Notes sobre Corbes i Superfícies.

Agustí Reventós Tarrida

Curs 2017-2018

Índex

Capítol 1

Programa de l'assignatura

Fem una distribució de les aproximadament 45 hores de classe de teoria d'aquesta assignatura.

(1) Corbes de $\mathbb{R}^3$. Longitud.

(2) Paràmetre arc.

(3) Pla osculador, pla normal i pla rectificant. Contacte.

(4) Corbes planes.

(5) Fórmules de Frenet. Expressió canònica local.

(6) Teorema fonamental de la teoria local de corbes.

(7) Contacte entre corbes i esferes o plans. Esfera osculatriu.

(8) Comentaris històrics sobre els inicis de la geometria diferencial.

(9) Comentaris històrics sobre els inicis de la geometria diferencial.

(10) Superfícies de $\mathbb{R}^3$. Definició i exemples.

(11) Gràfiques i valors regulars.

(12) Funcions diferenciables sobre superfícies.

(13) Espai tangent. Diferencial d'una aplicació entre superfícies.

(14) Primera forma fonamental. Àrea.

(15) Isometries.

(16) Aplicació de Gauss. Endomorfisme de Weingarten.

(17) Segona forma fonamental. Línies de curvatura. Enunciar el teorema fonamental de la teoria local de superfícies.

(18) Superfícies reglades.

(19) Teorema de Monge.

(20) Curvatura normal. Interpretació geomètrica.

(21) Teorema de Meusnier.

(22) Fórmula d'Euler. Teorema d'Olinde.

(23) Indicatriu de Dupin.

(24) Teorema egregi.

(25) Equacions de Codazzi Mainardi. Enunciar el teorema de Bonnet.

(26) Curvatura geodèsica.

(27) Fórmula de Liouville.

(28) Equació de les geodèsiques. Geodèsiques com minimals de longitud.

(29) Angle d'inclinació.

(30) Teorema del defecte.

(31) Camps vectorials a $\mathbb{R}^n$. Corbes integrals.

(32) Aplicacions multilineals alternades.

(33) Formes a $\mathbb{R}^n$.

(34) Diferencial exterior.

(35) Formes sobre superfícies (excloent diferencial exterior). Element d'àrea.

(36) Subvarietats.

(37) Subvarietats amb vora.

(38) Integració de formes.

(39) Teorema del canvi de variable.

(40) Teorema de Stokes. Fórmula de Green.

(41) Teorema de Gauss-Bonnet.

(42) Repère mobile.

(43) Teorema de Gauss-Bonnet a partir del mètode de la referència mòbil.

(44) Integrals de camps sobre corbes i superfícies.

(45) Teoremes de la divergència i el rotacional. Enunciar el lema de Poincaré.

Capítol 2

Recordatori d'alguns resultats d'anàlisi

Diferencial d'una aplicació

Definició 2.0.1 *Sigui*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & (f^1(x), \dots f^m(x)) \end{array}$$

una aplicació diferenciable[1]*, i sigui* $P \in \mathbb{R}^n$*. La diferencial de* f *en* P *és l'aplicació lineal* $df_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *que té per matriu respecte de les bases canòniques*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1} & \frac{\partial f^m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

[1] En general, quan es diu diferenciable s'hauria d'especificar si ens referim a funcions de tipus $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ o $\mathcal{C}^\omega$. En aquestes notes assumirem que diferenciable vol dir $\mathcal{C}^\infty$, la qual cosa vol dir que tenim derivades parcials de tots els ordres.

on totes les derivades parcials de la matriu[2] *estan valorades en* P*.*

Així, si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, el vector $df_P(v)$ és el vector que té respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^m$ les components de

$$df_P(v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|P} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \operatorname{grad} f^1(P), v \rangle \\ \vdots \\ \langle \operatorname{grad} f^m(P), v \rangle \end{pmatrix}.$$

Si $n = m = 1$ la diferencial en el punt $t_0 \in \mathbb{R}$ és l'aplicació lineal de $df_{t_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$df_{t_0}(t) = f'(t_0)t.$$

És a dir, és l'aplicació lineal que consisteix en multiplicar per la derivada en el punt.

Nota 2.0.2 *Observem que donada* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *diferenciable podem pensar que* df *és una aplicació de* $\mathbb{R}^n$ *a les aplicacions lineals de* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$*,*

$$df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

que associa a cada punt l'aplicació lineal donada per la matriu jacobiana, valorada en aquest punt.

En aquest sentit es diu que df *és una* 1*-forma a valors vectorials (vegeu la nota 14.2.4).*

Regla de la cadena

Si tenim les aplicacions diferenciables

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^r$$

[2]Aquesta matriu també es denota a vegades com

$$\frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

i $P \in \mathbb{R}^m$, llavors

$$d(f \circ g)_P = df_{g(P)} \circ dg_P$$

Recordem que a la composició de funcions correspon el producte de matrius, respecte de les bases canòniques respectives.

Per exemple,[3] si prenem $m = r = 2$ i $n = 3$ i denotem (u, v) les coordenades cartesianes del primer $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) les coordenades cartesianes de $\mathbb{R}^3$ i (ψ, η) les coordenades cartesianes del segon $\mathbb{R}^2$, tenim

$$\begin{aligned} g(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ f(x,y,z) &= (\psi(x,y,z), \eta(x,y,z)) \end{aligned}$$

La versió matricial de la regla de la cadena ens diu que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial v} \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \end{pmatrix}_{g(P)} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_P$$

cosa que permet calcular de cop les quatre derivades parcials de la matriu de l'esquerra (de la funció composta $f \circ g$) en funció de les derivades parcials de f i g.

Per exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} &= \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial x}_{|g(u_0,v_0)} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} \\ &+ \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial y}_{|g(u_0,v_0)} \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} \\ &+ \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}_{|g(u_0,v_0)} \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} \end{aligned}$$

In short

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}$$

Si $m = 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i és costum escriure $g(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Si $m = r = 1$, tenim

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

[3] Segueixo [10].

i l'aplicació $f \circ g$ és una aplicació de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, per tant la seva diferencial és multiplicar per la derivada, i aplicant la regla de la cadena tenim la igualtat matricial següent

$$(f \circ g)'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_r} \end{pmatrix}_{g(t_0)} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}.$$

És a dir, tenim la igualtat

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t_0) &= \frac{d}{dt}_{|t=t_0} f(g(t)) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t_0))x_i'(t_0) \\ &= \langle \operatorname{grad} f(g(t_0)), g'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Però segons la definició 2.0.1,

$$df_{g(t_0)}(g'(t_0)) = \langle \operatorname{grad} f(g(t_0)), v \rangle,$$

per tant

$$df_{g(t_0)}(g'(t_0)) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} f(g(t))$$

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ apliquem aquesta igualtat a cadascuna de les components de f, i tenim el resultat següent:

Proposició 2.0.3 *Sigui*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & (f^1(x), \dots f^m(x)) \end{array}$$

una aplicació diferenciable, i sigui $P \in \mathbb{R}^n$. La diferencial de f en P és l'aplicació lineal $df_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donada per

$$df_P(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(g(t))$$

on $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació diferenciable tal que $g(t_0) = P$ i $g'(t_0) = v$.

És a dir,

$$\begin{aligned} df_P(v) &= (\langle \operatorname{grad} f^1(P), v\rangle, \ldots, \langle \operatorname{grad} f^m(P), v\rangle) \\ &= (\frac{d}{dt}_{|t=0} f^1(g(t)), \ldots, \frac{d}{dt}_{|t=0} f^m(g(t))). \end{aligned}$$

Aquest valor no depèn de la funció g elegida, amb aquestes condicions, ja que per a cadascuna de les components f^i de f tenim

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} f^i(g(t)) = \langle \operatorname{grad} f^i(P), v\rangle$$

i aquest terme de la dreta no depèn de $g(t)$.

Teorema de la funció inversa

Teorema 2.0.4 *Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable i $P \in U$. Suposem que df_P és un isomorfisme. Llavors f és un difeomorfisme local. És a dir, existeixen entorns oberts V de P a U i W de $f(P)$ a $\mathbb{R}^n$ tals que $f : V \longrightarrow W$ és diferenciable, bijectiva, i amb inversa diferenciable.*

A més la diferencial de f^{-1} en un punt $f(P)$ és la inversa de la diferencial de f en P.

És a dir,

$$df^{-1}_{f(P)} = (df_P)^{-1}.$$

Teorema de la funció implícita

Teorema 2.0.5 *Sigui*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x, y) & \mapsto & F(x, y) \end{array}$$

diferenciable. Sigui $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ i suposem

$$\det \left(\frac{\partial F^i}{\partial y_j} \right)_P \neq 0.$$

Llavors en un entorn obert de P podem posar y en funció de x, $y = y(x)$, de tal manera que $F(x, y(x)) = 0$.[4] *Més concretament, existeix un entorn obert U de x_0 a $\mathbb{R}^n$ i un entorn obert V de y_0 a $\mathbb{R}^m$ i una única aplicació diferenciable $f : U \longrightarrow V$ tal que $F(x, f(x)) = 0$. A més si $x \in U$ i $y \in V$ compleixen $F(x, y) = 0$, llavors $y = f(x)$.*

És un corol·lari del teorema de la funció inversa, aplicat a la funció $(x, F(x, y))$

Teorema d'existència i unicitat de solucions d'una edo, i dependència diferenciable d'aquestes respecte de les condicions inicials.

Teorema 2.0.6 *Donat el sistema d'equacions diferencials ordinàries*

$$\frac{df^i}{dt} = F^i(f^1(t), \ldots, f^n(t)), \quad i = 1, \ldots, n$$

on les $F^i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions conegudes definides sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ i les $f^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions a determinar, i donat $x_0 \in U$, existeixen un entorn obert de x_0, $W \subset U$, $\epsilon > 0$, i funcions diferenciables

$$f^i : (-\epsilon, \epsilon) \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

tals que

$$\frac{\partial f^i(t,x)}{\partial t} = F^i(f^1(t,x), \ldots, f^n(t,x)), \quad i = 1, \ldots, n$$

i

$$f^i(0, x) = x_i.$$

Les $f^i(t, x)$ són úniques amb aquestes condicions.

Es pot adaptar fàcilment a equacions de segon ordre.

Teorema 2.0.7 *Donat el sistema d'equacions diferencials ordinàries*

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} = F^i(f^1(t), \ldots, f^n(t), (f^1)'(t), \ldots, (f^n)'(t)), \quad i = 1, \ldots, n$$

[4] La funció $y = y(x)$ no es coneix en general explícitament, però el teorema diu que donada x hi ha una única y tal que $F(x, y) = 0$, així que y queda determinada implícitament per x.

on les $F^i : U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *són funcions conegudes definides sobre un obert* $U \times V$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *i les* $f^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *són funcions a determinar, i donat* $(x_0, y_0) \in U \times V$*, existeixen un entorn obert de* (x_0, y_0)*,* $W \subset U \times V$*,* $\epsilon > 0$*, i funcions diferenciables*

$$f^i : (-\epsilon, \epsilon) \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

tals que

$$\frac{\partial^2 f^i(t,x,y)}{\partial t^2} = F^i(f^1(t,x,y), \ldots, f^n(t,x,y), (f^1)'(t,x,y), \ldots, (f^n)'(t,x,y)),$$

$i = 1, \ldots, n$*, i*

$$f^i(0,x,y) = x_i.$$

$$\frac{df^i}{dt}(0,x,y) = y_i.$$

Les $f^i(t,x,y)$ *són úniques amb aquestes condicions.*

Teorema del canvi de variable per a integrals simples

Sigui $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ un difeomorfisme entre tancats de $\mathbb{R}$ i sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació contínua. Si φ és creixent tenim $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$ i si és decreixent $\varphi(c) = b, \varphi(d) = a$. En el primer cas tenim

$$\int_a^b f(y)dy = \int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

i en el segon

$$\int_a^b f(y)dy = \int_d^c f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = -\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx..$$

Per evitar aquesta doble situació escrivim

$$\int_{[a,b]} f(y)dy = \int_{[c,d]} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx.$$

Teorema del canvi de variable per a integrals dobles

Sigui $\varphi : U \longrightarrow V$ un difeomorfisme[5] entre oberts de $\mathbb{R}^2$ que denotarem per

$$\begin{aligned} x &= \varphi^1(u,v) \\ y &= \varphi^2(u,v) \end{aligned}$$

i sigui $R \subset U$ un domini. Sigui $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable. Llavors

$$\int_{\varphi(R)} f(x,y)dxdy = \int_R (f \circ \varphi)(u,v) \cdot |J\varphi(u,v)|\, du\, dv$$

on

$$J\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La versió general (vegeu per exemple [32]) és la següent:

Teorema 2.0.8 *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i sigui $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció injectiva i diferenciable amb derivada contínua, tal que* $\det g'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$. *Si $f : g(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable, llavors*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |\det g'|.$$

Quan diem *integrable* ens referim a integrable Riemann i el resultat que utilitzarem és que *una funció contínua sobre un rectangle tancat de $\mathbb{R}^n$ és integrable* (i la integral de Lebesgue coincideix amb la integral de Riemann).

2.1 Teorema d'estructura de les immersions locals

En el teorema següent veurem com les immersions són localment injeccions (llevat de difeomorfismes).

[5] Només necessitem injectiva amb derivades parcials contínues i jacobià no nul a tot arreu excepte potser sobre un conjunt de mesura zero.

Teorema 2.1.1 *Sigui $F : U \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, amb U obert i $k \leq n$, una aplicació diferenciable i suposem que en un punt $P \in U$, dF_P és injectiva*[6]*. Llavors existeix un entorn obert V de $F(P)$ a $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$, amb $h(V)$ obert de $\mathbb{R}^n$, tal que*

$$h(F(x_1, \ldots, x_k)) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0),$$

sempre que $(x_1, \ldots, x_k) \in U \cap F^{-1}(V)$. A més,

$$h(V \cap F(U)) = h(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Demostració. Podem suposar, canviant si cal el nom de les coordenades, que

$$\det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j} \right)_{i,j} (P) \neq 0, \quad i, i = 1, \ldots, k.$$

Definim $g : U \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ per

$$g(x) = F(x_1, \ldots, x_k) + (0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Com

$$dg = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial x_k} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^n}{\partial x_k} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \frac{\partial F^{k+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^{k+1}}{\partial x_n} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^k}{\partial x_k} & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right)$$

tenim que $\det dg_{(P,0)} = \det(\frac{\partial F^i}{\partial x_j})_{i,j}(P) \neq 0$, i per tant, g és un difeomorfisme local.

És a dir, existeix un entorn obert W de $(P, 0)$ en $U \times \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $V = g(W)$ és obert de $\mathbb{R}^n$ i $g : W \longrightarrow V$ és un difeomorfisme.

Llavors $h = g^{-1} : V \longrightarrow W$ és el difeomorfisme buscat ja que

$$g(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = F(x_1, \ldots, x_k),$$

[6]Equivalentment, la matriu $(\frac{\partial F^i}{\partial x_j})_{i,j}$ té rang k.

i per tant,

$$h(F(x_1,\ldots,x_k)) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \tag{2.1}$$

com volíem.

Això demostra també que

$$h(V \cap F(U)) \subseteq h(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Per veure la inclusió contraria[7] observem que $W \subset U \times \mathbb{R}^{n-k}$. Així si $h(y) \in h(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$, és a dir,

$$h(y) = (a,0), \quad a \in \mathbb{R}^k,\, 0 \in \mathbb{R}^{n-k}, y \in V$$

ha de ser $a \in U$, ja que $h(y) \in W$, i, aplicant g a l'anterior igualtat tenim

$y = g(a,0) = F(a)$ i per tant $h(y) \in h(V \cap F(U))$ com volíem. Per tant,

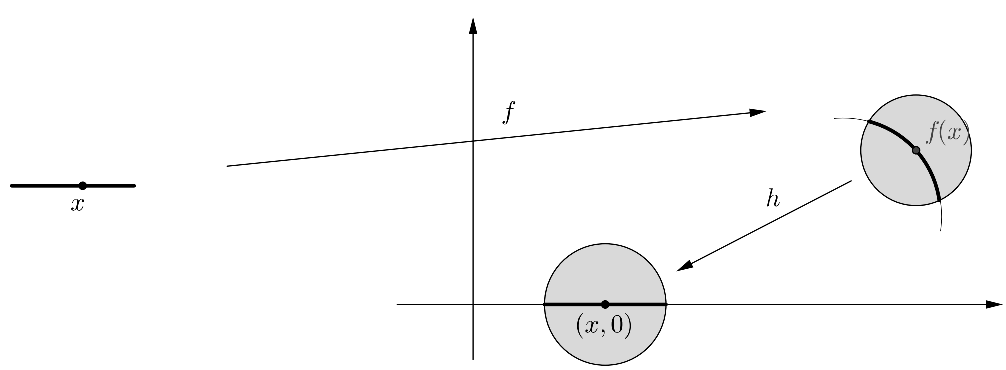
$$h(V \cap F(U)) = h(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \quad \square$$

Observem que hem demostrat que

$$F = h^{-1} \circ i$$

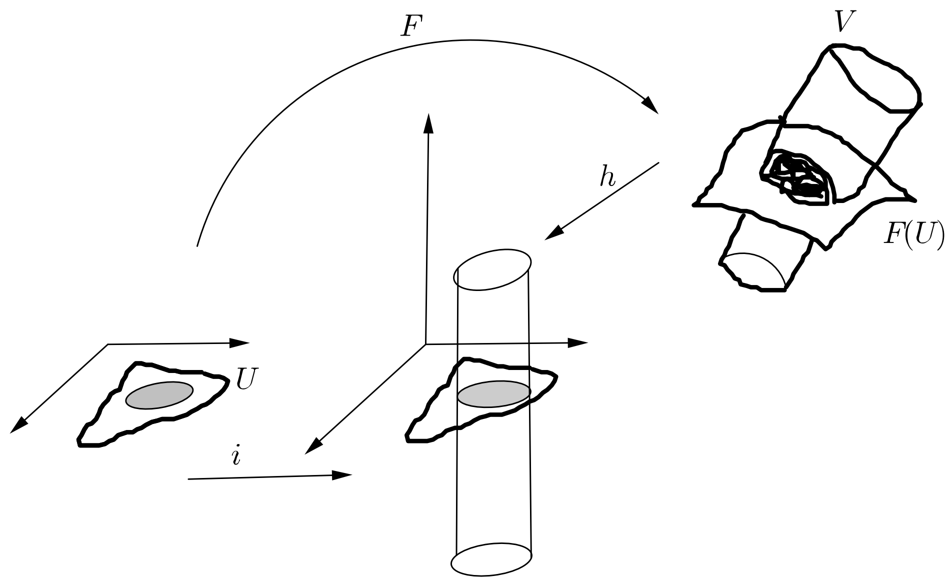
on $i(x_1,\ldots,x_k) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$. *Tota immersió és localment un difeomorfisme precedit d'una injecció.* En particular és localment injectiva.

Les immersions locals, com són localment bijectives, tenen inversa local. Aquesta inversa no està definida en un obert de $\mathbb{R}^n$ i, per tant, no té sentit dir que és diferenciable. No obstant, podrem funcionar sempre "quasi bé" com si ho fos, ja que aquesta inversa és la restricció d'una aplicació diferenciable definida, aquesta sí, en un obert de $\mathbb{R}^n$.



[7] Això no seria cert per a un difeomorfisme h arbitrari que compleixi (2.1). Però h no és arbitrari sinó que és l'invers de g!

$k = 1, n = 2$



$k = 2, n = 3$

Corol·lari 2.1.2 *Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una immersió en un punt $P \in U$. Llavors existeix un entorn obert V de $F(P)$ a $\mathbb{R}^n$ i una aplicació diferenciable $g : V \longrightarrow U$ tal que $g(V)$ és obert de U i tal que, sobre $V \cap F(U)$, $g = F^{-1}$.*

Demostració. Conseqüència directa del teorema d'estructura de les immersions locals. En efecte, per ser dF_P injectiva existeix un entorn obert V de $F(P)$ a $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$ tal que

$$h(F(x_1, \dots, x_k)) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Prenem $g = \pi \circ h$ on $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Llavors

$$g \circ F = \pi \circ h \circ F = id$$

sobre $F^{-1}(V)$ (conjunt antiimatge). Això implica que F és injectiva sobre $F^{-1}(V)$ i per tant $F : F^{-1}(V) \longrightarrow F(F^{-1}(V))$ és bijectiva. Notem que $F(F^{-1}(V)) = V \cap F(U)$.

Llavors és clar que sobre $V \cap F(U)$, $g = F^{-1}$ com es veu aplicant els dos membres d'aquesta igualtat a un punt arbitrari $F(z) \in V \cap F(U)$. $\square$

Exemple 2.1.3 Sigui $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ obert de $\mathbb{R}^2$ i sigui $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Anem a construir el difeomorfisme que 'axafa' el cilindre. Suposem $P = (\pi/2, 1)$. Llavors

$$d\varphi_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podem definir

$$g(u, v, w) = (\cos u, w + \sin u, v)$$

(no podem sumar w a la tercera component perquè el menor 2×2 diferent de zero està format per la primera i tercera component de φ) de manera que

$$dg_{(P,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com el determinant d'aquesta matriu és diferent de zero, g és localment invertible. De fet, resolent el sistema

$$\begin{aligned} x &= \cos u \\ y &= w + \sin u \\ z &= v \end{aligned}$$

obtenim

$$\begin{aligned} u &= \arccos x \\ v &= z \\ w &= y - \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Equivalentment,

$$h(x, y, z) = (\arccos x, z, y - \sqrt{1 - x^2})$$

i queda clar que $h(\varphi(u, v)) = (u, v, 0)$.

2.2 Teorema d'estructura de les submersions locals

En el teorema següent veurem com les submersions són localment projeccions (llevat de difeomorfismes).

Teorema 2.2.1 *Sigui $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, amb U obert i $n \geq m$, una aplicació diferenciable i suposem que en un punt $P \in U$, dF_P és exhaustiva*[8]. *Llavors existeix un obert V de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$, amb $h(V)$ obert de U, i $P \in h(V)$, tal que*

$$F(h(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_m)$$

Demostració. Podem suposar, potser canviant el nom de les coordenades, que

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}\right)_{i,j}(P) \neq 0, \quad i, i = 1, \ldots, m.$$

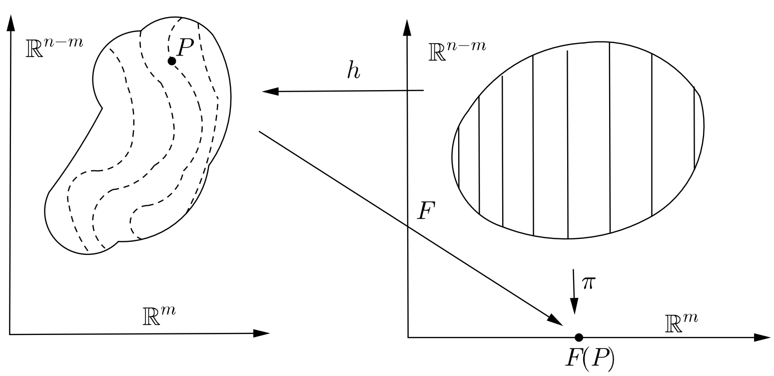
Definim $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ per

$$g(x) = (F(x), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Com

$$dg_P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial x_m} & \frac{\partial F^1}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F^m}{\partial x_m} & \frac{\partial F^m}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \frac{\partial F^m}{\partial x_n} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

tenim que $\det dg_P = \det(\frac{\partial F^i}{\partial x_j})_{i,j}(P) \neq 0$, i per tant, g és un difeomorfisme local. És a dir, existeix un entorn obert W de P en U tal que $V = g(W)$ és obert i $g : W \longrightarrow V$ és un difeomorfisme.



[8] Equivalentment, la matriu $(\frac{\partial F^i}{\partial x_j})_{i,j}$ té rang m.

Llavors $h = g^{-1} : V \longrightarrow h(V)$ és el difeomorfisme buscat ja que

$$F(h(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_m) \tag{2.2}$$

com volíem, ja que

$$x = g(h(x)) = (F(h(x)), *, \ldots, *).$$

on els asteriscs són les $n - m$ últimes components de $h(x)$ que no juguen cap paper, ja que obtenim (2.2) igualant les m primeres components dels dos termes d'aquesta igualtat. $\square$

Observem que hem demostrat que

$$F = \pi \circ h^{-1}$$

on $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. *Tota submersió és localment un difeomorfisme seguit d'una projecció.*

Exemple 2.2.2 Considerem $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Com $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, f és submersió en tot punt diferent de $(0, 0, 0)$. Anem a construir el difeomorfisme que 'axafa' l'esfera. Definim

$$g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

per

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, y, z).$$

Si la primera coordenada de P és diferent de 0, dg_P és isomorfisme.[9] Llavors $h = g^{-1}$ és

$$h(u, v, w) = (\sqrt{u - v^2 - w^2}, v, w).$$

I, clarament,

$$f(h(u, v, w)) = f(\sqrt{u - v^2 - w^2}, v, w) = u.$$

[9] Si fos la segona component de P la que fos diferent de zero hauríem d'agafar

$$g(x, y, z) = (x, x^2 + y^2 + z^2, z).$$

A això ens referíem quan dèiem "canviant si cal el nom de les coordenades" en la demostració del teorema.

Taula resum

T.F.Inversa	*T. Estruc.Immersions*	*T.Estruc.Submersions*
$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$	$F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ k \leq n$	$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ n \geq m$
dF_P isomorfisme	dF_P injectiva	dF_P exhaustiva
F loc. bijectiva	F loc. injectiva	F loc. exhaustiva
difeo	$F = g \circ i,\ g$ difeo	$F = \pi \circ g,\ g$ difeo

Bibliografia

Són moltíssims els textos de Geometria Diferencial que toquen temes relacionats amb el curs. A part de la bibliografia que es va citant al llarg del text podeu consultar també [7], [31],[18], [20], [33],...(vegeu la Bibliografia a la pàgina 455).

Capítol 3

Corbes

3.1 Definicions

Definició 3.1.1 *Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval obert de $\mathbb{R}$. Una* corba parametritzada*, o simplement una* corba*, és una aplicació $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciable de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

El conjunt $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ es diu traça *de γ. El vector $\gamma'(t) = \dfrac{d\gamma(t)}{dt}$ de $\mathbb{R}^3$ es diu* vector tangent *a la corba en el punt $\gamma(t)$. Si $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$, es diu que γ és una* corba regular.

La *recta tangent* a una corba regular γ en el punt $\gamma(t)$ és la recta que passa per aquest punt amb vector director $\gamma'(t)$. Es pot escriure, doncs, com

$$r(u) = \gamma(t) + u\gamma'(t), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Com

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+h)}}{h}$$

i el numerador és el vector director de la recta secant que passa per $\gamma(t)$ i $\gamma(t+h)$ podem dir que *a recta tangent és la recta que s'obté com la posició límit de les rectes secants.*

No s'ha de confondre *corba parametritzada*, que és una aplicació, amb la *traça* que és un conjunt. No obstant, per abús de llenguatge, sovint es parla dels punts de la corba γ per indicar els punts de la traça de γ.

Per exemple, donar dues o tres voltes a una circumferència, són corbes parametritzades diferents, però la traça és la mateixa: la circumferència.

Aquestes corbes es poden escriure, per exemple, com

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & (0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos 2t, \sin 2t, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & (0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos 3t, \sin 3t, 0) \end{array}$$

Observem que el punt $(1,0,0)$ té només una antiimatge per γ_1 i dues per $\gamma(2)$. Anàlogament, l'aplicació

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in (0, 2\pi)$$

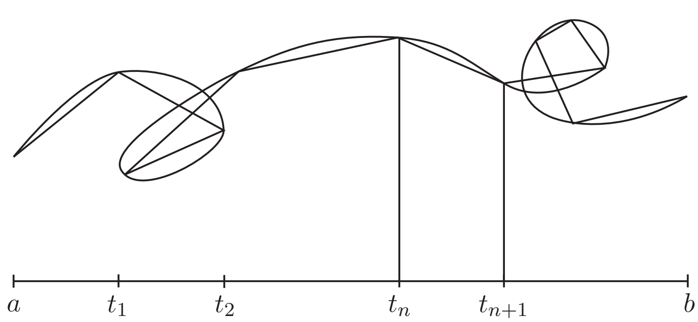
no recobreix tot S^1. Si volem que S^1 sigui la traça d'una corba, segons la definició 3.1.1, podem considerar la aplicació $\gamma(t)$ anterior però hem de fer variar $t \in (0, 2\pi + \epsilon)$.

3.2 Longitud

Abans d'introduir el concepte de longitud d'una corba recordem que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació contínua llavors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

La integral es defineix fent servir particions arbitràries de $[a,b]$ però per a funcions que ja sabem que són integrables Riemann, com ara les contínues, podem considerar (per comoditat) només particions formades per subintervals de la mateixa longitud.



Aproximació poligonal.[1]

[1]Dibuix de Rosa Rodríguez per a un treball de Julià Cufí.

Amb aquesta motivació donem la definició següent.

Definició 3.2.1 *Sigui $[a,b] \subset I$ i sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada. La* longitud *de γ entre a i b es defineix com*

$$L_a^b(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k - \gamma(t_{k-1}))\|,$$

on

$$t_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Ara veurem que aquest límit existeix i que es calcula fent una integral.

Proposició 3.2.2 *Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada i sigui $[a,b] \subset I$. La longitud de γ entre a i b està donada per*

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Demostració. Posem $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i considerem els punts $t_k = a + k\frac{b-a}{n}, k = 1, \ldots, n$. Aplicant el teorema del valor mitjà a $x(t), y(t), z(t)$ tenim

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} \\ &= \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2 + (y'(\eta_k)^2 + z'(\rho_k)^2)} \end{aligned}$$

amb $\xi_k, \eta_k, \rho_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Així

$$\begin{aligned} L_a^b(\gamma) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2 + (y'(\eta_k)^2 + z'(\rho_k)^2)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\sqrt{x'(t_k)^2 + (y'(t_k)^2 + z'(t_k)^2)} \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

La igualtat $(*)$ s'ha de justificar ja que tant ξ_k, η_k, ρ_k com t_k depenen de n. Però la funció de tres variables

$$f(\xi, \eta, \rho) = \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2 + z'(\rho)^2}$$

definida a $[a,b]^3$ és contínua, i per ser $[a,b]^3$ compacte, uniformement contínua. Això vol dir que donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$, tal que si $p, q \in [a,b]^3$ són tals que $\|p - q\| < \delta$ llavors

$$|f(p) - f(q)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

I el que volem veure és que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}(f(p_k) - f(q_k) = 0,$$

amb $p_k = (\xi_k, \eta_k, \rho_k)$ i $q_k = (t_k, t_k.t_k)$.

Prenent n suficientment gran com perquè

$$\frac{b-a}{n}\sqrt{3} < \delta$$

tenim que

$$\|p_k - q_k\| = \sqrt{(\xi_k - t_k)^2 + (\eta_k - t_k)^2 + (\rho_k - t_k)^2} < \sqrt{3\left(\frac{b-a}{n}\right)^2} < \delta,$$

i per tant, per la continuïtat uniforme,

$$|f(p_k) - f(q_k)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Així

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}(f(p_k) - f(q_k))\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\big|(f(p_k) - f(q_k))\big| < \epsilon. \quad \square$$

Pel comentari que hem fet sobre la definició d'integral per a funcions contínues, si en lloc d'aproximar la corba per poligonals construïdes a partir de divisons uniformes de $[a,b]$ l'aproximem per poligonals arbitràries, el resultat serà el mateix de manera que podem dir que *la longitud d'una corba és el límit de les longituds de les poligonals que l'aproximen.*

Exemple 3.2.3 *Trobeu la longitud d'una volta d'hèlix.*

Solució. L'hèlix d'amplada a i pas de rosca b és la corba

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Ens demanen la longitud d'aquesta corba entre $\gamma(0)$ i $\gamma(2\pi)$. Com $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ tenim que

$$L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \quad \square$$

3.3 Canvi de paràmetre

Definició 3.3.1 *Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals oberts de $\mathbb{R}$ i siguin $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dues corbes parametritzades.*

Direm que $\tilde{\gamma}$ és una reparametrització *de γ si existeix un difeomorfisme $h : J \longrightarrow I$ tal que*

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ h.$$

Tindrem doncs, el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{R}^3 \\ J \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\tilde{\gamma} = \gamma \circ h"'] & \end{tikzcd}$$

Es diu que h és un canvi de paràmetres. Evidentment, canviant h per h^{-1}, si $\tilde{\gamma}$ és una reparametrització de γ, γ és una reparametrització de $\tilde{\gamma}$.

Si denotem per s un punt arbitrari de J i per t un punt arbitrari de I és habitual escriure h com

$$t = h(s),$$

o, per simplificar,

$$t = t(s).$$

Llavors $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s)) = \gamma(t)$, expressió que posa de manifest que tenim dues corbes amb la mateixa traça, una parametritzada per t i l'altra per s.

A la pràctica, doncs, si tenim una corba $\gamma(t)$, fer un canvi de paràmetre vol dir canviar t per una funció $t(s)$, que ha de ser un difeomorfisme, de manera que tindrem una nova corba $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ amb la mateixa traça que $\gamma(t)$.

Exemple 3.3.2 Sigui $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la corba de $\mathbb{R}^2$ donada per

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t).$$

La podem reparametritzar introduint l'aplicació $h : [0, 2\pi R] \longrightarrow [0, 2\pi]$ donada per $h(s) = s/R$, que és un difeomorfisme. Llavors la corba $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi R] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ h,$$

o equivalentment,

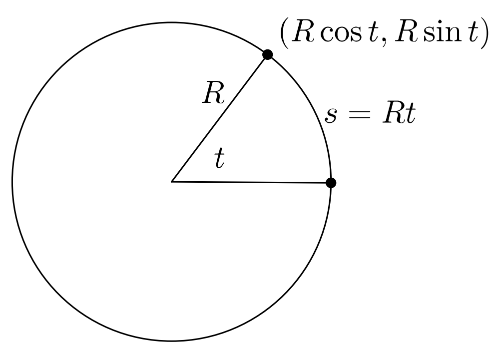
$$\tilde{\gamma}(s) = (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R})$$

és una reparametrització de γ.

Denotant $t = h(s) = t(s) = s/R$ tenim

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t).$$

Observem que t representa un angle i s una longitud.



Canvi de paràmetre

Exemple 3.3.3 (Canvi de sentit) Donada una corba $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ podem reparametritzar-la de manera que en lloc d'anar de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ anem de $\gamma(b)$ a $\gamma(a)$. Només hem de definir $h : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ per

$$h(s) = -s + a + b$$

i considerar $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ és a dir, $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$, amb $t = -s + a + b$.

3.4 Paràmetre arc

Parametritzar una corba per l'arc vol dir assignar a cada punt de la corba la longitud de la corba entre aquest punt i un punt donat de la corba.

Definició 3.4.1 *Direm que una corba* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *està* parametritzada per l'arc *quan*

$$\|\gamma'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

Si fixem ara un punt $a \in I$ i volem calcular la longitud de la corba entre el punt de paràmetre a i el punt de paràmetre b només hem de calcular la integral de la norma del vector tangent, i per tant

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = b - a.$$

És a dir, que per saber la longitud d'una corba parametritzada per l'arc entre dos dels seus punts només hem de restar les coordenades d'aquests punts.

Canvi de paràmetre arc

Fixat un punt $\gamma(a)$ d'una corba $\gamma(t)$ parametritzada per l'arc, podem fer el canvi de variable $t = t(s) = h(s) = s+a$, de manera que $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ és una reparametrització de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(a)$. El punt que tenia coordenada a ara té coordenada 0 i és doncs l'origen a partir del qual es mesura la longitud de la corba.

Amb aquesta parametrització el punt $\tilde{\gamma}(s)$ està a distància s de $\tilde{\gamma}(0)$ ja que

$$\begin{aligned} L_0^s(\tilde{\gamma}) &= \int_0^s \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds = \int_0^s \|\gamma'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}\| ds \\ &= \int_0^s \|\gamma'(t(s))\| \cdot |\frac{dt}{ds}| ds = \int_0^s \|\gamma'(t(s))\| ds = s. \end{aligned}$$

És evident que aquest càlcul val exactament igual si en lloc de fer el canvi de variable $t = s + a$ fem qualsevol canvi de variable del tipus

$$t = \pm s + c,$$

amb c constant. Com que el paràmetre arc mesura la longitud de la corba a partir d'un punt aquest canvi correspon a començar a comptar les longituds a partir d'un o altre punt (només haurem de sumar una constant a les longituds) i a recórrer la corba en sentit igual o contrari (canviarem de signe el paràmetre). No podem trobar altres canvis entre paràmetres arc més que aquests que hem comentat, com diu la proposició següent.

Proposició 3.4.2 *Si s i t són paràmetres arc de $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ llavors*

$$s = \pm t + c,$$

on c és una constant.

Demostració. Precisem l'enunciat. Denotem per t la coordenada dels punts de I, de manera que la traça de γ són els punts $\gamma(t)$, i suposem

$$\|\frac{d\gamma(t)}{dt}\| = 1.$$

Suposem $h : J \longrightarrow I$ difeomorfisme. Denotem per s la coordenada dels punts de J, de manera que aquest difeomorfisme d'escriu

$$t = h(s) = t(s).$$

Suposem que la corba $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$, reparametrització de γ, està també parametritzada per l'arc, és a dir,

$$\|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\| = 1.$$

Aplicant la regla de la cadena tenim,

$$1 = \|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\| = \|\frac{d\gamma(t(s))}{ds}\| = \|\frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}\| = \|\frac{d\gamma}{dt}(t(s))\| \cdot |\frac{dt}{ds}| = |\frac{dt}{ds}|.$$

Això vol dir que la derivada de t respecte de s és ± 1 i per tant $t = \pm s + c$, $\square$.

Intuïtivament és clar que si coneixem el paràmetre d'un punt d'una corba coneixem la longitud de la corba entre aquest punt i un punt donat, i recíprocament si coneixem aquesta longitud coneixem el paràmetre. Concretament tenim el resultat següent.

Proposició 3.4.3 *Tota corba regular es pot reparametritzar per l'arc.*

Demostració. Donada $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definim l'*aplicació longitud des de* $a \in I$, $L : I \to \mathbb{R}$, per

$$L(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

Amb la notació de la secció anterior tenim, doncs, $L(t) = L_a^t(\gamma)$.

Observem que $L'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, $\forall t \in I$, de manera que $L : I \longrightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació diferenciable creixent. Aquí és on hem utilitzat la hipòtesi de regularitat. Això vol dir que l'aplicació

$$L : I \longrightarrow L(I)$$

és bijectiva. Denotem $J = L(I)$, que és també un interval obert de $\mathbb{R}$. Pel teorema de la funció inversa, aquesta aplicació té una inversa

$$\begin{array}{rrcl} L^{-1}: & J & \longrightarrow & I \\ & s & \mapsto & t \end{array}$$

que és també diferenciable. Aquesta aplicació és el canvi de coordenades buscat. En efecte, denotem-la, com és habitual, per $t = t(s) = L^{-1}(s)$.

Recordem que, pel teorema de la funció inversa,

$$\frac{dt}{ds}(s_0) = \frac{dL^{-1}}{ds}(s_0) = \frac{1}{\frac{dL}{dt}(t_0)}$$

amb $t_0 = t(s_0)$. Observem que $t(0) = L^{-1}(0) = a$, és a dir, el punt que tenia coordenada a ara té coordenada 0.

La corba $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ és una reparametrització de γ per l'arc. En efecte,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}'(s)\| &= \|\frac{d\,\tilde{\gamma}(s)}{ds}\| = \|\frac{d\,\gamma(t(s))}{ds}\| = \|\frac{d\,\gamma}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}\| \\ &= \|\frac{d\,\gamma}{dt}(t(s))\| \cdot |\frac{dt}{ds}| = \frac{dL}{dt}(t(s)) \cdot \frac{1}{\left|\frac{dL}{dt}(t(s))\right|} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Observem que si, a l'anterior demostració, en lloc de considerar la funció

$$L(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$$

haguéssim considerat

$$L(t) = \pm \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt + c$$

tots els arguments valen igualment, d'acord amb la Proposició 3.4.2.

En particular, el que sempre és cert és que si s és un paràmetre arc per a $\gamma(t)$ llavors

$$|\frac{ds}{dt}| = \|\gamma'(t)\|.$$

La longitud no depèn de la parametrització.

Cal veure que que la definició que hem donat de longitud d'una corba entre dos dels seus punts, tot i que ho hem fet utilitzant la seva parametrització, no depèn en realitat d'aquesta parametrització. Farem exactament el mateix argument que a l'exemple 3.3.3.

Això vol dir que si volem calcular la longitud d'una corba $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ entre els punts $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ podem fer la integral

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

o bé, considerar qualsevol reparametrització

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

on $h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ és un difeomorfisme, i calcular la longitud d'aquesta reparametrització entre els punts corresponents. Observem que $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(h(c)) = \gamma(a)$ i $\tilde{\gamma}(d) = \gamma(h(d)) = \gamma(b)$ si h és creixent o $\tilde{\gamma}(c) = \gamma(h(c)) = \gamma(b)$ i $\tilde{\gamma}(d) = \gamma(h(d)) = \gamma(a)$ si h és decreixent.

En qualsevol cas, la longitud de $\tilde{\gamma}$ entre $\tilde{\gamma}(c)$ i $\tilde{\gamma}(d)$

$$L_c^d(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds,$$

Pel teorema del canvi de variable,

$$\begin{aligned} L_c^d(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds = \int_c^d \|(\gamma \circ h)'(s)\| ds \\ &= \int_c^d \|\gamma'(h(s)) \cdot h'(s)\| ds = \int_c^d \|\gamma'(h(s))\| \cdot |h'(s)| ds \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L_a^b(\gamma) \end{aligned}$$

3.5 Definició de pla osculador, pla normal i pla rectificant

Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$. Suposem a més que els vectors $\gamma'(s)$ i $\gamma''(s)$ són linealment independents $\forall s \in I$.

Llavors, en cada punt $\gamma(s)$ de γ tenim definits tres plans que jugaran un paper important en l'estudi de corbes.

- **Pla osculador**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director generat per $\gamma'(s)$ i $\gamma''(s)$.
- **Pla normal**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director igual a l'ortogonal de $\gamma'(s)$.
- **Pla rectificant**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director generat per $\gamma'(s)$ i $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)$.

Quan la corba està parametritzada per l'arc denotem $T(s) = \gamma'(s)$, i diem que és el **vector tangent** unitari a la corba en el punt $\gamma(s)$. Com $\|T(s)\| = 1$, derivant l'expressió

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1$$

obtenim

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = 0.$$

Així doncs el vector $\gamma''(s) = T'(s)$ és ortogonal a $T(s)$. Com estem fent la hipòtesi de que és diferent de zero (linealment independent amb $T(s)$), podem definir

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$$

que és un vector unitari anomenat **vector normal principal** a la corba en el punt $\gamma(s)$.

La norma de $T'(s)$ és una funció que es denota per

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

i es diu que és la **curvatura** de γ en el punt $\gamma(s)$.

Definició 3.5.1 (Curvatura) *Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc. La* curvatura *de γ és la funció $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T'(s) = k(s)N(s),$$

on s és el paràmetre arc de γ.

Finalment el producte exterior de $T(s)$ per $N(s)$ es denota per

$$B(s) = T(s) \wedge N(s),$$

i es diu que és el **vector binormal** a la corba en el punt $\gamma(s)$.

La referència ortonormal afí $\{\gamma(s); (T(s), N(s), B(s))\}$ es diu **referència de Frenet** de la corba en el punt $\gamma(s)$.

