Geometria axiomàtica

Organitzat per la Societat Catalana de Matemàtiques, s'ha dut a terme durant el mes de maig de 1992 un curs sobre Geometria Axiomàtica amb especial èmfasi en la Geometria Hiperbòlica i en la relació entre les Geometries Clàssiques i la Geometria Riemanniana. Donada la importància del tema en el context de la fonamentació de la Geometria i en el de la història de la matemàtica ens ha semblat oportú demanar al seu autor, Agustí Reventós, catedràtic de Geometria i Topologia a la UAB, una exposició resumida i divulgativa del seu contingut.

És ben clar que no es pot començar a explicar Geometria a un noi jove a partir d'un sistema d'axiomes. Si no té abans unes nocions intuïtives del que pot ser una recta, un angle, un segment, etc., difícilment ens entendrà i molt possiblement pensarà que estem bojos quan ens senti a dir amb tota serietat «... demostrem ara que tots els angles rectes són iguals» (només faltaria !).

Tampoc històricament es va anar per aquest camí, ja que a l'època d'Euclides eren molts i molts els teoremes de Geometria coneguts sense que s'hagués parlat encara d'axiomes.

A partir de teoremes coneguts els grecs eren capaços de demostrar-ne de nous i a partir d'aquests nous en demostraven d'altres, etc. Justament en seguir aquesta cadena de resultats en sentit invers és quan es veu la necessitat d'aturar-se en un lloc o altre i posar allà una «primera pedra» on fonamentar la Geometria. Altrament diríem: Per què és cert el teorema A? Perquè es dedueix per raonaments lògics a partir del teorema B. Per què és cert el teorema B? Perquè es dedueix per raonaments lògics a partir del teorema C... On acaba això? No devem ser en un cercle viciós?

Una situació ideal penso que fóra que aquesta necessitat imperiosa d'axiomatitzar que van tenir els grecs s'arribés a reproduir en cada alumne. Que arribés un moment en què l'alumne es preguntés: Els angles d'un triangle sumen 180 graus perquè per un punt exterior a una recta passa una única paral.lela o és al revés, és a dir, que com que els angles d'un triangle sumen 180 graus hi ha una única paral.lela?

Ja imagino que aquest alt nivell de maduresa matemàtica no es deu donar mai fins al nivell universitari, però potser convenientment motivats es podria donar entre els alumnes més interessats de COU.

No obstant això, crec **del tot imprescindible** que el professor de matemàtiques de qualsevol nivell conegui perfectament els fonaments de la geometria.

Això es fa cada cop més difícil ja que la geometria no solament ha estat erròniament menysvalorada en els programes d'ensenyament mitjà, sinó que aquest error s'ha estès als programes de les llicenciatures en matemàtiques, on cada cop ha passat a jugar un paper més marginal (assignatures de menys hores, optatives,...)

És per això que molts professors de matemàtiques, ja llicenciats, senten un dia o altre la necessitat de revisar els fonaments de la geometria. Si en aquest moment recorren a la font per excel.lència, «Els fonaments de la geometria» de D.Hilbert, es trobaran amb una obra excel lent però dura i difícil de llegir.

Amb la idea de posar a l'abast l'obra de Hilbert, de manera entenedora però sense trencar l'esperit del mètode axiomàtic és amb la que he elaborat aquest curs. La simplificació més gran consisteix a suposar coneguts els nombres reals. Això simplifica notòriament els axiomes d'ordre i elimina els de continuïtat. Procedim concretament de la següent forma:

Axiomàtica

Amb l'objectiu de fonamentar la Geometria Plana suposarem que tenim dos conjunts d'objectes. Els elements del primer conjunt s'anomenaran **punts** i els del segon, **rectes**. Suposarem que entre punts i rectes hi ha definida una certa relació (és a dir, un subconjunt del producte cartesià d'aquests dos conjunts) que anomenarem **pertanyer a**, que compleix:

I.1 Donats dos punts diferents A i B existeix una única recta **r** tal que «A pertany a **r**» i «B pertany a **r**».

I.2 Existeixen tres punts A, B i C tals que A no pertany a la recta determinada per B i C.

