Sòlids Arquimedians

ART

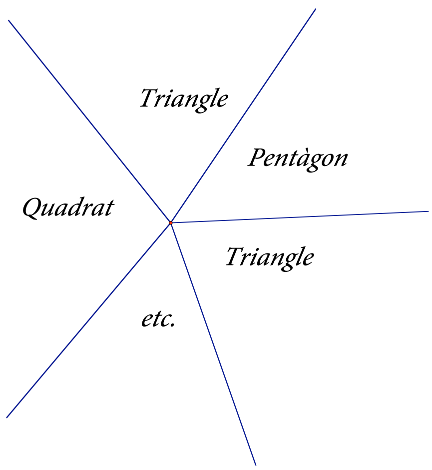
Resum

Deducció de que només hi pot haver 13 sòlids Arquimedians (més infinits prismes i anti-prismes). Els càlculs són només combinatoris, no fan referència a l'existència efectiva d'aquests cossos, ni diuen res sobre la seva convexitat. Suposo només dos coses: semiregulars i homeomorfs a l'esfera.

1 Preliminars

Els sòlids Arquimedians són poliedres formats per polígons regulars (possiblement diferents entre ells) tals que tots els vèrtexs són iguals. Això vol dir que si en un vèrtex i concorren els polígons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, en aquest ordre, llavors a tots els vèrtexs hi concorren els mateixos polígons en el mateix ordre o en ordre oposat.

Si aplanem el poliedre i mirem un vèrtex hem de veure la mateixa estructura a tots ells.

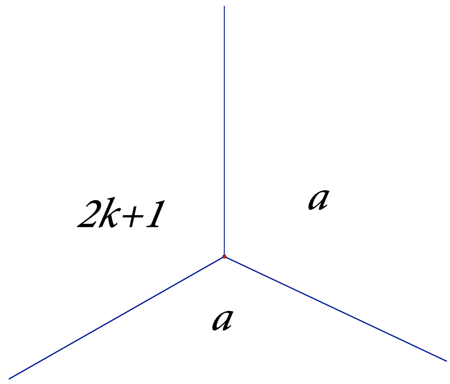


Comencem amb un parell d'observacions elementals.

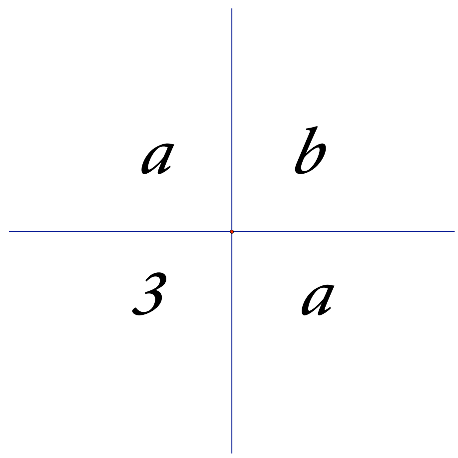
Lema 1.1 (Cromwell, pàg. 158) *Al voltant de cada vèrtex apareixen com a molt 3 tipus diferents de polígons regulars (potser repetits).*

Demostració. Si apareguessin 4 tipus diferents, els angles més petits serien 60, 90, 108, i 120, que ja sumen més de 360.

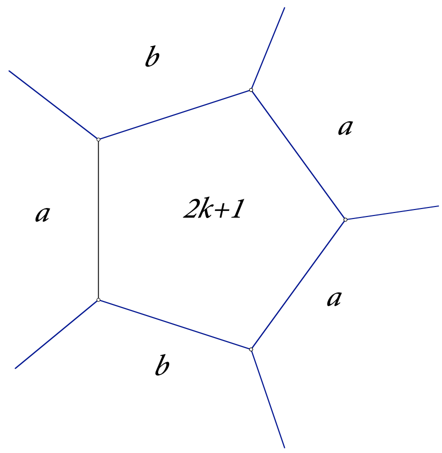
Lema 1.2 (Cromwell, pàg. 159) *Si hi ha* 3 *polígons i un és imparell, els altres dos són iguals.*



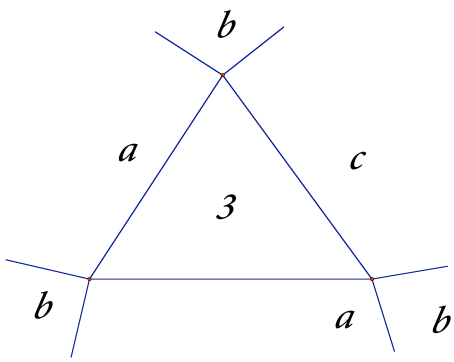
Si hi ha 4 *polígons i un és un triangle, els adjacents són iguals.*



Demostració primera part. Si $a \neq b$ els vèrtexs no serien del mateix tipus.