Així doncs, si $\gamma(s)$ és una corba parametritzada per l'arc, amb $k(s) \neq 0$, tenim

- **Vectors tangent T, normal principal N i binormal B**. $T(s) = \gamma'(s)$, $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$, $B(s) = T(s) \wedge N(s)$.
- **Referència de Frenet**. $\{\gamma(s); (T(s), N(s), B(s))\}$.
- **Pla osculador**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director generat per $T(s)$ i $N(s)$.
- **Pla normal**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director generat per $N(s)$ i $B(s)$.
- **Pla rectificant**. És el pla que passa per $\gamma(s)$ amb espai vectorial director generat per $T(s)$ i $B(s)$.
- **Curvatura**. És la norma de la derivada de la tangent respecte del paràmetre arc, $k(s) = \|T'(s)\|$.

- **Radi de curvatura**. És l'invers de la curvatura, $\rho(s) = 1/k(s)$. Òbviament només està definit en punts de curvatura diferent de zero.

- **Cercle osculador**. És el cercle del pla osculador amb centre el punt $\gamma(s) + \rho(s)N(s)$ i radi $\rho(s)$, on $\rho(s)$ és el radi de curvatura. Podem dir, doncs, també que *la curvatura és l'invers del radi del cercle osculador.*

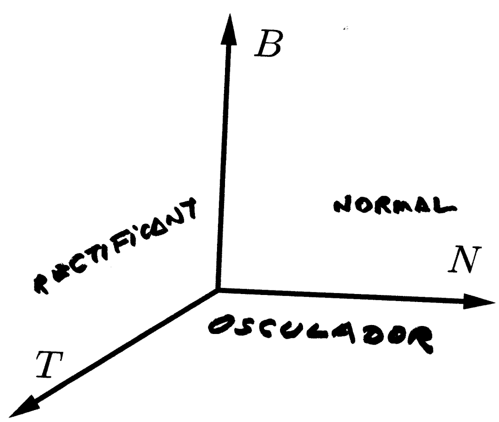


Figura 3.1: Rectificant, Osculador, Normal

3.6 Contacte

Definició 3.6.1 *Siguin*[2] $\alpha(s)$ *i* $\beta(t)$ *dues corbes parametritzades per l'arc. Suposem que tenen un punt en comú,* $P = \alpha(s_0) = \beta(t_0)$.

Diem que aquestes corbes tenen un contacte d'ordre m a P si

$$\frac{d^r\alpha(s)}{ds^r}_{|s=s_0} = \frac{d^r\beta(t)}{dt^r}_{|t=t_0}, \quad r = 1, \ldots, m$$

i

$$\frac{d^{m+1}\alpha(s)}{ds^{m+1}}_{|s=s_0} \neq \frac{d^{m+1}\beta(t)}{ds^{m+1}}_{|t=t_0}$$

[2]Veure [29].

Així, doncs, quan parlem de contacte entre corbes pressuposem que prèviament les parametritzem per l'arc. Però no és la única manera de procedir com es veu a [29].

Contacte de la recta tangent

Aquest concepte de contacte ens dóna una nova caracterització de la recta tangent.

Proposició 3.6.2 *Sigui γ una corba regular parametritzada per l'arc. La recta tangent en un punt $\gamma(s)$, on $\gamma''(s) \neq 0$, és la recta que té contacte* 1 *amb la corba en aquest punt.*

Demostració. Considerem totes les rectes que passen pel punt $\gamma(s)$. Aquestes rectes són de la forma

$$r(t) = \gamma(s) + tv, \quad t \in \mathbb{R}$$

on v és un vector arbitrari que agafem amb $\|v\| = 1$ per tal de que $r(t)$ estigui parametritzada per l'arc. Si imposem que $r(t)$ tingui contacte almenys 1 amb $\gamma(s)$ ha de ser

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= r(0) \\ \gamma'(s) &= r'(0) = v, \end{aligned}$$

és a dir, el vector director de la recta és el vector tangent de la corba. Per que aquest contacte sigui exactament d'ordre 2 les derivades segones en el punt han de ser diferents, i com que la derivada de v és zero, ja que v és constant i $\gamma''(0) \neq 0$ per hipòtesi, aquestes derivades són diferents i hem acabat. $\square$.

Contacte del cercle osculador

Proposició 3.6.3 *Sigui $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{R}^3$ que té contacte almenys* 2 *amb una corba γ en un punt P de la seva traça. Llavors $\mathcal{C}$ és el cercle osculador de γ en P.*

Demostració. Suposem γ parametritzada per l'arc amb $P = \gamma(0)$. Una parametrització per l'arc d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre un punt arbitrari Q i radi arbitrari r és

$$\beta(t) = Q + r(\cos(\frac{t}{r})\, e_1 + \sin(\frac{t}{r})\, e_2)$$

on e_1, e_2 és una base ortonormal del pla que conté el cercle.

Perquè γ i $\mathcal{C}$ tinguin un contacte d'ordre almenys 2 en P ha de ser (canviant si cal l'origen d'angles en $\mathcal{C}$)[3]

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \beta(0) = Q + re_1 \\ \gamma'(0) &= \beta'(0) = e_2 \\ \gamma''(0) &= \beta''(0) = -\frac{1}{r}e_1\end{aligned}$$

Denotant $T = T(0), N = N(0), B = B(0)$ la referència de Frenet en P, $k = k(0)$ la curvatura de γ en P i $\rho = \rho(0)$ el radi de curvatura de γ en P, aquestes equacions s'escriuen com

$$\begin{aligned}P &= Q + re_1 \\ T &= e_2 \\ kN &= -\frac{1}{r}e_1\end{aligned}$$

Com k i r són positius la tercera equació ens diu que $e_1 = -N$ i $k = \frac{1}{r}$, és a dir, $\rho = r$. En particular, el pla $\langle e_1, e_2\rangle$ del cercle, és el pla osculador i, per la primera equació,

$$Q = P + rN = P + \rho N,$$

i per tant, $\mathcal{C}$ és el cercle osculador.

3.7 Curvatura de corbes planes

Veurem que la curvatura mesura la velocitat en que gira la tangent quan la corba es recorre amb velocitat 1. Com que l'espai s és igual a la velocitat pel temps, recorrer la corba amb velocitat 1 permet pensar el paràmetre arc s com el temps i les derivades respecte s com velocitats.

Sigui $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Denotem $\alpha(s)$ l'angle entre el vector tangent i l'eix se les $x's$ és a dir,

$$T(s) \cdot (1, 0) = \cos\alpha(s).$$

[3] Refeu els càlculs suposant $P = \beta(t_0)$ en lloc de $P = \beta(0)$.

Derivant,

$$k(s)N(s) \cdot (1,0) = -\sin\alpha(s) \cdot \alpha'(s)$$

i per tant, prenent mòduls,

$$k(s) \cdot |\cos\beta(s)| = |-\sin\alpha(s)| \cdot |\alpha'(s)|.$$

on $\beta(s)$ és l'angle entre $N(s)$ i $(1,0)$, per tant $\beta(s) = \frac{\pi}{2} \pm \alpha(s)$ i $|\cos\beta(s)| = |\sin\alpha(s)|$, així tenim

$$k(s) = |\alpha'(s)|.$$

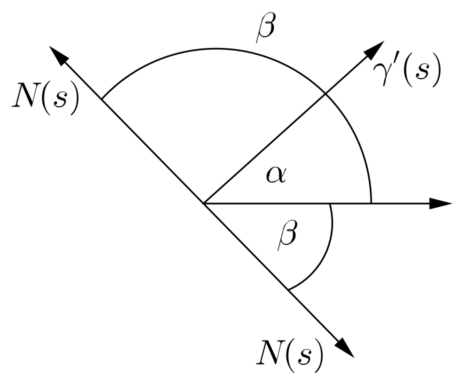


Figura 3.2: Posició relativa de la Normal

És a dir, *la curvatura és el valor absolut de la derivada, respecte del paràmetre arc, de l'angle que forma la tangent amb una direcció fixada.*

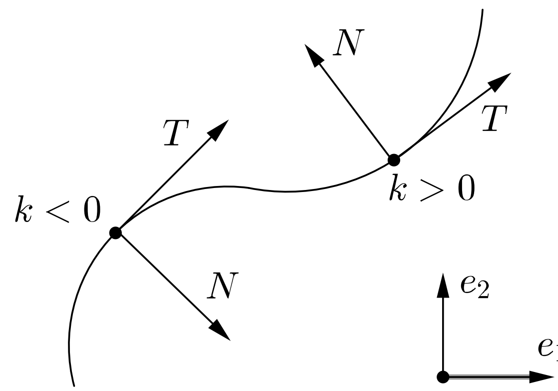
Curvatura amb signe

Per motius que es veuran més endavant, sobre tot quan estudiem les curvatures principals d'una superfície, convé assignar un signe a la curvatura de les corbes planes. Això no es pot fer per a corbes de l'espai.

Orientem $\mathbb{R}^2$ dient que la base canònica $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ és positiva.

Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba parametritzada per l'arc. Definim la curvatura amb signe de γ en un punt $\gamma(s)$ per

$$\kappa(s) = \det(T(s), T'(s)).$$



El determinant de dos vectors de $\mathbb{R}^2$ vol dir el determinant 2×2 que té per columnes les components d'aquests vectors respecte de la base canònica.

Com $T'(s) = k(s)N(s)$, tenim

$$\kappa(s) = k(s) \det(T(s), N(s)) = \pm k(s)$$

on val el signe més o menys segons que la base ortonormal $(T(s), N(s))$ sigui positiva o negativa.

3.8 Torsió. Fórmules de Frenet

Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc i sigui $\{\gamma(s); (T(s), N(s), B(s))\}$ la seva *referència de Frenet*.

Derivant les expressions

$$\langle B(s), B(s) \rangle = 1; \quad \langle B(s), T(s) \rangle = 0$$

obtenim que $B'(s)$ és ortogonal a $B(s)$ i a $T(s)$, per tant, té la direcció de $N(s)$. Podem escriure doncs

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

per a una certa funció $\tau(s)$ que anomenem *torsió*.

Definició 3.8.1 (Torsió) *Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc. La* torsió *de γ és la funció $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$B'(s) = \tau(s)N(s),$$

on s és el paràmetre arc de γ.

Derivant $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$ veiem que $N'(s)$ és ortogonal a $N(s)$ i podem escriure doncs
$$N'(s) = a(s)T(s) + b(s)B(s)$$
per a unes certes funcions $a(s), b(s)$ que podem determinar fàcilment multiplicant aquesta igualtat per $T(s)$ i $B(s)$ respectivament.

Obtenim
$$a(s) = \langle N'(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), T'(s)\rangle = -k(s)$$
i
$$b(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle = -\langle N(s), B'(s)\rangle = -\tau(s).$$

Resumint, tenim les tres fórmules
$$\boxed{\begin{array}{rcc} T'(s) & = & k(s)N(s) \\ N'(s) & = & -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) & = & \tau(s)N(s) \end{array}}$$
anomenades fórmules de Frenet.

Es poden escriure en forma matricial
$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$
on es veu clarament que la matriu és antisimètrica. També es poden escriure utilitzant el vector de Darboux, vegeu [29].

La curvatura i la torsió no depenen del paràmetre

Si $\gamma(t)$ està parametritzada per l'arc i la reparametritzem per un segon paràmetre arc s, sabem que la relació entre t i s és de la forma
$$t = t(s) = \pm s + c.$$
Si denotem $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$, llavors, per la regla de la cadena,
$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}(s) & = & \pm T(t(s)) \\ \tilde{k}(s)\tilde{N}(s) = \dfrac{d\tilde{T}(s)}{ds} & = & \pm\dfrac{dT}{dt}(t(s))\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dT}{dt}(t(s)) = k(t(s))N(t(s)) \end{array}$$

Per tant,

$$\tilde{k}(s) = k(t(s)), \quad \tilde{N}(s) = N(t(s)),$$

Així

$$\tilde{B}(s) = \tilde{T}(s) \wedge \tilde{N}(s) = \pm T(t(s)) \wedge N(t(s)) = \pm B(t(s)).$$

Resumint,

$$\begin{array}{lcl} \tilde{T}(s) & = \pm & T(t(s)) \\ \tilde{N}(s) & = & N(t(s)) \\ \tilde{B}(s) & = \pm & B(t(s)) \end{array}$$

amb signe "$+$" si $t(s) = s + c$ i signe "$-$" si $t(s) = -s + c$.

Novament per la regla de la cadena

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{d\tilde{T}(s)}{ds} & = & \pm \dfrac{dT}{dt}(t(s))\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dT}{dt}(t(s)), \\ \dfrac{d\tilde{N}(s)}{ds} & = & \dfrac{dN}{dt}(t(s))\dfrac{dt}{ds} = \pm \dfrac{dN}{dt}(t(s)), \\ \dfrac{d\tilde{B}(s)}{ds} & = & \pm \dfrac{dB}{dt}(t(s))\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dB}{dt}(t(s)), \end{array}$$

Com la torsió és la relació entre la derivada de la binormal i la normal, i acabem de veure que la derivada de la binormal de $\tilde{\gamma}$ coincideix amb la derivada de la binormal de γ i la normal de $\tilde{\gamma}$ coincideix amb la normal de γ ha de ser

$$\tilde{\tau}(s) = \tau(t(s)).$$

Equivalentment,

$$\tau(t(s))N(t(s)) = \frac{dB}{dt}(t(s)) = \frac{d\tilde{B}(s)}{ds} = \tilde{\tau}(s)\tilde{N}(s) = \tilde{\tau}(s)N(t(s)).$$

Nota. Una manera equivalent de procedir és la següent.

Definició 3.8.2 (Curvatura i Torsió) *Sigui $\gamma(t)$ una corba no necessàriament parametritzada per l'arc. Sigui $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ una reparametrització* *per l'arc de $\gamma(t)$. La curvatura $k(t)$ i la torsió $\tau(t)$ de $\gamma(t)$ en el punt de paràmetre t, són per definició la curvatura $\tilde{k}(s)$ i la torsió $\tilde{\tau}(s)$de $\tilde{\gamma}(s)$ en el punt de paràmetre s tal que $t = t(s)$, és a dir,*

$$k(t) = \tilde{k}(s), \quad \tau(t) = \tilde{\tau}(s); \quad t = t(s).$$

Equivalentment, si pensem que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$, on $h : J \longrightarrow I$ és el difeomorfisme que ens dóna el canvi de variable (I interval de definició de γ), estem dient simplement que

$$\begin{array}{rcl} k & = & \tilde{k} \circ h^{-1} \\ \tau & = & \tilde{\tau} \circ h^{-1} \end{array}$$

Càlcul de la curvatura i la torsió quan la corba no està parametritzada per l'arc

Sigui $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per t. Sabem que la podem reparametritzar per l'arc, és a dir, existeix un difeomorfime $t = t(s)$ tal que $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ està parametritzada per l'arc. I sabem que, per definició,

$$k(t) = \tilde{k}(s), \quad t = t(s).$$

Derivant[4]

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\gamma}'(s) & = & \tilde{T}(s) = \gamma'(t(s)) \cdot t'(s) \\ \tilde{\gamma}''(s) & = & \tilde{k}(s)\tilde{N}(s) = \gamma''(t(s)) \cdot t'(s)^2 + \gamma'(t(s))t''(s) \end{array} \tag{3.1}$$

Recordem que

$$s'(t) = \pm\|\gamma'(t)\|,$$

i que, per la regla de la cadena

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\pm\|\gamma'(t)\|}, \quad t = t(s).$$

Multiplicant vectorialment les equacions (3.1) i prenent la norma del resultat tenim

$$\tilde{k}(s) = |t'(s)|^3 \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|, \quad t = t(s).$$

[4]La notació $\tilde{\gamma}'(s_0)$ vol dir derivada de $\tilde{\gamma}$ respecte de s en el punt s_0, i la notació $\gamma'(t_0)$ vol dir derivada de γ respecte de t en el punt t_0.

Com que la curvatura $k(t)$ de γ en el punt $\gamma(t)$, és per definició, la curvatura $\tilde{k}(s)$ de $\tilde{\gamma}$ en el punt s tal que $t = t(s)$, tenim que

$$k(t) = \tilde{k}(s) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad t = t(s),$$

Resumint,

$$\boxed{k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}}$$

Observem que aquesta fórmula és una nova demostració de que la curvatura no depèn de quin paràmetre arc hem elegit (en particular del sentit en que es recorre la corba), com ja sabíem.

Nota. Una manera equivalent de procedir és la següent. Sigui $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ una parametrització per l'arc de γ.

Observem que

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}' &= \gamma' \circ h \cdot h' \\ \tilde{\gamma}'' &= \gamma'' \circ h \cdot h'^2 + \gamma' \circ h \cdot h'' \end{aligned}$$

En particular

$$1 = \|\tilde{\gamma}'\| = \|\gamma' \circ h\| \cdot |h'|.$$

Així

$$\tilde{k} = \|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\| = \|\gamma' \wedge \gamma''\| \circ h \cdot |h'|^3 = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \circ h$$

Com $k = \tilde{k} \circ h^1$ obtenim

$$k = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

Per calcular la torsió derivem la segona de les fórmules (3.1) però no ens preocupem d'escriure sumands que tinguin la direcció de $\tilde{T}(s)$ o de $\tilde{N}(s)$ ja que després multiplicarem escalarment per un vector múltiple de $\tilde{B}(s)$. Les fórmules (3.1) ens diuen que $\gamma''(t(s))$ és combinació lineal de $\tilde{T}(s)$ i $\tilde{N}(s)$, i per tant, tampoc l'escriurem.

Obtenim (posant com abans $t = t(s)$)

$$\begin{aligned}\tilde{k}(s)(-\tilde{\tau}(s)\tilde{B}(s)) &= \gamma'''(t)t'(s)^3 + \text{combinació lineal de } \tilde{T}(s) \text{ i } \tilde{N}(s)\\ &= \gamma'''(t)t'(s)^3 + \text{combinació lineal de } \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s).\end{aligned}$$

Multiplicant per $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ i observant que les fórmules (3.1) ens diuen que

$$\tilde{k}(s)\tilde{B}(s) = t'(s)^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t),$$

tenim

$$\begin{aligned}t'(s)^3\langle\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle &= -\tilde{k}(s)\tilde{\tau}(s)\langle\tilde{B}(s), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle\\ &= -\tilde{\tau}(s)t'(s)^3\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2.\end{aligned}$$

Llavors, com que la torsió de γ en el punt $\gamma(t)$, $\tau(t)$, és per definició, la torsió de $\tilde{\gamma}$ en el punt s tal que $t = t(s)$, $\tilde{\tau}(s)$, tenim

$$\boxed{\tau(t) = -\frac{\langle\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}}$$

Nota. Una manera equivalent de procedir és la següent.

$$\begin{array}{rclcl}\tilde{\gamma}' &=& \gamma' \cdot t' &=& \tilde{T}\\ \tilde{\gamma}'' &=& \gamma'' \cdot t'^2 + \gamma' \cdot t'' &=& \tilde{k}\tilde{N}\\ \tilde{\gamma}''' &=& \gamma''' \cdot t'^3 + \text{termes en } \gamma' \text{ i } \gamma'' &=& -\tilde{k}\tilde{\tau}\tilde{B} + \text{termes en } \tilde{T} \text{ i } \tilde{N}\end{array}$$

Prenent determinants,

$$\det(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''') = -k^2\tau = t'^6 \det(\gamma', \gamma'', \gamma'')$$

i obtenim el resultat.[5]

Observem que aquesta fórmula és una nova demostració de que la torsió no depèn de quin paràmetre arc hem elegit (en particular del sentit en que es recorre la corba), com ja sabíem.

[5] Observem que $\det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w\rangle$, $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Curvatura de corbes de l'espai com derivada d'un angle

En el pla conèixer l'angle de la tangent amb una direcció donada ens determina la tangent però a l'espai no, de manera que el resultat de la secció anterior 3.7 no es generalitza fàcilment a l'espai.

L'angle entre *dos vectors tangents consecutius* de la corba $\gamma(s)$, vol dir l'angle entre $\gamma'(s)$ i $\gamma'(s+\Delta s)$, on Δs és un petit increment del paràmetre arc s. Per facilitar la notació, fixem $s = 0$ i denotem Δs únicament com s.

Proposició 3.8.3 *Sigui $\gamma(s)$ una corba parametritzada per l'arc i sigui $\alpha(s)$ l'angle entre $\gamma'(0)$ i $\gamma'(s)$ (angle entre dos plans normals "consecutius"). Llavors la curvatura $k(0)$ de $\gamma(s)$ en $s = 0$, és*

$$k(0) = |\alpha'(0)|.$$

Demostració. Derivant la igualtat

$$\gamma'(0) \cdot \gamma'(s) = \cos\alpha(s),$$

tenim

$$\gamma'(0) \cdot \gamma''(s) = \gamma'(0) \cdot k(s)N(s) = -\sin\alpha(s)\alpha'(s),$$

on $N(s)$ és el vector normal principal de $\gamma(s)$.

Fins aquí tot és igual que en el cas de les corbes planes, però ara tenim el problema de que els vectors $\gamma'(0), \gamma'(s), N(s)$ no estaran en general en el mateix pla i no podem dir que la seva suma o diferència sigui $\frac{\pi}{2}$.

No obstant, si ara aïllem $\alpha'(s)$ i fem $s \to 0$ obtenim

$$\alpha'(0) \;=\; \lim_{s\to 0} \alpha'(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma'(0) \cdot k(s)N(s)}{-\sin\alpha(s)}$$

una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$. Per resoldre aquesta indeterminació apliquem l'Hôpital i tenim

$$\alpha'(0) \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{\gamma'(0) \cdot (k(s)(-k(s)\gamma'(s) + \tau(s)B(s)) + k'(s)N(s))}{-\cos\alpha(s)\alpha'(s)} = \frac{k(0)^2}{\alpha'(0)}.$$

Per tant,

$$k(0) = |\alpha'(0)|.$$

És a dir, *la curvatura en un punt és el valor absolut de la derivada respecte del paràmetre arc, en aquest punt, de l'angle que forma la tangent amb la tangent en el punt.* És la velocitat amb que "gira" el pla normal.

Però no podem assegurar que $k(s) = |\alpha'(s)|$ encara que s sigui petit, si $s > 0$.

Així, a diferència del cas de corbes planes, no hi ha una funció angle tal que la derivada en cada punt doni la curvatura en aquell punt (vegeu l'exemple 3.8.5).

Per això la integral de la curvatura al llarg d'una corba tancada i simple no és 2π, com passa en les corbes convexes del pla, sinó un valor superior. Concretament

Teorema 3.8.4 (Fenchel) *Sigui γ una corba tancada*[6] *i simple. Llavors*

$$\int_\gamma k(s)ds \geq 2\pi,$$

i val el signe igual si i només si la corba és plana i convexa.

Exemple 3.8.5 *Estudieu la curvatura com derivada d'un angle a*

$$\gamma(s) = (\frac{\sqrt{2+s^2}}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \arg\sinh(\frac{s}{\sqrt{2}})).$$

Hem agafat aquesta parametrització una mica complicada per tal de que estigui parametritzada per l'arc. En efecte,

$$\|\gamma'(s)\| = \|(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s}{\sqrt{2+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2+s^2}})\| = 1.$$

La curvatura és

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2+s^2}.$$

Si diem $\alpha(s)$ l'angle entre $\gamma'(0)$ i $\gamma'(s)$ tenim

$$\gamma'(0)\cdot\gamma'(s) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\gamma'(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2+s^2}} = \cos\alpha(s).$$

Derivant

$$-\frac{s}{\sqrt{2}(2+s^2)^{3/2}} = -\sin\alpha(s)\alpha'(s)$$

[6] Una corba tancada és una aplicació diferenciable de S^1 a $\mathbb{R}^3$; també es pot pensar com una aplicació de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$, L-periòdica (si està parametritzada per l'arc aquesta L és la longitud); simple vol dir sense autointerseccions.

i per tant

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \frac{s}{\sqrt{2}(2+s^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2+s^2}}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}s}{(2+s^2)(4+3s^2-2\sqrt{2}\sqrt{2+s^2})}\end{aligned}$$

que és clarament diferent de $k(s) = 1/(2+s^2)$, però en canvi tenint en compte que $\sqrt{2+s^2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}s^2 + o(s^2)$, $s \to 0$, tenim

$$\alpha'(0) = \lim_{s\to 0}\alpha'(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\sqrt{2}s}{(2+s^2)\sqrt{2s^2}} = \frac{1}{2} = k(0).$$

3.9 Expressió canònica local

Desenvolupem per Taylor la funció vectorial $\gamma(s)$, al voltant de $s = 0$, essent s el paràmetre arc.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + \dots$$

Els punts suspensius denoten, com és habitual, termes de grau superior a tres en s. També s'escriu utilitzant la notació "o petita" com

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + o(s^3), \quad s \to 0.$$

Recordem que la notació "$o(s^3), s \to 0$," que es llegeix dient que tenim una funció "o petita" de s^3 vol dir que

$$\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s)}{\gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0)} = 1,$$

que simplifiquem escrivint

$$\lim_{s\to 0}\frac{o(s^3)}{s^3} = 0.$$

Podem pensar que són els termes de Taylor de grau ≥ 4 en s.

Com $\gamma''(0) = kN$, on k i N són la curvatura i la normal principal de la corba en $s = 0$, i $\gamma'''(0) = k'(0)N + k(-kT - \tau B)$, on $T = \gamma'(0)$, i τ i B són la torsió i la binormal de la corba en $s = 0$, substituint tenim

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) &= \gamma(0) + sT + \frac{ks^2}{2}N + \frac{s^3}{6}(k'(0)N + k(-kT - \tau B)) + \dots \\
&= \gamma(0) + (s - \frac{k^2}{6}s^3)T + (\frac{k}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3)N - \frac{k\tau}{6}s^3 B + \dots
\end{aligned}
$$

Per tant, l'expressió de $\gamma(s)$ respecte de la referència afí $\{\gamma(0); (T, N, B)\}$ és

$$
\begin{aligned}
x &= s - \frac{k^2}{6}s^3 + \dots \\
y &= \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + \dots \\
z &= -\frac{k\tau}{6}s^3 + \dots
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

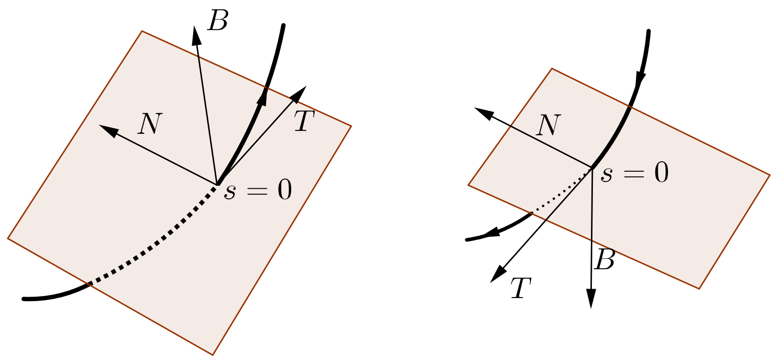
Moltes conseqüències sobre el comportament local de la corba es dedueixen d'aquestes expressions. Per exemple, localment la corba està continguda en el semiespai determinat pel pla rectificant que conté el vector normal. Només cal veure que per a valors petits de s la coordenada y és positiva.

També es veu clarament que, en primera aproximació, la corba projectada sobre el pla osculador $z = 0$ és una paràbola; projectada sobre el pla rectificant $y = 0$ és una cúbica; i projectada sobre el pla normal $x = 0$ és una corba del tipus $z = cy^{3/2}$.

Veiem ara unes poques aplicacions més.

Interpretació geomètrica del signe de la torsió

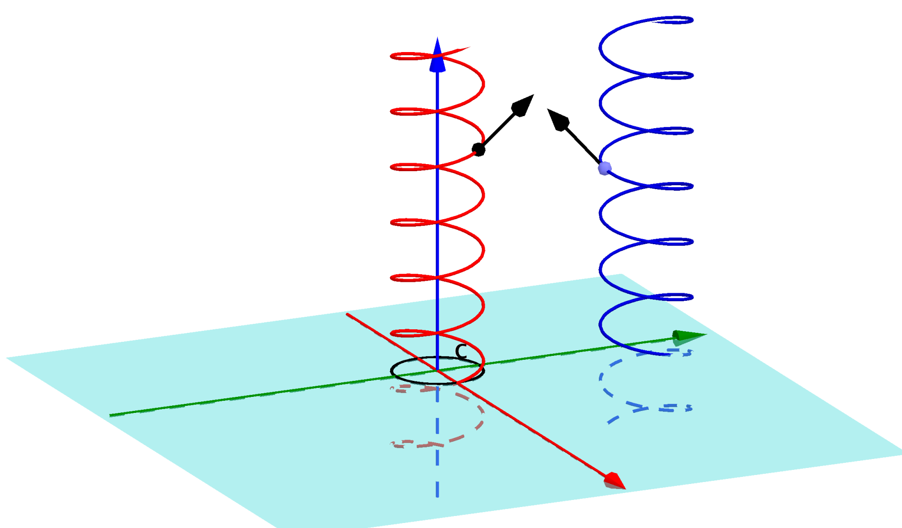
La torsió no depèn de la orientació de la corba. La tercera de les fórmules anteriors ens diu que si recorrem la corba en el sentit creixent del paràmetre arc i $\tau < 0$, llavors la corba travessa el pla osculador cap el sentit indicat pel vector binormal, i si $\tau > 0$ el travessa en sentit contrari.



$\tau < 0$

El dibuix mostra una corba de torsió negativa (la torsió no depèn de la orientació), recorreguda amb paràmetre arc s i amb paràmetre arc $-s$. En els dos casos la corba travessa el pla osculador en el sentit de la binormal (la qual sí que canvia de signe al canviar s per $-s$).

Els llevataps dextrogirs i levogirs són simètrics per simetria especular i no es poden fer coincidir per moviments directes de $\mathbb{R}^3$. Un té torsió positiva i l'altre negativa.



$(\cos t, \sin t, t)$; $\tau < 0$. $(\cos t, -\sin t, t)$; $\tau > 0$.

Distància a la tangent i al pla osculador

Com aplicació de l'expressió canònica local donem aquests dos resultats clàssics.

Proposició 3.9.1 *La distància a la tangent, en un punt de curvatura diferent de zero, és un infinitesimal d'ordre dos, respecte el paràmetre arc.*

Demostració. La fórmula (3.2) ens diu directament que

$$d^2 = y^2 + z^2 = \frac{k^2}{4}s^4 + \dots$$

Així, si $k \neq 0$, d és un infinitesimal d'ordre 2 en s. $\square$

Proposició 3.9.2 *La distància al pla osculador, en un punt de curvatura i torsió diferent de zero, és un infinitesimal d'ordre tres, respecte el paràmetre arc.*

Demostració. La fórmula (3.2) ens diu directament que

$$d = \frac{k\tau}{6}s^3 + \dots$$

Així, si $k\tau \neq 0$, d és un infinitesimal d'ordre 3 en s. $\square$

Interpretació geomètrica del pla osculador

Una altra aplicació de l'expressió canònica local és aquesta interpretació del pla osculador.

Proposició 3.9.3 *El pla osculador en un punt P d'una corba és el límit dels plans que passen per la recta tangent a la corba en P i contenen un punt de la corba, quan aquesta punt s'acosta a P.*

Demostració. Els plans que passen per la recta tangent tenen equació $z = cy$. Excloem el pla $y = 0$ on no hi ha, localment, puts de la corba. Imposem que el pla $z = cy$ passi pel punt $(x(s), y(s), z(s))$ de la corba. Ha de ser

$$c = \frac{z(s)}{y(s)} = \frac{-\frac{k\tau}{6}s^3 + \dots}{\frac{k}{2}s^2 + \dots}$$

Per tant, el pla posició límit d'aquests plans és el pla $z = cy$ amb

$$c = \lim_{s\to 0} \frac{-\frac{k\tau}{6}s^3 + \dots}{\frac{k}{2}s^2 + \dots} = 0,$$

és a dir $z = 0$, que és el pla osculador. $\square$

Exercici 3.9.4 *Sigui $\mathcal{C}$ el cercle osculador en un punt $P = \gamma(0)$ d'una corba plana que no és extrem de la curvatura. Utilitzeu l'expressió canònica local per veure que que els punts $\gamma(s)$, amb $s < 0$, són exteriors a $\mathcal{C}$ i els punts $\gamma(s)$ amb $s > 0$ són interiors a $\mathcal{C}$, o al revés.*

Exercici 3.9.5 *Demostreu que s i $\|\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}\|$ són infinitèssims equivalents, és a dir*

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{s}{\|\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}\|} = 1.$$

Solució. Utilitzant l'expressió canònica local tenim

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{s}{\|\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}\|} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s}{\sqrt{s^2 + o(s^2)}} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s}{|s|\sqrt{1 + o(s^2)/s^2}} = 1. \quad \square$$

Notem que el límit per l'esquerra és igual a -1.

Nota 3.9.6 La motivació d'aquest l'exercici prové de que si innocentment diguéssim que la direcció de la tangent és el límit de les direccions de les secants obtindríem

$$\lim_{s\to 0} \overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)} = 0$$

i no aniríem en lloc.

Ara bé, si el que volem és parlar de *direccions* lo lògic és considerar els vectors unitaris que donen les direccions de les secants i calcular

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}}{\|\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}\|}.$$

L'exercici 3.9.5 permet calcular aquest límit fàcilment. En efecte,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}}{\|\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}\|} = \lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma(0)\gamma(s)}}{s} = \pm\gamma'(0),$$

on el signe prove, com hem comentat abans de si considerem el límit per la dreta o per l'esquerra.

Deixem com exercici calcular, aplicant l'Hôpital, el límit

$$\lim_{s\to 0}\frac{x(s)}{\sqrt{x(s)^2+y(s)^2+z(s)^2}}$$

(amb $x(0)=y(0)=z(0)=0$, i $x'(s)^2+y'(s)^2+z'(s)^2=1$), que ja sabem pels càlculs anteriors que ha de donar $\pm x'(0)$.

3.10 Contacte d'una corba amb una superfície

En el proper capítol veurem que si $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ és una aplicació diferenciable, llavors[7] l'equació $F(x,y,z)=0$ representa una superfície.

A nosaltres ara només ens interessen els plans i les esferes, és a dir, superfícies donades per les equacions

$$F(x,y,z)=ax+by+cz+d=0,$$

$$F(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

ja que el que volem és estudiar el contacte amb un pla o una esfera d'una corba de $\mathbb{R}^3$.

Així quan parlem a continuació de la superfície S o de la superfície $F(x,y,z)=0$ el lector pot pensar, en una primera lectura, que ens referim a una pla o una esfera, però està redactat així perquè els resultats són certs per a superfícies donades de la forma $F(x,y,z)=0$, per a $F(x,y,z)$ arbitrària (amb la condició sobre la diferencial que hem esmentat), i es pugui rellegir aquest apartat un cop estudiat el Capítol 4 de Superfícies.

Definició 3.10.1 *Sigui γ una corba i sigui S una superfície. Suposem que γ i S tenen un punt en comú P. Direm que γ i S tenen un contacte d'ordre almenys m en P si existeix una corba continguda a S amb contacte d'ordre almenys m amb γ a P.*

[7] Sota unes certes condicions sobre la diferencial d'aquesta aplicació, vegeu la Proposició 4.3.1.

Proposició 3.10.2 *Sigui γ una corba parametritzada per l'arc i sigui S una superfície donada per $F(x, y, z) = 0$. Suposem $P = \gamma(0) \in S$. Llavors γ i S tenen un contacte d'ordre almenys m en P si i només si la funció*

$$q(s) = F(\gamma(s))$$

on s és el paràmetre arc de γ, compleix

$$\frac{d^r q}{ds^r}_{|s=0} = 0, \quad r = 1, \ldots, m$$

Demostració. Suposem primerament que existeix una corba $\beta(t)$, parametritzada per l'arc, continguda a S, és a dir,

$$F(\beta(t)) = F(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) = 0, \tag{3.3}$$

amb $\beta(0) = P$, i contacte d'ordre almenys m amb γ en P.

Derivant (3.3) tenim

$$\frac{dF(\beta(t))}{dt}_{|t=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d\beta_i}{dt}_{|t=0} = 0$$

però com

$$\frac{d^j \gamma(s)}{ds^j}_{|s=0} = \frac{d^j \beta(t)}{dt^j}_{t=0}, \quad j = 1, \ldots, m$$

tenim

$$\frac{dF(\beta(t))}{dt}_{|t=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d\gamma_i(s)}{ds}_{|s=0} = 0 \tag{3.4}$$

Per altra banda, derivant la funció $q(s) = F(\gamma(s))$ tenim

$$\frac{dq(s)}{ds}_{|s=0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d\gamma_i(s)}{ds}_{|s=0},$$

i per tant, per (3.4),

$$\frac{dq(s)}{ds}_{|s=0} = 0.$$

L'argument és essencialment el mateix per a les successives derivades de $q(s)$. Mirem la derivada segona.

$$\frac{d^2q(s)}{ds^2}_{|s=0} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}_{|P} \frac{d\gamma_i(s)}{ds}_{|s=0} \frac{d\gamma_j(s)}{ds}_{|s=0} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d^2\gamma_i(s)}{ds^2}_{|s=0}.$$

Substituint les derivades primeres i segones de les γ_i per les corresponents derivades primeres i segones de les β_i aquesta expressió coincideix amb

$$\frac{d^2F(\beta(t))}{dt^2}_{|t=0}$$

la qual és zero per (3.3).

And so on.

Recíprocament, suposem que les derivades de $q(s) = F(\gamma(s))$ fins a l'ordre m són zero.

Hem de veure que existeix una corba $\beta(t)$ sobre S, amb $\beta(0) = P$ i contacte d'ordre almenys m amb γ en P.

Si $\frac{\partial F}{\partial z}_{|P} \neq 0$, cosa que passa sempre en el cas de que $F = 0$ representi el pla, i sempre excepte en un parell de punts en el cas de que $F = 0$ representi l'esfera,[8] podem definir, pel teorema de la funció implícita, una funció $\beta_3(s)$ per la condició

$$F(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \beta_3(s)) = 0. \tag{3.5}$$

Com

$$F(\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)) = 0,$$

ha de ser $\beta_3(0) = \gamma_3(0)$, de manera que la corba

$$\beta(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \beta_3(s))$$

compleix que està continguda a la superfície, ja que compleix la seva equació, i $\beta(0) = \gamma(0) = P$.

Mirem que també coincideixen les derivades primeres de $\gamma(s)$ i $\beta(s)$. Derivant (3.5) tenim

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d\gamma_i}{ds}_{|s=0} + \frac{\partial F}{\partial x_3}_{|P} \frac{d\beta_3}{ds}_{|s=0}$$

[8] Si $F(x, y, z) = 0$ és una superfície arbitrària, alguna de les tres derivades parcials és diferent de zero, i l'argument funciona potser permutant les variables.

Com que per hipòtesis $q'(0) = 0$ tenim

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}_{|P} \frac{d\gamma_i}{ds}_{|s=0} + \frac{\partial F}{\partial x_3}_{|P} \frac{d\gamma_3}{ds}_{|s=0} = 0,$$

Igualant aquestes equacions tenim

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}_{|P} \frac{d\gamma_3}{ds}_{|s=0} = \frac{\partial F}{\partial x_3}_{|P} \frac{d\beta_3}{ds}_{|s=0}$$

Com hem fet la hipòtesis de que $\frac{\partial F}{\partial x_3}_{|P} \neq 0$, tenim

$$\frac{d\gamma_3}{ds}_{|s=0} = \frac{d\beta_3}{ds}_{|s=0}$$

és a dir, $\beta'(0) = \gamma'(0)$.

And so on. □

Pla de contacte almenys dos: pla osculador

Proposició 3.10.3 *En cadascun dels seus punts una corba té contacte almenys dos amb el corresponent pla osculador.*

Demostració. L'equació del pla osculador de $\gamma(s)$ en el punt $\gamma(0)$ és

$$B \cdot \vec{x} + d = 0,$$

on B és el vector binormal en el punt $P = \gamma(0)$, $\vec{x} = (x, y, z)$, i $B \cdot P + d = 0$.

Així, la funció $q(s)$ introduïda a la Proposició anterior 3.10.2 és

$$q(s) = B \cdot \gamma(s) + d$$

i és clar que

$$q'(0) = q''(0) = 0.$$

Per la Proposició 3.10.2 hem acabat. □

De fet, aquesta propietat caracteritza el pla osculador.

Proposició 3.10.4 *Si un pla per un punt P d'una certa corba C, té contacte d'almenys ordre 2 amb aquesta corba en P, llavors aquest pla és el pla osculador.*

Demostració. Només hem de 'copiar' els càlculs anteriors. En efecte, els plans per P són de la forma $\vec{a}\cdot\vec{x}+d=0$, amb $\vec{a}\cdot P+d=0$. La funció $q(s)$ és

$$q(s)=\vec{a}\cdot\gamma(s)+d$$

i si imposem $q'(0)=q''(0)=0$ obtenim

$$\vec{a}\cdot\gamma'(s)=\vec{a}\cdot\gamma''(s)=0$$

i per tant $\vec{a}$ té la direcció de la binormal, i hem acabat. □

Esfera de contacte almenys tres: esfera osculatriu

Estudiem el contacte d'una corba amb una esfera.

Suposem que la corba $\gamma(s)$, parametritzada per l'arc, té un punt en comú P amb l'esfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0.$$

Sabem que per estudiar el contacte hem de considerar la funció

$$q(s)=(x(s)-a)^2+(y(s)-b)^2+(z(s)-c)^2-r^2=\langle\overrightarrow{O\gamma(s)},\overrightarrow{O\gamma(s)}\rangle-r^2,$$

on $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$, $O=(a,b,c)$.

Suposem, sense perdre generalitat, que $P=\gamma(0)$. Com P pertany a l'esfera, ha de ser $q(0)=0$.

Proposició 3.10.5 (Contacte d'ordre almenys 1) *El centre d'una esfera que té contacte d'ordre almenys 1 amb una corba, pertany al pla normal a la corba en el punt de contacte.*

Demostració. Estudiem les derivades de la funció

$$q(s)=\langle\overrightarrow{O\gamma(s)},\overrightarrow{O\gamma(s)}\rangle-r^2.$$

Clarament

$$q'(0)=2\langle\overrightarrow{OP},\gamma'(0)\rangle$$

Si volem tenir contacte d'almenys ordre 1 ha de ser $q'(0)=0$, és a dir, $\overrightarrow{OP}$ ha de ser ortogonal a $\gamma'(0)$.

Podem escriure doncs

$$\overrightarrow{OP} = pN + qB \tag{3.6}$$

on N, B són els vectors normal principal i binormal de la corba en P i $p, q \in \mathbb{R}$. Equivalentment

$$O = P - pN - qB,$$

i per tant O pertany al pla normal a la corba en el punt de contacte. □

Proposició 3.10.6 (Contacte d'ordre almenys 2**)** *El centre d'una esfera que té contacte d'ordre almenys* 2 *amb una corba pertany a l'eix polar de la corba en el punt de contacte.*

Demostració. Suposem que la funció $q(s)$ de la Proposició anterior compleix $q(0) = q'(0) = 0$. Per tenir contacte d'almenys ordre 2 ha de complir a més que $q''(0) = 0$. Calculem $q''(0)$. Com

$$q'(s) = 2\langle \overrightarrow{O\gamma(s)}, \gamma\,'(s)\rangle$$

tenim

$$\begin{aligned} q''(0) &= 2\langle \gamma\,'(0), \gamma\,'(0)\rangle + 2\langle \overrightarrow{OP}, \gamma\,''(0)\rangle \\ &= 2(1 + \langle \overrightarrow{OP}, \gamma\,''(0)\rangle). \end{aligned}$$

Per tant, $q''(0) = 0$ vol dir

$$\langle \overrightarrow{OP}, \gamma\,''(0)\rangle = -1$$

Substituint $\overrightarrow{OP}$ per la seva expressió (3.6) tenim

$$kp = -1,$$

on k és la curvatura de la corba en P. Per tant,

$$\overrightarrow{OP} = -\rho N + qB$$

on $\rho = 1/k$ és el radi de curvatura de la corba en P.