Observeu que no es defineix punt, ni recta, ni tampoc la relació **pertànyer a**. Qualsevol relació serà acceptada sempre que compleixi I.1 i I.2. Això no ens ha d'estranyar gaire, ja que per ensenyar a jugar per exemple a escacs no ens entretindríem pas a descriure físicament les peces sinó a donar les propietats que tenen.

Suposarem també que existeix una relació ternària entre els punts d'una recta (és a dir, una relació entre els punts d'una recta i parelles de punts de la mateixa recta) que anomenarem **estar entremig**, que compleix:

II.1 Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de punts de qualsevol recta i el conjunt dels nombres reals que conserva la relació d'**estar entremig**.

Aquesta correspondència depèn de la recta i no és canònica. S'ha d'entendre que en el conjunt dels nombres reals hi ha definida de manera natural una relació d'estar entremig: **a** està entremig de

b i **c** si i només si **c<a<b** o **b<a<c**. A partir d'aquí ja es pot parlar de **segment**.

També imposem que aquesta relació compleixi:

II.2 (Axioma de Pasch). Siguin A, B i C tres punts no alineats i **r** una recta que no passa per cap d'aquests. Llavors, si **r** talla el segment AB, talla un i només un dels segments BC i AC.

A partir d'aquí es pot parlar de semiplà i, en conseqüència, d'**angle**.

Els axiomes I.1 i I.2 reben el nom d'**axiomes d'incidència** i els II.1 i II.2 el d'**axiomes d'ordre**.

Com a introducció al tercer grup d'axiomes, els de **congruència**, deixeu-me fer uns comentaris sobre els cinc postulats d'Euclides. Els tres primers són una manera de dir que ens disposem a fer geometria amb una regla i un compàs: (1) Per dos punts hi passa una recta; (2) Les rectes es poden prolongar indefinidament; (3) Podem traçar circumferències de centre i radi arbitraris.

El cinquè postulat fa referència a la teoria de les paral.leles. La seva importància ha ultrapassat l'àmbit de la geometria i fins i tot el de la matemàtica, ja que ha estat un punt clau en el desenvolupament del pensament modern.

El que sovint queda injustament oblidat és el quart postulat que diu: (4) Tots els angles rectes són iguals. Molts autors el consideren un error d'Euclides, ja que es pot demostrar amb un rigor semblant a l'utilitzat en altres parts dels "Elements". No obstant això, jo vull reivindicar des d'aquí la importància del quart postulat, ja que porta implícit el problema del **moviment**. En efecte, què vol dir que dos angles són iguals? Hem d'interpretar que aquests dos angles es poden fer coincidir, però això pressuposa la idea de moviment, ja que hem d'agafar un dels angles i portar-lo sobre l'altre.

El moviment, punt central en el programa d'Erlangen[1], queda amagat a l'obra de Hilbert en els axiomes de congruència. Concretament, suposaríem que hi ha una relació entre els segments -**congruència de segments**- i una altra entre els angles - **congruència d'angles**- subjectes a complir uns axiomes que no explicito aquí, però que venen a dir que tot segment (resp. angle) es pot portar a qualsevol punt del pla en qualsevol direcció i que aquestes relacions són compatibles amb la suma de segments i angles respectivament.

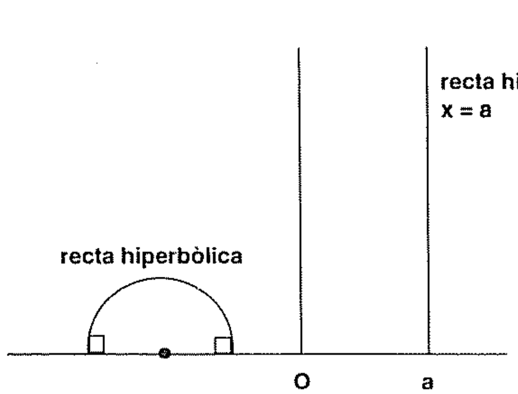


Fig. 1

Tots els resultats que es van obtenint a partir dels anteriors tres grups d'axiomes -incidència, ordre i congruència- formen part de l'anomenada Geometria Absoluta.

