietats, es diu relació d'equivalència. És ben conegut que qualsevol relació d'equivalència en un conjunt dóna lloc a una subdivisió del conjunt en subconjunts disjunts. Es diuen classes d'equivalència.

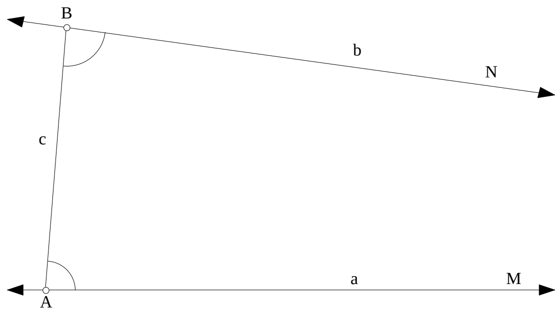

Figura 2: Punts corresponents

Ara, cada classe d'equivalència, obtinguda a partir de la relació de correspondència, és un subconjunt del pla en el qual- com va demostrar Bolyai- la geometria euclidiana és vàlida. Es diuen horocicles.

Anàlogament es defineix horosfera. En una horosfera també, la geometria euclidiana és vàlida. L'horocicle i l'horosfera es poden considerar respectivament com un cercle i una esfera de radi infinit.

Si els angles d'un triangle són α, β, γ, llavors en geometria euclidiana $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, en geometria hiperbòlica en canvi $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. La diferència $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ es diu defecte del triangle. Bolyai va demostrar que l'àrea $\triangle$ del triangle és igual a la quantitat:

$$\triangle = k^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

on k és la constant universal. Aquesta fórmula era coneguda per Lambert però Bolyai va donar-ne una prova exacta.

[8] nt: Notació de Bolyai

Un darrer interessant teorema de Bolyai és el següent: pels catets a, b i hipotenusa c d'un triangle rectangle (angle entre dues rectes vol dir l'angle en el punt on es tallen) tenim la fórmula

$$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cosh \frac{b}{k}.$$

Si $k \to \infty$ obtenim com cas límit $c^2 = a^2 + b^2$ que és el teorema de Pitàgores.

Farkas Bolyai, en unes poques pàgines del Tentamen, va fer alguns comentaris a l'Apèndix. Entre ells, va donar una demostració més detallada de l'anterior pas al límit.

Finalment hauríem de mencionar que a l'Apèndix Bolyai també s'interessa de construccions en geometria hiperbòlica.

Altres estudis matemàtics de János Bolyai són estudiats en profunditat pel següents autors: Pál Stäckel (1914), Lajos Dávid (1979), János Bolyai (Ferenc Kárteszi ed., 1977), Tibor Weszely (1981) and Elemér Kiss (1999). L'impacte de Bolyai sobre el desenvolupament de la geometria es tracte a l'article de Ottó Varga (1953). L'anteriorment citat article de Milnor (1982) és la darrera recopilació de resultats de geometria hiperbòlica. La publicació comentada d'escrits no matemàtics de János Bolyai està començada i en progrés.

L'altre gran descobridor de la geometria hiperbòlica va ser el rus Lobatxevski $(1793 - 1856)$. La diferència entre el treball de Bolyai i el de Lobatxevski es podria resumir així: mentre que Bolyai elabora la geometria absoluta, també, Lobatxevski proporciona una formulació més detallada de la trigonometria hiperbòlica. No hi ha motiu per un debat sobre la prioritat. Perquè veiem alguna cosa en aquesta direcció, podem mencionar el següent.