Equivalentment,

$$O = P + \rho N - qB.$$

La recta
$$X(t) = P + \rho N + tB, \quad t \in \mathbb{R},$$
és diu *eix polar*[9] de la corba en P i, per tant, la Proposició queda demostrada. $\square$

Proposició 3.10.7 (Contacte d'ordre almenys 3**)** *El centre d'una esfera que té contacte d'ordre almenys* 3 *amb una corba en un punt* P *és el punt de l'eix polar de la corba en* P *donat per*
$$O = P + \rho N - \frac{\rho'(0)}{\tau} B.$$

Demostració. Suposem que la funció $q(s)$ de la Proposició anterior compleix $q(0) = q'(0) = q''(0) = 0$. Com
$$q''(s) = 2\langle \gamma(s) - O, \gamma''(s)\rangle + 2$$
tenim
$$\begin{aligned} q'''(0) &= 2\langle \gamma'(0), \gamma''(0)\rangle + 2\langle \gamma(0) - O, \gamma'''(0)\rangle \\ &= 2\langle P - O, \gamma'''(0)\rangle \\ &= 2\langle -\rho N + qB, k'(0)N + k(-kT - \tau B)\rangle \\ &= 2(-\rho k'(0) - qk\tau), \end{aligned}$$
on τ és la torsió de la corba en P.

Per tant, $q'''(0) = 0$ si i només si
$$q = -\frac{\rho^2 k'(0)}{\tau} = \frac{\rho'(0)}{\tau},$$
i, per tant,
$$O = P + \rho N - \frac{\rho'(0)}{\tau} B,$$
com volíem demostrar. $\square$

[9] A l'exercici 9.2.5 veurem que la superfície reglada formada per la unió dels eixos polars (superfície polar) és l'envolvent dels plans normals. Veurem també que aquesta superfície està formada per les tangents a la corba formada pels centres de les esferes osculatrius. La superfície formada per les tangents a una corba es diu *desenvolupable tangencial* de la corba, (vegeu l'exercici 7.5.1), i es diu que la corba és l'*eix de regressió* d'aquesta superfície. Monge l'anomena *arête de rebroussement*, que en català seria *aresta cuspidal* o *aresta de retrocés*.

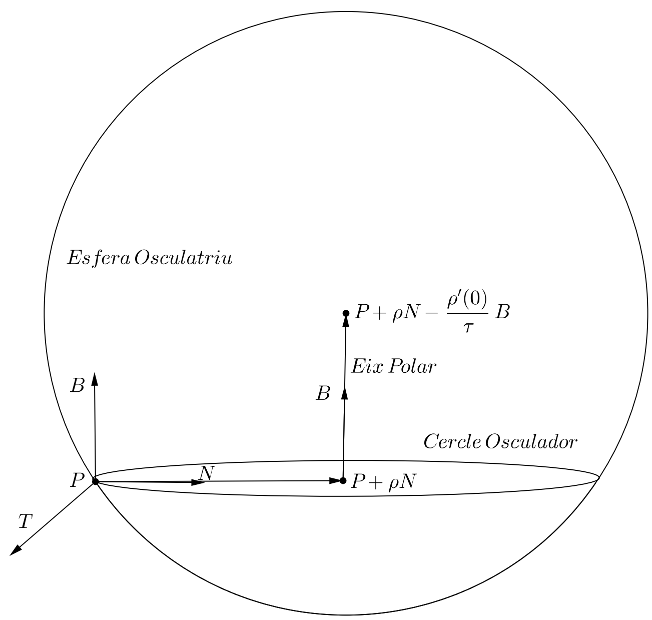
Definició 3.10.8 (Esfera osculatriu) *L'esfera de contacte d'ordre almenys tres en un punt d'un corba es diu* esfera osculatriu *de la corba en el punt.*

Acabem de veure que el seu centre és

$$O = P + \rho N - \frac{\rho'(0)}{\tau} B,$$

i el seu radi

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho'(0)}{\tau}\right)^2}.$$

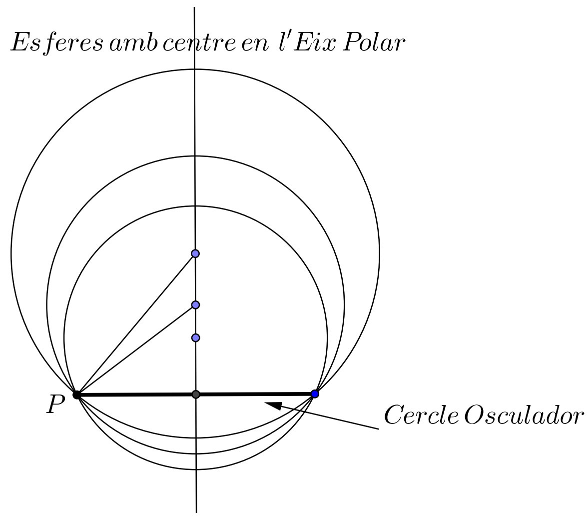


Esfera osculatriu

Observem que totes les esferes amb centre l'eix polar i que passen per P tallen el pla osculador en un mateix cercle: el cercle osculador.[10]

Aquestes esferes tenen contacte exactament 2 amb la corba en P excepte la osculatriu que té contacte almenys 3.

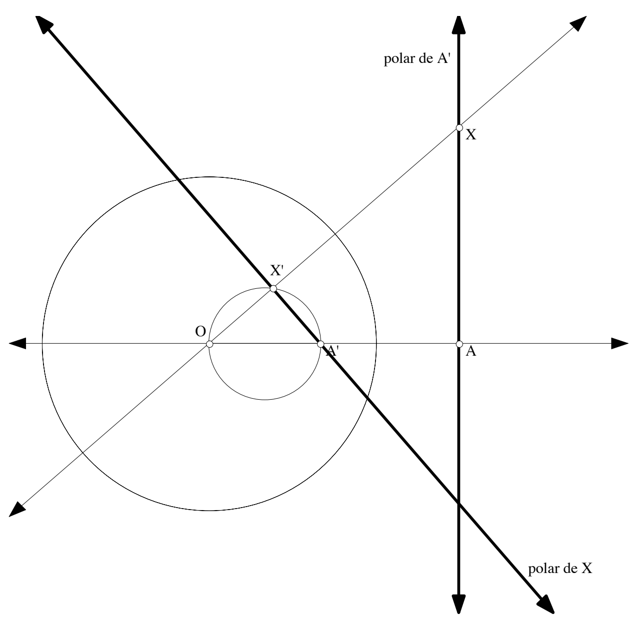
[10] A les sessions de seminaris veurem que aquest cercle és el cercle que passa per tres punts consecutius d'una corba.



Esfera osculatriu i cercle osculador

Geometria inversiva

Aprofitant el dibuix que il·lustra la propietat quer diu que els punts A, X i els seus inversos A', X' són concíclics,



i recordant que la *polar* de A' respecte la circumferència d'inversió és la perpendicular a la recta OA' pel punt A invers de A', tenim que *la polar de tot punt X de la polar de A' passa per A'.* És conseqüència de que l'angle $\angle OX'A'$ és recte, per tot X. Es diu que A' és el *pol* de la corresponent recta polar.

Des d'aquest punt de vista, i situats en el pla per $\gamma(s)$ generat per $N(s)$ i $B(s)$, podem dir que *l'eix polar és la recta polar del punt $\gamma(s) + k(s)N(s)$, respecte de la circumferència de centre $\gamma(s)$ i radi* 1.

3.11 Teorema fonamental de la teoria local de corbes

Teorema 3.11.1 *Donades dues funcions $k(s) > 0$ i $\tau(s)$ definides en un interval obert $I \subseteq \mathbb{R}$, existeix una corba $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que té s com paràmetre arc, amb curvatura $k(s)$ i torsió $\tau(s)$. A més, si tenim dues corbes amb aquestes condicions, existeix un moviment rígid*[11] *de $\mathbb{R}^3$ que porta una sobre l'altra.*

Demostració. El teorema d'existència i unicitat de solució de les equacions diferencials ordinàries, que hem recordat a la pàgina 18, ens diu que existeixen 9 funcions $x_i(s)$, definides a I per ser el sistema lineal, tals que si posem $T(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, $N(s) = (x_4(s), x_5(s), x_6(s))$, $B(s) = (x_7(s), x_8(s), x_9(s))$, es compleixi que

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

[11] Composició d'una translació amb un gir.

Equivalentment

$$\begin{array}{rcl} x_1'(s) & = & k(s)x_4(s), \\ x_2'(s) & = & k(s)x_5(s), \\ x_3'(s) & = & k(s)x_6(s), \\ x_4'(s) & = & -k(s)x_1(s) - \tau(s)x_7(s), \\ x_5'(s) & = & -k(s)x_2(s) - \tau(s)x_8(s), \\ x_6'(s) & = & -k(s)x_3(s) - \tau(s)x_9(s), \\ x_7'(s) & = & \tau(s)x_4(s), \\ x_8'(s) & = & \tau(s)x_5(s), \\ x_9'(s) & = & \tau(s)x_6(s). \end{array}$$

A més, aquesta solució és única si fixem les condicions inicials. Posem, per exemple, com condició inicial que $(T(0), N(0), B(0))$ coincideixi amb la base canònica de $\mathbb{R}^3$, és a dir, $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 1, x_6(0) = 0, x_7(0) = 0, x_8(0) = 0, x_9(0) = 1$. Però podríem agafar qualsevol altre base ortonormal positiva.

Els vectors solució $(T(s), N(s), B(s))$ no solament són una base ortonormal quan $s = 0$ sinó que formen una base ortonormal per a tot $s \in I$.

En efecte, sigui

$$G = \begin{pmatrix} x_1(s) & x_2(s) & x_3(s) \\ x_4(s) & x_5(s) & x_6(s) \\ x_7(s) & x_8(s) & x_9(s) \end{pmatrix}.$$

Les equacions (3.7) s'escriuen com

$$G'(s) = A(s)G(s)$$

on $A(s)$ és la matriu antisimètrica formada per $k(s)$ i $\tau(s)$. La condició de que $(T(0), N(0), B(0))$ sigui una base ortonormal s'escriu ara com $G(0)G^t(0) = id$.

El que volem veure equival a veure que $G(s)$ és una matriu ortogonal per a tot s, és a dir, $G(s)G^t(s) = id$. Derivant

$$\begin{array}{rcl} (GG^t)' & = & G'G^t + G(G')^t = (AG)G^t + GG^tA^t \\ & = & A(GG^t) - (GG^t)A. \end{array}$$

Això vol dir que tant la matriu identitat com la matriu $G(s)G^t(s)$ són solució de l'equació diferencial (matricial)

$$X' = AX - XA.$$

Com compleixen la mateixa condició inicial ha de ser

$$G(s)G^t(s) = id, \quad \forall s \in I.$$

Per trobar la corba ara ja només hem d'integrar

$$\gamma'(s) = T(s),$$

és a dir,

$$\begin{aligned} x'(s) &= x_1(s) \\ y'(s) &= x_2(s) \\ z'(s) &= x_3(s) \end{aligned}$$

i tenim la corba buscada

$$\gamma(s) = (\int_0^s x_1(s)ds, \int_0^s x_2(s)ds, \int_0^s x_3(s)ds),$$

que passa per l'origen quan $s = 0$.

A més, per complir-se les equacions (3.7), amb $T(s), N(s), B(s)$ ortonormal com acabem de veure, aquesta corba té clarament[12] referència de Frenet $(T(s), N(s), B(s))$, curvatura $k(s)$ i torsió $\tau(s)$.

Unicitat llevat de moviment rígid. Suposem que $\beta(s)$ sigui una altra corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s)$ i torsió $\tau(s)$. Per un moviment rígid de $\mathbb{R}^3$, que no canvia doncs ni la curvatura ni la torsió de $\beta(s)$, col·loquem $\beta(s)$ de manera que $\beta(0) = (0, 0, 0)$ i que la referència de Frenet en aquest punt coincideixi amb la referència canònica. Això es pot fer perquè la referència de Frenet és positiva respecte de la base canònica. Diguem $\tilde{\beta}(s)$ aquesta corba girada.

Tant $\gamma(s)$ com $\tilde{\beta}(s)$ compleixen les equacions (3.7) amb les mateixes condicions inicials, de manera que, en particular,

$$\gamma'(s) = \tilde{\beta}'(s)$$

i, novament per la unicitat, $\gamma(s) = \tilde{\beta}(s)$ com volíem veure. $\square$

Vegeu a [28] la genial integració de les equacions de Frenet 3.7 utilitzant equacions de Ricatti donada per Darboux.

[12] Si $k(s)$ fos zero l'equació $T' = kN$ no ens permetria interpretar $N(s)$ com la normal principal. És l'únic punt on s'utilitza la hipòteis $k > 0$.

3.12 Evolutes

Ja hem vist a classe de problemes com la evoluta d'una corba plana és la envolvent de les normals.

Podem recordar que l'envolvent d'una família uniparamètrica de rectes es calcula resolent el sistema format per aquesta família i la seva derivada respecte el paràmetre. Per exemple, si les rectes són

$$r(t): \quad a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

(família uniparamètrica de rectes depenen del paràmetre t) llavors l'envolvent és la solució del sistema

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a(t)'x + b(t)'y + c(t)' &= 0 \end{aligned}$$

Això és evident si recordem la definició de derivada i que per trobar l'envolvent tallem una recta amb la següent (una infinitament pròxima, $r(t)$ amb $r(t+h)$, el numerador de la definició de derivada).

La família uniparamètrica de rectes formada per les normals a una corba $\gamma(s)$, parametritzada per l'arc, és

$$r(t): \quad \langle X, T(s)\rangle - \langle \gamma(s), T(s)\rangle = 0. \quad X = (x, y)$$

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} \langle X, T(s)\rangle - \langle \gamma(s), T(s)\rangle &= 0 \\ \langle X, k(s)N(s)\rangle - 1 - \langle \gamma(s), k(s)N(s)\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Prenem

$$X(s) = \gamma(s) + \mu(s)N(s)$$

per a una certa $\mu(s)$ de moment indeterminada i veiem de manera evident que aquest $X(s)$ és solució de la primera equació. Per que ho sigui de la segona ha de ser

$$\langle(\gamma(s) + \mu(s)N(s)), k(s)N(s)\rangle - 1 - \langle \gamma(s), k(s)N(s)\rangle = 0,$$

és a dir,

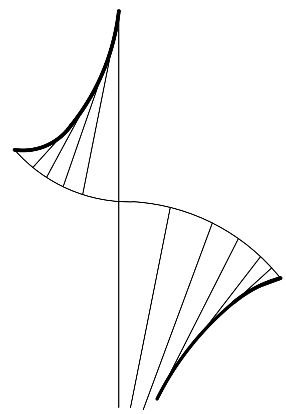
$$\mu(s)k(s) = 1.$$

Per tant els punts de l'evoluta, corba envolvent de les normals, són de la forma

$$X(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s)$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura.

Realment sorprenent que torni a aparèixer el radi de curvatura de manera tant diferent, aparentment, de com ha aparegut a la pàgina 41.



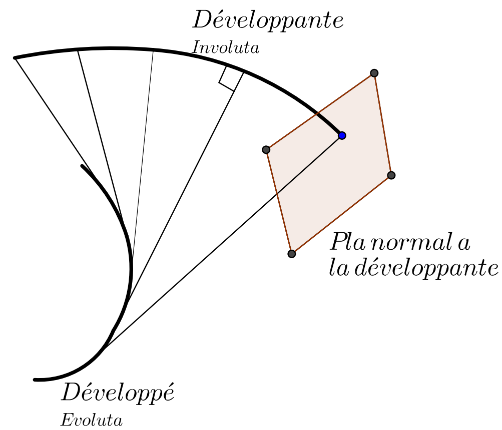
La generalització d'quest fet a corbes de l'espai va ser un dels primers treballs de Monge en aquest camp.

Concretament Monge a *Mémoire sur les développés* es proposa estudiar precisament l'existència d'infinites *développées* per a les corbes guerxes (la *développée* d'una corba C és una altra corba C^* tal que C està continguda a la desenvolupable tangencial de C^* i la tangent a C^* pertany al pla normal a C en el punt corresponent). Desenrotllant un cordill prèviament embolicat a C^*, mantenint-lo en la superfície de les tangents, obtenim C. També es diu que C^* és la *evoluta* de C. I que C és la *développante* o *involuta* de C^*.

Monge es proposa

> "de démontrer dans ce Mémoire qu'une courbe, plane ou à double curvature a une infinité de développées, toutes a double courbure, [...] et de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante."

Donada una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc es demana trobar les corbes $\beta(s)$ (les développées) tals que les tangents a $\beta(s)$ pertanyen al pla normal de $\gamma(s)$. És a dir, es demana trobar les *evolutes* de $\gamma(s)$. Una corba que si la desenvolupes pel mètode del cordill dóna $\gamma(s)$. Observem que el paràmetre arc s de $\alpha(s)$ no serà en general el paràmetre arc de $\beta(s)$.



En llenguatge actual tindríem[13]: Donada $\gamma(s)$ busquem $\beta(s)$ tal que $\beta'(s)$ pertanyi al pla normal de $\gamma(s)$. Equivalentment $\gamma(s)$ talla otogonalment les tangents de $\beta(s)$.

Proposició 3.12.1 *Donada una corba γ, existeixen infinites corbes tals que les seves rectes tangents tallen γ ortogonalment.*

Demostració. Suposem $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc. Si una tal corba $\beta(s)$ existeix la podem escriure com

$$\beta(s) = \gamma(s) + q(s)V(s),$$

on $V(s) = \dfrac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|}$, i $q(s)$ és una funció desconeguda.

Derivant tenim

$$|\beta'(s)|V(s) = T(s) + q'(s)V(s) + q(s)V'(s).$$

Com que $V(s) \cdot V'(s) = 0$, per ser $V(s)$ unitari i $T(s) \cdot V(s) = 0$ per hipòtesis, l'anterior igualtat només es pot donar si

$$T(s) + q(s)V'(s) = 0. \tag{3.8}$$

[13]Vegeu E. Kreyszig, *Differential Geometry*, p.66.

Ara bé, per hipòtesis,

$$V(s) = \sin\alpha(s)\ N(s) + \cos\alpha(s)\ B(s).$$

Derivant i substituint a (3.8) obtenim

$$\begin{aligned} T(s) &+ q(s)[(-k(s)T(s) - \tau(s)B(s))\sin\alpha(s) \\ &+ \alpha'(s)\ \cos\alpha(s)\, N(s) + \tau(s)\ \cos\alpha(s)\ N(s) - \alpha'(s)\ \sin\alpha(s)\, B(s)] = 0. \end{aligned}$$

Això implica (coeficient de $T(s)$)

$$q(s)\sin\alpha(s) = \rho(s),$$

i (coeficients de $N(s)$ i $B(s)$)

$$(\alpha'(s) + \tau(s))\cos\alpha(s) = 0, \quad (\alpha'(s) + \tau(s))\sin\alpha(s) = 0.$$

Aquestes dues igualtats impliquen $\alpha'(s) = -\tau(s)$, és a dir

$$\alpha(s) = -\int_0^s \tau(u)du + c,$$

on c és una constant.

Finalment doncs (canviant el signe a la definició de $\alpha(s)$)

$$\beta(s) = \gamma(s) + \rho(s)[N(s) - \cot\alpha(s)\ B(s)], \quad \alpha(s) = \int_0^s \tau(u)du + c. \quad (3.9)$$

Cada valor de c correspon a una de les infinites evolutes de la corba $\gamma(s)$.

Si $\tau = 0$, una de les evolutes és plana i les altres són hèlixs sobre el cilindre ortogonal al pla de la corba. □

Exercici 3.12.2 *Considereu un cordill de longitud igual a la distància L entre $\gamma(0)$ i $\beta(0)$, on $\gamma(s)$ i $\beta(s)$ són les corbes donades per l'equació* (3.9). *Suposem que aquest cordill el col·loquem sobre la corba $\beta(s)$ amb origen $\beta(0)$ i a continuació el despleguem pel final. Demostreu que obtenim $\gamma(s)$.*

Solució. Observem que

$$\beta'(s) = (\rho'(s) - \rho(s)\tau(s)\cot\alpha(s))(N(s) + \cot\alpha(s)\, B(s))$$

i per tant,

$$\|\beta'(s)\| = \left|\frac{\rho'(s) - \rho(s)\tau(s)\cot\alpha(s)}{\sin\alpha(s)}\right|.$$

En particular

$$\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \pm\Big(\sin\alpha(s)N(s) + \cos\alpha(s)B(s)\Big).$$

Suposarem que la funció

$$d(\gamma(s),\beta(s)) = \frac{\rho(s)}{\sin\alpha(s)}$$

és decreixent, de manera que això ens permetrà desembolicar el cordill. En particular, la seva derivada és negativa i tindrem

$$\|\beta'(s)\| = \frac{-\rho'(s) + \rho(s)\tau(s)\cot\alpha(s)}{\sin\alpha(s)},$$

i

$$\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = -\sin\alpha(s)N(s) - \cos\alpha(s)B(s).$$

El cordill, en desembolicar-se, descriu la corba

$$z(s) = \beta(s) + \lambda(s)\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|},$$

amb

$$\lambda(s) = \text{longitud tros de cordill desembolicat} = L - \int_0^s \|\beta'(s)\|ds = \frac{\rho(s)}{\sin\alpha(s)}.$$

Així

$$\begin{aligned} z(s) = \gamma(s) \quad &+ \quad \rho(s)[N(s) + \cot\alpha(s)\,B(s)] + \\ &\frac{\rho(s)}{\sin\alpha(s)}(-\sin\alpha(s)N(s) - \cos\alpha(s)B(s)) = \gamma(s). \quad \square \end{aligned}$$

3.13 Teorema dels quatre vèrtexs

Sigui $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba tancada parametritzada per l'arc. Quan parlem de corba diferenciable sobre un tancat volem dir la restricció a $[0, L]$ d'una aplicació diferenciable L-periòdica de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ (recordeu la definició de corba tancada al peu de la pàgina 52).

Direm que γ és convexa quan tota recta talla la seva traça en dos punts com a molt.

Els vèrtexs de γ són els punts $\gamma(s)$ on $k'(s) = 0$.

Lema 3.13.1 *Sigui $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba tancada parametritzada per l'arc. Posem $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ i sigui $k(s)$ la curvatura de γ. Siguin $A, B, C \in \mathbb{R}$, llavors*

$$\int_0^L (Ax(s) + By(s) + C)k'(s)ds = 0$$

Demostració. Clarament

$$\int_0^L k'(s)\, ds = k(L) - k(0) = 0.$$

El vector normal principal $N(s) = (n_1(s), n_2(s))$ compleix

$$x'(s)n_1(s) + y'(s)n_2(s) = 0,$$

i per tant

$$\begin{aligned} n_1(s) &= \lambda y'(s) \\ n_2(s) &= -\lambda x'(s) \end{aligned}$$

i com és de norma 1 ha de ser $N(s) = \pm(y'(s), -x'(s))$.

Com $T'(s) = k(s)N(s)$, $x''(s) = \pm k(s)y'(s)$, $y''(s) = \mp k(s)x'(s)$.

Integrant per parts

$$\int_0^L x(s)k'(s)\, ds = -\int_0^L x'(s)k(s)\, ds = \mp \int_0^L y''(s)\, ds = 0.$$

$$\int_0^L y(s)k'(s)\, ds = -\int_0^L y'(s)k(s)\, ds = \pm \int_0^L x''(s)\, ds = 0.$$

Com A, B, C són constants, el lema queda demostrat. $\square$

Teorema 3.13.2 *Tota corba plana tancada i convexa té almenys quatre vèrtexs.*

Demostració. Sigui $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba tancada convexa parametritzada per l'arc. Sabem que, per ser la funció curvatura k contínua sobre un compacte, té màxim i mínim. Tenim, doncs, dos punts $P_1 = \gamma(s_1), P_2 = \gamma(s_2)$ amb $k'(s_1) = k'(s_2) = 0$. Suposem sense perdre generalitat que $s_1 < s_2$ i que P_1 és el mínim i P_2 el màxim.

Sigui $r : Ax + By + C = 0$ la recta que passa per P_1 i P_2. Observem que el pla queda dividit en els dos semiplans $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$.

Denotem α, β els dos arcs en que queda dividida la traça de γ per r. Concretament, $\alpha = \gamma(s); s_1 < s < s_2$ i β el seu complementari.

Canviant si cal el signe de A, B, C podem suposar que tots els punts de α estan a la regió $Ax + By + C > 0$ i tots els punts de β esta a la regió $Ax + By + C < 0$.

La integral del lema 3.13.1, que és igual a zero, descompon en dues integrals, una sobre α i l'altre sobre β. Això vol dir que no podem tenir a la vegada $k'(s)$ sempre positiva sobre α i $k'(s)$ sempre negativa sobre β. Ha d'haver-hi un interval de mesura no zero on $k'(s) < 0$ sobre α o un interval de mesura no zero on $k'(s) > 0$ sobre β. Suposem que estem en el primer cas (l'argument és el mateix en el segon cas). Com el mínim s'agafa a s_1 i el màxim a s_2, tenim un interval $[a, b]$ amb $s_1 < a < b < s_2$ tal que $k'(s) < 0$ quan $s \in [a, b]$.

Per tant, com $k(s)$ és creixent abans de a, decreixent entre a i b i creixent després de b. Per tant, té un màxim i un mínim relatius en α. I per tant un global de com a mínim quatre vèrtexs.

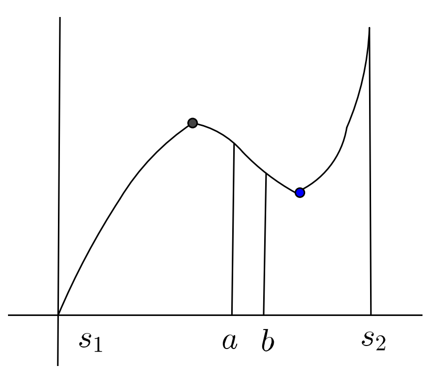


Figura 3.3: Quatre vèrtexs

Desigualtat isoperimètrica

Sens dubte, la propietat global més important de les corbes planes és la desigualtat isoperimètrica que diu que *qualsevol regió plana limitada per un perímetre de longitud L té una àrea A que compleix*

$$A \le \frac{L^2}{4\pi}.$$

i, a més, la igualtat es compleix només quan la regió està limitada per un cercle. Vegeu una demostració directa i una breu història del problema a [8].

3.14 Exercicis

Exercici 3.14.1 *Demostreu que una corba plana amb curvatura constant és una circumferència.*

Solució. Sabem que la curvatura és la derivada de l'angle que forma el vector tangent amb una direcció fixada, de manera que tenim

$$k(s) = \alpha'(s)$$

i com $k(s)$ és constant, resulta que $\alpha(s) = ks + a$, on $a \in \mathbb{R}$ és la constant d'integració.

Ara bé, com podem suposar que $\alpha(s)$ és l'angle entre $\gamma'(s)$ i $(1,0)$, resulta que

$$\langle \gamma'(s), (1,0) \rangle = x'(s) = \cos\alpha(s) = \cos(ks + a),$$

que, integrant,

$$x(s) = \frac{1}{k}\sin(ks + a) + b,$$

on b és una constant. Com $x'^2 + y'^2 = 1$, tenim anàlogament

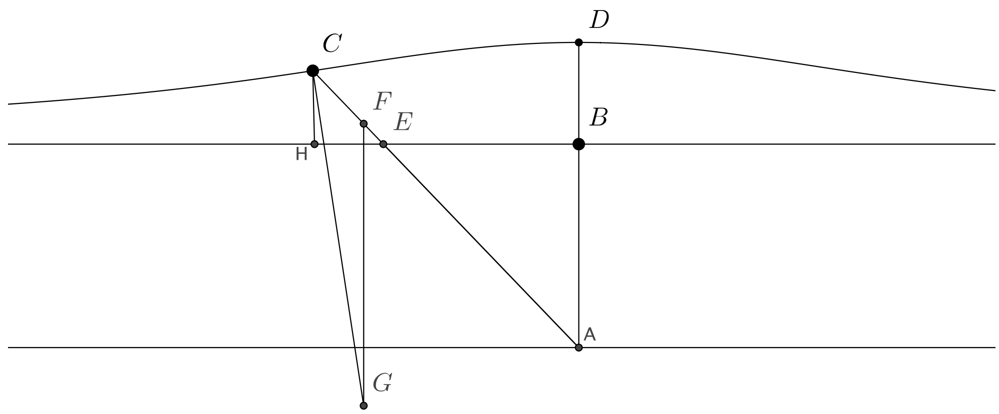
$$y(s) = \frac{1}{k}\cos(ks + a) + c,$$

i per tant la corba està a la circumferència

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Exercici 3.14.2 *A la pàgina 82 de* La Géométrie *de René Descartes, [9] , l'autor dona la sorprenent construcció de la normal a la corba que ell anomena la* concoide dels antics.

> *Sigui DCla primera concoide dels antics, de la qual A és el pol, i BH el regle: totes les línies rectes que miren cap a A, i que es troben compreses entre la corba CD i la recta BH, com ara DB i CE, són iguals.*



> *Si volem trobar la línia CG que la talla en el punt C segons angles rectes, [....] cal prendre CF damunt la línia recta CA, i fer-la igual a CH que és perpendicular a HB. Desprès des del punt F tirar la recta FG paral·lela a BA i igual a EA , i així s'obté el punt G pel qual ha de passar la recta buscada CG.*

L'exercici consisteix en comprovar que aquesta construcció és correcta. I un segon exercici de caire històric és saber com va arribar Descartes a la seva construcció.

Solució. Suposem A l'origen de coordenades, la recta HB que sigui la recta $y = a$ i AB l'eix de les $y's$, i suposem $BD = 1$. Les rectes per l'origen de pendent $\tan t$ tallen $y = a$ en el punt $(a \cot t, a)$ i per tant, els punt d'aquesta recta que pertany a la concoide és

$$\gamma(t) = (\frac{a}{\sin t} + 1)(\cos t, \sin t) = (a + \sin t)(\cot t, 1).$$

Llavors
$$\gamma'(t) = (-\sin t - \frac{a}{\sin^2 t}, \cos t)$$
i, per tant, la recta normal és
$$N : \gamma(t) + \mu(\cos t, \sin t + \frac{a}{\sin^2 t})$$

Amb la notació de Descartes el paràmetre t correspon al punt $C = \gamma(t)$. Així $d(C, H) = \sin t$, i el punt F ha de ser de la forma $F = \lambda\gamma(t)$ i determinem λ per la condició
$$d(C, F) = d(\gamma(t), \lambda\gamma(t)) = \sin t.$$
Obtenim
$$F = (a + \sin t + \sin^2 t)(\cot t, 1).$$
Observem també que
$$d(A, E) = |\gamma(t)| - 1 = \frac{a}{\sin t}.$$

Finalment G és un punt sobre la normal amb la mateixa primera coordenada que F. Posant, doncs,
$$\gamma(t) + \mu(\cos t, \sin t + \frac{a}{\sin^2 t}) = ((a + \sin t + \sin^2 t) \cot t, N_2)$$
obtenim
$$N_2 = (a + \sin t) + \sin t(\sin t + \frac{a}{\sin^2 t}).$$

Així
$$d(F, G) = \frac{a}{\sin t} = d(A, E)$$
com volíem.

Capítol 4

Superfícies

4.1 Introducció

Definició 4.1.1 [1] *Una superfície regular és un subconjunt $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que per a tot punt $P \in S$ existeix un entorn obert W de P a $\mathbb{R}^3$ i una aplicació $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable, on U és un obert de $\mathbb{R}^2$, amb $\varphi(U) = W \cap S$, tal que*

1. *$\varphi : U \longrightarrow W \cap S$ és homeomorfisme (quan dotem $W \cap S$ de la topologia induïda).*

2. *Per a tot punt $Q \in U$, l'aplicació diferencial $d\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és injectiva.*

Cada parell (U, φ) amb les anteriors propietats es diu *carta local* o *parametrització local*.

És costum denotar (u, v) les coordenades cartesianes de $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) les de $\mathbb{R}^3$, i escriure

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{array}$$

o també,

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (\varphi^1(u,v), \varphi^2(u,v), \varphi^3(u,v)). \end{array}$$

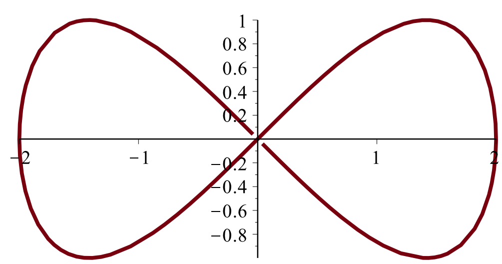
[1] En aquesta secció seguim [10].

Recordem que dir que φ és diferenciable vol dir que les tres funcions $\varphi^i(u,v)$, $i = 1,2,3$, ho són.

Nota 4.1.2 La condició 1 és per evitar autointerseccions, com ara dos plans que es tallin[2], o situacions on la topologia induïda no coincideix amb al topologia que prové de la topologia de $\mathbb{R}^2$ a través de φ. Per exemple,

$$\varphi(t,v) = (2\cos(g(t) - \frac{\pi}{2}), \sin 2(g(t) - \frac{\pi}{2}), v), \quad (t,v) \in \mathbb{R}^2,$$

on $g(t) = \pi + 2\arctan(t)$. La figura representa la corba $\varphi(t,0)$.



Problemes amb la topologia induïda

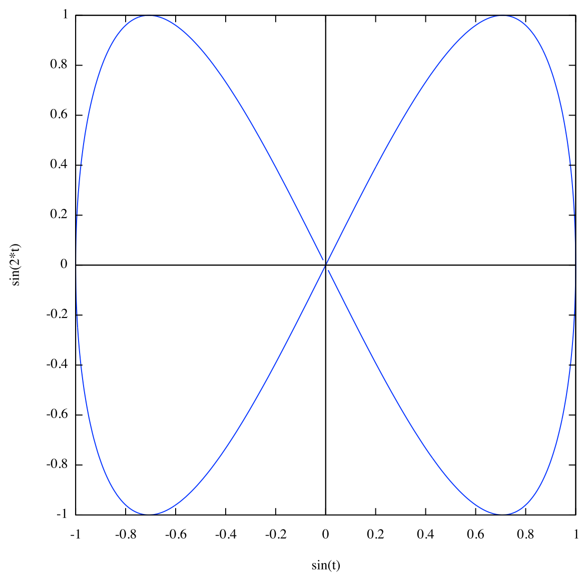
Observem que φ és una aplicació contínua i bijectiva entre $\mathbb{R}$ i la traça de la corba. Podríem posar a $\varphi(\mathbb{R})$ la topologia de $\mathbb{R}$ a través de φ, però no coincideix amb la topologia de $\varphi(\mathbb{R})$ heretada de $\mathbb{R}^2$ ja que, amb aquesta topologia, qualsevol entorn de l'origen conté punts pròxims a $-\infty$ i $+\infty$.

Si no ens cal que φ estigui definida a tot $\mathbb{R}^2$ aquest exemple es pot canviar per un més senzill amb essencialment les mateixes propietats :

$$\varphi(u,v) = (\sin u, \sin 2u, v), \quad (u,v) \in (-\pi,\pi) \times (0,1).$$

La figura representa la corba $\varphi(u,0)$.

[2]Podem trobar corbes tancades sobre la unió d'aquests plans, com ara cercles amb el diàmetre a la intersecció i dos troços sobre dos dels semiplans, que no separen el conjunt en components arc-connexes. No pot ser doncs homeomorf a un disc.

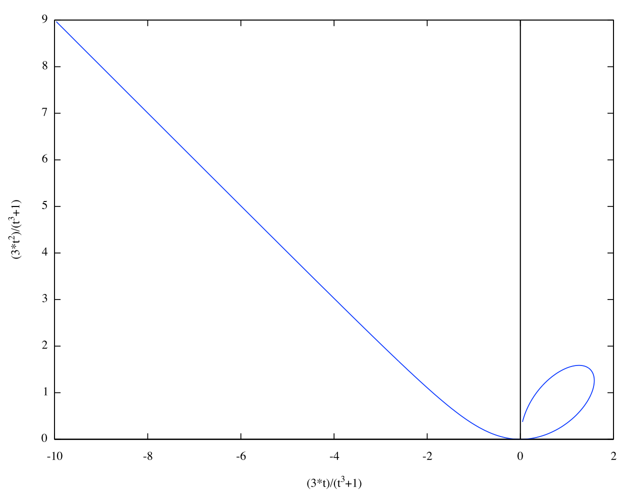


$(\sin u, \sin 2u)$

La mateixa situació tenim amb (veure [26])

$$\varphi(u,v) = (\frac{3u}{1+u^3}, \frac{3u^2}{1+u^3}, v), \quad (u,v) \in (-1,\infty) \times \mathbb{R}.$$

La figura representa la corba $\varphi(u,0)$.



$\left(\frac{3u}{1+u^3}, \frac{3u^2}{1+u^3}\right)$

Nota 4.1.3 La condició 2 diu que φ és una *immersió local* en tot punt Q de U. Com per tota aplicació lineal es compleix que la dimensió del nucli més la dimensió de la imatge és igual a la dimensió de l'espai de sortida, tenim $2 = \dim \operatorname{Ker} d\varphi_Q + \dim \operatorname{Im} d\varphi_Q = \dim \operatorname{Im} d\varphi_Q$ i per tant la matriu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

on totes les derivades parcials estan valorades en el punt Q, té rang 2. En particular els vectors columna

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= (\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^3}{\partial u}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= (\frac{\partial \varphi^1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^3}{\partial v}), \end{aligned}$$

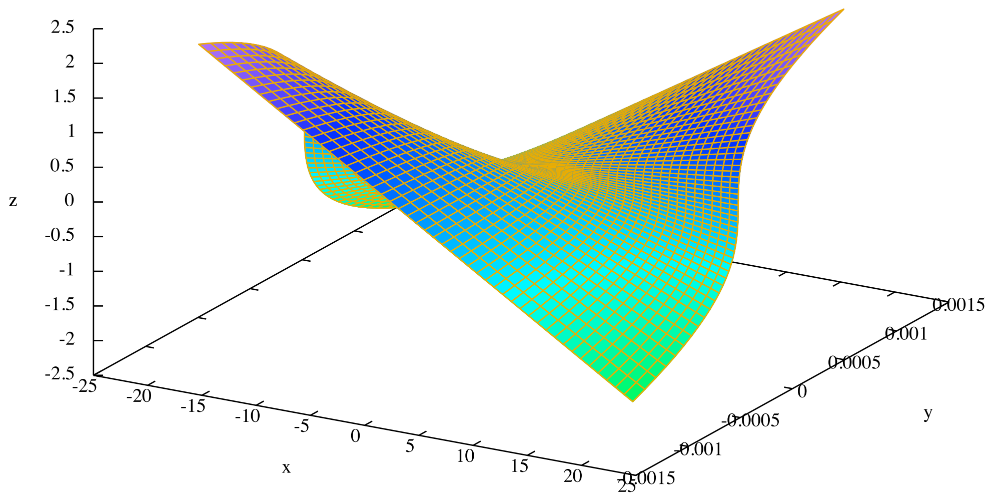
són linealment independents.

Aquesta condició es posa per evitar que la superfície tingui punxes o cantonades.

Per exemple, l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $\varphi(u,v) = (u+v, u^3, uv)$ és contínua i injectiva, però en canvi els vectors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 3u^2, v), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 0, u)$$

no són linealment independents en el punt $Q = (0,0)$. Per tant $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ no és una carta local. Però si traiem el punt $(0,0)$, és a dir si considerem la parella $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \varphi)$, sí que ho és.



$$\varphi(u,v) = (u+v, u^3, uv)$$

Les punxes poden provenir de la no diferenciabilitat. Per exemple, l'aplicació

$$\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$$

aplica el disc $u^2+v^2 < 1$ en un con de vèrtex a l'origen. Però la funció $\sqrt{u^2+v^2}$ no és $\mathcal{C}^1$ a l'origen $(u,v) = (0,0)$. Si prescindim del vèrtex del con, sí que tenim una superfície.

Exemple 4.1.4 *Comprovem que el cilindre S de $\mathbb{R}^3$ donat per $x^2+y^2=1$, és una superfície.*

Solució. Prenem $P = (a,b,c) \in S$. En particular $a^2+b^2=1$. Sabem que si $(a,b) \neq (1,0)$ existeix un únic $u_0 \in (0,2\pi)$ tal que $(\cos u_0, \sin u_0) = (a,b)$. (Si $(a,b) = (0,1)$ el raonament és similar).

Prenem com obert U de $\mathbb{R}^2$

$$U = (0,2\pi) \times \mathbb{R},$$

i com aplicació $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v).$$

La imatge $V = \varphi(U)$ conté P i és un obert de S ja que és la intersecció amb S d'un obert de $\mathbb{R}^3$. Concretament,

$$V = S \cap (\mathbb{R}^3 \setminus r)$$

on r és la recta $x = 1, y = 0$. Com r és un tancat, $\mathbb{R}^3 \setminus r$ és obert.

Comprovem les dues propietats.

1) φ és clarament contínua (cada component ho és) i injectiva. La inversa $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ està donada per la restricció al cilindre (de fet a $\varphi(U) \cap S$) de

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z) & y > 0 \\ (\pi, z) & y = 0 \\ (2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z) & y < 0 \end{cases}$$

definida a $R^3 \setminus \{\text{eix z}\}$. Com la funció arccos : $(-1,1) \longrightarrow (0,\pi)$ és contínua, f és continua. Això vol dir que φ^{-1} és la restricció a V d'una aplicació contínua definida en un obert de $\mathbb{R}^3$ que conté V a $\mathbb{R}^2$, i és per tant, contínua[3] com aplicació de S a $\mathbb{R}^2$.

2) La diferencial de φ té matriu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \cos u}{\partial u} & \dfrac{\partial \cos u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sin u}{\partial u} & \dfrac{\partial \sin u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que, com el sinus i el cosinus no es poden anul·lar a la vegada, té rang 2. $\square$

Exemple 4.1.5 (Esfera) *Comprovem que l'esfera de $\mathbb{R}^3$ donada per $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ és una superfície.*

Solució. Sigui $P \in S^2$. Suposarem primerament que $P \in S^2 \setminus C$ on

$$C = \{(x,y,z) \in S^2_R; y = 0, x \geq 0\}.$$

Construirem una carta local per aquest P. Prenem com obert U de $\mathbb{R}^2$ l'obert $U = (0,\pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$, i com aplicació

$$\Psi_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

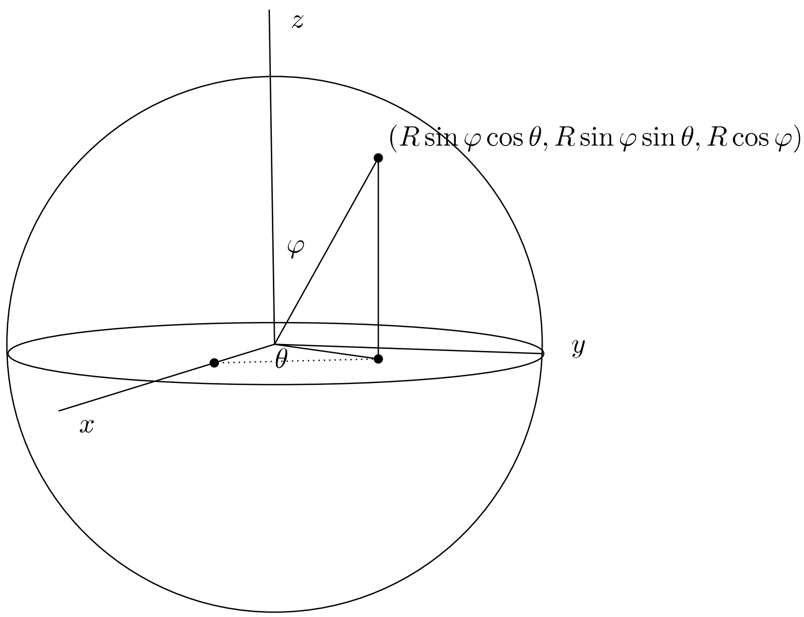
[3]Si $F : X \longrightarrow Y$ és una aplicació contínua entre espais topològics i A és un subconjunt de X amb la topologia induïda, llavors la restricció de F a A, $F_{|A} : A \longrightarrow Y$, és contínua, ja que per tot obert W de Y, $F^{-1}(W)$ és obert de X i $F^{-1}_{|A}(W) = A \cap F^{-1}(W)$ i és, per tant, un obert de A amb la topologia induïda.

prenem la donada per

$$\Psi_1(\varphi, \theta) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi).$$

Clarament $\|\Psi_1(\varphi, \theta)\| = R$, és a dir, $\Psi_1(U) \subset S^2_R$. Més concretament $\Psi_1(U) = S^2 \setminus C$.