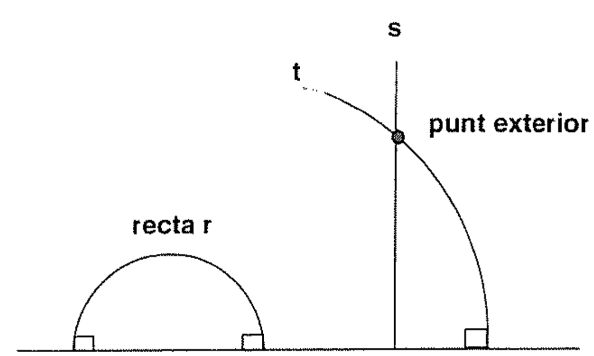
Durant el curs es van obtenir, per exemple, els criteris de congruència de triangles, el quart postulat (tots els angles rectes són congruents)..., fins a arribar a demostrar que per un punt exterior a una recta hi passa almenys una paral.lela.

Justament, en tractar de demostrar la unicitat d'aquesta paral.lela (sense aconseguir-ho !) és quan es posa de manifest la necessitat d'un postulat o axioma de les paral.leles, bé en el sentit que només n'hi ha una -**Geometria Euclidiana**- bé en el sentit que n'hi ha moltes -**Geometria Hiperbòlica**-.

Durant molts anys es va pensar que aquesta darrera suposició portaria a contradicció. És a dir, que el sistema axiomàtic format pels tres primers grups d'axiomes, més la suposició que per un punt exterior a una recta hi passen moltes paral.leles (Geometria Hiperbòlica), no era consistent. En general, un sistema axiomàtic es diu consistent quan a partir dels seus axiomes no es pot arribar mai a demostrar un teorema i la seva negació. Dit així, sembla molt difícil poder assegurar la consistència d'un sistema, ja que mai arribem a tenir tots els teoremes per poder-los comparar. Aquest problema es resol habitualment donant un **model**. És a dir, una realització concreta dels objectes i relacions involucrats en els axiomes.

Model Hiperbòlic

Fig. 2



Considerem el semiplà **H= {(x,y) ∈ R^2 : y>0}**. Anomenem punts (hiperbòlics) als punts d'H. Anomenem rectes (hiperbòliques) les semicircumferències de centre sobre l'eix y=0 contingudes a H i també a les rectes d'equació x=const. contingudes a H (fig.1)

Les definicions naturals de **pertànyer a** i **estar entremig** compleixen els dos primers grups d'axiomes.

Direm que dos segments o dos angles són congruents quan podem portar l'un sobre l'altre per un producte d'inversions[2] respecte rectes hiperbòliques. Amb una mica de feina es comprova que es compleixen també els axiomes de congruència. A més, es compleix trivialment que per un punt exterior a una recta (hiperbòlica) hi passen moltes rectes que no la tallen (fig.2)

Tots els elements involucrats en aquesta construcció pertanyen a la Geometria Euclidiana (rectes, circumferències, inversions,...) i, no obstant, formen un model de la Geometria Hiperbòlica. Això prova la consistència d'aquesta darrera geometria en el sentit que és tan consistent com l'euclidiana.

Utilitzant aquest model ens va ser senzill calcular l'angle de paral.lelisme. Per entendre la fórmula, suposem que **P** és un punt exterior a una recta **r** i tracem la perpendicular **PQ** de **P** a **r** (fig.3). De totes les rectes que passen per **P** i no tallen **r** n'hi ha només dues que reben el nom de paral.leles. Són l'extrem inferior de les que no tallen per la dreta i l'extrem inferior de les que no tallen per l'esquerra (fig.4). Es pot veure que els angles que aquestes dues rectes formen amb **PQ** són iguals i a més a més que aquest angle α depèn només de la distància **x** del punt a la recta. Per distància entenc distància hiperbòlica, és a dir, l'única manera (llevat d'un factor d'escala) d'assignar un número real a cada segment de manera que segments congruents tinguin associats números iguals i que a la suma de segments correspongui la suma de números reals.