Demostració segona part. Els codis a dos dels vèrtexs són: $(3abc)$, $(3cba)$, que implica $a = c$.



2 Característica d'Euler

Sigui a_n el nombre de n-àgons que concorren en un vèrtex.

Clarament

$$d := \sum a_k = \text{nombre d'arestes que concorren en cada vèrtex.}$$

Així

$$Vd = 2A,$$
V:= nombre total de vèrtexs.
A:= nombre total d'arestes,

$$\frac{Va_3}{3} + \frac{Va_4}{4} + \cdots = C,$$
C:=nombre total de cares.

Per la fórmula d'Euler

$$V(\sum_{k=3}(\frac{a_k}{k}-\frac{a_k}{2})+1)=2,$$

que dóna lloc a la *fórmula fonamental*:

$$\boxed{\sum_{k=3}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{k})a_k = 1-\tfrac{2}{V}}$$

Com que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{k}>\frac{1}{6}, \quad \forall k>3,$$

tenim

$$1-\frac{2}{V}>\frac{d}{6},$$

és a dir $d<6$.

Però, de fet, és obvi que $d<6$, ja que si $d=6$, en el millor dels cassos tindríem 6 triangles equilàters en un vèrtex, i estaríem en el cas pla o tessel-lació.

Estudiem els cassos possibles, fent primer una llista exhaustiva, de la que posteriorment podrem anar eliminant cassos.

3 $d=5$

Observem primerament que $a_3>3$, ja que, com $1>1-\dfrac{2}{V}$, tenim

$$\begin{aligned}
1 &> \sum_{k=3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})a_k = (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})a_3+\sum_{k=4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})a_k\\
&= \frac{a_3}{6}+\frac{1}{2}\sum_{k=4}a_k-\sum_{k=4}\frac{1}{k}a_k\\
&= \frac{a_3}{6}+\frac{1}{2}(5-a_3)-\sum_{k=4}\frac{1}{k}a_k\\
&> \frac{5}{2}-\frac{a_3}{3}-\frac{1}{4}(\sum_{k=4}a_k)\\
&= \frac{5}{2}-\frac{a_3}{3}-\frac{1}{4}(5-a_3)\\
&= \frac{5}{4}-\frac{a_3}{12}.
\end{aligned}$$

És a dir,

$$a_3>3.$$

Per tant, només tenim els cassos següents:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Cas I.} & d & = & 5, & a_3=5.\\
\text{Cas II.} & d & = & 5, & a_3=4, \quad a_r=1,\ \text{algun } r>3.
\end{array}$$

Cas I.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})5 = 1-\frac{2}{V}.$$

Això implica

$$\boxed{V=12, \quad \text{ICOSAEDRE, codi (33333), } \mathbf{P5}}.$$

El codi indica els polígons que concorren a cada vèrtex, i $P*$ o $A*$ indica cos platònic o cos Arquimedià,, respectivament.

Cas II.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})4+(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}) = 1-\frac{2}{V}.$$

Això implica

$$V=\frac{12k}{6-k},$$

i per tant, només pot ser

$$\boxed{V=24, \quad \text{CUBOCTAEDRE PUNXEGUT, codi (33334), } \mathbf{A1}}.$$

$$\boxed{V=60, \quad \text{ICOSAEDRE PUNXEGUT, codi (33335), } \mathbf{A2}}.$$

4 $d=4$

En principi tenim 7 cassos, però dos d'ells queden exclosos: el cas 4 pel lema 1.2 i el cas 7 pel lema 1.1.

Cas 1. $d=4$, $a_3=4$.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})4 = 1-\frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V=6, \quad \text{OCTAEDRE, codi (3334), } \mathbf{P2}}.$$

Cas 2. $d=4$, $a_3=3$, algun $a_r=1, r>3$.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})3+(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}) = 1-\frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V=2k, \quad \text{ANTIPRISMES, codi (333k)}}.$$

Cas 3. $d=4$, $a_3=2$, algun $a_r=2, r>3$.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})2 = 1-\frac{2}{V}.$$

Implica

$$V=\frac{6k}{6-k},$$

i per tant, només pot ser

$$\boxed{V=12, \quad \text{CUBOCTAEDRE, codi (3434), } \mathbf{A3}}.$$

$$\boxed{V = 30, \quad \text{ICOSADODECAEDRE, codi (3535), } \mathbf{A4}}.$$

Cas 4. $d = 4,\ a_3 = 2,$ algun $a_r = 1,$ algun $a_s = 1,\ r, s > 3, r \neq s.$
No es pot donar, pel lema 1.2.
Cas 5. $d = 4,\ a_3 = 1,$ algun $a_r = 3, r > 3.$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{6k}{9 - 2k},$$

i per tant,

$$\boxed{V = 24, \quad \text{PETIT ROMBECUB, codi (3444), } \mathbf{A5}}.$$

Cas 6. $d = 4,\ a_3 = 1,$ algun $a_r = 2,$ algun $a_s = 1,\ r, s > 3, r \neq s.$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{R}) = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{6kr}{6r + 3k - 2kr},$$

i per tant,

$$\boxed{V = 60, \quad \text{PETIT ROMBEICOSAEDRE, codi (3444), } \mathbf{A6}}.$$

Cas 7. $d = 4,\ a_3 = 1,$ algun $a_r = 1,$ algun $a_s = 1,$ algun $a_t = 1, r, s, t > 3, r \neq s \neq t.$
No es pot donar, pel lema 1.1.