Observem que θ és la longitud i φ la colatitud.



Hem de veure que Ψ_1 és contínua, injectiva, amb inversa contínua i immersió local.

1) Que és contínua i injectiva és trivial. Per veure que la inversa és contínua la podem calcular explícitament i comprovar-ho. Però abans hem de comprovar que $\Psi_1(U)$ és un obert de S^2 amb la topologia relativa. I això és cert ja que

$$\Psi_1(U) = S^2 \cap W$$

amb $W = \mathbb{R}^3 \setminus C$ obert de $\mathbb{R}^3$, ja que C és tancat.

Per calcular la inversa de Ψ_1 observem que cada punt $(x, y, z) \in \Psi_1(U)$ determina un únic angle $\varphi \in (0, \pi)$ tal que $\varphi = \arccos\frac{z}{R}$. La funció arccos : $(-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$ és contínua i bijectiva. Això permet definir

$$\Psi_1^{-1}(x, y, z) = (\arccos\frac{z}{R}, \arctan\frac{y}{x})$$

que és contínua.

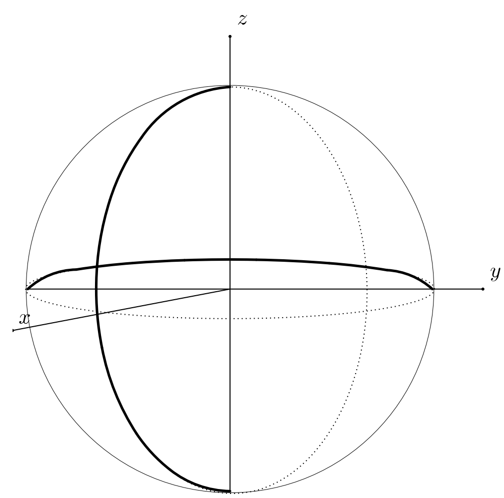
2) Immersió. La diferencial està donada per la matriu jacobiana

$$\begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

i és fàcil veure que les dues columnes d'aquesta matriu són linealment independents.

Finalment, si el punt P considerat a l'inici pertany a C només hem de repetir els anteriors càlculs però agafant ara com carta local

$$\Psi_2(\varphi,\theta) = (-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\varphi, R\sin\varphi\sin\theta)$$



En aquest cas cap dels punts de la semicircumferència tancada

$$\{(x,y,z) \in S^2_R; z = 0, x \leq 0\}$$

pertany a $\Psi_2(U)$. Com $\Psi_1(U) \cup \Psi_2(U) = S^2_R$tot punt $P \in S^2$ està en una de les dues hipòtesis considerades. $\square$

Proposició 4.1.6 (Definició equivalent de superfície) *Un subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ és una superfície si i només si per cada punt $P \in S$ existeix un entorn obert V de P a $\mathbb{R}^3$, i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$ amb $h(V)$ obert de $\mathbb{R}^3$ tal que*

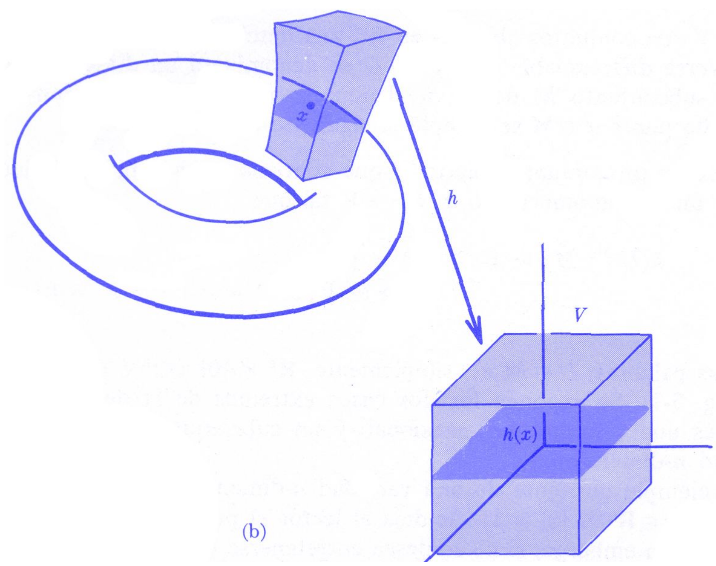
$$h(V \cap S) = h(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \tag{4.1}$$

Demostració. Suposem primer que S és una superfície i sigui (U, φ) una carta local amb $P = \varphi(p)$, $p \in U$. Com $d\varphi_p$ és injectiva sabem, pel teorema d'estructura de les immersions locals, Teorema 2.1.1, que existeix un entorn obert V de P a $\mathbb{R}^3$, i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$ amb $h(V)$ obert de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$h(V \cap \varphi(U)) = h(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

A més,en aquest obert, $h(\varphi(u, v)) = (u, v, 0)$.

Prenent V prou petit[4] com perquè $V \cap \varphi(U) = V \cap S$ hem acabat.



Dibuix de Spivak, [32]. La seva V és la nostra $h(V)$.

Recíprocament, si per a cada $P \in S$ existeix un entorn obert V de P a $\mathbb{R}^3$ i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$ que compleix la igualtat 4.1, podem construir una carta local (U, φ) que contingui P prenent com obert

$$U = i^{-1}(h(V) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u, v, 0) \in h(V)\},$$

on $i(u, v) = (u, v, 0)$ (U és obert per ser la anti-imatge d'un obert de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$) i com aplicació

$$\varphi = h^{-1} \circ i : U \longrightarrow V \cap S.$$

[4]Com $\varphi(U)$ és un obert de S amb la topologia induïda, existeix $\tilde{U}$ obert de $\mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(U) = \tilde{U} \cap S$. Només hem d'agafar $V \subset \tilde{U}$.

En particular $h(\varphi(u,v)) = (u,v,0)$. És clar que (U,φ) és una carta local (vegeu [32]). $\square$

Observeu que, tal com hem construït h, compleix $h(\varphi(u,v)) = (u,v,0)$.

4.2 Gràfiques de funcions

En aquesta secció i la següent veurem un parell de situacions que donen lloc a superfícies: les gràfiques de funcions i les antiimatges dels valors regulars.

Proposició 4.2.1 *Sigui $h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable definida sobre l'obert U de $\mathbb{R}^2$. Llavors la gràfica de h*

$$G_h = \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R}; z = h(x,y)\}$$

és una superfície.

Demostració. Considerem $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$\varphi(x,y) = (x,y,h(x,y)).$$

Clarament $\varphi(U) = G$. Per tant només hem de veure que φ és un homeomorfisme sobre la imatge amb diferencial injectiva en cada punt i G serà una superfície amb una sola carta local (U,φ).

Homeomorfisme sobre la imatge. És clar que φ és contínua i injectiva. Falta veure que φ és oberta, o equivalentment, que φ^{-1} és contínua.

Però

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} : & G & \longrightarrow & U \\ & (x,y,h(x,y)) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

consisteix en quedar-se les dues primeres coordenades del punt, i per tant

$$\varphi^{-1} = \pi_{|G}$$

on $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és la projecció canònica

$$\pi(x,y,z) = (x,y).$$

Com π és contínua i la restricció d'una aplicació contínua és contínua, φ^{-1} és contínua.

Diferencial injectiva. La matriu de $d\varphi_Q$, $Q \in U$, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(les derivades en el punt Q) que té clarament rang 2. $\square$

La Proposició 4.2.1 té una mena de recíproc:

Proposició 4.2.2 *Tota superfície és, localment, la gràfica d'una funció.*

Demostració. Sigui (U, φ) una parametrització local de S, i sigui $P = \varphi(Q)$ amb $Q \in U$. Com que la matriu de $d\varphi_Q$ té rang 2 un dels tres determinats

$$\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2)}{\partial(u, v)}; \quad \frac{\partial(\varphi^1, \varphi^3)}{\partial(u, v)}; \quad \frac{\partial(\varphi^2, \varphi^3)}{\partial(u, v)};$$

és diferent de zero en el punt Q.

Permutant si cal les variables podem suposar que el que és diferent de zero és el primer. Veurem que llavors podem posar localment $z = f(x, y)$, per a una certa funció diferenciable f, i la superfície serà doncs localment la gràfica de f.

En efecte, aplicant el teorema de la funció inversa, pàgina 17, a l'aplicació

$$h = (\varphi^1, \varphi^2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donada per

$$h(u, v) = (\varphi^1(u, v), \varphi^2(u, v)),$$

cosa que podem fer perquè dh_Q és isomorfisme, sabem que existeix un entorn obert V de Q a U tal que $W = h(V)$ és un entorn obert de $h(Q)$ a $\mathbb{R}^2$ i

$$h : V \longrightarrow W$$

és un difeomorfisme.

Llavors $\varphi(V)$ és la gràfica G_f de la funció $f = \varphi^3 \circ h^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}$, ja que

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in W\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)); (x, y) = h(u, v), (u, v) \in V\} \\ &= \{(\varphi^1(u, v), \varphi^2(u, v), \varphi^3(u, v)); (u, v) \in V\} \\ &= \varphi(V). \qquad \square \end{aligned}$$

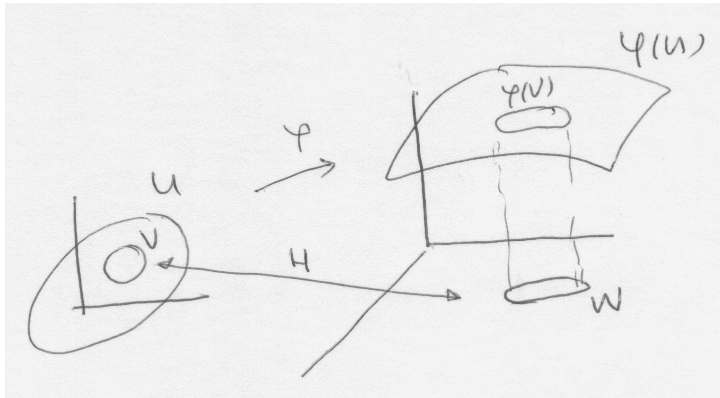


Figura 4.1: Localment gràfica

Nota 4.2.3 La frase "permutant si cal les variables" que hem usat més amunt implica que hem demostrat que tota superfície és gràfica d'una funció del tipus $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, o $x = h(y, z)$.

Exemple 4.2.4 L'esfera no és la gràfica d'una funció, en canvi l'hemisferi nord és la gràfica de $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

4.3 Valors regulars

És molt útil saber que l'antiimatge d'un valor regular[5] és una superfície. En aquest cas, a diferència de la situació que tenim per a gràfiques de funcions, necessitarem en general més d'una carta per recobrir-la. Concretament

Proposició 4.3.1 *Sigui $f : W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable sobre l'obert W, i sigui $a \in \mathbb{R}$ tal que $df_P \neq 0$ per a tot $P \in f^{-1}(a)$. Llavors $S = f^{-1}(a)$ és una superfície.*

Demostració. La condició $df_P \neq 0$ ens diu que df_P és exhaustiva. Pel teorema d'estructura de les submersions locals, Teorema 2.2.1, pàgina 25, existeix un obert V de $\mathbb{R}^3$ i un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V) \subset W$, amb $P \in h(V)$, i

[5] Un punt $a \in \mathbb{R}^m$ és un valor regular de $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si en tot punt P de la fibra de a, $P \in F^{-1}(a)$, la diferencial de F en P, dF_P, és exhaustiva.

$h(V)$ obert de W, tal que

$$f(h(x,y,z)) = x.$$

Com $P \in h(V)$ existeix $Q = (q_1, q_2, q_3) \in V$ tal que $P = h(Q)$. Aplicant f veiem que ha de ser $q_1 = a$, ja que

$$a = f(P) = f(h(Q)) = q_1.$$

Prenem

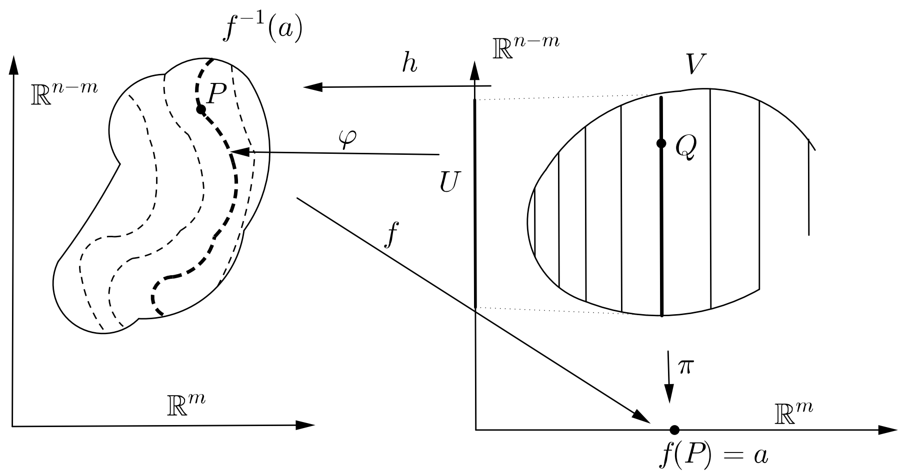
$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; (a,u,v) \in V\},$$

i $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$\varphi(u,v) = h(a,u,v).^6$$

Observem que $U \neq \emptyset$ ja que $(q_2, q_3) \in U$. Clarament $\varphi(U) \subset f^{-1}(a)$ ja que $f(h(a,u,v)) = a$.

Observem que $\varphi(U) = h(V) \cap f^{-1}(a)$, i és per tant un obert de $S = f^{-1}(a)$ amb la topologia relativa.



---

[6]Per tal com hem construït h en el teorema d'estructura de les submersions locals, pàgina 25, sabem que és de la forma $h(x,y,z) = (*,y,z)$. Per tant, la carta local de la superfície $f(x,y,z) = a$ es construeix agafant dues de les variables com a paràmetres i aïllant la tercera a l'equació $f(x,y,z) = a$. Per exemple, si podem agafar y,z com a paràmetres (amb la notació habitual $y = u, z = v$) tenim

$$\varphi(y,z) = h(a,y,z) = (x(a,y,z), y, z)$$

amb $f(x(a,y,z),y,z) = a$. És justament el Teorema de la Funció Implícita: x queda definida implícitament coma funció de y i z per la condició $f(x,y,z) = a$.

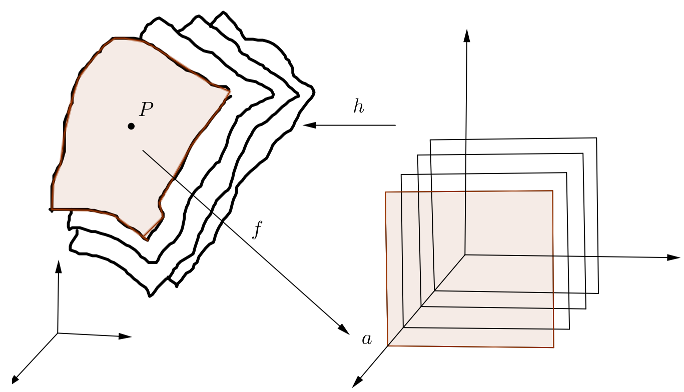
Les dues condicions que ha de complir φ per tal de que (U, φ) sigui carta local són

1) $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ homeomorfisme. És clarament contínua i injectiva. Per veure que és homeomorfisme sobre la imatge falta veure que φ^{-1} és contínua. Però, $\varphi^{-1} = \pi \circ h^{-1}_{|\varphi(U)}$, on $\pi(x, y, z) = (y, z)$, de manera que φ^{-1} és contínua, per ser composició d'aplicacions contínues (la restricció d'una contínua és contínua).

2) $d\varphi_P$ injectiva, per a tot $P \in U$. La matriu de $d\varphi_P$ està formada per dues de les columnes de dh_Q que són doncs linealment independents. De fet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial h}{\partial u}(a, u, v), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial h}{\partial v}(a, u, v). \quad \square$$

Si $n = 3$ i $m = 1$ el dibuix és més o menys així:



Submersió amb $n = 3$ i $m = 1$.

Exemple 4.3.2 *Donada la funció $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, estudiem si el conjunt*

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = a\}$$

amb $a \in \mathbb{R}$, és o no una superfície.

Solució. La diferencial de f en $P = (x, y, z)$ té per matriu, respecte de les bases canòniques,

$$df_P = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

i per tant podem assegurar que $df_P \neq 0$ en tot punt diferent de l'origen. Si $a \neq 0$ l'origen no pertany a $f^{-1}(a)$, i per tant $df_P \neq 0$ en tot punt de $f^{-1}(a)$. Per la Proposició 4.3.1 el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ tals que

$$x^2 + y^2 - z^2 = a, \quad a \neq 0,$$

és una superfície. Es tracta d'un hiperboloide de revolució, d'un full si $a > 0$ o de dos fulls si $a < 0$.

Si volem explicitar les cartes locals d'aquest hiperboloide, seguint la demostració del teorema, només hem de recordar que existeix un difeomorfisme $h : V \longrightarrow h(V)$ amb V i $h(V)$, oberts de $\mathbb{R}^3$, tal que $f(h(x, y, z)) = x$.

Podem escriure h explícitament, ja que és l'inversa local de l'aplicació

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

donada per

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, y, z).$$

Per tal de poder afirmar que dg_P és isomorfisme només ens cal que la primera component de P sigui diferent de zero.[7] Observem que $h = g^{-1}$ està donada per

$$h(x, y, z) = (\sqrt{x - y^2 + z^2}, y, z).$$

Llavors prenem

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (a, u, v) \in V\}$$

i

$$\varphi(u, v) = h(a, u, v) = (\sqrt{a - u^2 + v^2}, u, v).$$

Ja es veu doncs que, tal com hem dit en el peu de pàgina 6, pàgina 93, *a la pràctica per trobar la carta local la única cosa que farem és fixar dues de*

[7] Si fos la segona component de P la que fos diferent de zero hauríem d'agafar

$$g(x, y, z) = (x, x^2 + y^2 - z^2, z).$$

A això ens referíem quan dèiem "canviant si cal el nom de les coordenades" en la demostració del teorema d'estructura de les submersions locals, pàgina 21.

les variables, per exemple y, z com coordenades u, v, i aïllar (si es pot) la x de l'equació $x^2 + y^2 - z^2 = a$. És el Teorema de la Funció Implícita.

El signe de l'arrel quadrada es determina segons el punt P que estem considerant tingui primera component positiva o negativa.

Però aquesta Proposició no diu res en el cas $a = 0$, és a dir, sobre $f^{-1}(0)$, perquè hi ha un punt en aquesta fibra (el $(0, 0, 0)$) on $df_P = 0$.

Aquest conjunt, $x^2 + y^2 = z^2$ és un con de revolució, que no és localment homeomorf al pla (si prenem un entorn del punt $(0, 0, 0)$ en el con i traiem aquest punt obtenim un subconjunt disconnex, mentre que en el pla si traiem un punt d'un entorn obert d'un punt obtenim un subconjunt connex).

Si prenem

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2; z > 0\}$$

llavors sí que tenim una superfície, com es veu aplicant la Proposició 4.3.1 a la mateixa funció f abans considerada però definida ara a l'obert $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Si en lloc de posar $z > 0$ posem $z \neq 0$ obtenim també una superfície, però no connexa. □

4.4 Funcions diferenciables sobre superfícies

Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular. Sabem, dels cursos d'Anàlisi, què vol dir que una aplicació definida sobre un obert de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ sigui diferenciable. Però com que una superfície de $\mathbb{R}^3$ no és un obert de $\mathbb{R}^3$, no sabem en principi què vol dir que una aplicació $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ sigui diferenciable. Donem la definició següent.

Definició 4.4.1 *Direm que una aplicació $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en un punt $P \in S$ si existeix una parametrització*[8] *local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, amb $P \in \varphi(U)$, tal que l'aplicació $\tilde{f} = f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en el punt Q tal que $\varphi(Q) = P$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[8]Veurem que si val per a una parametrització val per totes, Proposició 4.4.4.

Com sempre, es diu que $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en un obert V de S si és diferenciable en cada punt de V.

I també com sempre, es diu que una aplicació de $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és diferenciable si cadascuna de les seves k components és diferenciable. Equivalentment, quan $f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és diferenciable.

En particular, $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ és diferenciable ja que $\varphi^{-1} \circ \varphi$ és la identitat, i per tant diferenciable. Podem dir, doncs, que φ és un difeomorfisme en el sentit de que és una aplicació diferenciable amb inversa diferenciable entre un obert de $\mathbb{R}^2$ i un obert de la superfície.

Però que φ^{-1} sigui diferenciable, segons la definició 4.4.1, no és massa important, el que és important és que φ^{-1} *és, localment, la restricció a la superfície d'una aplicació diferenciable definida en un obert de* $\mathbb{R}^3$. Concretament tenim la proposició següent.

Proposició 4.4.2 *Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una carta local d'una superfície S. Per cada punt $Q \in U$, existeix un entorn obert V de $P = \varphi(Q)$ a $\mathbb{R}^3$ i una aplicació diferenciable $g : V \longrightarrow U$ tal que $g(V)$ és obert de U i tal que, sobre $V \cap \varphi(U)$, $g = \varphi^{-1}$.*

Demostració. Apliquem el Corol·lari 2.1.2, pàgina 23, a φ. $\square$

Corol·lari 4.4.3 *Sigui (V, ψ) una carta local d'una superfície S i sigui U un obert de $\mathbb{R}^k$, per algun k, i sigui $f : U \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable. Llavors $\psi^{-1} \circ f : U \longrightarrow V$ és diferenciable.*

Demostració. Com sabem, per la Proposició 4.4.2, que ψ^{-1} és *localment* la restricció a la superfície d'una aplicació diferenciable g d'un obert de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, tenim, en un entorn de cada punt de U, $\psi^{-1} \circ f = g \circ f$ i és, per tant, diferenciable per ser composta de diferenciables. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi^{-1} \circ f"'] & S \\
& V \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}
$$

Per exemple, si $\gamma(t)$ és una corba de $\mathbb{R}^3$ amb traça continguda en una carta local $\psi(V)$ de S, és clar, per ser ψ homeomorfisme, que existeix $\alpha(t)$ corba sobre V tal que $\gamma(t) = \psi(\alpha(t))$. Però és $\alpha(t)$ diferenciable? Doncs, justament pel Corol·lari 4.4.3, amb $k = 1$ i $f = \gamma$, com $\alpha = \psi^{-1} \circ \gamma$, aquesta α és diferenciable.

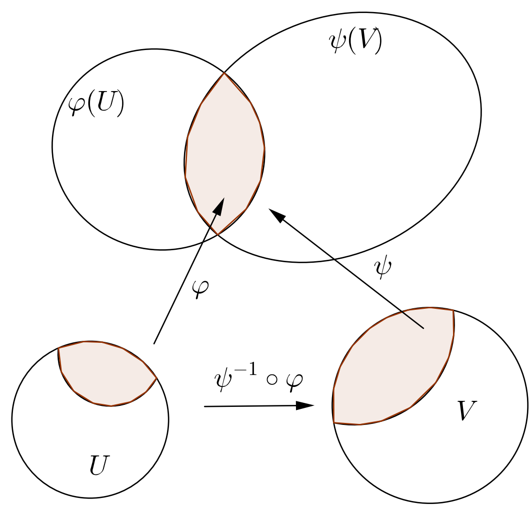
Una remarca important és que si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en P, perquè existeix una carta local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ amb $P \in \varphi(U)$, tal que $f \circ \varphi$ és diferenciable en Q amb $\varphi(Q) = P$ (definició 4.4.1), llavors qualsevol altra parametrització $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, amb $P \in \psi(V)$, compleix que $f \circ \psi$ és diferenciable en Q', amb $\psi(Q') = P$, ja que, en un entorn prou petit de Q', tenim que

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi),$$

i l'aplicació $\varphi^{-1} \circ \psi$, anomenada *canvi de paràmetres* o *canvi de coordenades*, és difeomorfisme local, com veurem a continuació, i per tant $f \circ \psi$ és diferenciable per ser composició de diferenciables.

Proposició 4.4.4 (Canvi de coordenades) *Siguin $\varphi : U \longrightarrow S$ i $\psi : V \longrightarrow S$ dues parametritzacions locals d'una superfície S a l'entorn d'un punt $P \in S$, i denotem $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$. Aleshores, l'aplicació $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \longrightarrow \psi^{-1}(W)$ és diferenciable, amb inversa $\varphi^{-1} \circ \psi$ diferenciable.*

Demostració. Conseqüència del Corol·lari 4.4.3 amb $f = \varphi$. $\square$



Canvi de coordenades.

El nom *canvi de coordenades* prové de que si un punt $P \in S$ és de la forma $P = \varphi(u_0, v_0)$ es diu que P té coordenades (u_0, v_0), respecte de φ. Però pot ser que el mateix punt s'escrigui com $P = \psi(u_1, v_1)$ respecte d'una altra carta local ψ, i llavors P té coordenades (u_1, v_1), respecte de ψ.

Les relació entre (u_0, v_0) i (u_1, v_1) està donada justament per

$$(u_1, v_1) = \psi^{-1} \circ \varphi(u_0, v_0)$$

i per això $\psi^{-1} \circ \varphi$ es diu *canvi de coordenades.*

4.5 Espai tangent

Definició 4.5.1 *Sigui P un punt d'una superfície S. L'espai tangent a la superfície en P, T_PS, és el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ format pel vectors tangents en P de totes les corbes sobre S que passen per P.*

És a dir

$$T_PS = \{v \in \mathbb{R}^3; \exists \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S \text{ diferenciable }, \alpha(0) = P, v = \alpha'(0)\}.$$

Veurem a continuació que T_PS és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Proposició 4.5.2 *Sigui P un punt d'una superfície S. L'espai tangent a la superfície en P, T_PS, és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 2.*

Demostració. Sigui (U, φ) una carta local amb $P \in \varphi(U)$. Les corbes sobre S que passen per P es poden escriure com $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$, on $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ és una corba de U. En efecte, pel Corol·lari 4.4.3 amb $k = 1$, sabem que $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma$ és diferenciable.

Prenem una d'aquestes corbes i suposem que $P = \varphi(u_0, v_0)$ i $\alpha(t_0) = (u_0, v_0)$ de manera que $\gamma(t_0) = \varphi(\alpha(t_0)) = P$.

Per calcular el vector tangent en el punt P només hem de derivar,

$$\frac{d\varphi(\alpha(t))}{dt}_{|t=t_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)} \frac{du}{dt}_{|t=t_0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)} \frac{dv}{dt}_{|t=t_0} \tag{4.2}$$

Ara bé,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)} = \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^3}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)}$$

és el vector tangent a la corba $\varphi(u_0 + t, v_0)$ en $t = 0$, i

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)} = \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^3}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)}$$

és el vector tangent a la corba $\varphi(u_0, v_0 + t)$ en $t = 0$.

Així doncs, la igualtat (4.2) diu que tot vector tangent a la superfície en P és combinació lineal dels dos vectors de $\mathbb{R}^3$ (linealment independents per definició de superfície) tangents a la superfície en P

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)}, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)}$$

Recíprocament, qualsevol combinació lineal d'aquests vectors

$$\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)} + \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)}$$

és vector tangent en P a una corba sobre la superfície, concretament a la corba $\varphi(u_0+\lambda t, v_0+\mu t)$, en $t=0$.

Així, doncs, hem vist que

$$T_P S = \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)}, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) \right\rangle,$$

per a qualsevol[9] carta local que contingui P.

Com P és arbitrari tenim que

$$T_{\varphi(u,v)} S = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle. \quad \square$$

El pla de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ que passa pel punt P i té espai vectorial director $T_P S$ es diu pla (afí) tangent a la superfície en P. Per tant, la seva equació és

$$X = P + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{|(u_0,v_0)} + \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Aquesta distinció entre subespai vectorial i subespai afí també s'ha donat en estudiar corbes: la corba $\gamma(t)$ té vector tangent en $t=t_0$ el vector $\gamma'(t_0)$ i recta tangent $\gamma(t_0) + \langle \gamma'(t_0) \rangle$.

Observem finalment que si S està donada com els zeros d'una certa funció $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, essent 0 valor regular, llavors

$$T_P S = \nabla f(P)^{\perp},$$

(vegeu l'exercici 4.7.5).

[9] La definició de $T_P S$ no depèn de les cartes locals.

Nota 4.5.3 Si (U, φ) és una carta local de S, com φ és una aplicació diferenciable de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, té perfecte es sentit considerar la seva diferencial $d\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en un punt $Q \in U$. Però per la Proposició 2.0.3, podem escriure $d\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_P S$ i per ser la diferencial de φ injectiva aquesta aplicació és un isomorfisme i

$$d\varphi_Q(\mathbb{R}^2) = T_P S, \quad P = \varphi(Q).$$

Nota 4.5.4 (Notació) Per simplificar la notació escriurem també

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

o, si ens convé especificar el punt,

$$\varphi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0); \quad \varphi_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

4.6 Diferencial d'una aplicació entre superfícies

Recordem que ja sabem què vol dir que una aplicació d'una superfície S a $\mathbb{R}^k$ sigui diferenciable (definició 4.4.1 component a component).

Com una aplicació entre dues superfícies és en particular una aplicació de la primera superfície a $\mathbb{R}^3$ té sentit dir que una aplicació entre superfícies és diferenciable. Concretament,

Definició 4.6.1 *Una aplicació $F : S_1 \longrightarrow S_2$ entre dues superfícies es diu que és diferenciable si és diferenciable com aplicació de S_1 a $\mathbb{R}^3$.*

En particular, si (U, φ) és una carta de S_1, l'aplicació $F \circ \varphi : U \longrightarrow S_2$ és diferenciable (com aplicació de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$).

També es pot dir que F és diferenciable quan la *seva expressió en coordenades* és diferenciable. Concretament,

Proposició 4.6.2 *Una aplicació $F : S_1 \longrightarrow S_2$ entre dues superfícies és diferenciable si i només si per a tota carta local (U, φ) de S_1 i tota carta local (V, ψ) de S_2 amb $F(\varphi(U)) \subseteq \psi(V)$ l'aplicació $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : U \longrightarrow V$ és diferenciable.*

Demostració. Suposem primerament que F és diferenciable com aplicació de S_1 a $\mathbb{R}^3$. Per definició tenim que $F \circ \varphi$ és diferenciable. Pel Corol·lari 4.4.3 hem acabat.

Recíprocament, ara sabem que $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ és diferenciable. Composant amb ψ deduïm que $F \circ \varphi$ és diferenciable. $\square$

Ara voldríem parlar de la diferencial d'aquesta aplicació. No ho podem fer a partir de la Definició 2.0.1, pàgina 13, ja que involucra derivades parcials que ara no tenim ja que F no està definida en un obert de $\mathbb{R}^3$.

En canvi sí que podem usar la definició equivalent de diferencial d'una aplicació donada a la Proposició 2.0.3, pàgina 16.

Concretament tenim la definició següent.

Definició 4.6.3 *Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable entre superfícies i sigui $P \in S_1$. La* diferencial de F en el punt P *és l'aplicació*

$$dF_P : T_P(S_1) \longrightarrow T_{F(P)}S_2$$

donada per

$$dF_P(w) = \frac{d}{dt}_{|t=0} F(\gamma(t)), \quad \forall w \in T_P S_1,$$

on $\gamma(t)$ és una corba sobre S_1 tal que $\gamma(0) = P$ i $\gamma'(0) = w$.

Primera observació. La imatge de $T_P S_1$ per dF_P, en principi un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, està continguda a $T_{F(P)}S_2$. Això és així ja que la corba $F(\gamma(t))$ està clarament continguda a S_2, i per tant, la seva derivada pertany a l'espai tangent corresponent.

Segona observació. És suficient que γ estigui definida en un petit entorn de zero, per exemple sobre $(-\epsilon, \epsilon)$. Que P sigui el punt de paràmetre $t = 0$ i no un altra valor $t = t_0$ és únicament per comoditat. Observeu que si $\gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \longrightarrow S$ és tal que $\gamma(t_0) = P$ i $\gamma'(t_0) = w$ llavors

$$dF_P(w) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} F(\gamma(t)).$$

Tercera observació. Aquesta definició és una bona definició, en el sentit de que no depèn de la corba integral elegida. En efecte, com que $\gamma(t)$ és una corba sobre S_1, si prenem una carta $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, amb $P \in \varphi(U)$, existeix una corba diferenciable $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ sobre U, definida per a valors petits de t, tal que $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$ (vegeu corol·lari 4.4.3, pàgina 97, i comentari posterior).

Llavors $F \circ \varphi$ és una aplicació definida sobre un obert U de $\mathbb{R}^2$, a valors $\mathbb{R}^3$, i per tant podem parlar de la seva diferencial. Es compleix que

$$\begin{aligned} dF_P(w) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} F(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} (F \circ \varphi)(\alpha(t)) \\ &= d(F \circ \varphi)_{\alpha(0)}(\alpha'(0)), \end{aligned} \tag{4.3}$$

i aquest darrer terme només depèn de P i w, i no de α, ja que $\alpha(0)$ queda determinat per la condició $\gamma(0) = P = \varphi(\alpha(0))$ i $\alpha'(0)$ queda determinat per la condició $(d\varphi)_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = w$, ja que la diferencial de φ és injectiva.

Quarta observació. Aquesta aplicació és lineal.

En efecte, tal com hem vist a la nota 4.5.3, l'aplicació $d\varphi_{\alpha(0)}$ és un isomorfisme entre $\mathbb{R}^2$ i T_PS.

Així, la igualtat (4.3), es pot escriure com

$$dF_P(w) = d(F \circ \varphi)_{\alpha(0)} \circ [d\varphi_{\alpha(0)}]^{-1}(w)$$

i dF_P és lineal per ser composició d'aplicacions lineals.[10]

Teorema 4.6.4 (Teorema de la funció inversa per a superfícies) *Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable entre superfícies i suposem que la seva diferencial en P, $dF_P : T_PS_1 \longrightarrow T_{F(P)}S_2$ és isomorfisme. Llavors existeix un entorn obert V_1 de P en S_1 i un entorn obert V_2 de $F(P)$ en S_2 tal que $F : V_1 \longrightarrow V_2$ és difeomorfisme.*

Demostració. Sigui (U_1, φ) una parametrització de S_1, amb $P \in \varphi(U_1)$ i sigui (U_2, ψ) una parametrització de S_2, amb $F(P) \in \psi(U_2)$. L'aplicació $\tilde{F} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ (expressió en coordenades de F) és diferenciable, com es veu immediatament aplicant el Corol·lari 4.4.3 amb $f = F \circ \varphi$.

La seva diferencial és la composta de tres aplicacions lineals injectives[11] i per tant és injectiva, i com va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ és isomorfisme. Pel teorema de

[10]Observem doncs que haguéssim pogut definir directament $dF_P = d(F \circ \varphi)_Q \circ (d\varphi_Q)^{-1}$ que correspon essencialment a pensar $F = (F \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ i aplicar la regla de la cadena.

[11]Hem de pensar les tres diferencials d'acord amb la definició 4.6.3.

la funció inversa aquesta aplicació $\tilde{F}$ és un difeomorfisme local. Existeixen doncs oberts $W_1 \subseteq U_1, W_2 \subseteq U_2$ tals que $\tilde{F} : W_1 \longrightarrow W_2$, és difeomorfisme. Prenent $V_1 = \varphi(W_1)$ i $V_2 = \psi(W_2)$ tenim que $F = \psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$, és a dir, F coincideix sobre V_1 amb la composició $\psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$ de tres aplicacions bijectives i és per tant bijectiva.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "F"] & V_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\tilde{F}"] & W_2 \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Per veure que F^{-1} també és diferenciable només hem d'observar que $F^{-1} = \varphi \circ \tilde{F}^{-1} \circ \psi^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$ i per tant F^{-1} és diferenciable ja que $F^{-1} \circ \psi = \varphi \circ H^{-1}$ que és diferenciable. Per tant l'aplicació diferenciable F és localment bijectiva amb inversa diferenciable, és a dir, és un difeomorfisme local. $\square$

4.7 Exercicis

Exercici 4.7.1 *Suposem S donada com gràfica d'una funció $z = h(x, y)$. Sigui $\pi(x, y, z) = (x, y)$, Demostreu que per a cada punt $P \in S$ la restricció de la diferencial de π a T_PS, $d\pi_{P|T_PS}$, és isomorfisme.*[12]

Solució. La matriu de $d\pi_P$ respecte de les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que $\forall v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $d\pi_P(v)$ és el vector de coordenades

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Per tant, $d\pi_P(v) = 0$ si i només si $v_1 = v_2 = 0$.

Per altra banda, $T_P(S)$ està generat pels vectors $(1, 0, h_x)$, $(0, 1, h_y)$, de manera que si $v = (0, 0, v_3) \in T_P(S)$ ha de ser $v_3 = 0$.

Resumint, $d\pi_P(v) = 0$ implica $v = 0$, per tant $d\pi_P$ és injectiva, i per tant isomorfisme.

[12] El teorema 4.6.4 implica llavors que $\pi_{|S}$ és difeomorfisme local.

Exercici 4.7.2 *Sigui S una superfície. Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, amb U obert de $\mathbb{R}^2$, una aplicació 'candidata' a carta local, de la qual sabem que és diferenciable, injectiva, amb diferencial injectiva en tot punt de U. Demostreu que (U, φ) és carta local, és a dir, que φ és oberta (única condició que ens faltava).*

Solució. Volem veure que

$$\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$$

és contínua. Per a això fixarem $P \in \varphi(U)$ i veurem que existeix un entorn obert de P en $\varphi(U)$ on φ^{-1} coincideix amb una funció contínua. Com la continuïtat és una qüestió local haurem acabat.[13]

Podem suposar, per la Proposició 4.2.2, que existeix un entorn obert V de $\mathbb{R}^2$, i una funció $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que la gràfica de h

$$G_h = \{(x, y, h(x, y)); (x, y) \in V\}$$

és un obert de S (que conté P). Denotem π la projecció sobre les dues primeres components: $\pi(x, y, z) = (x, y)$

Afirmem que $\pi \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és un difeomorfisme local en Q, on $Q \in U$ és el punt tal que $\varphi(Q) = P$.

Pel teorema de la funció inversa només hem de veure que $d(\pi \circ \varphi)_Q$ és isomorfisme.

Però

$$d(\pi \circ \varphi)_Q = d\pi_P \circ d\varphi_Q$$

Com $d\varphi_Q(\mathbb{R}^2) \subset T_P(S)$,

$$d(\pi \circ \varphi)_Q = d\pi_{P|T_P(S)} \circ d\varphi_Q.$$

Així, per l'exercici 4.7.1, $d(\pi \circ \varphi)_Q$ és composta d'aplicacions lineals injectives, i per tant injectiva.

Existeix doncs W entorn obert de Q en U i Ω entorn obert de $(\pi \circ \varphi)(Q) = \pi(P)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\pi \circ \varphi : W \longrightarrow \Omega$$

és difeomorfisme. Denotem f aquest difeomorfisme, és a dir $f = (\pi \circ \varphi)_{|W}$. Observem que $\varphi(W)$ és obert de G_h i per tant obert de S. Això és degut a

[13] Recordem que una funció és contínua en un obert quan és contínua en cada punt d'aquest obert; i que una aplicació entre espais topològics $F : X \longrightarrow Y$ és contínua en un punt $P \in X$ quan per a qualsevol entorn obert W de $F(P)$ en Y existeix un entorn obert V de P en X tal que $F(V) \subset W$.

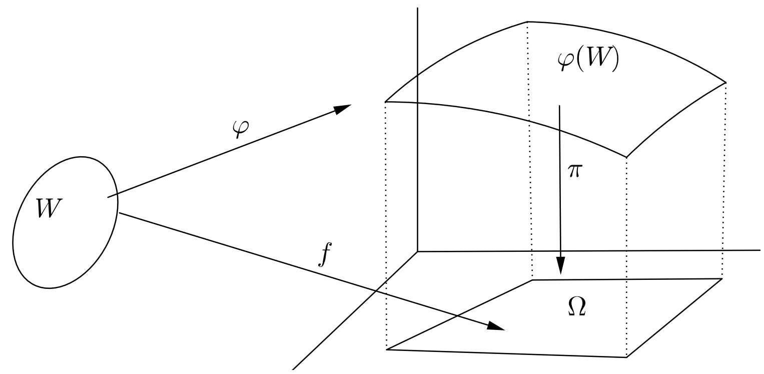


Figura 4.2: Composició de contínues

que $f(W) = \pi(\varphi(W))$ és obert per ser f difeomorfisme, i

$$\varphi(W) = G_h \cap \pi^{-1} f(W).$$

Llavors $\varphi^{-1} : \varphi(W) \longrightarrow W$ compleix que

$$\varphi^{-1} = f^{-1} \circ \pi_{|\varphi(W)},$$

com es veu fàcilment aplicant f als dos costats d'aquesta igualtat. Per tant, φ^{-1} és composta de contínues i per tant contínua.

Exercici 4.7.3 *Sigui S una superfície i U un obert de $\mathbb{R}^k$. Si $F : U \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow S$ i $G : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ són diferenciables, la composta ho és.*

Solució. Observem primerament que aquest enunciat no és evident, ja que no sabem que G sigui diferenciable com aplicació de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^m$. No obstant, localment podem escriure, per la Proposició 4.4.2,

$$G \circ F = (G \circ \varphi) \circ (h \circ F)$$

amb h diferenciable d'un obert de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, tal que $h = \varphi^{-1}$ sobre S, i això sí que és una composició d'aplicacions diferenciables, $h \circ F$ de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^2$, i $G \circ \varphi$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^m$. Aquesta última és diferenciable per ser G diferenciable.

Exercici 4.7.4 (Projecció estereogràfica) *Recobrim l'esfera amb dues cartes, una per la inversa de la projecció estereogràfica des del pol nord sobre el pla per l'equador i l'altre per la inversa de la projecció estereogràfica des del pol sud sobre el pla per l'equador. Escriviu el canvi de coordenades.*

Solució. La projecció estereogràfica

$$\pi_N : S^2_R \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

des del pol nord sobre l'equador[14] d'una esfera de radi R està donada per (s'ha de resoldre una equació de segon grau)

$$\pi_N(x, y, z) = (\frac{Rx}{R - z}, \frac{Ry}{R - z}, 0)$$

La seva inversa, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2_R$, està donada per

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + R^2}(2xR^2, 2yR^2, R(x^2 + y^2 - R^2))$$

i és una carta local o parametrització de S^2_R. El pol nord no pertany a $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

La projecció estereogràfica

$$\pi_S : S^2_R \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

des del pol sud sobre l'equador d'una esfera de radi R està donada per

$$\pi_S(x, y, z) = (\frac{Rx}{R + z}, \frac{Ry}{R + z}, 0)$$

La seva inversa, $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2_R$, està donada per

$$\psi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + R^2}(2xR^2, 2yR^2, -R(x^2 + y^2 - R^2))$$

i és una carta local o parametrització de S^2_R. Només hem canviat el signe de la tercera component, com és clar geomètricament.