La fórmula que s'obté per a l'angle de paral.lelisme α és concretament:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-x/R}$$

on **R** és una constant que dependrà del factor d'escala. Aquesta fórmula és filosòficament molt interessant ja que permet entendre la carta de Gauss a Taurinus quan li diu que li agradaria viure en un món hiperbòlic, ja que d'aquesta manera tindria una unitat de longitud fixada a priori, és a dir una unitat de longitud canònica.

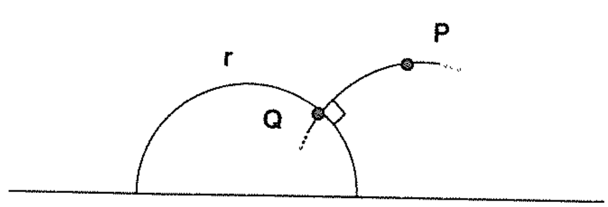


Fig. 3

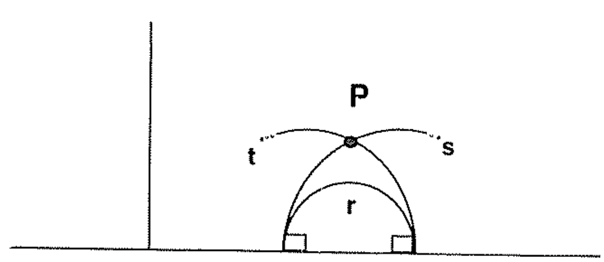


Fig. 4.1

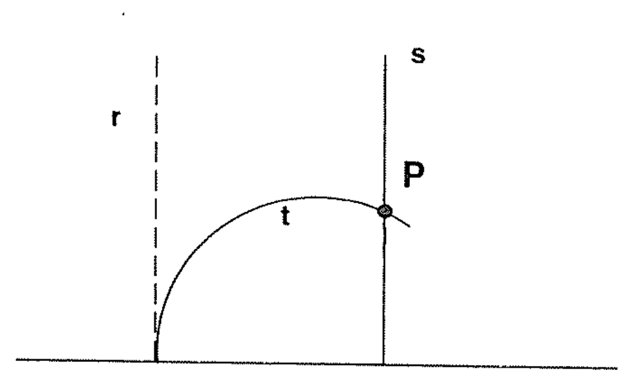


Fig. 4.2

En Geometria Absoluta no existeix cap manera privilegiada de fixar un factor d'escala. Qualsevol segment és igualment bo a l'hora d'escollir una unitat de mesura. No obstant això, hi ha un angle absolutament privilegiat: l'angle recte. L'hem definit a partir dels axiomes sense necessitat de parlar de graus, ni radiants. Per tant, el podem utilitzar per mesurar angles. Així podrem dir que un angle mesura dos rectes, o mig recte, etc.

En Geometria Hiperbòlica, i gràcies a la fórmula de l'angle de paral.lelisme que relaciona angles amb segments (relació que no existeix en absolut en Geometria Euclídia) podem transposar l'especificitat de l'angle recte a una especificitat de segments. Concretament, podem parlar, per exemple, del segment que dóna lloc a un angle de paral.lelisme de mig recte:

$$\pi/4 = 2 \operatorname{arctg} e^{-x/R} \quad \text{o equivalentment: } x = -R \operatorname{Ln} \operatorname{tg} (\pi/8)$$

Si ara agafem aquest segment com a unitat de mesura podem posar x=1 a la fórmula anterior i calcular el factor d'escala R.

Finalment, espero que aquestes poques línies serveixin per despertar l'interès per la Geometria a tots els lectors d'aquesta revista a la qual desitjo molts anys d'èxits.

Agustí Reventós i Tarrida

NOTES:

1. El 1872, F. Klein es va presentar a una plaça de professor a Erlangen. Per aquest motiu va donar una lliçó titulada "Revisió comparada de les investigacions recents en Geometria" que s'ha conegut sempre més com a "Programa d'Erlangen". La idea esencial rau en definir la Geometria com l'estudi de les propietats de les figures d'un espai invariants per l'actuació d'un grup de transformacions.

2. L'invers d'un punt M respecte d'una circumferència de centre O i radi r és l'únic punt M' de la recta OM tal que OM•OM' = r^2