La primera publicació de Lobatxevski sobre geometria no euclidiana va ser publicada en rus a Kazan Messenger el $1829 - 1830$. L'Apèndix de Bolyai va ser publicat com addenda el 1831 però l'any d'edició de tot el Tentamen és 1829. Se sap que Bolyai va elaborar la seva geometria a grans trets el 1823 i el text complet en alemany estava llest el 1826. Com que aquest darrer es va perdre i el primer és tan sols un report del descobriment en una carta, no hi ha documents escrits del descobriment de Bolyai anteriors a l'Apèndix. Per altra banda, es pot dir que Lobatxevski va impartir una conferència sobre aquest rellevant tema a la Universitat de Kazan el 1826 però si escrutem el títol, podem veure que el conferenciant intenta en aquell moment demostrar el $\mathrm{V}^{\text{è}}$ postulat (Elemér Kiss, 1999).

Segons alguns autors la geometria de Bolyai i Lobatxevski és la crítica a la concepció Kantiana de l'espai; segona altres és una refutació d'això. La seva argumentació va així: Si en la nostra ment hi ha espai per a la geometria euclidiana i hiperbòlica, no és possible que el nostre concepte d'espai sigui un concepte a priori en nosaltres, independent de les nostres experiències amb els objectes.

Indubtablement, l'absolutització de la geometria euclidiana en la filosofia Kantiana s'ha demostrat que és un camí sense sortida no tant com conseqüència de la geometria de Bolyai i Lobatxevski com pels resultats de la física del segle vint. No obstant, la noció de Kant de que l'espai és euclidià es pot separar de les altres nocions referents a l'espai les quals són més subtils i diferents de la que es pot llegir a l'abans esmentada opinió contrària. Kant no ignorava que es podrien formular també altres teories matemàtiques de l'espai.

Encara a l'època de Gauss, Bolyai i Lobatxevski, la filosofia Kantiana es considerava un suport definitiu de la geometria euclidiana. Al contrari que Gauss, que tenia por de publicar els seus resultats pels atacs dels Beocis, que eren considerats com gent estúpida i que es dedicava al plaer pels atenencs, Bolyai i Lobatxevski no van tenir por de fer-ho: els dos eren revolucionaris. Ells van desvelar les seves conviccions científiques al mon amb coratge.

Referències

[1] Benkó, S. *The confessions of János Bolyai.* Literary Publisher, Bucharest, 1968. Second edition: Kriterion Publisher, Bucharest, 1972.

[2] Benkó, S. *Father and son (Bolyai studies).* Magvetó Publisher, Budapest (en hongarès), 1978.

[3] Bolyai, Farkas. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris sublimioris, metodo intutiva, evidentiaque huic propria, introducendi.* Cum Appendice triplici I,II, Maros Vásárhely, 1832-1833.

[4] Bolyai, Joannes. *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibendis; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad csum falsitatis quadratura circuli geometrica.* Cum Appendice triplici I,II, Maros Vásárhely, 1931.

[5] Bolyai, János. *Bolyai letters.* Selected, introduction and notes written by S. Benkó, Kriterion Publisher, Bucharest (en hongarès), 1975.

[6] Bolyai, János. *Appendix, The Theory of Space.* (Kárteszi, F ed.) North Holland, Amsterdam, 1987.

[7] Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry.* Dover, New York. 1911.

[8] Dávid, L. *The lifes and works of the Bolyais.* Second, enlarged edition. Gondolat Publisher, Budapest (en hongarès), 1979.

[9] Kiss, E. *Mathematical gems from Bolyai chests.* Academic Publ. and Typotex Publ., Budapest, 1999

[10] Lobatxevski, N.I. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Berlin, 1840.

[11] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: The first 150 years.* Bull. Amer. Math. Soc. (New series) 6, 9-24, 1982.

[12] Stäckel, P. *Wolfgang und Johann Bolyais geometrische Untersuchungen, I-II.* Leipzig- Berlin, 1913.

[13] Varga, O. *The impact of the Bolyai-Lobatxevski geometry on the development of geometry.* Publ. Dept. Math-Phys. of the H.A.S. 3, 151-171 (en hongarès), 1953.

[14] Weszely, T. *The mathematical works of János Bolyai.* Kriterion Publisher, Bucharest, 1981.