El pol sud no pertany a $\psi(\mathbb{R}^2)$.

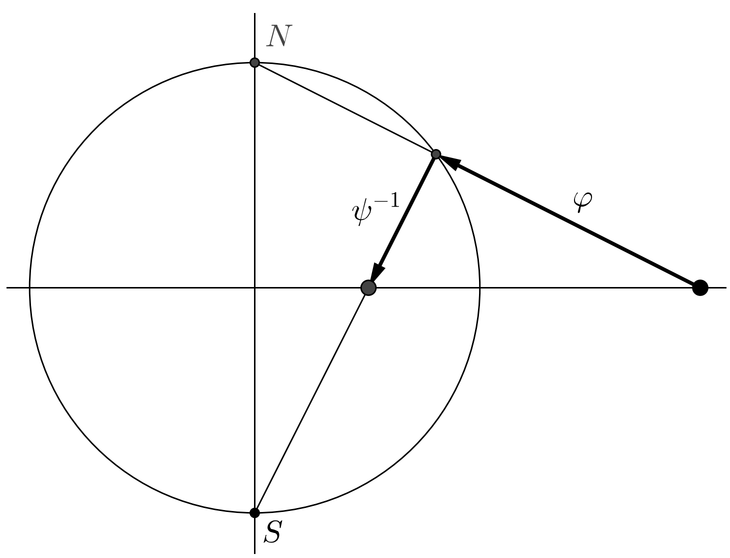
[14] Coincideix amb la inversió respecte de l'esfera de centre $(0, 0, R)$ i radi $\sqrt{2}R$.

Denotem, com a la Proposició 4.4.4, $W = \varphi(\mathbb{R}^2) \cap \psi(\mathbb{R}^2)$. Observem que $W = S^2_R \setminus \{N, S\}$. L'aplicació de canvi de coordenades és l'aplicació $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \longrightarrow \psi^{-1}(W)$, per tant

$$\psi^{-1} \circ \varphi(x, y) = \pi_S \circ \varphi(x, y) = (\frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}).$$

A aquest resultat hi podem arribar sense cap càlcul. En efecte, només hem d'observar que el triangle format pel centre de la circumferència, el pol sud S i el punt $\psi^{-1} \circ \varphi(x, y)$ és semblant al triangle format pel centre de la circumferència, el pol nord N i el punt $(x, y, 0)$. Escrivint que els costats corresponents són proporcionals obtenim que $\psi^{-1} \circ \varphi(x, y)$ és l'invers de (x, y) respecte S^2_R. Per tant , directament,

$$\psi^{-1} \circ \varphi(x, y) = (\frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}).$$



Com que

$$\varphi^{-1}(W) = \psi^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

l'aplicació de canvi de coordenades és diferenciable, com diu la Proposició 4.4.4.

Exercici 4.7.5 *Sigui* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable i sigui* a *un valor regular de* f*. Demostreu que l'espai tangent afí a la superfície* S *donada per* $f(x, y, z) = a$ *en el punt* $P \in S$ *és*

$$\langle X - P, \nabla f(P)\rangle = 0.$$

Solució. Aquest pla és el pla que passa per P amb espai vectorial director $\nabla f(P)^{\perp}$. Tot està, doncs, en demostrar que $T_P S = \nabla f(P)^{\perp}$.

Si $\varphi(u, v)$ és una carta local de $f^{-1}(a)$ tenim que

$$f(\varphi(u, v)) = a.$$

Per la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^3}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^3}{\partial v} &= 0,
\end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\rangle &= 0 \\
\langle \nabla f \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\rangle &= 0
\end{aligned}$$

i per tant, com sabem que, per tot $P \in S$, $T_P S = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(Q), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(Q)\rangle$, amb $P = \varphi(Q)$, tenim $T_P S = \nabla f(P)^{\perp}$ com volíem.

Capítol 5

Primera forma fonamental

5.1 Definició

Definició 5.1.1 *Sigui P un punt d'una superfície S. La* primera forma quadràtica fonamental *de S en P és la restricció a T_PS del producte escalar de $\mathbb{R}^3$. És a dir,*

$$\begin{array}{rccc} I_P: & T_PS \times T_PS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X, Y & \mapsto & \langle X, Y \rangle \end{array}$$

Així, doncs, la primera forma fonamental I_P de S en P és una aplicació bilineal simètrica definida positiva, definida a l'espai vectorial T_PS. Podem aplicar-li doncs tots els resultats sobre aquestes aplicacions dels cursos d'àlgebra. Per exemple, si fixem una base de T_PS podem parlar de la matriu de I_P en aquesta base.

Càlculs en coordenades

Si tenim una parametrització (U, φ) de S, la base més natural de considerar a l'espai tangent $T_{\varphi(u,v)}S$ és la formada pels vectors

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$$

La notació introduïda per Gauss i universalment acceptada per a la matriu de I_P en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

és a dir,
$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.$$
Com aquests productes escalars són funcions sobre l'espai de paràmetres U, E, F, G són funcions sobre U. Quan $F = 0$ sobre U diem que tenim un sistema de coordenades ortogonal.

Recordem que si volem calcular el producte escalar de dos vectors $X, Y \in T_P S$, amb $X = a\varphi_u + b\varphi_v$, $Y = c\varphi_u + d\varphi_v$, només hem de fer
$$I_P(X, Y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

És habitual utilitzar la mateixa notació I_P per referir-nos tant a l'aplicació multilineal com a la seva matriu.

Així posarem
$$I_{\varphi(u,v)} = \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}$$
per referir-nos a aquesta matriu de funcions. No obstant, en molts cassos en que no hi ha ambigüitat encara simplifiquem més la notació i escriurem
$$I_\varphi = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$
o simplement
$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Longitud d'una corba sobre la superfície

El coneixement dels coeficients E, F, G com funcions sobre U, permet calcular la longitud d'una corba continguda a $\varphi(U) \subset S$. En efecte, si $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ és una corba sobre la superfície i coneixem la primera forma fonamental en tots els punts de $\gamma(t)$ podem calcular la seva longitud, entre els punts de paràmetres $t = a$ i $t = b$, ja que
$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$
però com que, per la regla de la cadena,
$$\gamma'(t) = u'\varphi_u(u(t), v(t)) + v'\varphi_v(u(t), v(t)),$$

que escriurem per simplificar només com

$$\gamma\,'(t) = u'\varphi_u + v'\varphi_v,$$

resulta que

$$\|\gamma\,'(t)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}} = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

amb $E = E(u(t), v(t)), F = F(u(t), v(t)), G = G(u(t), v(t))$.

Per tant

$$L = \int_a^b \|\gamma\,'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$$

Per tant, per poder calcular la longitud d'una corba sobre una superfície només hem de conèixer el valor dels coeficients de la primera forma fonamental sobre els punts de la corba, i el seu vector tangent.

Observem que denotant $s(t)$ el paràmetre arc

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$$

tenim

$$(\frac{ds}{dt})^2 = E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2$$

que, per simplificar la notació, escriurem ometent els denominadors com[1]

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2.$$

[1]Gauss, en el *Disquisitiones* [14], utilitza la notació p, q en lloc de les nostres u, v, i a la secció 12 diu: "*Si observem que es té sempre*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2,$$

es veu immediatament que $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ *és l'expressió general d'un element lineal sobre una superfície corba. Per tant, l'anàlisi feta a l'article precedent ens ensenya que per a trobar la mesura de curvatura no calen fórmules finites que expressin les coordenades* x, y, z *com a funcions de les indeterminades* p, q, *sinó que és suficient conèixer l'expressió general de la longitud de cada element lineal. Procedim a algunes aplicacions d'aquest teorema tan important.*"

Observem que si pensem la corba com $(x(t), y(t), z(t))$ llavors

$$(\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2$$

i per això Gauss escriu $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Exemple 5.1.2 *Calculem la longitud del paral·lel de colatitud φ_0 de l'esfera de radi R.*

Solució. És evident que la resposta és $2\pi R\sin\varphi_0$ però fem els càlculs amb integrals com exercici. La parametrització habitual de l'esfera de radi R és

$$\begin{aligned} x &= R\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= R\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= R\cos\varphi. \end{aligned}$$

Equivalentment, la carta local

$$\Psi : (0,\pi)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

està donada per

$$\Psi(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} &= (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi), \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} &= (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0). \end{aligned}$$

Així, en aquestes coordenades, amb ordre (φ,θ), la primera forma fonamental és

$$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2\sin^2\varphi.$$

El paral·lel donat es pot parametritzar per θ, és a dir, és la imatge per la parametrització de la corba $\gamma(\theta) = (\varphi_0,\theta)$.[2] El vector tangent és doncs $\gamma'(\theta) = (0,1)$. I per tant[3]

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2\varphi_0}\, d\theta = 2\pi R\sin\varphi_0.$$

[2] Estem aplicant la teoria amb $t=\theta, u(t)=\varphi_0, v(t)=\theta$.

[3] Recordem que en l'expressió de L, E, F, G estan valorades sobre la corba.

5.2 Àrea

Per poder parlar d'àrea d'un subconjunt d'una superfície S aquest subconjunt ha de ser 'prou bo'. Concretament integrarem sobre *regions*. Un *domini*[4] D de S és un subconjunt obert i connex tal que la seva vora, com subconjunt de S, és la traça d'una corba diferenciable, regular a troços i tancada. Una *regió* és la unió d'un domini amb la seva frontera.

Definició 5.2.1 *L'àrea d'una regió R continguda en una carta local (U, φ) està donada per*

$$A(R) = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2}du\, dv$$

on $\varphi(Q) = R$.

Observem, abans de res, que per la igualtat de Lagrange[5]

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2},$$

i per tant

$$A(R) = \int\int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du\, dv$$

Proposició 5.2.2 *L'àrea d'una regió no depèn de la carta on està continguda.*

Demostració. Suposem que una certa regió R està continguda a $\varphi(U) \cap \psi(V)$, on (U, φ) i (V, ψ) són cartes locals de S. Sigui $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ el canvi de variable. Si denotem (u, v) les coordenades cartesianes a U i (x, y) les coordenades cartesianes a V, tenim

$$\varphi(u, v) = \psi(h(u, v)) = \psi(h^1(u, v), h^2(u, v)),$$

i, per la regla de la cadena,

---

[4]En general un subconjunt D de $\mathbb{R}^n$ és un *domini amb frontera regular* si coincideix amb l'adherència dels seus punts interiors i la frontera és una subvarietat de dimensió $n - 1$. Nosaltres no parlarem de subvarietat fins més endavant.

[5]Si a, b, c, d són vectors de $\mathbb{R}^3$ es compleix que $\langle a \wedge b, c \wedge d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$. En particular, $\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$ igualtat coneguda com *identitat de Lagrange*.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\circ h\cdot\frac{\partial h^1}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\circ h\cdot\frac{\partial h^2}{\partial u}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\circ h\cdot\frac{\partial h^1}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\circ h\cdot\frac{\partial h^2}{\partial v}
\end{aligned}
$$

La fórmula del canvi de base per a aplicacions bilineals ens diu que

$$I_\varphi = M^t I_\psi M,$$

on I_φ és la matriu de la primera forma fonamental respecte la base $(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v})$, I_ψ és la matriu de la primera forma fonamental respecte la base $(\frac{\partial\psi}{\partial x}\circ h,\frac{\partial\psi}{\partial y}\circ h)$, i M és la matriu del canvi de base, que en el nostre cas és

$$M=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h^1}{\partial u} & \dfrac{\partial h^1}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial h^2}{\partial u} & \dfrac{\partial h^2}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Observem que M és la matriu jacobiana de h. Per tant escriurem $\det M = J_h$.

En particular,[6]

$$\det I_\varphi = \det I_\psi\cdot\det(M)^2 = \det I_\psi\cdot J_h^2.$$

Denotant E,F,G els coeficients de la primera forma fonamental respecte la parametrització (U,φ) i E',F',G' els coeficients de la primera forma fonamental respecte de la parametrització (V,ψ), tenim

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{E'G'-F'^2}\circ h\cdot|J_h|.$$

Definim regions Q i Q' per la condició $\varphi(Q)=R$ i $\psi(Q')=R$. En particular, $h(Q)=Q'$. Pel teorema del canvi de variable,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{h(Q)}\sqrt{E'G'-F'^2}dx\,dy &= \int\int_Q\sqrt{E'G'-F'^2}\circ h\cdot|J_h|du\,dv\\
&= \int\int_Q\sqrt{EG-F^2}du\,dv. \quad \square
\end{aligned}
$$

[6] Això és directe amb Lagrange.

Exemple 5.2.3 *Calculem l'àrea de l'esfera de radi R.*

Solució. Amb la notació de l'exercici 512 tenim que

$$A = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = 4\pi R^2.$$

Comentari. Aquí estem fent la "trampa habitual" següent. La regió sobre la que integrem ha d'estar continguda en el domini U de definició de la carta, en aquest cas $(0,\pi)\times(0,2\pi)$. Prenem per exemple $[\epsilon,\pi-\epsilon]\times[\epsilon,2\pi-\epsilon]$. Llavors, per definició d'integral sobre oberts tenim

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\pi-\epsilon} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi.$$

Aquest valor representa en realitat l'àrea de l'esfera menys el semicercle format pels punts de l'esfera tals que $x \geq 0, y = 0$. Ara bé, com aquest conjunt té mesura zero assumim que aquest valor és l'àrea de l'esfera.

Justificació geomètrica de la definició d'àrea

La idea geomètrica intuïtiva per definir àrea és dividir la regió R de S en petites regions R_i, de manera que $R = \bigcup R_i$, i que dues d'aquestes regions o no es tallen o es tallen només en punts de la frontera, i aproximar l'àrea de R_i per l'àrea de la seva projecció ortogonal sobre el pla tangent a S en un punt $P_i \in R_i$ prèviament fixat a cada regió.

La idea és similar, però no igual[7] a la definició de longitud d'una corba com límit de poligonals.

[7] Una superfície es pot "aproximar" per superfícies planes a troços però l'àrea de la superfície pot no ser el límit de les àrees d'aquestes superfícies, vegeu [19]. El següent exemple es coneix com el *fanal de Schwarz*, qui el va publicar el 1890. Hi ha fanalets al mercat amb aquesta forma que ara exlicarem. Dividim un cilindre d'altura h en m cilindres d'altura h/m tallant per plans paral·lels a la base. Sobre la base inferior d'un d'aquests cilindres petits hi inscrivim un polígon regular de n costats i sobre la base superior el mateix polígon regular però girat π/n. Unim els vèrtexs així obtinguts de tal manera que tinguem $2n$ triangles, n d'ells amb base a la base inferior i els altres a la base superior. Aquests triangles tenen base $b = 2\sin(\pi/n)$ i altura

$$a = \sqrt{(h/m)^2 + (1-\cos(\pi/n))^2}.$$

l'àrea total és

$$m \cdot 2n \cdot (1/2) 2 \sin(\pi/n) \sqrt{(h/m)^2 + (1-\cos(\pi/n))^2} \simeq 2\pi \sqrt{h^2 + m^2\pi^4/4n^4}.$$

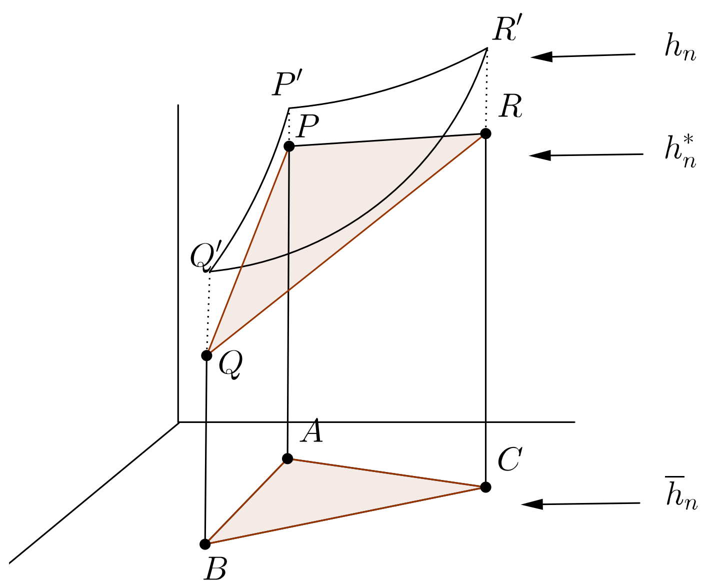
Considerarem[8] una porció H d'una superfície continguda en una carta (U, φ) i tal que la seva projecció ortogonal sobre $z = 0$ sigui bijectiva i tal que en cap dels seus punts la normal a la superfície sigui ortogonal a l'eix de les $z's$.

Per exemple, suposarem que el menor 2×2 no nul de la matriu de $d\varphi$ és

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

que implica que l'aplicació $\pi \circ \varphi$, on $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és la projecció sobre les dues primeres components, és difeomorfisme local.

Denotem $\overline{H}$ la projecció ortogonal de H sobre $z = 0$. Subdividim $\overline{H}$ en petites regions $\overline{h}_n$ i denotem h_n la regió de H que es projecta sobre $\overline{h}_n$. Fixem punts arbitraris $P_n \in h_n$. Denotem h_n^* la projecció en la direcció de l'eix z de h_n sobre el pla tangent $T_{P_n}S$. Com més fina sigui la partició de $\overline{H}$ que considerem més petita serà la diferència entre les àrees de h_n i h_n^*.



Només si $m/n^2 \to 0$ aquesta àrea és l'àrea lateral del cilindre.

[8] Segueixo [19].

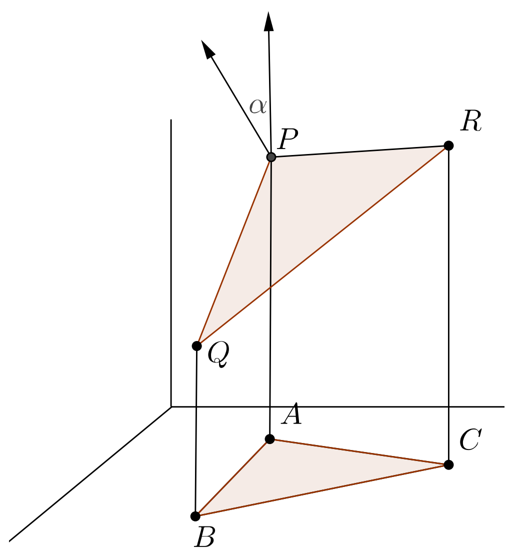
Per veure quina relació hi ha entre les àrees de les regions planes $\overline{h}_n$ i h_n^* veiem els lemes següents.

Lema 5.2.4 *L'àrea de la projecció ortogonal d'un triangle sobre un pla és igual a l'àrea d'aquest triangle multiplicada pel cosinus de l'angle que formen el pla del triangle i el pla sobre el que estem projectant.*

Demostració. Siguin P, Q, R tres punts de $\mathbb{R}^3$ i siguin A, B, C les seves projeccions ortogonals sobre el pla $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Tot està en observar que

$$(\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}) \cdot (0,0,1) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot (0,0,1).$$

En efecte, la tercera component d'aquests dos productes vectorials és la mateixa ja que depèn només de la primera i segona coordenada dels vectors que multipliquem vectorialment[9], i la primera i segona coordenada de P i A, Q i B, R i C són respectivament iguals.



Així,

$$|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}| \cos\alpha = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$$

[9] $(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = (*, *, u_1 v_2 - v_1 u_2)$.

on α és l'angle entre el vetor normal al pla determinat per P, Q, R i el vector normal al pla de projecció, $(0, 0, 1)$. Però com el mòdul del producte vectorial de dos vectors és l'àrea del paral·lelogram que determinen, hem acabat. □

Com a conseqüència tenim

Lema 5.2.5 *L'àrea de la projecció ortogonal d'una regió plana sobre un altre pla és igual a l'àrea d'aquesta regió multiplicada pel cosinus de l'angle que formen el pla que conté aquesta regió i el pla sobre el que estem projectant.*

Demostració. Triangulem aquesta regió en triangles cada cop més petits i passem al límit. □

Així, doncs, la relació entre les àrees de les regions planes $\overline{h}_n$ i h_n^* esta donada per

$$A(h_n^*)\cos\alpha(P_n) = A(\overline{h}_n),$$

on $\alpha(P_n)$ és l'angle entre els plans $z = 0$ i $T_{P_n}S$.

Per calcular aquest cosinus suposarem que la regió H està continguda en una carta local $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de manera que si $P_n = \varphi(Q_n)$, el vector $\varphi_u \wedge \varphi_v$, valorat en el punt Q_n, és normal al pla tangent $T_{P_n}S$. Llavors,

$$(\varphi_u \wedge \varphi_u)\cdot(0,0,1) = |\varphi_u \wedge \varphi_u|\cdot\cos\alpha(P_n) = \sqrt{EG-F^2}(Q_n)\cdot\cos\alpha(P_n),$$

on

$$\sqrt{EG-F^2}(Q_n) = \sqrt{E(Q_n)G(Q_n) - F(Q_n)^2}.$$

Però el primer terme, que és igual a $\det(\varphi_u, \varphi_v, (0,0,1))$, coincideix exactament amb el jacobià J de $\pi \circ \varphi$ en el punt Q_n

$$J(Q_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{|Q_n}$$

i per tant

$$\cos\alpha(P_n) = \frac{J(Q_n)}{\sqrt{EG-F^2}(Q_n)}.$$

Així doncs

$$A(h_n^*) = \frac{\sqrt{EG-F^2}(Q_n)}{J(Q_n)}A(\overline{h}_n) = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{J}(Q_n)\cdot A(\overline{h}_n).$$

Passant al límit,

$$A(H) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N_\delta} A(h_n^*) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N_\delta} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J}(Q_n) \cdot A(\overline{h}_n)$$

on el límit es pren a base d'anar agafant particions cada cop més fines (el diàmetre més grans de cada subregió més petit que δ) i sumant totes les àrees en cada pas. N_δ és el número de regions de la partició de diàmetre més petit que δ que considerem.

Per poder aplicar la definició d'integral doble ens interessa escriure $Q_n = \psi(\overline{P_n})$ amb $\psi = (\pi \circ \varphi)^{-1}$, cosa que podem fer ja que estem suposant que $\pi \circ \varphi$ és difeomorfisme local. Així,

$$A(H) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N_\delta} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J}(\psi(\overline{P_n})) \cdot A(\overline{h}_n)$$

Per definició d'integral doble

$$A(H) = \int\int_{\overline{H}} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{J} \circ \psi \, dx \, dy$$

Pel teorema del canvi de variable, posat $\varphi(R) = H$ (que projectant dóna $R = \psi(\overline{H})$), tenim

$$A(H) = \int\int_R \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Exemple 5.2.6 *Calculeu l'àrea de la intersecció del pla $z = ax + by$ amb el cilindre $x^2 + y^2 = r^2$.*

Solució. Primer mètode. El vector normal del pla és $(a, b, -1)$. Pel Lema 5.2.5, l'àrea demanada A val

$$A = \frac{\pi r^2}{\cos \alpha}$$

amb α l'angle entre $(-a, -b, 1)$ i $(0, 0, 1)$. Per tant,

$$\cos \alpha = \frac{(-a, -b, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\|(-a, -b, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Així,

$$A = \pi r^2 \sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

Segon mètode. Parametritzem el pla per $\varphi(u, v) = (u, v, au + bv)$. Llavors

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1, 0, a)\\
\varphi_v &= (0, 1, b)\\
E &= 1 + a^2\\
F &= ab\\
G &= 1 + b^2\\
EG - F^2 &= a^2 + b^2 + 1
\end{aligned}$$

Així,

$$A = \int\int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}dx\,dy = \pi r^2 \sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

Integral d'una funció

Si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable sobre la superfície S, (U, φ) una carta local i R una regió amb $R = \varphi(Q)$, el mateix argument anterior ens diu que el valor de

$$\int\int_Q (f \circ \varphi)\sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

no depèn de la carta local. Aquest valor es denota per

$$\int_R f dS = \int\int_Q (f \circ \varphi)\sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{5.1}$$

i es diu que és la integral de f sobre R.

5.3 Isometries

Definició 5.3.1 *Una*[10] *aplicació diferenciable $F : S_1 \longrightarrow S_2$ entre dues superfícies és una* isometria local *si preserva longituds; i.e. per tota corba $\alpha : I \longrightarrow S_1$ es compleix $L(\alpha) = L(F \circ \alpha)$. Si a més F és bijectiva direm que F és isometria.*

[10] Segueixo les notes de Gil Solanes.

Proposició 5.3.2 *Una aplicació diferenciable $F : S_1 \longrightarrow S_2$ és isometria local si i només si dF_P és una isometria lineal per tot $P \in S_1$. És a dir,*

$$\langle X, Y\rangle = \langle dF_P(X), dF_P(Y)\rangle, \quad X, Y \in T_P S_1. \tag{5.2}$$

Demostració. Vegem primer que la condició (5.2) implica que F preserva longituds.

Per calcular la longitud de $F \circ \alpha$ hem d'integrar la norma del seu vector tangent. Però, per definició de diferencial d'una aplicació,

$$\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$$

així que per (5.2), amb $P = \alpha(t)$ i $X = Y = \alpha'(t)$,

$$\|\alpha'(t)\| = \|dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| = \|\frac{d}{dt} F(\alpha(t))\| = \|(F \circ \alpha)'(t)\|.$$

Per tant

$$L_\alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|(F \circ \alpha)'(t)\| dt = L_{F\circ\alpha}$$

Recíprocament, suposem ara que F és una isometria i comprovem la igualtat (5.2).

Per polarització, només cal demostrar-la en el cas $X = Y$, ja que per a qualsevol forma bilineal Φ es compleix

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}(\Phi(X + Y, X + Y) - \Phi(X, X) - \Phi(Y, Y)).$$

Només hem de comprovar doncs, que per tot $P \in S_1$, dF_P conserva la norma. És a dir

$$\|X\| = \|dF_P(X)\|, \quad X \in T_P S_1.$$

Sigui $\alpha(t)$ tal que $\alpha(0) = P$ i $\alpha'(0) = X$. Denotem L_t la longitud d'aquesta corba entre els punts $\alpha(0)$ i $\alpha(t)$. Per hipòtesis, L_t és igual a la longitud de la corba $F(\alpha(t))$ entre els punts $F(\alpha(0))$ i $F(\alpha(t))$.

És a dir,

$$\int_0^t \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^t \|(F \circ \alpha)'(t)\|\, dt,$$

Derivant respecte de t, en $t = 0$, obtenim

$$\|\alpha'(0)\| = |(F \circ \alpha)'(0)\| = |dF_{\alpha(0)}\alpha'(0)\|$$

és a dir,

$$\|X\| = \|dF_P(X)\|$$

com volíem veure. $\square$

Observem que, com la primera forma fonamental és essencialment el producte de $\mathbb{R}^3$ la condició d'isometria donada a la igualtat (5.2) anterior es pot escriure com

$$I_P(X,Y) = I_{F(P)}(dF_P(X), dF_P(Y)), \quad X, Y \in T_P S_1.$$

Remarquem també que, per ser dF_P isometria és automàticament isomorfisme, i per tant podem dir, pel teorema de la funció inversa, que *tota isometria local és un difeomorfisme local.*

Proposició 5.3.3 *Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable. Llavors F és isometria local si i només si els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental de S_1 respecte d'una certa carta local (U, φ) coincideixen amb els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental de S_2 respecte de la carta local $(U, F \circ \varphi)$*

Demostració. Suposem primerament que F és isometria local (i en particular difeomorfisme local). Sigui $\psi = F \circ \varphi$. És, almenys localment, una carta local. Llavors[11]

$$\begin{aligned}
\psi_u &= \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{d}{dt}_{|t=0} F(\varphi(u+t, v)) = dF_{\varphi(u,v)}\varphi_u \\
\psi_v &= \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{d}{dt}_{|t=0} F(\varphi(u, v+t)) = dF_{\varphi(u,v)}\varphi_v
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Per tant, per (5.2),

$$\begin{aligned}
\langle \psi_u, \psi_u \rangle &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\
\langle \psi_u, \psi_v \rangle &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\
\langle \psi_v, \psi_v \rangle &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle
\end{aligned} \tag{5.4}$$

[11] No podem aplicar de manera automàtica la regla de la cadena per derivar $\psi = F \circ \varphi$, ja que F no és una aplicació entre oberts de $\mathbb{R}^3$, però les fórmules (5.3) ens diuen que tot funciona essencialment igual.

com volíem veure.

Suposem ara que la matriu de la primera forma fonamental de S_1 respecte de φ coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental de S_2 respecte de $\psi = F \circ \varphi$. Això vol dir únicament que es compleixen les equacions (5.4), la qual cosa implica que dF_P és injectiva[12] per a cada $P \in U$ i per tant, pel teorema d'estructura de les immersions locals, $F \circ \varphi$ és una carta local.

Volem veure que per a tot $P \in S_1$, dF_P és isometria.[13].

Prenem $X, Y \in T_P(S_1)$ i escrivim

$$\begin{aligned} X &= a\varphi_u + b\varphi_v \\ Y &= c\varphi_u + d\varphi_v \end{aligned}$$

on

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0),\ \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad P = \varphi(u_0, v_0),$$

de manera que

$$\langle X, Y\rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Si ara transformem aquest vectors per dF_P, i tenim en compte (5.3), obtenim

$$dF_P(X) = a(dF_P)(\varphi_u) + b(dF_P)(\varphi_v) = a\psi_u + b\psi_v$$

$$dF_P(Y) = c(dF_P)(\varphi_u) + d(dF_P)(\varphi_v) = c\psi_u + d\psi_v$$

on

$$\psi_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0),\ \psi_v = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad P = \varphi(u_0, v_0),$$

de manera que

$$\langle dF_P(X), dF_P(Y)\rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

i per tant

$$\langle X, Y\rangle = \langle dF_P(X), dF_P(Y)\rangle. \qquad \square$$

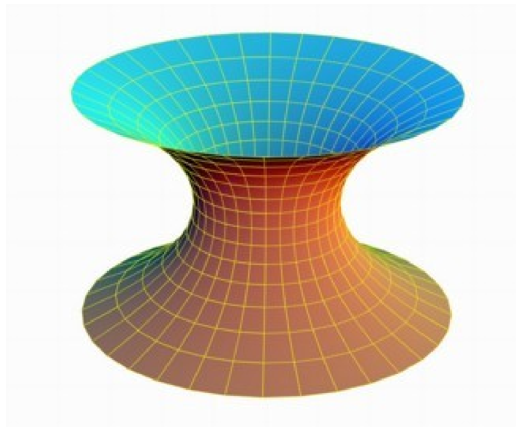
Exemple 5.3.4 *Isometria local entre la catenoide i l'helicoide.*

Parametrització de la catenoide C:

$$\psi(u, v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$$

[12]Si $dF_P(a\varphi_u + b\varphi_v) = 0$, obtenim fàcilment el sistema $aE + bF = 0, aF + bG = 0$ i per tant $a = b = 0$.

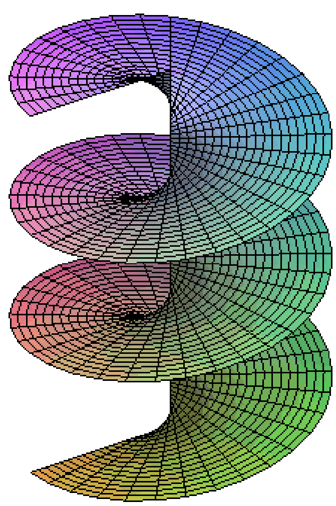
[13]Això és obvi, vegeu la Proposició A.6.4 de [27]



Girem $y = a\cosh(z/a)$ al voltant de l'eix z.

Parametrització de l'helicoide recte H:

$$\varphi(z, w) = (w\cos z, w\sin z, az), z \in (0, 2\pi), w \in \mathbb{R}.$$



Girem i traslladem la recta $y = x\tan z$.

L'aplicació $F : C \longrightarrow H$ donada per

$$F(\psi(u, v)) = \varphi(u, a\sinh v)$$

és una isometria.[14]

En efecte, calculem la primera forma fonamental de C respecte de ψ.

$$\begin{aligned}\psi_u &= (-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)\\ \psi_v &= (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a)\end{aligned}$$

Per tant,

$$I_C = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix}$$

Prenem ara com parametrització de H

$$\eta = F \circ \psi$$

i calculem la primera forma fonamental de H respecte η. Com

$$\eta(u,v) = \varphi(u, a\sinh v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

$$\begin{aligned}\eta_u &= (-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, a)\\ \eta_v &= (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, 0)\end{aligned}$$

Per tant,

$$I_H = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix}$$

Com les dues matrius coincideixen sabem, per la Proposició 5.3.3, que F és isometria.

Les isometries conserven àrea

Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una isometria. Siguin (U,φ) una carta local de S_1 i $R \subset \varphi(U)$ una regió. Sabem que si $R = \varphi(Q)$ llavors

$$A(R) = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

on E, F, G són els coeficients de la primera forma fonamental de S_1 respecte de φ.

[14] També podem dir que el punt de coordenades (u,v) va a parar al punt de coordenades (z,w) amb $z = u$ i $w = a\sinh v$.

Per la Proposició 5.3.3 sabem que E, F, G coincideixen amb els coeficients de la primera forma fonamental de S_2 respecte de la carta local $\psi = F \circ \varphi$. Per tant, com que $F(R) = F(\varphi(Q)) = \psi(Q)$, l'àrea de la regió transformada de R per F és

$$A(F(R)) = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2} du\, dv$$

i per tant, $A(F(R)) = A(R)$.

Exemple 5.3.5 *Explicitem una isometria entre el pla i el cilindre. I veiem, en un cas particular, que conserva àrees.*

Solució. Considerem l'aplicació del cilindre obert

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = r^2, x \neq 1\}$$

al pla, donada per

$$F(r \cos u, r \sin u, v) = (ru, v), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

Per veure que F és isometria calcularem els coeficients de la primera forma fonamental del pla i el cilindre.

Els coeficients de la primera forma fonamental de C respecte la carta $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, h) \longrightarrow (r \cos u, r \sin u, v)$ són

$$E = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle = r^2, G = 1, F = 0.$$

Els coeficients de la primera forma fonamental del pla respecte $\psi = F \circ \varphi$ són

$$E = \langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \rangle = r^2; G = 1, F = 0.$$

ja que $\psi(u, v) = (ru, v)$. Per tant, F és una isometria.

Calculem l'àrea d'una regió de C i de la seva imatge per F. Sigui R la regió de C determinada per $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$, $0 \leq z \leq h$. Com $R = \varphi(Q)$ amb

$$Q = [\pi/2, 3\pi/2] \times [0, h],$$

$$A(R) = \int_Q r du\, dv = \pi r h.$$

La regió transformada $F(R) = F(\varphi(Q)) = \psi(Q)$ té àrea

$$A(F(R)) = \int_Q r du\, dv = \pi r h. \quad \square$$

Exercici 5.3.6 *Sigui $F : S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicació diferenciable. Llavors F conserva àrees si i només si $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}$ on E, F, G són els coeficients de la primera forma fonamental de S_1 respecte d'una certa carta local (U, φ) i $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ són els coeficients de la primera forma fonamental de S_2 respecte de la carta local $(U, F \circ \varphi)$.*

5.4 Aplicacions conformes

Així com els triangles semblants tenen angles i guals i costats proporcionals les aplicacions entre superfícies que conserven els angles porten, infinitessimalment, les distàncies a distàncies proporcionals.

Teorema 5.4.1 *Sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ un difeomorfisme entre superfícies que conserva angles. Sigui (U, φ) una carta de S_1 i (U, ψ) amb $\psi = f \circ \varphi$ la corresponent carta de S_2. Siguin E, F, G els coeficients de la primera forma fonamental de S_1 respecte φ i $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ els coeficients de la primera forma fonamental de S_2 respecte ψ. Llavors existeix una funció $\rho : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$E = \rho^2 \bar{E}, \quad F = \rho^2 \bar{F}, \quad G = \rho^2 \bar{G}.$$

Demostració. Que si existeix una tal ρ es conserven angles és evident, ja que el cosinus de l'angle entre dos vectors tangents unitaris $X, Y \in T_P S$ amb $X = X_1 \varphi_u + X_2 \varphi_v, Y = Y_1 \varphi_u + Y_2 \varphi_v$ és igual a

$$\cos \alpha = \langle X, Y \rangle = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

amb E, F, G valorats a P. Per altra banda, utilitzant (5.3),

$$\begin{aligned} df_P(X) &= df_P(X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = X_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ df_P(Y) &= df_P(Y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + Y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = Y_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + Y_2 \frac{\partial \psi}{\partial v}. \end{aligned}$$

És a dir, $df_P(X)$ i $df_P(Y)$ tenen respecte la base ψ_u, ψ_v les mateixes coordendes que X i Y tenen respecte la base φ_u, φ_v. Per tant el cosinus de l'angle d'aquests vectors és

$$
\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\langle df_P(X), df_P(Y)\rangle}{\|df_P(X)\|\cdot\|df_P(Y)\|}\\
&= \frac{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2\end{pmatrix}}\cdot\sqrt{\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix}}}\\
&= \frac{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix}(1/\rho^2)}{(1/\rho^2)}\\
&= \cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Recíprocament, si es conserven els angles, l'angle entre una corba arbitraria $\gamma(s)=\varphi(u(s),v(s))$, en un punt $P=\gamma(s_0)$, i la corba $\sigma(u)=\varphi(u,v_0)$, amb $v_0=v(s_0)$, que passa per P quan $u=u_0=u(s_0)$, ha de ser igual a l'angle en $f(P)$ de les corbes $f(\gamma(s))=\psi(u(s),v(s))$ i $f(\sigma(u))=\psi(u,v(s_0))$.

El cosinus de l'angle entre $\gamma'(s_0)$ i $\sigma'(u_0)$ és

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\langle\gamma'(s_0),\sigma'(u_0)\rangle}{\|\gamma'(s)\|\cdot\|\sigma'(u_0)\|} = \frac{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\cdot\|\sigma'(u_0)\|}\\
&= \frac{Eu'+Fv'}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\cdot\sqrt{E}}
\end{aligned}
$$

amb $E=E(u_0,v_0)$, $F=F(u_0,v_0)$, $u'=u'(s_0)$, $v'=v(s_0)$.

Com les corbes transformades tenen les mateixes coordenades $(u(s),v(s))$ i (u,v_0), però ara respecte de la carta ψ, podem escriure directament que el cosinus de l'angle que formen en $f(P)$ és

$$
\cos\beta = \frac{\tilde{E}u'+\tilde{F}v'}{\sqrt{\tilde{E}u'^2+2\tilde{F}u'v'+\tilde{G}v'^2}\cdot\sqrt{\tilde{E}}}.
$$

Com abans $\tilde{E}=\tilde{E}(u_0,v_0)$, $\tilde{F}=\tilde{F}(u_0,v_0)$, $u'=u'(s_0)$, $v'=v(s_0)$.

A partir de la igualtat $\cos\alpha=\cos\beta$ obtenim

$$
\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\tilde{E}}} = \frac{Eu'+Fv'}{\tilde{E}u'+\tilde{F}v'}\cdot\frac{\sqrt{\tilde{E}u'^2+2\tilde{F}u'v'+\tilde{G}v'^2}}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}} \tag{5.5}
$$

que escrivim d'aquesta manera per posar de manifest que el terme de l'esquerra depèn només del punt, mentre que el terme de la dreta depèn aparentment també de u' i v'. Les arrels quadrades no s'anul·len mai.

Prenem $u' = F, v' = -E$. Per aquests valors de u' i v' tenim que $Eu' + Fv' = 0$ i per tant, per tal de que l'anterior igualtat (5.5) sigui certa, ha de ser $\tilde{E}u' + \tilde{F}v' = 0$ i per tant

$$\frac{E}{\tilde{E}} = \frac{F}{\tilde{F}}.$$

Com els papers de E i G es poden intercanviar (calculant l'angle entre la corba donada i la corba $u = cte$) obtindríem igualment

$$\frac{G}{\tilde{G}} = \frac{F}{\tilde{F}},$$

i per tant

$$\frac{E}{\tilde{E}} = \frac{F}{\tilde{F}} = \frac{G}{\tilde{G}}.$$

Com aquest quocient és positiu i el punt P és arbitrari, existeix una funció $\rho = \rho(u,v)$ tal que

$$\frac{E(u,v)}{\tilde{E(u,v)}} = \frac{F(u,v)}{\tilde{F(u,v)}} = \frac{G(u,v)}{\tilde{G(u,v)}} = \rho(u,v)^2,$$

com volíem.[15] $\square$

5.5 Exercicis

Exercici 5.5.1 *Calculeu la longitud de la corba sobre l'helicoide* $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ *definida per* $u = \sinh v$*, entre* $v = 0$ *i* $v = \ln 2$*.*

Solució. La mètrica de l'helicoide respecte de les coordenades φ_u, φ_v és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

[15] Dividint numerador i denominador per u' i elevant al quadrat la igualtat (5.5) és el quocient de dos polinomis de grau 4, i aquest quocient és constant. D'aquí es dedueix que els coeficients d'aquests polinomis són proporcionals i a partir d'aquí s'arriba a les expressions que hem obtingut de manera més 'intel·ligent'.

La corba és $\gamma(v) = \varphi(\sinh v, v)$. La norma del vector tangent és doncs

$$|\gamma'(v)|^2 = \begin{pmatrix} \cosh v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\sinh^2 v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh v \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cosh^2 v.$$

Per tant,

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{2}\cosh v dv = \sqrt{2}\sinh(\ln 2) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Exercici 5.5.2 *Tallem una esfera de radi R per una esfera massissa de radi r, amb $r < R$, i centre sobre la primera. Demostreu que l'àrea de la intersecció és pir^2.*

Solució. La fórmula de l'àrea d'un disc geodèsic de centre sobre la primera esfera i radi ρ és $F = 4\pi R^2 \sin^2(\rho/2R)$.

La relació entre R, r, ρ és

$$\frac{r}{2R} = \sin\frac{\rho}{2R}.$$

Substituint hem acabat.

Capítol 6

Segona forma fonamental

6.1 Aplicació de Gauss

Definició 6.1.1 *Direm que una superfície S és* orientable *si existeix una aplicació diferenciable*

$$\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2,$$

on S^2 és l'esfera de centre l'origen de $\mathbb{R}^3$ i radi 1, tal que

$$\mathcal{N}(P) \perp T_P(S), \quad \forall P \in S.$$

Aquesta aplicació $\mathcal{N}$ es coneix com aplicació de Gauss *de S.*

La notació $\perp$ vol dir *perpendicular*. Per tant, $\mathcal{N}(P)$ és un dels dos vectors unitaris normals al pla tangent $T_P S$.

Si existeix una tal aplicació $\mathcal{N}$ llavors l'aplicació $-\mathcal{N}$ donada per $(-\mathcal{N})(P) = -\mathcal{N}(P)$, també compleix la condició

$$-\mathcal{N}(P) \perp T_P(S).$$

Si S és connexa i orientable és fàcil veure que no hi ha més possibilitats. En efecte, si $\alpha : S \longrightarrow S^2$ és una aplicació diferenciable[1] amb $\alpha(P) \perp T_P(S)$ llavors $\{P \in S; \mathcal{N}(P) = \alpha(P)\}$ és obert i tancat i per tant és el buit (llavors $\alpha = -\mathcal{N}$) o el total (llavors $\alpha = \mathcal{N}$).

Orientar una superfície connexa i orientable S vol dir elegir $\mathcal{N}$ o $-\mathcal{N}$.

[1] Només utilitzem continuitat.

Càlculs en coordenades

Observem que si (U,φ) és una parametrització de S,

$$\mathcal{N}(\varphi(u,v)) = \pm\frac{\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)\|}$$

ja que els vectors $\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)$ són una base de $T_{\varphi(u,v)}(S)$.