5 $d = 3$

En principi tenim 8 cassos, però dos d'ells queden exclosos pel lema 1.1: el cas 2 i el cas 4.
Cas 1. $d = 3,\ a_3 = 3.$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 4, \quad \text{TETRAEDRE, codi (333), } \mathbf{P1}}.$$

Cas 2. $d = 3,\ a_3 = 2,$ algun $a_r = 1, r > 3.$
No es pot donar, pel lema 1.1
Cas 3. $d = 3,\ a_3 = 1,$ algun $a_r = 2, r > 3.$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{k})2 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{12k}{12 - k},$$

i a més, pel lema 1.1, k ha de ser parell. Per tant, tenim quatre possibilitats:

$$\boxed{V = 6, \quad \text{PRISMA TRIANGULAR, codi (344)}}.$$

$$\boxed{V = 12, \quad \text{TETRAEDRE TRUNCAT, codi (366), } \mathbf{A7}}.$$

$$\boxed{V = 24, \quad \text{CUB TRUNCAT, codi (388), } \mathbf{A8}}.$$

$$\boxed{V = 36, \quad \text{DODECAEDRE TRUNCAT, codi (344), } \mathbf{A9}}.$$

Cas 4. $d = 3$, $a_3 = 1$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.
No es pot donar, pel lema 1.1.
Cas 5. $d = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 4, \quad \text{CUB, codi (444), } \mathbf{P3}}.$$

Cas 6. $d = 3$, $a_3 = 0$, $a_5 = 3$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{5})3 = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$\boxed{V = 20, \quad \text{DODECAEDRE, codi (555), } \mathbf{P4}}.$$

Cas 7. $d = 3$, $a_3 = 0$, algun $a_r = 2$, algun $a_s = 1$, $r, s > 3, r \neq s$.

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{s}) = 1 - \frac{2}{V}.$$

Implica

$$V = \frac{4rs}{4s + 2r - rs},$$

però només podem tenir $r = 4$ o $r = 6$, ja que, pel lema 1.1, $r = 5$ no es pot donar. Això dóna lloc a tres cassos:

$$\boxed{r = 4; V = 2s, \quad \text{PRISMA s-GONAL, codi (44s)}}.$$

Quan $r = 6$ tenim

$$V = \frac{12s}{6 - s},$$

que dóna lloc a dos cassos segons els valors de s:

$$\boxed{s = 5; V = 60, \quad \text{ICOSAEDRE TRUNCAT, codi (566), } \mathbf{A10}}.$$

També conegut com a *Pilota de futbol* o *Fulereno*, correspon a la molècula del carboni 60.

$$\boxed{s = 4; V = 24, \quad \text{OCTAEDRE TRUNCAT, codi (466), } \mathbf{A11}}.$$

Cas 8. $d = 3$, $a_3 = 0$, algun $a_r = 1$, algun $a_s = 1$ algun $a_t = 1, r, s, t > 3, r \neq s \neq t$.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{t})=1-\frac{2}{V}.$$

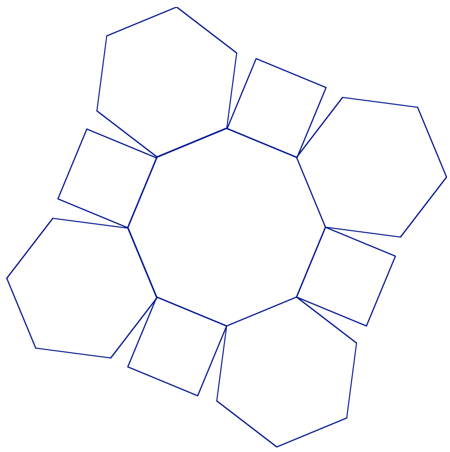
Implica

$$V=\frac{4rst}{2rs+2rt+2st-rst}.$$

Pel lema 1.1 r, s, t han de ser parells. Només hi ha dos casos:

$\boxed{V=48,\quad \text{GRAN ROMBECUBICOSAEDRE, codi (4,6,8), } \mathbf{A12}}.$

$\boxed{V=120,\quad \text{GRAN ROMBEICOSAEDRE, codi (4,6,10), } \mathbf{A13}}.$



GRAN ROMBECUBICOSAEDRE