Si denotem $\nu = \mathcal{N}\circ\varphi$, com farem sempre en aquestes notes, tenim la igualtat de funcions vectorials sobre U

$$\nu = \pm\frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|} = \pm\frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{6.1}$$

Observem que si $\mathcal{N}$ és difeomorfisme local la carta (U,φ) de S indueix una carta (U,ν) de S^2. A l'exercici 6.8.9 s'utilitza aquest fet per estudiar com varia la longitud de les corbes sobre S quan es passen a S^2 per l'aplicació de Gauss.

Si la superfície S està donada per una sola carta (U,φ), $S=\varphi(U)$, llavors és automàticament orientable, ja que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S^2 \\ \varphi(u,v) & \mapsto & \nu(u,v) \end{array}$$

és diferenciable.

Però si tinguéssim una superfície donada com unió de dues cartes, (U,φ), (V,ψ), podríem tenir

$$\frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|} = -\frac{\psi_x\wedge\psi_y}{\|\psi_x\wedge\psi_y\|}, \tag{6.2}$$

a la intersecció $\varphi(U)\cap\psi(V)$. El primer terme d'aquesta igualtat valorat en el punt $(u,v)\in U$ i el segon en el punt $(x,y)\in V$ tals que $\varphi(u,v)=\psi(x,y)$. Si passa això i $\varphi(U)\cap\psi(V)$ és connex, podrem orientar la superfície unió $\varphi(U)\cup\psi(V)$ definint

$$\mathcal{N}(P) = \frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|}(u,v), \quad P=\varphi(u,v)$$

i

$$\mathcal{N}(P) = -\frac{\psi_x\wedge\psi_y}{\|\psi_x\wedge\psi_y\|}(x,y), \quad P=\psi(x,y).$$

Però si la intersecció no és connexa això podria no funcionar. Podria ser que la igualtat (6.2) no fos vàlida en tota la intersecció. És a dir, que valgués el signe menys en alguna de les components connexes i el signe més en altres.

De fet, hi ha superfícies com la banda de Moebius, que no són orientables, tot i que es poden tapar amb només dues cartes (vegeu [29]).

Diguem finalment que l'elecció d'una orientació $\mathcal{N}$ sobre S permet orientar els plans tangents dient que una base (e_1, e_2) de T_PS és positiva si i només si la base $(e_1, e_2, \mathcal{N}(P))$ és positiva (el determinant d'aquests vectors respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és positiu).

6.2 Endomorfisme de Weingarten

Sigui S una superfície orientable i fixem una orientació $\mathcal{N}$. La diferencial de l'aplicació de Gauss $\mathcal{N}$ en un punt $P \in S$ és l'aplicació

$$d\mathcal{N}_P : T_P(S) \longrightarrow T_{\mathcal{N}(P)}S^2$$

donada per

$$d\mathcal{N}_P(w) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\mathcal{N}(\gamma(t)),$$

on $\gamma(t)$ és una corba sobre S tal que $\gamma(0) = P$ i $\gamma'(0) = w$. Recordeu la definició 4.6.3 de diferencial d'una aplicació entre superfícies, pàgina 101.

Primera observació. Els subespais vectorials T_PS i $T_{\mathcal{N}(P)}S^2$ coincideixen. En efecte, són subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$ amb vector normal $\mathcal{N}(P)$.

Per tant, $d\mathcal{N}_P : T_PS \longrightarrow T_PS$ és un endomorfisme.

Segona observació. Si (U, φ) és una carta local, i $P = \varphi(u, v)$, llavors

$$\begin{array}{rcl} d\mathcal{N}_P(\varphi_u) & = & \nu_u \\ d\mathcal{N}_P(\varphi_v) & = & \nu_v \end{array} \tag{6.3}$$

on ν_u i ν_v denoten respectivament[2]

[2]Fora més correcte escriure

$$d\mathcal{N}_{\varphi(u,v)}(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v)) = \frac{\partial\nu}{\partial u}(u, v).$$

Però la notació $d\mathcal{N}_P(w)$ porta implícit que $w \in T_PS$.

$$\nu_u = \frac{\partial \nu}{\partial u} = \frac{\partial(\mathcal{N} \circ \varphi)}{\partial u},$$
$$\nu_v = \frac{\partial \nu}{\partial v} = \frac{\partial(\mathcal{N} \circ \varphi)}{\partial v}.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}_P(\varphi_u) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{N}\varphi(u+t, v) = \frac{\partial(\mathcal{N} \circ \varphi)}{\partial u} = \nu_u, \\ d\mathcal{N}_P(\varphi_v) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{N}\varphi(u, v+t) = \frac{\partial(\mathcal{N} \circ \varphi)}{\partial v} = \nu_v. \end{aligned}$$

De fet, sempre que tinguem una corba $\gamma(s)$ sobre la superfície podem escriure

$$d\mathcal{N}_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = \nu'(s) \tag{6.4}$$

on $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$. Això és conseqüència immediata de la definició de diferencial d'una aplicació, i es llegeix dient que *per calcular la diferencial de l'aplicació de Gauss sobre un vector tangent a una corba en un punt només hem de restringir la normal a la superfície sobre aquesta corba i derivar en el punt.*

Definició 6.2.1 (Endomorfisme de Weingarten) *L'endomorfisme*

$$W_P : T_P S \longrightarrow T_P S$$

definit per

$$W_P = -d\mathcal{N}_P$$

s'anomena endomorfisme de Weingarten.

Equivalentment, l'*endomorfisme de Weingarten és la diferencial de l'aplicació de Gauss*, canviada de signe. Aquest canvi de signe es justifica a la pàgina 189.

Pels comentaris anteriors, per calcular $W_P(w)$ *només haurem de restringir la normal a la superfície a una corba integral de w i derivar.*

Proposició 6.2.2 *L'endomorfisme de Weingarten W_P és auto-adjunt respecte de la primera forma fonamental. És a dir,*

$$\langle W_P(X), Y \rangle = \langle X, W_P(Y) \rangle, \quad \forall X, Y \in T_P S.$$

Demostració. Per linealitat, només cal veure que aquesta igualtat és certa sobre una base de T_PS. Per tant, considerarem una parametrització (U,φ) de S, i demostrarem que per tot $P=\varphi(u,v)$ es compleix

$$\langle W_P(\varphi_u),\varphi_v\rangle = \langle \varphi_u, W_P(\varphi_v)\rangle.$$

Per a això observen que la igualtat de funcions sobre U, $\nu=\mathcal{N}\circ\varphi$, implica

$$\begin{aligned}\langle \nu,\varphi_u\rangle &= 0,\\ \langle \nu,\varphi_v\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Derivant la primera equació respecte de v i la segona respecte de u, obtenim

$$\begin{aligned}\langle \nu_v,\varphi_u\rangle + \langle \nu,\varphi_{uv}\rangle &= 0,\\ \langle \nu_u,\varphi_v\rangle + \langle \nu,\varphi_{vu}\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Com $\varphi_{uv}=\varphi_{vu}$, els primers termes són iguals, i com per la igualtat (6.3)

$$\begin{aligned}W_P(\varphi_u) &= -\nu_u\\ W_P(\varphi_v) &= -\nu_v\end{aligned} \tag{6.6}$$

tenim

$$\langle W_P(\varphi_u),\varphi_v\rangle = \langle \varphi_u, W_P(\varphi_v)\rangle.$$

i hem acabat. □

Proposició 6.2.3 *L'endomorfisme de Weingarten diagonalitza en una base ortonormal.*

Demostració. Fixem[3] un punt $P\in S$ i una base (u_1,u_2) de T_PS, ortonormal respecte I. Denotem $W=W_P$. La matriu de W respecte d'aquesta base és simètrica, per ser W auto-adjunt respecte I. És a dir,

$$\begin{aligned}Wu_1 &= au_1+bu_2\\ Wu_2 &= bu_1+cu_2\end{aligned}$$

El polinomi característic és $x^2-(a+c)x+(ac-b^2)$. El discriminant d'aquest polinomi és $(a-c)^2+b^2$, que és sempre positiu i només zero en el

[3]És ben conegut que tot endomorfisme auto-adjunt diagonalitza en una base ortonormal, vegeu per exemple [27], p.386. En reproduïm la demostració aquí per facilitar la lectura.

cas particular en que $a = c$ i $b = 0$, és a dir, quan W és un múltiple de la identitat. En aquest cas diagonalitza en qualsevol base ortonormal.

Suposem, doncs, que W no és un múltiple de la identitat.

Llavors el polinomi característic té dues arrels diferents $k_1 \neq k_2$ i per tant W té dos vectors propis[4], que podem suposar normalitzats, e_1, e_2, de manera que

$$We_1 = k_1 e_1, \quad We_2 = k_2 e_2.$$

Per tant W diagonalitza en aquesta base

$$W = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Ara bé, vectors propis de valors propis diferents d'un endomorfisme autoadjunt són ortogonals, ja que

$$k_1 I(e_1, e_2) = I(k_1 e_1, e_2) = I(We_1, e_2) = I(e_1, We_2) = k_2 I(e_1, e_2),$$

i això implica $I(e_1, e_2) = 0$.

Per tant, W diagonalitza en una base ortonormal. $\square$

Definició 6.2.4 *Les* direccions principals *i les* curvatures principals *en un punt $P \in S$ són respectivament les direccions pròpies i els valors propis de l'endomorfisme de Weingarten W_P.*

Així, si tenim $W_P(e_1) = k_1 e_1$, $W_P(e_2) = k_2 e_2$, amb $e_1, e_2 \in T_P S$, les direccions principals de S en P són $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$, i les curvatures principals k_1 i k_2.

Observem doncs que

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}_P(e_1) &= -k_1 e_1 \\ d\mathcal{N}_P(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned}$$

Equivalentment, si $\gamma(s)$ és una corba sobre la superfície amb $\gamma(0) = P$ i $\gamma'(0) = e_i$, i denotem $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$, llavors

$$\frac{d\nu(s)}{ds}_{|s=0} = -k_i e_i, \quad i = 1, 2.$$

[4]En realitat dues direccions pròpies. Encara que els normalitzem els vectors propis corresponents no queden unívocament determinats ja que si v és un valor propi de valor propi λ, $-v$ també és un vector propi de valor propi λ.

Aquesta igualtat, que afirma que *la derivada de la normal a la superfície respecte una direcció principal té aquesta mateixa direcció*, es coneix com Teorema d'Olinde Rodrigues, vegeu el Teorema 8.3.2.

Punts umbilicals

Definició 6.2.5 *Un punt $P \in S$ es diu* umbilical *si l'endomorfisme de Weingarten en aquest punt és múltiple de la identitat, $W_P = \lambda\, id$.*

Equivalentment, P és un punt umbilical si i només les curvatures principals en P coincideixen, $k_1 = k_2$. Només hem d'escriure $We_i = k_i e_i = \lambda e_i$ per veure que $\lambda = k_1 = k_2$.

També, per definició de la segona forma fonamental,

$$II(u, v) = I(Wu, v) = \lambda I(u, v)$$

és a dir, en els punts umbilicals la primera i segona formes fonamentals són proporcionals. Recíprocament, si en el punt $P \in S$ tenim $II = \lambda I$ llavors $W = \lambda id$ en P, de manera que podem dir que P és umbilical si i només si la segona forma fonamental és múltiple de la primera.

En termes dels coeficients de les matrius de I i II respecte la base donada per una carta local aquesta condició equival a

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}.$$

Les curvatures principals com funcions sobre la superfície

La Proposició 6.2.3 ens diu que tenim una base ortonormal de vectors propis de W_P en cada punt P d'una superfície S.

Això permet definir, sobre el conjunt de punts no umbilicals de S, les aplicacions $k_i : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$ com les aplicacions que assignen a cada $P \in S$ el menor i el major[5] dels valors propis de W_P, i $e_i : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com les aplicacions que assignen a cada $P \in S$ els corresponents vectors propis de W_P, de manera que tindrem

$$W_P e_i(P) = k_i(P) e_i(P), \quad i = 1, 2.$$

Veurem a la pàgina 146 que aquestes aplicacions són diferenciables.

[5] O al revés , és irrellevant.

6.3 Curvatura mitjana i curvatura de Gauss

Definició 6.3.1 *La* curvatura mitjana $\mathcal{H}$ *de la superfície en* $P \in S$ *és la meitat de la traça de l'endomorfisme de Weingarten.*

La curvatura de Gauss $\mathcal{K}$ *de la superfície en* $P \in S$ *és el determinant de l'endomorfisme de Weingarten.*

Com l'endomorfisme de Weingarten és la diferencial de l'aplicació de Gauss, canviada de signe, podem dir també que la *curvatura de Gauss és el jacobià*[6] *de l'aplicació de Gauss.*

Recordem que ni la traça ni el determinant depenen de la base en la qual escrivim la matriu d'un endomorfisme.

Com el punt P és arbitrari, $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ es poden pensar com aplicacions

$$\mathcal{H}, \mathcal{K} : S \longrightarrow \mathbb{R},$$

donades per

$$\mathcal{H}(P) = \frac{1}{2}\text{traça } W_P; \quad \mathcal{K}(P) = \det W_P.$$

Veurem a la pàgina 146 que són aplicacions diferenciables.

Equivalentment, tenim la igualtat de funcions sobre S,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{k_1 + k_2}{2}, \\ \mathcal{K} &= k_1 k_2. \end{aligned}$$

on k_1 i k_2 són les curvatures principals.

Clarament k_1, k_2 són, en cada punt, solució de l'equació de segon grau

$$x^2 - 2\mathcal{H}x + \mathcal{K} = 0$$

i per tant

$$k_i = \mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}, \quad i = 1, 2. \tag{6.7}$$

Aquesta fórmula és molt útil ja que $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ es calculen a partir de la matriu de W_P en qualsevol base. I demostra, com veurem a la pàgina 146, que k_1 i k_2 són funcions contínues, diferenciables fora dels punts umbilicals.

[6]Entenem per jacobià el determinant de la matriu jacobiana.

Interpretació geomètrica de la curvatura de Gauss

Teorema 6.3.2 *Sigui P un punt d'una superfície S tal que $\mathcal{K}(P) \neq 0$. Suposem que B_n és una successió d'entorns connexos de P en S amb $Area\,(B_n) \to 0$ i tals que qualsevol entorn de P conté tots els B_n a partir d'un n prou gran. Demostreu que es compleix*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Area\,(\mathcal{N}(B_n))}{Area\,(B_n)} = |\mathcal{K}(P)|\,,$$

on $\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2$ és l'aplicació de Gauss.

Demostració.[7] Prenem (U, φ) carta local de S que contingui P i sigui $Q_n \subset U$ tal que $\varphi(Q_n) = B_n$. Llavors

$$A(B_n) = \int_{Q_n} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv.$$

Per altra banda, prenem com carta local de S^2, $\nu = \mathcal{N} \circ \varphi$. Això es pot fer localment ja que la condició $\mathcal{K} \neq 0$ implica que $\mathcal{N}$ és un difeomorfisme local.

En particular $\mathcal{N}(B_n) = \mathcal{N}(\varphi(Q_n) = \nu(Q_n)$ i per tant

$$A(\mathcal{N}(B_n)) = \int_{Q_n} \|\nu_u \wedge \nu_v\| dudv,$$

Però sabem, relació (6.6), que

$$\begin{aligned} \nu_u &= -W_P(\varphi_u), \\ \nu_v &= -W_P(\varphi_v), \end{aligned}$$

amb $P = \varphi(u, v)$. Si posem

$$\begin{aligned} W_P(\varphi_u) &= a\varphi_u + b\varphi_v \\ W_P(\varphi_v) &= c\varphi_u + d\varphi_v \end{aligned}$$

tenim

$$\nu_u \wedge \nu_v = W_P(\varphi_u) \wedge W_P(\varphi_v) = (ad - bc)\varphi_u \wedge \varphi_v,$$

[7] A [29] hi trobareu una demostració més curta utilitzant pull-back de formes.

Però $ad - bc$ és el determinant de W_P i és, doncs, igual a la curvatura de Gauss $\mathcal{K}$ en P.

Per tant,

$$\nu_u \wedge \nu_v = \mathcal{K}(P)\varphi_u \wedge \varphi_v,$$

que es pot pensar com una igualtat de funcions sobre U, ja que $P = \varphi(u, v)$,

$$\nu_u \wedge \nu_v = (\mathcal{K} \circ \varphi)\, \varphi_u \wedge \varphi_v$$

que escriurem com

$$\nu_u \wedge \nu_v = K\, \varphi_u \wedge \varphi_v. \tag{6.8}$$

ja que sempre utilitzarem la notació $\mathcal{K} \circ \varphi = K$.

Pel teorema del valor mitjà per integrals

$$\begin{aligned} A(B_n) &= A(Q_n) \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|(\xi), \quad \xi \in Q_n \\ A(\mathcal{N}(B_n)) &= A(Q_n) \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|(\eta) \cdot K(\eta), \quad \eta \in Q_n \end{aligned}$$

Dividint les àrees i prenent límits hem acabat, ja que ξ, η tendeixen a P. $\square$

Observació 6.3.3 Molt important remarcar que per calcular *l'àrea d'una regió sobre l'esfera obtinguda com imatge d'una regió sobre la superfície per l'aplicació de Gauss hem d'integrar la curvatura de Gauss a la regió corresponent.* En efecte, hem demostrat que

$$\begin{aligned} A(\mathcal{N}(B_n)) &= \int_{Q_n} \|\nu_u \wedge \nu_v\| dudv \\ &= \int_{Q_n} |K| \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv \\ &= \int_{Q_n} |K| \cdot \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \end{aligned} \tag{6.9}$$

El valor de la integral de la curvatura de Gauss, sense valor absolut,

$$\int_{Q_n} K \cdot \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

es diu que és l'àrea amb signe de $\mathcal{N}(B_n)$.

Per exemple, la integral de la curvatura de Gauss sobre un el·lipsoide és igual, pel que acabem de dir, a l'àrea de l'esfera, és a dir,

$$\int_E K dS = 4\pi.$$

El tor és un doble recobriment de l'esfera, per l'aplicació de Gauss, però en contar aquesta àrea amb signe es compensa i tenim

$$\int_T K dS = 0.$$

Vegeu el Teorema de Gauss-Bonnet a la pàgina 305.

Observació 6.3.4 Observem que la fórmula (6.8), ens dóna una manera ràpida de calcular la curvatura de Gauss. Concretament,

$$\begin{aligned} \det(\nu, \nu_u, \nu_v) &= \langle \nu, \nu_u \wedge \nu_v \rangle \\ &= \langle \nu, K\varphi_u \wedge \varphi_v \rangle \\ &= K\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \end{aligned}$$

És a dir,

$$K = \frac{\det(\nu, \nu_u, \nu_v)}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{6.10}$$

6.4 Segona forma fonamental

Definició 6.4.1 *Sigui P un punt d'una superfície S. La* segona forma *quadràtica fonamental de S en P és l'aplicació*

$$II_P : T_P S \times T_P S \longrightarrow \mathbb{R}$$

donada per

$$II_P(X, Y) = \langle W_P(X), Y \rangle, \qquad X, Y \in T_P S.$$

Per tant, també

$$II_P(X, Y) = -\langle d\mathcal{N}_P(X), Y \rangle, \qquad X, Y \in T_P S.$$

Observem, doncs, que depèn de quina normal a la superfície elegim.

Proposició 6.4.2 *La segona forma fonamental és simètrica.*

Demostració. És el mateix que dir que l'endomorfisme de Weingarten és auto-adjunt. En efecte,

$$II_P(X,Y) = \langle W_P(X), Y\rangle = \langle X, W_P(Y)\rangle = II_P(Y,X). \qquad \square$$

Matriu de la segona forma fonamental

Sigui (U,φ) una carta local de S. Considerem l'aplicació de Gauss $\mathcal{N}$ definida respecte de la normal induïda per (U,φ). Com la segona forma fonamental II_P està definida per a tot punt $P=\varphi(u,v)$ podem pensar que per a cada $(u,v)\in U$, tenim definida la segona forma fonamental $II_{\varphi(u,v)}$ en l'espai tangent $T_{\varphi(u,v)}S$. En aquest espai hi tenim definida la base φ_u, φ_v, respecte de la qual $II_{\varphi(u,v)}$ té matriu

$$\begin{pmatrix} -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_u), \varphi_u\rangle & -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_u), \varphi_v\rangle \\ -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_v), \varphi_u\rangle & -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_v), \varphi_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(u,v) & f(u,v) \\ f(u,v) & g(u,v) \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera e, f, g són funcions sobre l'espai de paràmetres.

Ara bé, per la igualtat (6.3), pàgina 135, tenim que

$$\begin{aligned} e &= -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_u), \varphi_u\rangle = -\langle \nu_u, \varphi_u\rangle = \langle \nu, \varphi_{uu}\rangle, \\ f &= -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_u), \varphi_v\rangle = -\langle \nu_u, \varphi_v\rangle = \langle \nu, \varphi_{uv}\rangle, \\ g &= -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_v), \varphi_v\rangle = -\langle \nu_v, \varphi_v\rangle = \langle \nu, \varphi_{vv}\rangle. \end{aligned}$$

També podem calcular e, f, g substituint ν pel seu valor (equació (6.1), pàgina 134) a les anteriors igualtats. Obtenim

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ f &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ g &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}. \end{aligned}$$

Pels mateixos comentaris que hem fet en parlar de la matriu de la primera forma fonamental respecte de la base φ_u, φ_v, pàgina 112, en lloc d'escriure

$$II_{\varphi(u,v)} = \begin{pmatrix} e(u,v) & f(u,v) \\ f(u,v) & g(u,v) \end{pmatrix},$$

escriurem

$$II_\varphi = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

o simplement

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Matriu de l'endomorfisme de Weingarten

La fórmula

$$II_P(X,Y) = I_P(W_P X, Y)$$

ens diu directament que tenim la igualtat matricial

$$II = W^t I,$$

on I, II, W denoten les matrius de la primera i segona formes fonamentals i de l'endomorfisme de Weingarten respecte[8] de la base φ_u, φ_v de $T_P S$.

D'aquí deduïm

$$W^t = (II) I^{-1}$$

i per tant, utilitzant la simetria de I i II, obtenim la molt útil fórmula

$$\boxed{W = I^{-1} \cdot II}$$

Introduint els coeficients de I i II,

$$W = I^{-1} II = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Aquesta notació vol dir que si $P = \varphi(u,v)$, tots els coeficients de la primera i segona forma fonamental estan valorats en el punt (u,v).

Per definició de matriu associada a una aplicació lineal, i la igualtat $W_P(\varphi_u) = -\nu_u, W_P(\varphi_v) = -\nu_v$ (vegeu (6.6), pàgina 137), la igualtat (6.11) s'escriu

[8] Aquesta afirmació és certa per a matrius respecte de qualsevol base, però a nosaltres ens interessa la base φ_u, φ_v.

$$
\begin{aligned}
\nu_u &= \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}\,\varphi_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}\,\varphi_v, \\
\nu_v &= \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}\,\varphi_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}\,\varphi_v.
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

Com la curvatura mitjana $\mathcal{H}$ i la curvatura de Gauss $\mathcal{K}$ de S en el punt $P = \varphi(u, v)$ són respectivament la meitat de la traça i el determinant de W_P, denotant $H = \mathcal{H} \circ \varphi$ i $K = \mathcal{K} \circ \varphi$, tenim que

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}, \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Utilitzant ara l'expressió 6.7 podem calcular k_1 i k_2.

Aquestes expressions demostren que les funcions $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ sobre S són funcions diferenciables. Això demostra, per exemple, que el conjunt format per mitja esfera tapant un cilindre no és una superfície (la curvatura de Gauss no canvia contínuament al passar del cilindre a l'esfera).

I la fórmula (6.7) demostra, a partir d'això, que les funcions k_i són contínues; i diferenciables fora dels punts umbilicals (al derivar una arrel quadrada apareix aquesta en el denominador, i en els umbilicals aquest denominador es podria anul·lar). Vegeu l'exercici 6.8.4.

Observem també que l'expressió de K és un quocient de determinants,

$$
K = \frac{\begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{\det II_\varphi}{\det I_\varphi},
$$

on I_φ, II_φ denoten les matrius de la primera i segona forma fonamental respecte de la base (φ_u, φ_v). Ara bé, sabem que no té sentit parlar del determinant d'una aplicació bilineal, però en l'expressió anterior no hem de pensar que tenim dos determinants sinó *un quocient de determinants*. I això sí que té sentit ja que el que sí està ben definit per a les formes quadràtiques és el seu *discriminant*, que és el determinant de la matriu de l'aplicació bilineal, en qualsevol base, mòdul quadrats. Això és així per la fórmula del canvi de base de les matrius associades a aplicacions bilineals. En el nostre cas, tal com ja hem vist a la pàgina 116, aquesta fórmula ens diu que si tenim una segona carta local (V, ψ) i denotem per M la matriu del canvi de base entre les base (φ_u, φ_v) i (ψ_u, ψ_v), tenim la relació

$$\det I_\varphi = \det I_\psi \cdot (\det M)^2.$$

El mateix passa amb la segona forma fonamental de manera que tenim

$$K = \frac{\det II_\varphi}{\det I_\varphi} = \frac{\det II_\psi \cdot (\det M)^2}{\det I_\psi \cdot (\det M)^2} = \frac{\det II_\psi}{\det I_\psi}$$

Càlcul de les direccions principals

Calculem els valors i vectors propis de W en funció dels coeficients de la primera i segona formes fonamentals donats respecte d'una parametrització (U, φ).

Els valors propis de l'endomorfisme de Weingarten W són les arrels del seu polinomi característic.

Però aquest polinomi és, per l'equació (6.11),

$$\det(W - x.id) = x^2 - \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}x + \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Observem que els coeficients d'aquest polinomi són funcions sobre U, és dir, tenim un polinomi característic en cada punt $\varphi(u, v)$.

Així, les curvatures principals k_1, k_2 de S en el punt $\varphi(u, v)$, són les arrels de l'equació

$$(EG - F^2)x^2 - (Eg - 2Ff + Ge)x + (eg - f^2) = 0. \tag{6.14}$$

Les podríem explicitar però el que ens importa és que la seva suma és igual a menys el coeficient de la x dividit pel coeficient de x^2 i el seu producte és el terme independent dividit pel coeficient de x^2. Obtenim així les fórmules 6.13 per a la curvatures mitjana i de Gauss.

Per calcular els vectors propis, un cop coneguts k_1 i k_2, tan sols hem de resoldre les dues equacions

$$W(u_i) = k_i u_i, \quad i = 1, 2.$$

Aquests càlculs són estàndards. Concretament tenim

Proposició 6.4.3 *Donada la carta local (U, φ), el vector*

$$w = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$$

és vector propi de l'endomorfisme de Weingarten si i només si

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{6.15}$$

Demostració. Denotant

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matriu de l'endomorfisme de Weingarten, la condició de vector propi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

per a una certa $k \in \mathbb{R}$ equival a l'anul·lció del determinant

$$\begin{vmatrix} a\lambda + b\mu & \lambda \\ c\lambda + d\mu & \mu \end{vmatrix} = 0$$

(els vectors són proporcionals). És a dir,

$$b\mu^2 - (d - a)\lambda\mu - c\lambda^2 = 0.$$

Com que

$$\begin{aligned} a &= \frac{Ge - Ff}{EG - F^2} \\ b &= \frac{Gf - Fg}{EG - F^2} \\ c &= \frac{Ef - Fe}{EG - F^2} \\ d &= \frac{Eg - Ff}{EG - F^2} \end{aligned}$$

obtenim directament que $w = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$ és vector propi de W si i només si

$$(Gf - Fg)\mu^2 - (Eg - Ge)\lambda\mu - (Ef - Fe)\lambda^2 = 0,$$

però aquesta fórmula es pot escriure com[9]

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Diguem de passada que podem redemostrar a partir d'aquí que els vectors propis $u_1 = \lambda_1\varphi_u + \mu_1\varphi_v$, $u_2 = \lambda_2\varphi_u + \mu_2\varphi_v$ de valors propis $k_1 \neq k_2$ són ortogonals. Només s'ha d'observar que els quocients μ_i/λ_i, $i = 1, 2$, són solució de[10]

$$(Gf - Fg)x^2 - (Eg - Ge)x - (Ef - Fe) = 0,$$

i per tant

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} &= \frac{Eg - Ge}{Gf - Fg} \\ \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2} &= -\frac{(Ef - Fe)}{Gf - Fg}. \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= E\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)F + \mu_1\mu_2 G \\ &= \lambda_1\lambda_2 \left(E + \frac{Eg - Ge}{Gf - Fg}F - \frac{Ef - Fe}{Gf - Fg}G \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

6.5 Línies de curvatura

Definició 6.5.1 *Sigui $\gamma(s)$ una corba continguda en una superfície S Direm que γ és* línia de curvatura *si $\gamma'(s)$ és, per a tot s, vector propi de l'endomorfisme de Weingarten.*

[9]Sembla una casualitat que ara apareixin determinants. Sembla només una norma mnemotècnica per recordar fàcilment l'equació dels vectors propis. En Jaume de Dios, quan va sentir aquest comentari meu, no es va poder estar d'escriure l'exercici 6.8.5.

[10]Si no sabéssim d'on surt aquesta equació de segon grau ens podríem preguntar si té o no soucions reals. Vegeu l'exercici 8.6.3.

Per calcular les equacions diferencials de les línies de curvatura respecte d'una carta local (U,φ) només hem d'escriure $\gamma(s)$ en coordenades, $\gamma(s) = \varphi(u(s),v(s))$, amb la qual cosa $\gamma'(s) = u'(s)\varphi_u(u(s),v(s))+v'(s)\varphi_v(u(s),v(s))$, i aplicar l'equació (6.15).

Tenim

$$\begin{vmatrix} v'(s)^2 & -u'(s)v'(s) & u'(s)^2 \\ E(u(s),v(s)) & F(u(s),v(s)) & G(u(s),v(s)) \\ e(u(s),v(s)) & f(u(s),v(s)) & g(u(s),v(s)) \end{vmatrix} = 0.$$

que escriurem simplement com

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{6.16}$$

Proposició 6.5.2 (Equació de Monge) *L'equació diferencial de les línies de curvatura d'una superfície donada com gràfica de $z = z(x,y)$, quan la corba ve donada com $y = y(x)$, és*

$$(y')^2[s(1+q^2)-pqt]+y'[r(1+q^2)-t(1+p^2)]+rpq-s(1+p^2) = 0. \tag{6.17}$$

Demostració. Aquesta superfície es pot parametritzar com

$$\varphi(x,y) = (x,y,z(x,y)),$$

de manera que

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (1,0,z_x) \\ \varphi_y &= (0,1,z_y) \\ \varphi_{xx} &= (0,0,z_{xx}) \\ \varphi_{xy} &= (0,0,z_{xy}) \\ \varphi_{yy} &= (0,0,z_{yy}) \end{aligned}$$

Per tant,

$$E = 1+p^2, \quad F = pq, \quad G = (1+q^2)$$

amb

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Com la normal és

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p,-q,1)$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}r, \quad f = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}s, \quad g = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}t,$$

amb

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Substituint a (6.16), tenint en compte que la corba és $\varphi(x, y(x))$ i per tant $u = x$, $v = y(x)$, tenim

$$\begin{vmatrix} y'^2 & -y' & 1 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0,$$

i el desenvolupament d'aquest determinant coincideix amb (6.17), com volíem veure. □

Nota 6.5.3 Observem que en el cas particular en que la superfície S és gràfica de $z = z(x,y)$ amb $z(0,0) = 0$, i $T_P S = \{z = 0\}$, llavors $p = q = 0$ a l'origen (vegeu exercici 6.8.3) i per tant l'equació de les direccions principals a l'origen es redueix a

$$\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r & s & t \end{vmatrix} = sy'^{\,2} + y'(r-t) - s = 0, \tag{6.18}$$

amb $y' = y'(0)$, i les derivades segones r, s, t també valorades a l'origen. Això vol dir que la direcció $(1, a, 0) \in T_P S$ és direcció principal si i només si

$$sa^2 + a(r-t) - s = 0.$$

Aquesta equació diu directament que hi ha dues direccions principals (és una equació de segon grau) i que són ortogonals (el producte de les dues arrels a_1, a_2 és -1 i per tant $(1, a_1, 0) \cdot (1, a_2, 0) = 0$).

Nota 6.5.4 El 1795 Monge publica: *Les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoide*, [22], utilitzant les equacions generals de les línies de curvatura, que havia estudiat a *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, [21]. Obté

$$Axyy'^2 + y'(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0.$$

amb

$$A = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}$$

on a, b, c són els semieixos de l'el·lipsoide. I de seguida la integra obtenint que es tracta d'una secció cònica del tipus $y^2 = \beta x^2 + \gamma$, per certes constants β, γ que s'han d'ajustar. Per tant es tracta d'una cònica concèntrica amb l'el·lipsoide que serà una el·lipse o una hipèrbola segons el signe de β. Observeu que aquesta cònica és la projecció sobre el pla $z = 0$ de les línies de curvatura.

6.6 Coordenades principals

Un cop sabem que fora de punts umbilicals les línies de curvatura són ortogonals, les podem agafar com línies coordenades. Aquestes coordenades es diuen principals. Abans de demostrar-ne rigorosament l'existència, cosa que farem més endavant a l'exercici 13.5.1, pàgina 317, degut a que implica coneixements que ara no tenim, veiem-ne una caracterització.

Proposició 6.6.1 *Sigui S una superfície sense punts umbilicals. Una parametrització $\varphi(u, v)$ de S és principal si i només si $F = f = 0$. En aquest cas les curvatures principals són $k_1 = e/E$ i $k_2 = g/G$.*

Demostració. Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització principal. Això vol dir, per definició, que φ_u i φ_v són en cada punt direccions principals. En particular, com que aquestes són ortogonals, $F = 0$.

Per altra banda,

$$f = -\langle d\mathcal{N}_P(\varphi_u), \varphi_v\rangle = \langle W_P(\varphi_u), \varphi_v\rangle = 0$$

ja que φ_u és vector propi de W_P.

Recíprocament, si $F = f = 0$ l'equació diferencial de les línies de curvatura es redueix a

$$(Eg - eG)u'v' = 0.$$

Ara bé, si $Eg - eG = 0$, en un punt, com que també tenim $F = f = 0$, vol dir que estem en un punt umbilical ja que $\frac{e}{E}E = e$, $\frac{e}{E}F = f$, $\frac{e}{E}G = g$ (la primera i segona formes són proporcionals). Com hem suposat que no hi ha punts umbilicals, ha de ser $Eg - eG \neq 0$ en tot punt, i per tant l'equació diferencial de les línies de curvatura es redueix a $u'v' = 0$ que té com solució $u = constant$ i també $v = constant$, és a dir, les línies coordenades són línies de curvatura i la parametrització és principal.

Finalment la igualtat $k_1 = e/E$ i $k_2 = g/G$ es desprèn directament de la fórmula (6.11), pàgina 145. □

6.7 La primera i segona forma fonamentals determinen la superfície

Clourem aquest capítol veient que la primera i segona forma fonamentals determinen la superfície, i que per tant no cal pensar en introduir nous objectes per estudiar una superfície ja que tota la informació es troba a I i II. Per a això utilitzarem entorns tubulars.

Entorns tubulars

Sigui S una superfície. Donat $\epsilon > 0$ denotem $N_\epsilon S$ el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ format per la unió dels segments oberts de rectes normals a S, centrats en els punts de S i radi ϵ.

Definició 6.7.1 *Direm que $N_\epsilon S$ és un* entorn tubular *de S si l'aplicació*

$$F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N_\epsilon S$$

donada per

$$F(x,t) = x + t\mathcal{N}(x)$$

on $\mathcal{N}$ és l'aplicació de Gauss, és un difeomorfisme.

Es pot veure amb certa facilitat, vegeu per exemple [24] pàgina 141, que donada una superfície compacta existeix un $\epsilon > 0$ tal que el conjunt $N_\epsilon S$ és un *entorn tubular* de S.

A la Proposició següent veurem que l'entorn tubular es pot estendre com a molt fins els radis de curvatura principal, és a dir $\epsilon < \rho_i$.

Proposició 6.7.2 *Si $N_\epsilon S$ és un entorn tubular de S llavors ϵ és més petit que els radis de curvatura principal.*

Demostració. Sabem que la diferencial de F en un punt (p,t) és un isomorfisme. Però

$$\begin{aligned} dF_{(p,t)}(v,0) &= v + t\,d\mathcal{N}_p(v), \quad v \in T_pS \\ dF_{(p,t)}(0,1) &= \mathcal{N}(p) \end{aligned}$$

Així, en el cas particular en que $v = e_i$ sigui un dels vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten

$$dF_{(p,t)}(e_i, 0) = e_i - tk_ie_i = (1 - tk_i)e_i, \quad i = 1, 2$$

i ha de ser, doncs, $1 - tk_i \neq 0$. Com per $t = 0$ aquest valor és positiu ha de ser $1 - tk_i > 0$, és a dir, $t < \rho_i$. □

Ara ja estem en condicions de demostrar, seguint [24], el resultat següent.

Teorema 6.7.3 (Teorema fonamental de la teoria de superfícies) *Siguin S_1 i S_2 superfícies orientables amb S connexa. Sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una isometria local que conserva la segona forma fonamental. Llavors f és la restricció a S_1 d'un moviment rígid de $\mathbb{R}^3$.*

Demostració. Donat $P \in S_1$, sabem que existeixen entorns oberts V de P a S_1 i V' de $f(P)$ a S_2 tals que $f : V \longrightarrow V'$ és difeomorfisme.

Considerem entorns tubulars de radi ϵ, $N_\epsilon V$ i $N_\epsilon V'$ i estenem f a una aplicació $\phi : N_\epsilon V \longrightarrow N_\epsilon V'$ definida per

$$\phi(x + t\mathcal{N}_1(x)) = f(x) + t\mathcal{N}_2(f(x)), \quad x \in V$$

on $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ són les respectives aplicacions de Gauss. Aquesta aplicació és clarament diferenciable i bijectiva. Estudiarem ara la seva diferencial per veure que és bijectiva en cada punt i per tant ϕ és difeomorfisme. La diferencial és una aplicació lineal de $\mathbb{R}^3$ que considerarem descompost en cada punt on s'aplica la diferencial en suma directa del subespai tangent a la superfície i el seu normal.

Primer pas. Mirem com actua sobre els vectors normals. Sigui $y = x + t\mathcal{N}_1(x)$. Llavors

$$d\phi_y(\mathcal{N}_1(x)) = \mathcal{N}_2(f(x)).$$

En efecte, $\sigma(s) = y + s\mathcal{N}_1(x)$ és una corba integral de $\mathcal{N}_1(x) \in T_y\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Així,

$$d\phi_y(\mathcal{N}_1(x)) = \frac{d}{ds}_{s=0}\phi(\sigma(s)) = \frac{d}{ds}_{s=0}(f(y)) + s\mathcal{N}_2(f(x)) = \mathcal{N}_2(f(x)).$$

Segon pas. Mirem com actua sobre els vectors tangents. Si agafem sense més un vector tangent a la superfície tindrem dificultats en calcular la seva corba integral per y. Per això fem el petit truc de calcular $d\phi_y$ sobre vectors del tipus

$$w + td(\mathcal{N}_1)_x(w) \in T_y\mathbb{R}^3, \quad w \in T_xS$$

D'aquesta manera si $\alpha(s)$ és una corba integral de w, $\beta(s) = \alpha(s) + t\mathcal{N}_1(\alpha(s))$ és corba integral de $w + td(\mathcal{N}_1)_x(w)$ i per tant

$$\begin{aligned} d\phi_y(w + td(\mathcal{N}_1)_x(w)) &= \frac{d}{ds}_{s=0}\phi(\beta(s)) \\ &= \frac{d}{ds}_{s=0}(f(\alpha(s)) + t\mathcal{N}_2(f(\alpha(s)))) \\ &= df_x(w) + td(\mathcal{N}_2)_{f(x)}df_x(w) \end{aligned}$$

però, a l'exercici 6.8.7 demostrem que pel fet de que f conservi les segones formes fonamentals la seva diferencial commuta amb la diferencial de les normals,

$$(d\mathcal{N}_2)_{f(P)} \circ df_P = df_P \circ (d\mathcal{N}_1)_P$$

Per tant,

$$d\phi_y(w + td(\mathcal{N}_1)_x(w)) = df_x(w + td(\mathcal{N}_1)_{(x)}(w))$$

És a dir, $d\phi_y$ coincideix amb df_x sobre els vectors de la forma $w+td(\mathcal{N}_1)_x(w)$. Però resulta que tot vector de T_xS es pot posar d'aquesta manera ja que l'aplicació

$$id + td(\mathcal{N}_1)_x : T_xS \longrightarrow T_xS$$

és isomorfisme. En efecte, si $w + td(\mathcal{N}_1)_x(w) = 0$ tenim $d(\mathcal{N}_1)_x(w) = -\frac{1}{t}w$ i per tant w és vector propi de l'endomorfisme de Weingarten de valor propi $1/t$. És a dir, $t = \rho_i$, $i = 1$ o $i = 2$ on ρ_i són els radis de curvatura principals. Però això no pot ser ja que en els entorns tubulars $t < \rho_i$ (pàgina 154).

Resumint,

$$d\phi_y(\mathcal{N}_1(x)) = \mathcal{N}_2(f(x)), \quad d\phi_y = df_x \text{ sobre } T_xS$$

Per tant, $d\phi_y$ porta bases a bases i és doncs un isomorfisme. Però encara més, si prenem una base ortonormal adaptada a la descomposició $T_xS \oplus \langle \mathcal{N}(x) \rangle$ la seva imatge per $d\phi_y$ és també una base ortonormal, per tant $d\phi_y$ és una isometria lineal.

Llavors, per l'exercici 6.8.8, ϕ és la restricció d'un moviment rígid de $\mathbb{R}^3$.

Per ser S connexa, tots els moviments rígids corresponents a diversos entorns oberts V de S coincideixen. En efecte, sigui F el moviment rígid de $\mathbb{R}^3$ que restringeix a ϕ. Sigui

$$Z = \{x \in S; \exists W \text{entorn obert de S}, F(W) \subseteq S'\}$$

És fàcil veure que Z és no buit (P hi pertany), obert i tancat i coincideix doncs amb S. És clar que és obert. Per veure que és tancat suposem $y_k \to y$ amb $y_k \in Z$. Si $y \notin Z$, per tota bola $B(y; 1/n)$ de y hi haurien punts z_n tals que $F(z_n) \notin S'$. Però aquests z_n estaran en algun moment dintre dels entorns del y_k que s'apliquen a S' per F, contradicció. $\square$

6.8 Exercicis

Exercici 6.8.1 *Demostreu que*

$$\det(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = \sqrt{EG - F^2}.$$

Solució. En general,

$$\det(u \wedge v, u, v) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Desenvolupant per la primera fila

$$\det(u \wedge v, u, v) = \|u \wedge v\|^2.$$

En el nostre cas,

$$\det(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = \frac{1}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|} \det(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = \|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|.$$

Per la identitat de Lagrange, pàgina 115, hem acabat.

Exercici 6.8.2 *Calculeu les curvatures principals en cada punt de la superfície* $\varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *donada per* $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$.

Solució.

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, u^2)\\
\varphi_u &= (\cos v, \sin v, 2u)\\
\varphi_v &= (-u\sin v, u\cos v, 0)\\
\varphi_u \wedge \varphi_v &= (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\\
\nu(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}}(-2u\cos v, -2u\sin v, 1)\\
\varphi_{uu} &= (0,0,2)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0)\\
\varphi_{vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0)
\end{aligned}$$

La segona forma fonamental és doncs

$$II = \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix}$$

i l'endomorfisme de Weingarten

$$\begin{aligned}
W = I^{-1}II &= \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \begin{pmatrix} (4u^2+1)^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{(4u^2+1)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{(4u^2+1)^{1/2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Com que aquesta matriu és diagonal tenim

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2}{(4u^2+1)^{3/2}},\\
k_2 &= \frac{2}{(4u^2+1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Exercici 6.8.3 *Sigui* S *una superfície donada com gràfica de la funció* $z = z(x, y)$. *Calculeu els coeficients de la segona forma fonamental en termes de* $z(x, y)$.

Solució. Aquesta superfície es pot parametritzar per

$$\varphi(x,y) = (x, y, z(x,y)).$$

Així,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_x &=& (1, 0, z_x) \\
\varphi_y &=& (0, 1, z_y) \\
\varphi_x \wedge \varphi_y &=& (-z_x, -z_y, 1) \\
\nu(x,y) &=& \dfrac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}(-z_x, -z_y, 1) \\
\varphi_{xx} &=& (0, 0, z_{xx}) \\
\varphi_{xy} &=& (0, 0, z_{xy}) \\
\varphi_{yy} &=& (0, 0, z_{yy})
\end{array}$$

La matriu de la primera forma fonamental és

$$I = \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}.$$

La matriu de la segona forma fonamental és

$$II = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$$

i l'endomorfisme de Weingarten

$$\begin{array}{rcl}
W &=& I^{-1} II = \dfrac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} \\
&=& \dfrac{1}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + z_y^2) z_{xx} - z_x z_y z_{xy} & (1 + z_y^2) z_{xy} - z_x z_y z_{yy} \\ (1 + z_x^2) z_{xy} - z_x z_y z_{xx} & (1 + z_x^2) z_{yy} - z_x z_y z_{xy} \end{pmatrix}.
\end{array}$$

En particular,

$$H = \frac{(1 + z_y^2) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy}}{2(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^2}$$

Una simplificació important s'obté amb la següent consideració. Donat $P \in S$ sempre podem aconseguir, mitjançant girs i translacions, fer coincidir P amb l'origen de coordenades i de tal manera que $T_P S$ vagi a coincidir amb el pla $z = 0$.

Tindrem llavors S donada com gràfica d'una funció $z = z(x, y)$ amb $z(0, 0) = 0$, i si diem $\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$ tindrem

$$\varphi_x(0, 0) = (1, 0, z_x(0, 0)), \varphi_y(0, 0) = (0, 1, z_y(0, 0))$$

que, per la hipòtesis que hem fet sobre el pla tangent, implica

$$z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0.$$

Per tant, la segona forma fonamental a l'origen és

$$II = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix},$$

aquestes derivades parcials valorades a l'origen. És a dir, la segona forma fonamental no és més que el Hessià de la funció $z = z(x, y)$.

A més, com la primera forma fonamental a la l'origen és la identitat el hessià és també la matriu de l'endomorfisme de Weingarten, i per tant $H = (z_{xx} + z_{yy})/2$ i $K = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2$, aquestes derivades parcials valorades a l'origen.

Exercici 6.8.4 [11] *Estudieu, amb Maple, les curvatures principals de la superfície donada com gràfica de $z = x^3 + y^3$. Són diferenciables?*

Exercici 6.8.5 [12] *Doneu una demostració alternativa de l'equació de les línies de curvatura que posi de manifest de manera natural l'aparició de determinants. És a dir, demostreu que si $\omega = \lambda\phi_u + \mu\phi_v$ és un vector de $T_p(S)$, aleshores ω és vector propi de l'endomorfisme de Weingarten W_p si i només si:*

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

[11] Exemple que em va donar David Marin parlant de curvatures principals no diferenciables.

[12] Jaume de Dios Pont, abril 2016.

Solució. Suposem, per començar que els vectors (e, f, g) i (E, F, G) són linealment independents. En aquest cas, la igualtat anterior és equivalent a que existeixin α, β, al menys un diferent de zero, tal que:

$$(\mu^2, -\lambda\mu, \lambda^2) = \alpha(E, F, G) + \beta(e, f, g)$$

Ara notem que podem associar, de forma lineal i bijectiva, les matrius simètriques de dimensió 2 amb els vectors de dimensió 3, amb la relació:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \sim (a, b, c)$$

Utilitzant aquest fet en la primera igualtat en els tres vectors de la equació anterior, podem obtenir la següent igualtat de matrius simètriques:

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu \\ -\lambda\mu & \lambda^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Aquesta igualtat, però, la podem reescriure de forma més simplificada com:

$$\begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu \\ -\lambda\mu & \lambda^2 \end{pmatrix} = \alpha I + \beta II = I(\alpha + \beta W_p)$$

Ara hem de notar un fet important sobre la matriu de l'esquerra en la igualtat, $\begin{pmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu \\ -\lambda\mu & \lambda^2 \end{pmatrix}$. Aquesta, tret de constants multiplicatives, és la única matriu simètrica de dimensió 2 que té ω al seu ker [13].

Per tant, la condició de la existència de α, β no nul·les tals que es compleixi la igualtat matricial anterior és exactament equivalent a demanar que existeixin α, β tal que: $\omega \in \ker(I(\alpha + \beta W_p))$.

Ara bé, com que I té rang 2, això és equivalent a demanar que ω pertanyi al ker de $\alpha + \beta W_p$, o equivalentment, que sigui vector propi de W_p, amb valor propi $-\frac{\alpha}{\beta}$.

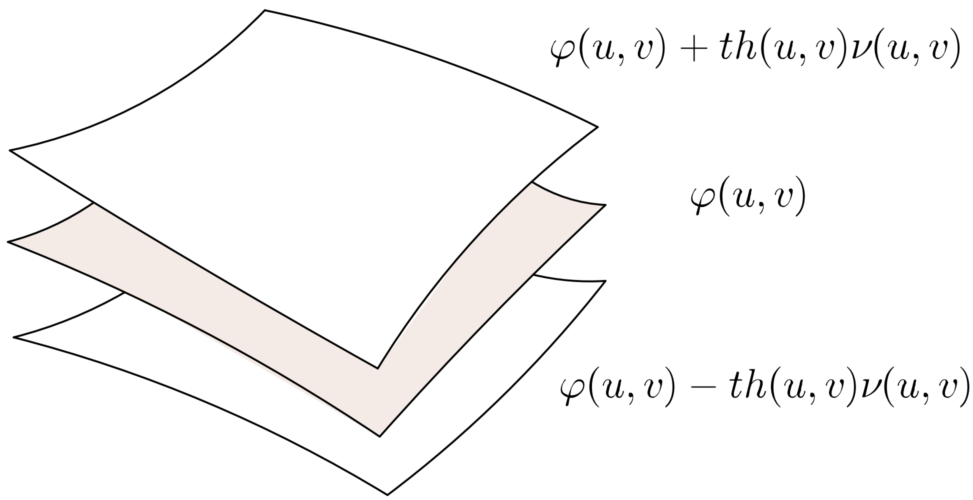
[13] Per a demostrar aquest fet, tant sols cal notar que si una matriu té ω al ker, ω n'és vector propi. L'altre vector propi ha de ser justament l'ortogonal a ω, és a dir, que la matriu ha de ser un múltiple de la matriu $\begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \end{pmatrix}$

Exercici 6.8.6 (Superfícies minimals) *Demostreu que una superfície és minimal (en el sentit de que té curvatura mitjana zero) si i només si tot petit domini de S és punt crític de l'àrea respecte de les variacions normals.*

Solució. Sigui (U, φ) una carta de S i h una funció arbitrària sobre U. Per a cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definim

$$\psi^t(u, v) = \varphi(u, v) + th(u, v)\nu(u, v)$$

on ν és el camp normal a S.



Llavors tenim,

$$\begin{aligned} \psi_u^t &= \varphi_u + th_u\nu + th\nu_u \\ \psi_v^t &= \varphi_v + th_v\nu + th\nu_v \end{aligned}$$

i per tant els coeficients de la primera forma fonamental són

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2the + o(t^2) \\ F^t &= F - 2thf + o(t^2) \\ G^t &= G - 2thg + o(t^2) \end{aligned}$$

ja que $\langle \varphi_u, \nu_u \rangle = -e$, etc.

Per tant, recordant la fórmula (6.13) per a la curvatura mitjana,

$$E^tG^t - (F^t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH + o(t^2))$$

Per tot domini D contingut a U denotem A^t l'àrea de $\psi^t(D)$ i tenim

$$A^t = \int_D (EG - F^2)(1 - 4thH + o(t^2))du\, dv$$

Derivant respecte t en $t = 0$ i recordant que podem derivar sota el signe integral, tenim

$$\frac{dA^t}{dt}_{t=0} = -\int_D 2hH\sqrt{EG - F^2}du\, dv.$$

Ara es conclou sense masses dificultats.

Exercici 6.8.7 *Siguin S_1 i S_2 superfícies orientables i $f : S_1 \longrightarrow S_2$ isometria local que conserva la segona forma fonamental. Llavors*

$$(d\mathcal{N}_2)_{f(P)} \circ df_P = df_P \circ (d\mathcal{N}_1)_P \tag{6.19}$$

on $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ són les respectives aplicacions de Gauss.

Solució.[14] Que conservi les segones formes vol dir, per definició,

$$\langle (d\mathcal{N}_2)_{f(P)} df_P u, df_P v\rangle = \langle (d\mathcal{N}_1)_P u, v\rangle, \quad \forall u, v \in T_P S_1, \forall P \in S_1 \tag{6.20}$$

Si apliquem u al primer terme de (6.19) i multipliquem el resultat per $df_P v$ obtenim el primer terme de (6.20). Si fem la mateixa operació sobre el segon terme de (6.19), és a dir, li apliquem u i multipliquem el resultat per $df_P v$ obtenim

$$\langle df_P (d\mathcal{N}_1)_P u, df_P v\rangle$$

que, per ser df_P isometria, és igual a

$$\langle (d\mathcal{N}_1)_P u, v\rangle$$

que és el segon terme de (6.20)

Com u i v són arbitraris això vol dir que els dos termes de (6.19) són iguals.

Exercici 6.8.8 *Sigui $\phi : V \longrightarrow V'$ un difeomorfisme entre oberts connexos de $\mathbb{R}^3$ tal que la diferencial en cada punt és una isometria lineal. Llavors ϕ és la restricció d'un moviment rígid de $\mathbb{R}^3$.*

[14] Continuem seguint [24].

Solució. Sigui $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Per ser $d\phi_P$ isometria lineal tenim

$$\langle d\phi_P \frac{\partial}{\partial x_i}, d\phi_P \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Però

$$d\phi_P \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

derivada en el punt P, de manera que

$$\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij},$$

en tot punt P, de manera que derivant respecte de x_k,

$$\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle + \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \rangle = 0.$$

Aquesta igualtat es pot llegir dient que la funció

$$G_{ijk} = \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle$$

és antisimètrica en i, j (i clarament simètrica en i, k). Jugant amb això tenim

$$G_{ijk} = -G_{ikj} = -G_{kij} = G_{kji} = G_{jki} = -G_{jik} = -G_{ijk}$$

i per tant $G_{ijk} = 0$, cosa que implica

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

i per tant ϕ és lineal, concretament de la forma $\phi(x) = Ax + b$, on A és una matriu 3×3, que, per coincidir amb $d\phi_P$, que és isometria, és ortogonal. És a dir, ϕ és un moviment rígid de $\mathbb{R}^3$.

Exercici 6.8.9 (Com canvia les longituds l'aplicació de Gauss) *Sigui $\gamma(t)$ una corba sobre una superfície S i sigui $\sigma(t) = \mathcal{N}(\gamma(t))$ la imatge de $\gamma(t)$ per l'aplicació de Gauss.*

Demostreu que

$$L_\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2Hk_n - K} ds.$$

on $L_\sigma(t)$ *és la longitud de* $\sigma(t)$ *entre els punts de paràmetre* $t = t_0$ *i* t, $H = \mathcal{H}(\gamma(t))$ *i* $K = \mathcal{K}(\gamma(t))$ *les curvatures mitjana i de Gauss en el punt* $\gamma(t)$, $k_n = k_n(t)$ *la curvatura normal de* $\gamma(t)$ *i* $s = s(t)$ *el paràmetre arc de* $\gamma(t)$.

Solució. Seguim Eisenhart, [12]. En els punts on $\mathcal{K} \neq 0$ l'aplicació de Gauss és un difeomorfisme local i per tant tota carta local (U, φ) de S dóna lloca a una carta local de S^2, (U, ν) amb

$$\nu = \mathcal{N} \circ \varphi.$$

Podem dir que *tota superfície dóna una reparametrització de l'esfera via l'aplicació de Gauss* $\mathcal{N}$.

Per calcular la primera forma fonamental de S^2 respecte aquestes coordenades recordem les equacions 6.12, pàgina 146,

$$\begin{aligned}
\nu_u &= \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}\,\varphi_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}\,\varphi_v \\
\nu_v &= \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}\,\varphi_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}\,\varphi_v
\end{aligned}$$

Un càlcul una mica llarg ens dóna els coeficients $\mathcal{E} = \langle \nu_u, \nu_u \rangle$, $\mathcal{F} = \langle \nu_u, \nu_v \rangle$, $\mathcal{G} = \langle \nu_v, \nu_v \rangle$ de la primera forma fonamental de l'esfera respecte la carta (U, ν)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{EG - F^2}(e^2G + Ef^2 - 2Ffe) \\
\mathcal{F} &= \frac{1}{EG - F^2}(Gef - F(eg + f^2) + Efg) \\
\mathcal{G} &= \frac{1}{EG - F^2}(Gf^2 + Eg^2 - 2Ffg)
\end{aligned}$$

Recordant les fórmules 6.13 per a la curvatura mitjana i de Gauss,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}, \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

tenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= 2He - KE \\
\mathcal{F} &= 2Hf - KF \\
\mathcal{G} &= 2Hg - KG
\end{aligned}$$

Escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, de manera que $(u(t), v(t))$ són les coordenades de $\gamma(t)$ respecte φ i *també* les coordenades de $\sigma(t)$ respecte ν.

Si denotem per $s = s(t)$ el paràmetre arc de $\gamma(s)$ i per $\tau = \tau(t)$ el paràmetre arc de $\sigma(t)$, tenim

$$\begin{aligned}
(\frac{d\tau}{dt})^2 &= \mathcal{E}u'^2 + 2\mathcal{F}u'v' + \mathcal{G}v'^2 \\
&= 2H(eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2) - K(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2) \\
&= 2Hk_n(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2) - K(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2) \\
&= (2Hk_n - K)(\frac{ds}{dt})^2
\end{aligned}$$

Igualtat que s'escriu com

$$d\tau^2 = (2Hk_n - K)ds^2$$

Equivalentment,

$$L_\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2Hk_n - K}ds.$$

Capítol 7

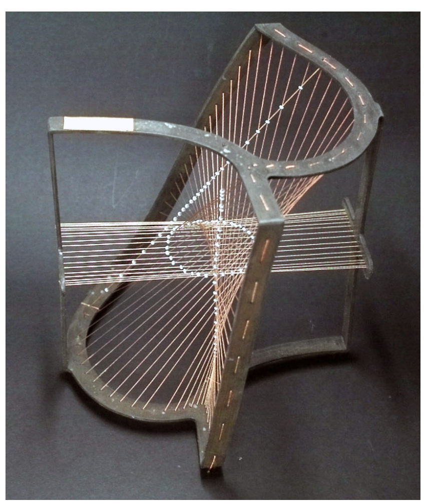
Superfícies reglades.Teorema de Monge

7.1 Primeres propietats

Definició 7.1.1 (Superfícies reglades) *Una superfície S de $\mathbb{R}^3$ s'anomena* reglada *si es pot parametritzar de la forma*

$$\varphi(s,t) = \alpha(s) + tu(s),$$

on $\alpha(s)$ i $u(s)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ i $\|u(s)\| = 1$.



Equivalentment, S és reglada quan és la unió d'una família uniparamètrica de rectes. A l'expressió anterior, per a cada valor fixat del paràmetre s, la recta que passa pel punt $\alpha(s)$ amb vector director $u(s)$ està continguda a S. Aquestes rectes es diuen *generatrius* de S.

Proposició 7.1.2 *La curvatura de Gauss $\mathcal{K}$ d'una superfície reglada compleix que $\mathcal{K} \leq 0$. A més, $\mathcal{K} = 0$ si i només si el vector normal unitari $\mathcal{N}$ de S és constant al llarg de les generatrius.*

Demostració. Sigui $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tu(s)$, amb $\|u(s)\| = 1$. Observem que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) &= \gamma'(s) + tu'(s),\\
\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t) &= u(s),\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(s,t) &= 0.
\end{aligned}$$

Per simplificar la notació escriurem simplement

$$\begin{aligned}
\varphi_s &= \gamma' + tv',\\
\varphi_t &= v,\\
\varphi_{tt} &= 0.
\end{aligned}$$

Per tant, el coeficient g de la segona forma fonamental, $g = \langle \nu, \varphi_{tt}\rangle$, és zero. Això implica que el determinant de la segona forma fonamental és igual a $-f^2$ i per tant és negatiu. Com el determinant de la primera forma fonamental és positiu, la curvatura de Gauss $\mathcal{K}$, que és en el punt $\varphi(s,t)$, el quocient d'aquest dos determinants, compleix $\mathcal{K} \leq 0$, com volíem veure.

El cas $\mathcal{K} = 0$ es dóna, doncs, quan

$$f = \langle \nu, \varphi_{st}\rangle = -\langle \nu_t, \varphi_s\rangle = 0,$$

amb $\nu = \mathcal{N} \circ \varphi$. Com que també

$$\begin{aligned}
\langle \nu_t, \varphi_t\rangle &= -\langle \nu, \varphi_{tt}\rangle = 0,\\
\langle \nu_t, \nu\rangle &= 0,
\end{aligned}$$

com hem vist a les equacions (6.5), resulta que ν_t és ortogonal a tres vectors linealment independents, i per tant $\nu_t = 0$ i ν és constant sobre les generatrius. El recíproc és clar, ja que $\nu_t = 0$ implica $f = 0$, i per tant $\mathcal{K} = -f^2 = 0$.
$\square$

Definició 7.1.3 *Les superfíces reglades amb $\mathcal{K} = 0$ s'anomenen* desenvolupables.

Per tant, per la proposició anterior, una superfície és desenvolupable si i només si és reglada i el vector normal (equivalentment, el pla tangent) és constant al llarg de la generatrius.

Definició 7.1.4 *L'eix de regressió d'una superfície desenvolupable és el conjunt de punts on $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tu(s)$ deixa de ser regular.*[1]

Com la condició de regularitat és $\varphi_s \wedge \varphi_t \neq 0$, és a dir,

$$(\gamma'(s) + tu'(s)) \wedge u(s) \neq 0,$$

l'eix de regressió és

$$\{\varphi(s,t); \gamma'(s) \wedge u(s) = tu(s) \wedge u'(s)\}. \tag{7.1}$$

El valor de t l'obtenim multiplicant escalarment els dos termes d'aquesta igualtat per $u(s) \wedge u'(s)$ i dividint pel quadrat de la seva norma (i aplicant la fórmula de Lagrange, pàgina 115). Obtenim que l'eix de regressió és

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), u'(s) \rangle}{\|u(s) \wedge u'(s)\|^2} u(s).$$

Com $u(s)$ és unitari podem escriure

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), u'(s) \rangle}{\|u'(s)\|^2} u(s). \tag{7.2}$$

Si la definició 7.1.4 la donem per a superfícies reglades no necessàriament desenvolupables no és cert que sobre aquesta corba $\sigma(s)$ la superfície deixi de ser regular. La igualtat (7.1) implica efectivament

$$t = -\frac{\langle \gamma'(s), u'(s) \rangle}{\|u'(s)\|}$$

però el recíproc no és cert. Caldria que $\gamma'(s) \wedge u(s)$ tingués la mateixa direcció que $u(s) \wedge u'(s)$, cosa que sí passa, com ara veurem, a les desenvolupables.

[1] Veurem que aquest conjunt és una corba. No és pas, en general, una recta com podria suggerir la paraula 'eix'.

Proposició 7.1.5 *Si una superfície reglada és desenvolupable llavors les generatrius són tangents a l'eix de regressió. És a dir, és la desenvolupable tangencial de l'eix de regressió. Recíprocament, la desenvolupable tangencial d'una corba és una superfície desenvolupable.*

Demostració. Sigui $\varphi(s,t) = \gamma(s) + tu(s)$, amb $\|u(s)\| = 1$, desenvolupable. El camp normal unitari està donat per

$$\nu = h(\varphi_s \wedge \varphi_t) \text{ amb } h = \frac{1}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|}.$$

Recordem que $\nu = \mathcal{N} \circ \varphi$, i remarquem que $h = h(s,t)$

Derivant respecte de t, i recordant que ν és constant al llarg de les generatrius, i que $\varphi_{tt}(s,t) = 0$, tenim

$$0 = \nu_t = h_t \varphi_s \wedge \varphi_t + h\, \varphi_{st} \wedge \varphi_t.$$

Com $\varphi_s(s,t) = \gamma'(s) + tu'(s)$ i $\varphi_t(s,t) = u(s)$, substituint tenim

$$h_t\, \gamma' \wedge u + (th_t + h)u' \wedge u = 0.$$

Si $u'(s)$ i $\gamma'(s)$ fossin linealment independents en un punt, $u'(s) \wedge u(s)$ i $\gamma'(s) \wedge u(s)$ també ho serien i per tant hauria de ser $h_t = 0$ i $th_t + h = 0$, és a dir, $h = 0$, el que és una contradicció. Per tant, són linealment dependents en tot punt, és a dir, existeix una funció $\mu(s)$ tal que $u'(s) = \mu(s)\gamma'(s)$.

Així doncs, per la fórmula (7.2), l'eix de regressió és

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{1}{\mu(s)} u(s).$$

Per tant,

$$\sigma'(s) = \gamma'(s) - \left(\frac{1}{\mu(s)}\right)' u(s) - \frac{1}{\mu(s)} u'(s) = -\left(\frac{1}{\mu(s)}\right)' u(s),$$

és a dir, $\sigma'(s)$ té la direcció de $u(s)$, i per tant les seves tangents coincideixen en cada punt amb la generatriu corresponent.

Recíprocament, la desenvolupable tangencial d'una corba $\gamma(s)$ està donada per

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t\gamma'(s).$$

En particular, suposant s arc,

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s) + t\gamma''(s), \\ \varphi_t &= \gamma'(s), \\ \varphi_{st} &= \gamma''(s), \\ \varphi_{tt} &= 0, \\ \nu &= B(s), \end{aligned}$$

on $B(s)$ és el binormal a la corba[2]. Per tant, $g = 0$ i $f = \langle \nu, \varphi_{st} \rangle = \langle B(s), \gamma''(s) \rangle = 0$. Per tant, $eg - f^2 = 0$ i $K = 0$. □

7.2 Corba d'estricció

Proposició 7.2.1 *Donada la superfície reglada*

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + tu(s)$$

amb $\|u(s)\| = 1$, *i* s *paràmetre arc de* $\gamma(s)$, *la corba*

$$\beta(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), u'(s) \rangle}{\|u'(s)\|^2}\, u(s)$$

anomenada corba d'estricció[3] *està formada pels punts que realitzen la distància mínima entre rectes consecutives. Els punts de* $\beta(s)$ *es diuen punts centrals.*

Demostració. Recordem que els punts que realitzen la distància mínima entre les rectes $P + \lambda u$, $Q + \mu v$ son $X = P + au$ i $Y = Q - bv$ on a i b estan donats per

$$\overrightarrow{PQ} = au + bv + c\frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}.$$

Apliquem ara aquesta fórmula a dues rectes de la superfície reglada donada. Fixem la recta $r : \gamma(0) + tu(0)$. Denotem, per simplificar la notació, $P = \gamma(0)$ i $u = u(0)$, de manera que $r : P + tu$.

[2] Això ja implica que ν és constant sobre les generatrius ($B(s)$ no depèn de t) i per tant la superfície és desenvolupable.

[3] Aquesta fórmula és exactament la fórmula (7.2) de l'eix de regressió d'una superfície desenvolupable. És a dir, la corba d'estricció de les superfícies desenvolupables és el seu eix de regressió.

Per un s fixat considerem la recta $r_s : \gamma(s) + tu(s)$ i busquem el punt $X(s)$ sobre r que realitza la distància mínima entre r i r_s.

Per les fórmules anteriors

$$X(s) = P + au,$$

on $a = a(s)$ està determinat per la fórmula

$$\overrightarrow{P\gamma(s)} = au + bu(s) + c\frac{u \wedge u(s)}{\|u \wedge u(s)\|},$$

amb $b = b(s)$, $c = c(s)$.

Per trobar a i b resolem el sistema

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u\rangle &= a + b\langle u, u(s)\rangle,\\ \langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u(s)\rangle &= a\langle u, u(s)\rangle + b\end{aligned}$$

Obtenim

$$a(s) = \frac{\langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u\rangle - \langle u, u(s)\rangle\langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u(s)\rangle}{1 - \langle u, u(s)\rangle^2}$$

Per calcular $\lim_{s\to 0} a(s)$, in obtenir així el punt $X(0)$ demanat, apliquem dos cops la regla de Bernouilli-l'Hôpital.

$$\lim_{s\to 0} a(s) =$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{\langle\gamma'(s), u\rangle - \langle u, u'(s)\rangle\langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u(s)\rangle - \langle u, u(s)\rangle\Big(\langle\gamma'(s), u(s)\rangle + \langle\overrightarrow{P\gamma(s)}, u'(s)\rangle\Big)}{-2\langle u, u(s)\rangle\langle u, u'(s)\rangle}.$$

Ara tornem a derivar numerador i denominador, però derivem en el punt $s = 0$, cosa que simplifica els càlculs, ja que $\langle u, u(0)\rangle = 1$, i $\langle u, u'(0)\rangle = 0$, i el vector $\overrightarrow{P\gamma(s)}$ s'anul·la en $s = 0$.

Obtenim

$$a(0) = \frac{\langle\gamma''(0), u\rangle - (2\langle\gamma'(0), u'(0)\rangle + \langle\gamma''(0), u\rangle)}{-2\langle u, u''(0)\rangle} = -\frac{\langle\gamma'(0), u'(0)\rangle}{\|u'(0)\|^2}.$$

Així

$$X(0) = \gamma(0) - \frac{\langle\gamma'(0), u'(0)\rangle}{\|u'(0)\|^2}\,u.$$

Hem utilitzat que $\langle u'(s), u'(s)\rangle + \langle u(s), u''(s)\rangle = 0$, igualtat que s'obté derivant dos cops $\langle u(s), u(s)\rangle = 1$.

Fent aquest argument[4] per a totes les rectes de la superfície reglada obtenim l'anomenada *corba d'estricció*, que és la corba[5]

$$\beta(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), u'(s)\rangle}{\|u'(s)\|^2} u(s). \quad \square$$

El fet important, que és el que utilitzen els llibres per estalviar-se aquest càlcul llarg amb l'Hôpital que acabem de fer, (però llavors aquesta propietat de distància mínima queda amagada)[6] és que

$$\langle \beta'(s), u'(s)\rangle = 0.$$

Resumint,

Corol·lari 7.2.2 *Tota superfície reglada es pot escriure com*

$$\varphi(s,t) = \beta(s) + tu(s), \quad \|u(s)\| = 1$$

per a una certa corba $\beta(s)$ *tal que* $\langle \beta'(s), u'(s)\rangle = 0$.

Demostració. Prenem $\beta(s)$ la corba d'estricció. $\square$

Si la superfície no és cilíndrica, és a dir, $u(s)$ no és constant, la quantitat

$$p(s) = \frac{\det(\beta'(s), u(s), u'(s))}{\|u'(s)\|^2}$$

sent $\beta(s)$ la corba d'estricció rep el nom de *paràmetre de distribució*, i es pot veure (exercici 7.5.3) que la curvatura de Gauss està donada per

$$K(s,t) = \frac{-p^2(s)}{(p^2(s) + t^2)^2}.$$

[4]En lloc de tallar la recta per $\gamma(0)$ amb la recta per $\gamma(s)$ quan s tendeix a zero, tallem, per a tota s, la recta per $\gamma(s)$ amb la recta per $\gamma(s+h)$ i fem tendir h a zero.

[5]*Estricció*: Disminució ràpida de la secció d'una proveta sotmesa a tracció, poc abans de la ruptura.[DIEC]. Observem que necesitem tenir $u'(s) \neq 0$.

[6]El problema plantejat així: determinar una funció $t = t(s)$ tal que la corba

$$\beta(s) = \gamma(s) + t(s)u(s)$$

compleixi $\langle \beta'(s), u'(s)\rangle = 0$, és trivial.

Recordem que $K = \mathcal{K} \circ \varphi$.

Aquesta fórmula posa de manifest, canviant t per $-t$, que els punts simètrics sobre la generatriu respecte de la corba d'estricció tenen la mateixa curvatura de Gauss, el que justifica el nom de *punts centrals*.

Si la superfície reglada és desenvolupable, llavors $\mathcal{K} = 0$ i per tant $p(s) = 0$ la qual cosa vol dir $\det(\beta', u, u') = 0$, és a dir $\beta'(s)$ és combinació lineal de $u(s)$ i $u'(s)$, però com $\beta'(s)$ és perpendicular a $u'(s)$ ha de ser $\beta'(s)$ múltiple de $u(s)$. Això implica que $\beta(s)$ és l'aresta de retrocés d'aquesta superfície: la superfície és la desenvolupable tangencial de $\beta(s)$. És a dir, en aquest cas particular de $\mathcal{K} = 0$ la línia d'estricció coincideix amb l'aresta de retrocés, com havíem ja vist al peu de pàgina 3, pàgina 171.

7.3 Teorema de Monge

La manera en que Monge troba les línies de curvatura no és pas a partir de l'endomorfisme de Weingarten, que encara no havia ni nascut, com hem fet nosaltres, sinó a partir de la idea de voler generalitzar a superfícies la idea d'evoluta com envolvent de les normals. Monge havia generalitzat a corbes de $\mathbb{R}^3$ el concepte de evoluta de corbes planes. Aquestes són envolvents de les normals. Què obtenim si fem l'envolvent de les normals a una superfície al llarg d'una corba sobre aquesta superfície?

Monge diu: "Com que cada normal a una superfície corba sempre talla dues altres normals infinitament pròximes situades en dos llocs ortogonals entre si, imaginem que des de la normal al primer punt de la superfície passem a una de les dues normals infinitament pròximes que la tallen i, subseqüentment passem d'aquesta segona normal a la que la interseca a ella, i d'aquesta tercera a la que la interseca a ella, i així sobre tota la superfície. **És evident** que obtenim així una superfície desenvolupable amb les tangents perpendiculars a la superfície, i la intersecció d'aquesta desenvolupable amb la superfície és una corba[7] que els seus elements estan dirigits al llarg d'una de les curvatures de la superfície."

Precisem aquest enunciat, que relaciona superfícies desenvolupables i línies de curvatura, en el nostre llenguatge.

Teorema 7.3.1 (Teorema de Monge) *Les normals a una superfície sobre una línia de curvatura formen una superfície desenvolupable.*

[7] La línia de curvatura.

Demostració. Sigui $\gamma(s)$ una línia de curvatura d'una certa superfície S. Suposem-la parametritzada per l'arc i denotem $\nu(s)$ la restricció a $\gamma(s)$ del vector normal a S.

La superfície engendrada per les normals a $\gamma(s)$ és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t\nu(s).$$

Recordem que, tal com va dir Olinde,

$$\frac{d\nu}{ds} = -k_i(s)\gamma'(s)$$

on $k_i(s), i = 1, 2$ és la curvatura principal en la direcció principal $\gamma'(s)$.

Així

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s) + t\nu'(s) = (1 - k_i t)\gamma'(s) \\ \varphi_t &= \nu. \end{aligned}$$

Per tant, el vector normal a la superfície de les normals $\varphi(s,t)$, en el punt de coordenades (s,t), és

$$\widehat{\nu}(s,t) = \gamma'(s) \wedge \nu(s)$$

el qual depèn només de s. És doncs constant al llarg de les generatrius. Això demostra ja, Proposició 7.1.2, que aquesta superfície és desenvolupable: és reglada amb el mateix pla tangent sobre les generatrius. $\square$

L'eix de regressió és, per la fórmula (7.2) i el teorema d'Olinde,

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), \nu'(s) \rangle}{\|\nu'(s)\|^2}\,\nu(s) = \gamma(s) - \frac{-k_i}{|k_i|^2}\nu(s) = \gamma(s) + \rho_i(s)\nu(s)$$

on $\rho_i(s)$ és el radi de curvatura principal.

Si la línia de curvatura és també geodèsica (la normal a la corba i la normal a la superfície coincideixen, Definició 11.4.1) llavors *la línia de regressió és justament l'evoluta d'aquesta línia.*

7.4 Feuilles d'Analyse, feuille XV

En aquesta secció estudiarem les línies de curvatura tal com ho va fer Monge al Full XV, de les seves *Feuilles d'Analyse*, [23], titulat *Des deux courbures d'une surface courbe.*

La idea de Monge és tant simple com intentar copiar per a superfícies la construcció de l'envolvent de les normals considerada per a corbes planes: l'evoluta d'una corba es pot considerar com la corba que s'obté en tallar normals a la corba donada en punts *infinitament pròxims*. Quan els clàssics parlen de punts infinitament pròxims, com ara en el cas de les normals que estem comentant, volen dir tallar la normal a la corba $\alpha(s)$ en el punt $\alpha(0)$ amb la normal a la corba en el punt $\alpha(\Delta s)$, i a continuació passar al límit quan Δs tendeix a zero.

El problema és que si considerem dues normals a una superfície en punts infinitament pròxims pot passar que aquestes dues normals no es tallin, ja que dues rectes a l'espai normalment no es tallen.

També la idea d'infinitament pròxim s'ha de retocar en el sentit que ara tenim moltes maneres diferents d'acostar-nos a un punt donat. El mateix problema exactament que hi ha quan passem de l'estudi de derivades de funcions d'una variable a funcions de dues variables.

Tot això ho resoldrem de la manera següent. Suposem una superfície S donada per $\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$, tal que $P = (0, 0, 0)$ pertany a S (és a dir, $z(0, 0) = 0$) i tal que $T_P S = \{z = 0\}$.

Prenem una corba $\gamma(s)$ sobre la superfície S, donada per $x = x, y = y(x), z = z(x) = z(x, y(x))$ que passi per P quan $x = 0$. La recta normal a la superfície en el punt $\gamma(x)$ és

$$\gamma(x) + t\nu(x)$$

on $\nu(x)$ és el vector normal a la superfície en el punt $\gamma(x)$ i està donat per

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + p(x)^2 + q(x)^2}}(-p(x), -q(x), 1)$$

amb la notació habitual

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

i

$$p(x) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y(x)), \quad q(x) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y(x))$$

Observem que per la hipòtesi que hem fet sobre $T_P S$, $p(0) = q(0) = 0$.

Voldríem que la recta normal per $\gamma(x)$ tallés la recta normal per $\gamma(0) = P$, que és la recta $x = y = 0$.

Això potser no passa, però la tallarem amb dos plans que determinen la recta $x = y = 0$, concretament amb $x = 0$ i amb $y = 0$.

Obtenim com punts de tall

$$(0, y(x) - q(x)\frac{x}{p(x)}, z(x) + \frac{x}{p(x)}), \quad (x - p(x)\frac{y(x)}{q(x)}, 0, z(x) + \frac{y(x)}{q(x)}).$$

En el límit les terceres components han de coincidir. Aplicant l'Hôpital, la regla de la cadena, i recordant que $p = q = 0$, tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x}{p(x)} &= \frac{1}{r + sy'} \\ \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{q(x)} &= \frac{y'}{s + ty'} \end{aligned}$$

amb

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0), s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0), t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)$$

Per tant ha de ser

$$\frac{1}{r + sy'} = \frac{y'}{s + ty'},$$

és a dir,

$$sy'^{\,2} + (r - t)y' - s = 0, \tag{7.3}$$

que és exactament l'equació (6.18) que havíem obtingut per altres mètodes a la pàgina 151.

Aquesta és l'equació de les direccions principals: les direccions sobre les quals t'has d'aproximar a un punt per tal de que les normals es tallin.

Si repetim l'argument que hem usat per calcular les direccions principals a l'origen però ara treballant sobre un punt arbitrari P, i un punt pròxim a ell, obtenim l'equació general de les línies de curvatura de Monge.

Proposició 7.4.1 (Monge viewpoint) *L'equació diferencial de les línies de curvatura d'una superfície donada com gràfica de $z = z(x, y)$, i la corba donada per $y = y(x)$, és*

$$(y')^2[s(1 + q^2) - pqt] + y'[r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] + rpq - s(1 + p^2) = 0.$$

Demsotració. Repetim els càlculs de la secció anterior però en un punt arbitrari. Prenem la corba $\gamma(u) = (u, y(u), z(x(u), y(u)))$. La normal a la superfície en el punt $\gamma(u)$ es pot donar com intersecció dels dos plans

$$\begin{aligned}(x-u)+(z-z(u))p(u) &= 0\\ (y-y(u))+(z-z(u))q(u) &= 0\end{aligned}$$

on, com sempre,

$$z(u) = z(x(u), y(u)), p(u) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(u), y(u)), q(u) = \frac{\partial z}{\partial y}(x(u), y(u)).$$

La recta normal a la superfície en el punt $\gamma(u+h)$ és

$$(u+h, y(u+h), z(u+h))+\lambda\frac{1}{\sqrt{p(u+h)^2+q(u+h)^2+1}}(-p(u+h), -q(u+h), 1).$$

Tallant aquesta recta amb els dos plans anteriors obtenim respectivament els valors del paràmetre λ

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{h+p(u)(z(u+h)-z(u))}{p(u+h)-p(u)}; \quad \frac{\lambda_2}{\Delta} = \frac{y(u+h)-y(u)+(z(u+h)-z(u))q(u)}{q(u+h)-q(u)}$$

amb $\Delta = \sqrt{p(u+h)^2+q(u+h)^2+1}$.

Ara imposem que, quan $h \to 0$, els dos punts de tall coincideixin. Només ens cal igualar, en el límit, la tercera coordenada dels dos punts de tall.

Ha de ser, doncs,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1}{\Delta} = \lim_{h\to 0}\frac{\lambda_2}{\Delta}$$

Però

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1}{\Delta} &= \lim_{h\to 0}\frac{h+p(u)(z(u+h)-z(u))}{p(u+h)-p(u)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1+p(u)\frac{(z(u+h)-z(u))}{h}}{\frac{p(u+h)-p(u)}{h}}\\ &= \frac{1+p(u)z'(u)}{p'(u)}\\ &= \frac{1+p(u)(p(u)+q(u)y'(u))}{r(u)+s(u)y'(u)}\\ &= \frac{1+p(p+qy')}{r+sy'},\end{aligned} \tag{7.4}$$

i, per altra banda,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_2}{\Delta} &= \frac{y(u+h)-y(u)+(z(u+h)-z(u))q(u)}{q(u+h)-q(u)} \\
&= \frac{y'(u)+z'(u)q(u)}{q'(u)} \\
&= \frac{y'(u)+(p(u)+q(u)y'(u))q(u)}{s(u)+t(u)y'(u)} \\
&= \frac{y'+(p+qy')q}{s+ty'} \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

Igualant (7.4) i (7.5) obtenim el resultat (6.17). Observem que (6.17) es pot escriure com

$$
\begin{vmatrix} y'^{\,2} & -y' & 1 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0. \quad \square
$$

7.5 Exercicis

Exercici 7.5.1 [**Desenvolupable tangencial**] *Sigui $\gamma(s)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt.*

(a) Comproveu que $\varphi(s,t)=\gamma(s)+t\,\gamma'(s)$, amb $t\neq 0$, defineix una superfície.

(b) Demostreu que aquesta superfície és desenvolupable.

(c) Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental no depenen de la torsió de γ.

(d) Calculeu la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana en termes de la curvatura i torsió de la corba.

(e) Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que γ, deduïu que hi ha una isometria d'un obert de la superfície anterior amb una regió del pla.

Solució.

(a) Localment la parametrització és regular ja que els vectors

$$\begin{aligned}\varphi_s(s,t) &= T(s) + tk(s)N(s)\\ \varphi_t(s,t) &= T(s)\end{aligned}$$

són linealment independents, per ser $t \neq 0$ i $k \neq 0$.

(b) El vector normal val

$$\nu(s,t) = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{|\varphi_s \times \varphi_t|} = -B(s).$$

Com que no depèn de t aquest vector, i per tant el pla tangent, és constant al llarg de les generatrius, i per tant, per la Proposició 7.1.2, $\mathcal{K} = 0$ i la superfície és desenvolupable.

(c) Clarament la matriu de la primera forma fonamental respecte la base φ_s, φ_t és

$$I = \begin{pmatrix} 1 + t^2k(s)^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apareix la curvatura però no la torsió. És a dir, que si ara repetíssim els càlculs canviant $\gamma(s)$per una corba amb la seva mateixa curvatura però diferent torsió, la matriu de la primera forma fonamental seria la mateixa.

(d)

$$\begin{aligned}\varphi_{ss}(s,t) &= T'(s) + tk'(s)N(s) + tk(s)N'(s)\\ &= k(s)N(s) + tk'(s)N(s) + tk(s)(-k(s)T(s) - \tau(s)B(s))\\ &= -tk(s)^2T(s) + (tk'(s) + k(s))N(s) - tk(s)\tau(s)B(s)\\ \varphi_{st}(s,t) &= k(s)N(s)\\ \varphi_{tt}(s,t) &= 0\end{aligned}$$

Com $\nu(s,t) = -B(s)$,

$$\begin{aligned}e &= \langle \nu, \varphi_{ss} \rangle = t\tau(s)k(s)\\ f &= \langle \nu, \varphi_{st} \rangle = 0\\ g &= \langle \nu, \varphi_{tt} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Així, $eg - f^2 = 0$ i per tant $K = 0$. És una superfície desenvolupable. La curvatura mitjana val

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{\tau(s)}{tk(s)}.$$

La curvatura mitjana sí que depèn de la torsió.

(e) Denotem $\gamma^u(s)$ la única corba que té en $s = 0$ la mateixa referència de Frenet que $\gamma(s)$, amb $\gamma^u(0) = \gamma(0)$, amb la mateixa curvatura que $\gamma(s)$, i torsió $u\tau(s)$. Quan u varia a l'interval $[0, 1]$ obtenim una família uniparamètrica de corbes tal que quan $u = 0$ correspon a una corba plana i quan $u = 1$ correspon a la corba inicial $\gamma(s)$. Si denotem per S^u la desenvolupable tangencial de $\gamma^u(s)$ tenim, per cada $u \in [0, 1]$, una aplicació $F^u : S^1 \longrightarrow S^u$ donada per

$$F^u(\varphi(s,t)) = \varphi^u(s,t),$$

amb

$$\begin{aligned} \varphi(s,t) &= \gamma(s) + t\gamma'(s) \\ \varphi^u(s,t) &= \gamma^u(s) + t(\gamma^u)'(s). \end{aligned}$$

És a dir, F^u envia el punt de coordenades (s,t) de S^1 al punt de coordenades (s,t) de S^u. Els coeficients de la primera forma fonamental de S^1 respecte $\varphi(s,t)$ coincideixen amb els coeficients de la primera forma fonamental de S^u respecte de $\varphi^u = F^u \circ \varphi$. Això és degut a que en els coeficients de la primera forma fonamental dequalsevol d'questes superfícies no apareix la torsió. Per tant F^u és una isometria. En particular F^0 desenvolupa isomètricament la corba donada sobre el pla (localment).

Exercici 7.5.2 *L'invers del paràmetre de distribució és la tassa de variació de l'angle entre rectes respecte la seva distància.*

Solució. És a dir, amb la notació del problema anterior, hem de veure que

$$p(0) = \lim_{s \to 0} \frac{d(s)}{\theta(s)}$$

on $d(s)$ és la distància entre les rectes $\varphi(0,t)$ i $\varphi(s,t)$, i $\theta(s)$ és l'angle entre els vectors $u = u(0)$ i $u(s)$.

Aprofitant la notació i els càlculs del problema anterior tenim que

$$d(s) = \overrightarrow{\beta(0)\beta(s)} \cdot \frac{u \wedge u(s)}{\sin\theta(s)}.$$

Per tant,

$$\lim_{s\to 0} \frac{d(s)}{\theta(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{\beta(0)\beta(s)} \cdot \frac{u\wedge u(s)}{\sin\theta(s)}}{\sin\theta(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{\beta(0)\beta(s)} \cdot u \wedge u(s)}{\sin^2\theta(s)}$$

En aplicar un primer cop l'Hôpital obtenim

$$\lim_{s\to 0} \frac{d(s)}{\theta(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{\beta'(s) \cdot u \wedge u(s) + \overrightarrow{\beta(0)\beta(s)} \cdot}{2\sin\theta(s)\cos\theta(s)\theta'(s)}$$

Exercici 7.5.3 *Sigui* $p(s)$ *el paràmetre de distribució de la superfície reglada*

$$\varphi(s,t) = \beta(s) + tu(s)$$

amb $\|u(s) = 1\|$ *i* $\langle \beta'(s), u'(s)\rangle = 0$. *Demostreu que la curvatura de Gauss ve donada per*

$$K(s,t) = \frac{-p^2(s)}{(p^2(s)+t^2)^2}.$$

Solució. Calculem les derivades de $\varphi(s,t)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_s &= \beta'(s) + tu'(s)\\
\varphi_t &= u(s)\\
\varphi_{ss} &= \beta''(s) + tu''(s)\\
\varphi_{st} &= u'(s)\\
\varphi_{tt} &= 0
\end{aligned}$$

Així

$$\nu(s,t) = \frac{\beta'(s)\wedge u(s) + tu'(s)\wedge u(s)}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|},$$

i $E = 1 + t^2\|u'(s)\|^2$, $F = \langle \beta'(s), u(s)\rangle$, $G = 1$, $g = 0$ (la e no jugarà cap paper) i

$$f = \langle \nu, \varphi_{st}\rangle = \frac{\det(\beta', u, u')}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|}$$

La curvatura de Gauss és doncs

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|^2} = -\frac{\det(\beta', u, u')^2}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|^4}$$

Ara bé, per ser $u'(s)$ ortogonal a $u(s)$ i a $\beta'(s)$ hi ha una funció $p(s)$ tal que $\beta'(s) \wedge u(s) = p(s)u'(s)$. Multiplicant per $u'(s)$ obtenim que

$$p(s) = \frac{\det(\beta'(s), u(s), u'(s))}{\|u'(s)\|^2}$$

Així,

$$\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|^2 = \langle \beta' \wedge u + tu' \wedge u, \beta' \wedge u + tu' \wedge u \rangle = \|\beta' \wedge u\|^2 + t^2\|u'\|^2 = (p^2 + t^2)\|u'\|^2$$

Substituint a l'expressió anterior de K tenim el resultat.

Exercici 7.5.4 *Trobeu la corba d'estricció de*

$$\varphi(s,t) = (\cos s + s \sin s, \sin s - s \cos s, s) + \frac{t}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1).$$

És una corba plana? De quina superfície es tracta?

Exercici 7.5.5 *Trobeu la corba d'estricció de*

$$\varphi(s,t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s, 0) + \frac{t}{\sqrt{3 + \cos^2 s}}(-\sin s, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2}).$$

És una corba plana? De quina superfície es tracta?

Solució. Posem

$$\beta(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s, 0),$$

i

$$u(s) = \frac{1}{\sqrt{3 + \cos^2 s}}(-\sin s, \sqrt{2} \cos s, \sqrt{2}),$$

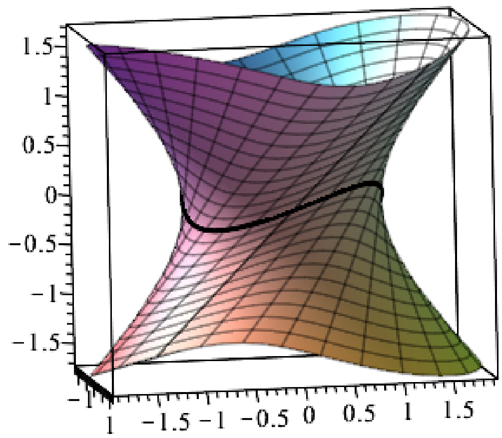
de manera que $\varphi(s,t) = \beta(s) + tu(s)$.

La corba d'estricció és

$$E(s) = \beta(s) - \frac{\langle \beta'(s), u'(s) \rangle}{\|u'(s)\|} u(s).$$

Derivant i substituint obtenim

$$E(s) \quad = \quad \frac{1}{(3 - \cos^2 s)}(\sqrt{2} \cos s, 3 \sin s, \sin s \cos s).$$



Corba d'estricció no plana de $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$.[8]

I la superfície $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ reparametritzada a partir de $E(s)$ és

$$\begin{aligned}\Psi(s,t) \;=\; & \frac{1}{\sqrt{3+\cos^2 s}(3-\cos^2 s)}\Big(t\sin s\cos^2 s + \sqrt{2}\cos s\sqrt{3+\cos^2 s} - 3t\sin s, \\ & -t\sqrt{2}\cos^3 s + 3t\sqrt{2}\cos s + 3\sin s\sqrt{3+\cos^2 s}, \\ & -t\sqrt{2}\cos^2 s + \sin s\cos s\sqrt{3+\cos^2 s} + 3t\sqrt{2}\Big).\end{aligned}$$

[8]Maple:David Marin.

Capítol 8

Corbes sobre superfícies. Curvatura normal

8.1 Curvatura normal i curvatura geodèsica

Sigui[1] $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície orientada S, parametritzada per l'arc.

En cada punt de $\gamma(s)$ tenim 5 vectors que juguen un paper destacat: La referència de Frenet $T(s), N(s), B(s)$, el normal a la superfície en el punt, $\mathcal{N}(\gamma(s))$, que d'ara en endavant denotarem $\nu(s)$, i el vector tangent a la superfície i normal a $T(s)$, donat per

$$e(s) = \nu(s) \wedge T(s).$$

Així, en cada punt de $\gamma(s)$ tenim dues 'normals': la normal a la superfície $\nu(s)$ i la normal principal de la corba $N(s)$. Diguem $\alpha(s)$ l'angle que formen aquestes normals en el punt $\gamma(s)$, de manera que

$$\cos\alpha(s) = \langle N(s), \nu(s)\rangle,$$

amb $0 \leq \alpha(s) \leq \pi$.

Recordem que

$$\gamma''(s) = k(s)N(s),$$

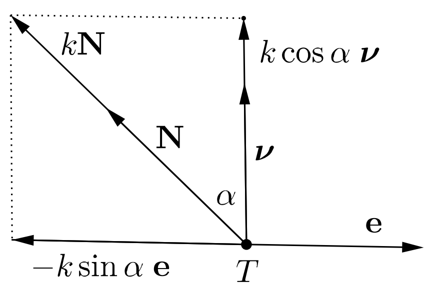
on $k(s)$ és la curvatura de $\gamma(s)$ com a corba de $\mathbb{R}^3$.

[1] En aquesta secció seguiré parcialment [17].

Projectem ortogonalment el vector $\gamma''(s)$ sobre la normal a la superfície. És a dir, imaginem $\gamma''(s)$ amb origen el punt $\gamma(s)$ i el projectem ortogonalment sobre la recta $\gamma(s) + \langle \nu(s) \rangle$.

Obtenim un vector de direcció $\nu(s)$ i mòdul $k(s)|\cos\alpha(s)|$. Si $\alpha(s)$ és més gran que $\pi/2$ el cosinus és negatiu i això vol dir que el vector projectat té sentit oposat al sentit de $\nu(s)$.

Si el mateix vector $\gamma''(s)$ el projectem sobre el pla tangent obtenim un vector de mòdul $k(s)|\sin\alpha|$, com es veu a la figura on el vector tangent T és perpendicular al paper i apunta al lector.



Definició 8.1.1 (Curvatures normal i geodèsica) *Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície orientada S, parametritzada per l'arc. Els coeficients que apareixen en descompondre $\gamma''(s)$ en la base $(e(s), \nu(s))$ són la* curvatura geodèsica *i la* curvatura normal *respectivament.*

És a dir,

$$\gamma''(s) = k_g(s)e(s) + k_n(s)\nu(s). \tag{8.1}$$

Per tant, per a cada valor del paràmetre s, que ometem a les fórmules següents per simplificar, tenim,

$$\begin{aligned} k_n &= \langle \gamma'', \nu \rangle = k\langle N, \nu \rangle = k\cos\alpha, \\ k_g &= \langle \gamma'', e \rangle = k\langle N, e \rangle = k\cos\beta, \end{aligned}$$

on α és l'angle entre la normal a la superfície ν i la normal principal N, i β és l'angle entre N i e. Observem que β és també l'angle entre la binormal B i ν, per ser angles de costats perpendiculars. Per definició d'angle a partir de la fórmula del cosinus tenim que $0 \le \alpha, \beta \le \pi$. Observem doncs que $k_n \ge 0$ si i només si $0 \le \alpha \le \pi/2$ (la normal principal està del mateix costat que $\mathcal{N}$ respecte del pla tangent afí), i $k_g \ge 0$ si i només si $0 \le \beta \le \pi/2$.

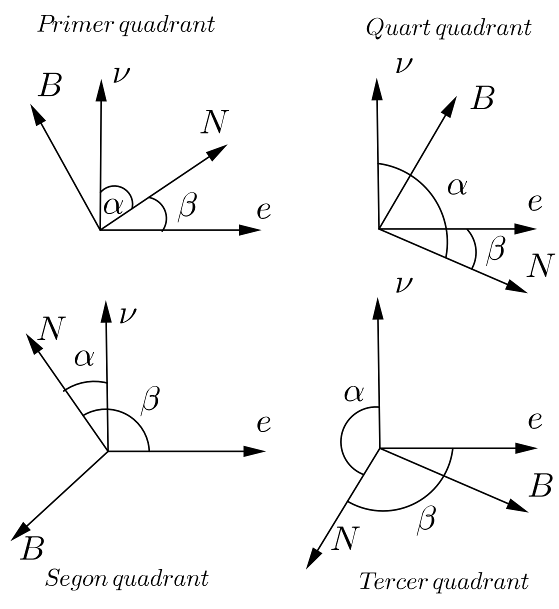
Resumint, si $\gamma(s)$ està parametritzada per l'arc

$$\boxed{\begin{aligned} k_n &= \langle \gamma'', \nu \rangle \\ k_g &= \langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle \end{aligned}}$$

I si no està parametritzada per l'arc (exercici 8.6.1, pàgina 204)

$$\boxed{\begin{aligned} k_n &= \langle \gamma'', \nu \rangle / \|\gamma'\|^2 \\ k_g &= \langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle / \|\gamma'\|^3 \end{aligned}}$$

En els dibuixos següents, fets en el pla normal de la corba, concretament quan T apunta al lector, hem representat les diferents posicions relatives de N respecte de la base (e, ν), segons estigui en cadascun dels quatre quadrants.



$$\cos\beta = \pm \sin\alpha$$

La relació entre α i β depèn de la posició relativa de les normals N i ν, com es veu a la figura. Concretament, $\beta + \alpha = \pi/2$ quan N està al primer quadrant, $\beta = \alpha + \pi/2$ al segon quadrant, $\alpha + \beta = 3\pi/2$ al tercer quadrant i $\alpha = \beta + \pi/2$ al quart quadrant. En el primer i quart quadrant $\cos\beta = \sin\alpha$ i en el segon i tercer quadrant $\cos\beta = -\sin\alpha$. Correspon al fet de que N es projecti en el sentit de e o en el sentit oposat. Resumint,

$$\begin{aligned} k_n &= k\cos\alpha, \\ k_g &= \pm k\sin\alpha, \end{aligned}$$

amb signe '+' quan N està en el primer o quart quadrant ($0 \leq \beta \leq \pi/2$), i signe '$-$' en cas contrari. En particular,

$$k_n(s)^2 + k_g(s)^2 = k^2.$$

Dependència de la orientació

Podem canviar la orientació de la superfície i la orientació de la corba. Si orientem S per $-\mathcal{N}$ en lloc de per $\mathcal{N}$, ambdós curvatures canvien de signe. Si canviem el sentit en que es recorre la corba la curvatura normal no varia i la curvatura geodèsica canvia de signe.

Proposició 8.1.2 *En canviar l'orientació de la corba la curvatura normal no varia i la curvatura geodèsica canvia de signe.*

Demostració. Suposem $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc, canviem s per $-s$ i mirem que passa en $s = 0$. Si diem $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-s)$, llavors $\tilde{\gamma}'(s) = -\gamma'(-s)$ i $\tilde{\gamma}''(s) = \gamma''(-s)$. Per tant $\tilde{\gamma}'(0) = -\gamma'(0)$ i $\tilde{\gamma}''(0) = \gamma''(0)$. La normal a la superfície no queda, òbviament, afectada i el vector $e(0)$ canvia de signe, ja que $\tilde{e}(0) = \nu(0) \wedge \tilde{\gamma}'(0) = -e(0)$.

Per tant, la fórmula (8.1) aplicada a $\gamma(s)$ i $\tilde{\gamma}(s)$ ens diu directament que

$$\gamma''(0) = k_n(0)\nu(\gamma(0)) + k_g(0)e(0) = \tilde{k}_n(0)\nu(\gamma(0)) + \tilde{k}_g(0)\tilde{e}(0). \tag{8.2}$$

i per tant la curvatura normal no ha canviat, $k_n(0) = \tilde{k}_n(0)$ i la curvatura geodèsica ha canviat de signe, $k_g(0) = -\tilde{k}_g(0)$. $\square$

La resta del capítol tractarà de propietats de la curvatura normal. L'estudi més detallat de la curvatura geodèsica el posposem al capítol de geodèsiques, Capítol 11.

8.2 Teorema de Meusnier

Estudiem la relació entre la curvatura normal i la segona forma fonamental. Recordem que la segona forma fonamental depèn de quina normal elegim a la superfície.

Teorema 8.2.1 *Sigui $\gamma = \gamma(s)$ una corba sobre una superfície orientada S, parametritzada per l'arc. La curvatura normal de γ en el punt $\gamma(s)$ val*

$$k_n(s) = II_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

Demostració. Per a tot valor de s tenim

$$\langle T(s), \nu(s) \rangle = 0.$$

on $T(s) = \gamma'(s)$ i $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$ és, com sempre, la restricció a la corba del camp normal a la superfície.

Derivant respecte de s tenim

$$\langle k(s)N(s), \nu(s) \rangle + \langle T(s), \nu'(s) \rangle = 0. \tag{8.3}$$

Per tant,

$$k_n(s) = k(s)\langle N(s), \nu(s) \rangle = -\langle T(s), \nu'(s) \rangle.$$

Però hem vist a l'equació (6.4), pàgina 136, que[2]

$$W_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = -\nu'(s)$$

per tant,

$$k_n(s) = \langle T(s), W_{\gamma(s)}T(s) \rangle = II_{\gamma(s)}(T(s), T(s)). \quad \square$$

Corol·lari 8.2.2 (Teorema de Meusnier) *Si dues corbes sobre S tenen en un punt P el mateix vector tangent, tenen la mateixa curvatura normal.*

Demostració. El Teorema 8.2.1 diu que per calcular la curvatura normal d'una corba en un punt només cal conèixer el vector tangent a la corba

[2]Justament és aquest càlcul el que motiva definir l'endomorfisme de Weingarten com la diferencial de l'endomorfisme de Weingarten *canviada de signe*.

en aquest punt (i la segona forma fonamental, que depèn únicament de la superfície).[3] $\square$

De fet, només cal que tinguin la mateixa recta tangent en P, ja que per calcular la curvatura normal només necessitem el vector tangent unitari i no importa el sentit ja que $I\!I(T,T) = I\!I(-T,-T)$.

Podem, doncs, parlar de la curvatura normal en una direcció donada, encara que no hi hagi involucrada cap corba. Concretament,

Definició 8.2.3 *Sigui P un punt d'una superfície S i sigui $v \in T_PS$ unitari. La curvatura normal en P en la direcció $\langle v \rangle$ és*

$$k_n(v) = I\!I_P(v,v).$$

Interpretació geomètrica de la curvatura normal

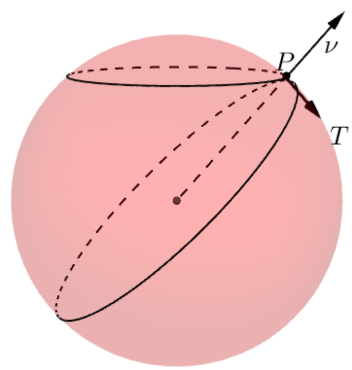
El nom de *curvatura normal* queda justificat perquè, com veurem a la Proposició 8.2.5, coincideix, llevat del signe, amb la curvatura de la corba *secció normal.* Aquesta corba es defineix de la manera següent.

Definició 8.2.4 *Sigui S una superfície i siguin $P \in S$ un punt de S, $T \in T_PS$ un vector unitari tangent a la superfície en P i $\nu = \mathcal{N}(P)$ un vector unitari normal a la superfície en P.*

La corba secció normal *per P en la direcció T és la corba intersecció de la superfície S amb el pla $\Pi : P + \langle T, \nu \rangle$.*

Per exemple, si considerem un paral·lel d'una esfera amb direcció T en un cert punt P, llavors la secció normal per P en la direcció T és el meridià donat per la intersecció de l'esfera amb el pla $P + \langle T, \nu \rangle$.

[3] Equivalentment, si tinguéssim dues corbes diferents però amb la mateixa tangent en P, γ_1 i γ_2, la fórmula (8.3) ens diria $\langle k_1 N_1, \nu \rangle = \langle k_2 N_2, \nu \rangle$, ja que denotant $\nu_i = \mathcal{N} \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, es compleix que $\nu_2'(0) = \nu_1'(0)$ (això és essencialment el que ens diu l'equació (6.4), tot recordant com funciona la diferencial d'una aplicació).



Proposició 8.2.5 (Interpretació geomètrica de la curvatura normal) *Sigui $\gamma = \gamma(s)$ una corba sobre una superfície S, parametritzada per l'arc. El valor absolut de la curvatura normal de γ en el punt $\gamma(s)$ és igual a la curvatura de la secció normal a la superfície en el punt $\gamma(s)$ i direcció $\gamma'(s)$.*

Demostració. Sigui σ la secció normal a la superfície en el punt $P = \gamma(s)$ i direcció $T = \gamma'(s) \in T_PS$. Volem demostrar que en aquest punt

$$|k_n| = k^\sigma$$

on k^σ denota la curvatura de la secció normal σ en P i k_n la curvatura normal de γ en P.

Com σ és una corba sobre la superfície el seu vector tangent en P pertany a T_PS, i com és una corba plana, aquest vector tangent pertany també al subespai vectorial E director del pla, que és $E = \{\lambda T + \mu\nu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, on $\nu = \mathcal{N}(P)$ és la normal a la superfície en P. Com

$$T_PS \cap E = \langle T \rangle$$

el vector unitari tangent a σ en P és justament $\pm T$.

Per tant, pel Teorema de Meusnier, la curvatura normal de σ en P coincideix amb la curvatura normal de γ en P. És a dir

$$k_n^\sigma = k_n.$$

Ara bé, la normal principal N^σ de σ en P, també ha d'estar en el subespai vectorial $\langle T, \nu\rangle$, per ser σ plana, i per tant $N^\sigma = \pm\nu$. Per tant, l'angle α entre les normals N^σ i ν ha de ser $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, i així

$$k_n^\sigma = k^\sigma \cos\alpha = \pm k^\sigma,$$

on val el signe '+' quan la normal triada a la superfície coincideix amb la normal principal de la corba secció normal i el signe '−' quan aquestes normals són oposades. Per tant,

$$k^\sigma = |k_n^\sigma| = |k_n|,$$

com volíem demostrar. □

Nota 8.2.6 Per la pròpia definició de secció normal, σ no té associada una parametrització. Si volem la podem suposar parametritzada per l'arc i canviant si cal el signe d'aquest paràmetre podem suposar $\sigma'(0) = \gamma'(0)$, amb $P = \gamma(0)$.

Si orientem el pla secció normal per P i direcció $\gamma'(0)$ dient que la base $(\gamma'(0), \nu)$ és positiva[4] i diem $\tilde{k}^\sigma$ a la curvatura *amb signe* de la secció normal, és a dir,

$$\tilde{k}^\sigma = \det(\sigma'(0), \sigma''(0))$$

on el determinant és el determinant de la matriu dels coeficients de $(\sigma'(0), \sigma''(0))$ respecte de $(\gamma'(0), \nu)$, tenim que

$$\tilde{k}^\sigma = \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{vmatrix} = \langle\sigma''(0), \nu\rangle = k^\sigma\langle N^\sigma, \nu\rangle = k_n$$

és a dir, *la curvatura normal és igual a la curvatura amb signe de la secció normal.*

Vegeu l'exercici 8.6.6 per a una altra interpretació geomètrica de k_n.

Lloc geomètric dels centres de curvatura de les corbes determinades sobre la superfície pel feix de plans generat per la recta tangent

Si denotem $\rho(s) = 1/k(s)$ el radi de curvatura d'una corba $\gamma(s)$ donada sobre una superfície i $\rho_n(s) = 1/|k_n(s)|$ el radi de curvatura de la corba

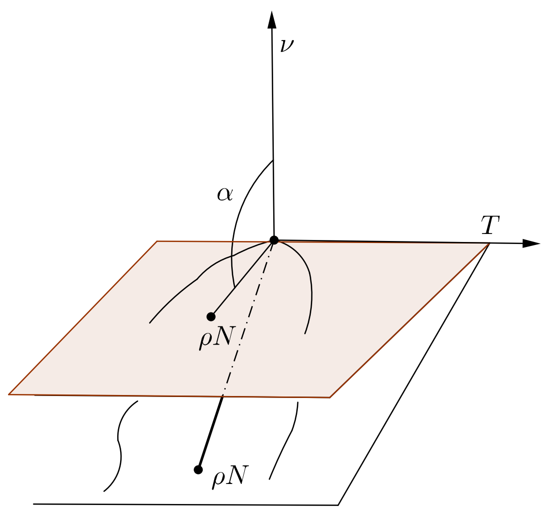
[4]No és una orientació canònica del pla, ja que depèn de T.

secció normal, la fórmula $k_n(s) = k(s)\cos\alpha(s)$ es transforma en

$$\rho(s) = \rho_n(s) \cdot |\cos\alpha(s)|. \tag{8.4}$$

Sempre que manipulem radis de curvatura estem suposant implícitament que $k(s)$ i $k_n(s)$ són diferents de zero.

Ara apliquem aquesta fórmula a la família de corbes que s'obtenen tallant la superfície amb el feix de plans que contenen la recta tangent a una corba donada en un punt donat P. Aquesta família de corbes es pot parametritzar per l'angle α, mesurat a partir de ν en el pla normal a la corba, com indica la figura, ja que aquest angle determina completament el pla que estem considerant i per tant la corba.



Totes elles tenen la mateixa curvatura normal en P, de manera que la fórmula anterior[5] ens dóna el radi de curvatura de cadascuna d'elles en el punt P, que denotarem $\rho(\alpha)$, justament en funció de l'angle α. Concretament, en el punt P, tenim

$$\rho(\alpha) = \rho_n |\cos\alpha|.$$

Això permet interpretar $\rho(\alpha)$ com un dels catets d'un triangle rectangle d'hipotenusa ρ_n.

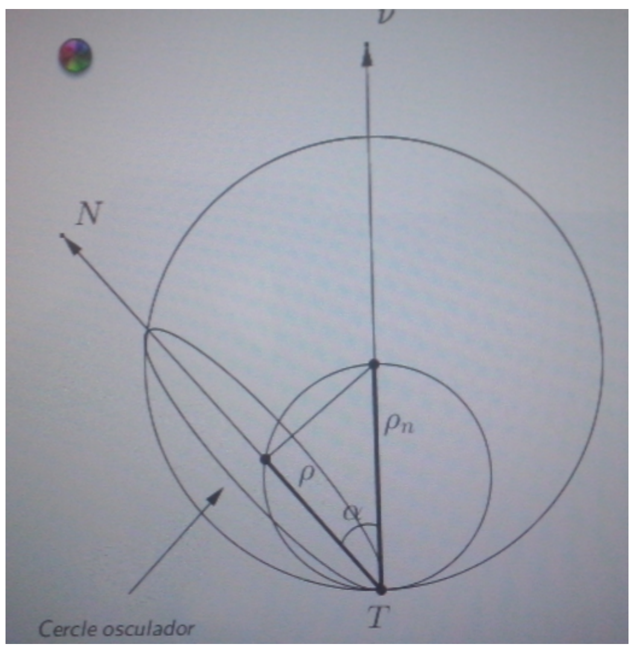
Com el centre de curvatura, en P, d'aquestes corbes planes és el punt $P + \rho_\alpha N_\alpha$, on ρ_α, N_α són el radi de curvatura i la normal principal de cadascuna

[5]Podem pensar que totes elles estan parametritzades pel corresponent paràmetre arc, que valgui zero en P, i aplicar la fórmula (8.4) amb $s = 0$.

d'elles, resulta que *el lloc geomètric dels centres de curvatura de les corbes planes que s'obtenen tallant la superfície pel plans que contenen la recta $P+\langle T\rangle$ és una circumferència del pla normal a la corba que passa per P amb diàmetre de longitud ρ_n en la direcció $\nu=\mathcal{N}(P)$ de la normal a la superfície en P.*

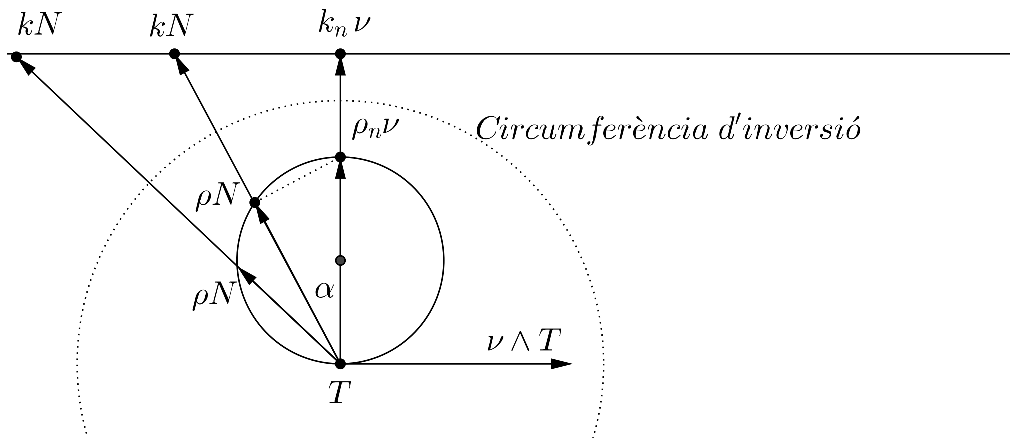
Es pot veure que, recíprocament, tot punt d'aquest cercle és un centre de curvatura d'una corba del feix.

Com el cercle osculador de cadascuna d'aquestes corbes és el cercle del pla osculador amb centre el centre de curvatura corresponent resulta que aquest cercle és la intersecció del pla osculador corresponent amb l'esfera de centre $P+\rho_n\nu$ (centre de curvatura de la secció normal) i radi ρ_n (radi de curvatura de la secció normal).



A la figura representem el cas $0\leq\alpha\leq\pi/2$, i el vector tangent T en P és perpendicular al paper i apunta al lector.

També es pot obtenir la circumferència lloc geomètric com la inversa de la recta formada pels punts kN respecte de la circumferència del pla normal de centre el punt i radi 1.



Aquest dibuix ja ens diu que quan $k_n \neq 0$ totes les corbes sobre la superfície amb la mateixa tangent tenen el vector normal principal en el mateix semiespai respecte del pla tangent, vegeu més endavant la Proposició 8.4.3.

8.3 Fórmula d'Euler

Per estudiar les direccions principals en un punt P utilitzarem el fet de que l'endomorfisme de Weingarten $W_P : T_PS \longrightarrow T_PS$ diagonalitza en una base ortonormal, tal com hem vist a la Proposició 6.2.3.

Com que en aquesta secció P estarà fixat escriurem W, I, II en lloc de W_P, I_P, II_P.

Proposició 8.3.1 (Fórmula d'Euler) *Sigui (e_1, e_2) una base ortonormal de T_PS formada per vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten, amb $W(e_i) = k_ie_i$, $i = 1, 2$. Llavors la curvatura normal en la direcció donada pel vector*

$$w = (\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2$$

és

$$k_n(w) = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha.$$

Demostració. Com la segona forma fonamental és bilineal tenim

$$\begin{aligned} II(w, w) &= II((\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2, (\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2) \\ &= II(e_1, e_1)\cos^2\alpha + II(e_2, e_2)\sin^2\alpha + 2II(e_1, e_2)\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Ara bé,

$$II(e_i, e_i) = I(We_i, e_i) = I(k_i e_i, e_i) = k_i, \quad i = 1, 2,$$

$$II(e_1, e_2) = I(We_1, e_2) = I(k_1 e_1, e_2) = k_1 I(e_1, e_2) = 0.$$

Per tant,

$$II(w, w) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha. \quad \square$$

Aquesta fórmula d'Euler ens diu directament que si en un punt P tenim $k_1 = k_2$ llavors la curvatura normal en qualsevol direcció és igual a aquest valor.

En efecte, $k_n(\alpha) = k_1 \cos^2(\alpha) + k_1 \sin^2(\alpha) = k_1$.

Ja hem dit que els punts on passa això es diuen umbilicals.

La fórmula d'Euler permet veure de manera immediata que la curvatura normal en un punt, pensada com funció de l'angle, és una funció amb un màxim i un mínims globals i sense altres extrems locals. Concretament tenim el resultat següent.

Teorema 8.3.2 (Olinde Rodrigues) [6] *Les direccions principals són les direccions en les que la curvatura normal és màxima i mínima. Les curvatures principals són justament aquests valors màxim i mínim de les curvatures normals.*

Demostració. Per trobar els extrems de la curvatura normal en un punt, al variar la direcció, només hem d'igualar a zero la derivada respecte l'angle en la fórmula d'Euler.

Obtenim

$$-2k_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2k_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Si $k_1 = k_2$, és a dir, en els punts umbilicals, $W = k_1 id$ i tota direcció és principal.

[6] Hem definit direccions principals com les direccions pròpies de l'endomorfisme de Weingarten. Ara veiem que aquestes direccions ens donen el màxim i mínim de les curvatures normals. Històricament es va procedir al revés: es defineixen les direccions principals com les direccions en les que la curvatura normal és màxima o mínima i es demostra que la derivada de la normal respecte una d'aquestes direccions té també aquesta direcció. Això és el que va fer Olinde.

Si estem en un punt no umbilical, $k_1 \neq k_2$, obtenim $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$, és a dir, les direccions en les que la curvatura normal és màxima o mínima són les direccions donades pels vectors propis e_1 i e_2 de l'endomorfisme de Weingarten.

La mateixa fórmula d'Euler ens diu llavors que les curvatures normals en les direccions e_1 i e_2 són k_1 i k_2 respectivament. $\square$

Una altra manera de demostrar el teorema d'Olinde

Una manera d'estudiar el valor de la curvatura normal en totes les direccions possibles és fixar la base (φ_u, φ_v) de T_PS i considerar les direccions

$$w = \varphi_u + \mu\varphi_v, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Això exclou la direcció φ_v que podem considerar, no obstant, que correspon al valor $\mu = \infty$. D'aquesta manera μ ens parametritza les direccions de T_PS, sense tenir en compte el sentit, és a dir, w i $-w$ determinen la mateixa direcció.

Recordem que

$$II(w,w) = (1,\mu)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} = e + 2f\mu + g\mu^2.$$

$$I(w,w) = (1,\mu)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} = E + 2F\mu + G\mu^2,$$

on, com sempre, E, F, G, e, f, g són els coeficients de la primera i segona formes fonamentals respecte de la base (φ_u, φ_v), valorades en el punt P.

Escriurem $k_n(\mu)$ per indicar la curvatura normal en la direcció w. Tindrem

$$\begin{aligned} k_n(\mu) &= II\left(\frac{w}{|w|}, \frac{w}{|w|}\right) \\ &= \frac{1}{I(w,w)} II(w,w) = \frac{e + 2f\mu + g\mu^2}{E + 2F\mu + G\mu^2} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Recordem que aquesta expressió inclou

$$k_n(\infty) = \frac{g}{G}.$$

Observem de passada que aquesta fórmula (8.5) ens dóna una demostració immediata de que en els punts umbilicals la curvatura normal és igual en totes les direccions.

Per estudiar els màxims i mínims de $y = k_n(\mu)$ igualem a zero la seva derivada respecte μ i obtenim

$$(Fg - fG)\mu^2 + (Eg - eG)\mu + (Ef - eF) = 0.$$

que és exactament la fórmula (6.15), pàgina 148, que caracteritza les direccions principals, amb $\lambda = 1$.

Per tant, $\varphi_u + \mu\varphi_v$, amb μ solució de l'equació anterior, és la direcció en la que la curvatura normal agafa un màxim o un mínim, i coincideix amb la direcció pròpia de l'endomorfisme de Weingarten. 181

L'exercici 8.6.3 demostra que aquesta equació de segon grau (quan $Fg - fG \neq 0$) té dues solucions reals diferents (vegeu també el peu de pàgina 10, pàgina 149). La funció té, doncs, un màxim i un mínim. Si $Fg - fG = 0$, tenim només un màxim (llavors el valor asimptòtic g/G és un valor mínim), o un mínim (llavors el valo r asimptòtic g/G és un valor màxim). Recordem que el valor asimptòtic s'assoleix quan $\lambda = \pm\infty$, es a dir, en la direcció φ_v.

8.4 Indicatriu de Dupin

El conjunt format per les dues còniques de T_PS que respecte de la base ortonormal de vectors propis e_1, e_2 de l'endomorfisme de Weingarten tenen equacions

$$k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1,$$

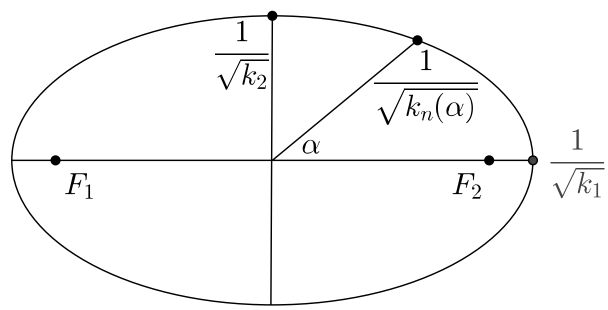
on k_1, k_2 són les curvatures principals, es diu *Indicatriu de Dupin.*

Si $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$ la cònica $k_1x^2 + k_2y^2 = -1$, és buida i la cònica $k_1x^2 + k_2y^2 = 1$, és una el·lipse. El punt de tall d'aquesta el·lipse amb una recta arbitrària per l'origen $y = (\tan\alpha)x$ és el punt

$$P = (\frac{1}{\sqrt{k_n(\alpha)}}\cos\alpha, \frac{1}{\sqrt{k_n(\alpha)}}\sin\alpha)$$

on $k_n(\alpha) = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha$ és la curvatura normal en la direcció del vector $w = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$. Per ser $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$ també tenim $k_n > 0$.

En particular, la distància de P a l'origen és $1/\sqrt{k_n(\alpha)}$.



$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = 1$$

Si $k_1 < 0$ i $k_2 < 0$ la cònica $k_1x^2 + k_2y^2 = 1$, és buida i la cònica $k_1x^2 + k_2y^2 = -1$, és una el·lipse i estem en el cas anterior.

Si $k_1k_2 < 0$, la indicatriu de Dupin són les dues hipèrboles $k_1x^2 + k_2y^2 = \pm 1$, d'asímptotes

$$y = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}\,x.$$

El pendent d'aquestes dues rectes

$$m = \tan\alpha = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

està caracteritzat per complir

$$k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha = 0$$

és a dir, *la curvatura normal en la direcció de les asímptotes és zero.*

Això justifica la definició següent.

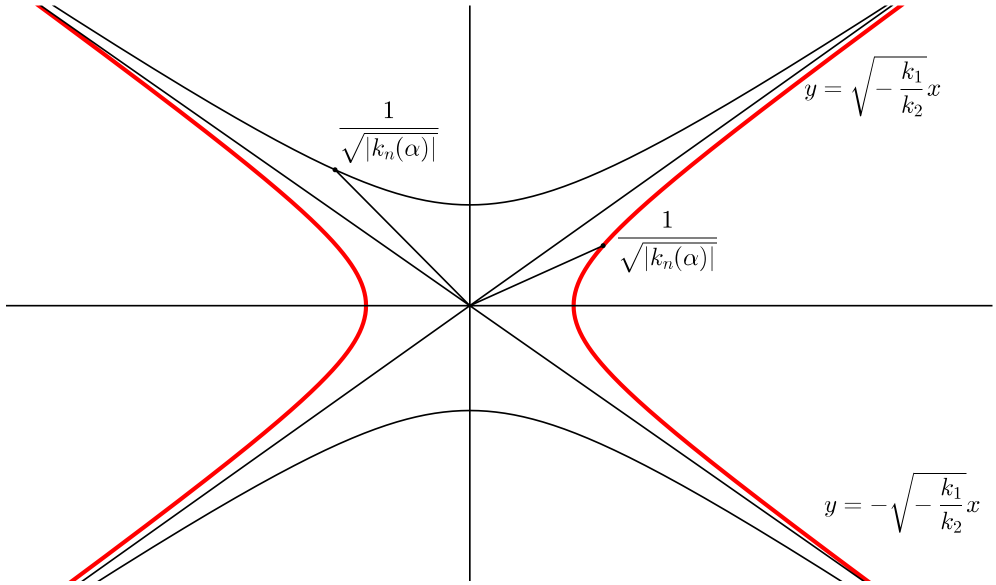
Definició 8.4.1 *Direm que un vector $X \in T_PS$ és direcció asimptòtica si*

$$II(X, X) = 0.$$

Per tant, les direccions asimptòtiques són aquelles direccions respecte de les quals la curvatura normal és zero.

Si treballem en coordenades i $X = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$ llavors X és direcció asimptòtica si i només si

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda^2 e + 2\lambda\mu f + \mu^2 g = 0. \tag{8.6}$$



Si tallem cadascuna de les hipèrboles $k_1 \cos^\alpha + k_2 \sin^2 \alpha = \pm 1$ amb una recta arbitrària per l'origen $y = (\tan \alpha)x$, diferent de les asímptotes, obtenim el punt

$$P = (\frac{1}{\sqrt{|k_n(\alpha)|}} \cos \alpha, \frac{1}{\sqrt{|k_n(\alpha)|}} \sin \alpha),$$

ben entès que si $k_n(\alpha) > 0$ la recta talla $k_1 x^2 + k_2 y^2 = 1$ i si $k_n(\alpha) < 0$ la recta talla $k_1 x^2 + k_2 y^2 = -1$.

Observem que la condició $k_n(\alpha) > 0$ es dóna quan

$$k_1 > 0, \quad |\tan \alpha| < \sqrt{-k_1/k_2}$$

o bé quan

$$k_1 < 0, \quad |\tan \alpha| > \sqrt{-k_1/k_2}.$$

I, per tant, la condició $k_n(\alpha) < 0$ es dóna quan

$$k_1 > 0, \quad |\tan \alpha| > \sqrt{-k_1/k_2}$$

o bé quan

$$k_1 < 0, \quad |\tan \alpha| < \sqrt{-k_1/k_2}.$$

Observem que per ser $k_n(\alpha)$ una funció contínua i periòdica de α que té un màxim positiu (per exemple k_1) i un mínim negatiu (k_2) aquesta funció ha d'anul·larse en almenys dos punts.

Observem que com que els pendents de les dues direccions asimptòtiques són oposades les direccions pròpies $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$ són bisectrius dels angles formats per les asímptotes.

Línies asimptòtiques

Definició 8.4.2 *Sigui $\gamma(s)$ una corba continguda en una superfície S Direm que γ és* línia asimptòtica *si $\gamma'(s)$ és, per tot s, direcció asimptòtica.*

Per trobar l'equació diferencial de les línies asimptòtiques només hem d'aplicar la fórmula (8.6) al vector tangent $\gamma'(s) = u'\varphi_u + v'\varphi_v$ i tenim

$$e(u(s), v(s))u'(s)^2 + 2f(u(s), v(s))u'(s)v'(s) + g(u(s), v(s))v'(s)^2 = 0,$$

que escriurem simplement com

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0.$$

En particular la curvatura normal és zero, per tant o bé $k = 0$ o bé $\langle N, \nu\rangle = 0$, és a dir, que si tenim una corba asimptòtica amb $k \neq 0$ *la normal principal i la normal a la superfície són ortogonals.* Equivalentnment, *el pla tangent a la superfície coincideix amb el pla osculador de la corba.*

Proposició 8.4.3 *Suposem que sobre una superfície tenim dues corbes γ i $\bar\gamma$ que passen per un mateix punt P amb la mateixa recta tangent. Si la direcció tangent no és asimptòtica, les dues normals principals estan en el mateix semiespai respecte del pla tangent a la superfície en P.*

Demostració. Pel Teorema de Meusnier les curvatures normals de γ i $\bar\gamma$ en el punt P coincideixen, i tindrem

$$k\langle N, \nu\rangle = \bar k\langle \bar N, \nu\rangle$$

on $k, N, \bar k, \bar N$ són respectivament la curvatura i la normal principal de γ i $\bar\gamma$ en P, i $\nu = \mathcal{N}(P)$ el vector normal a la superfície en aquest punt.

Com la direcció no és asimptòtica els dos termes d'aquesta igualtat són diferents de zero. Com k i $\bar k$ són positives, $\langle N, \nu\rangle$ i $\langle \bar N, \nu\rangle$ han de tenir el mateix signe. Això acaba la demostració. $\square$

En el següent exercici donem dues corbes sobre una superfície amb la mateixa recta tangent en un punt i normals principals oposades.

Exercici 8.4.4 *Estudieu, en el punt* $P = (1,0,0)$*, les tangents i les normals principals de les dues corbes de l'helicoide* $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$ *donades per* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *i* $\beta(s) = ((\frac{3}{4}s^2+1)\cos s, (\frac{3}{4}s^2+1)\cos s, s)$.

Proposició 8.4.5 *Si dues corbes sobre* S *tenen en un punt* P *la mateixa recta tangent i el mateix pla osculador, i la direcció comuna en* P *no és asimptòtica, tenen la mateixa curvatura en* P.

Demostració. Quan parlem de pla osculador en un punt d'una corba suposem implícitament que la curvatura en el punt és diferent de zero. Per la Proposició 8.4.3, i tenir aquestes corbes el mateix pla osculador, aquestes corbes tenen la mateixa normal principal. Per tant, igualant les curvatures normals (Meusnier), tenim

$$k\langle N, \nu\rangle = \bar{k}\langle \bar{N}, \nu\rangle = \bar{k}\langle N, \nu\rangle$$

on $\nu = \mathcal{N}(P)$ és la normal a la superfície en P, k, N, són la curvatura i normal principal d'una de les corbes i $\bar{k}, \bar{N}$ la curvatura i normal principal de l'altra. Per ser la direcció tangent no asimptòtica $\langle N, \nu\rangle \neq 0$, i per tant, $k = \bar{k}$. $\square$

8.5 Interpretació geomètrica de la indicatriu de Dupin

Veurem que si tallem la superfície per un pla afí paral·lel al pla afí tangent en P i pròxim a ell, obtenim una corba igual a la indicatriu de Dupin llevat de termes de tercer ordre.

És fàcil veure, simplement movent rígidament la superfície, que ens podem limitar al cas en que la superfície S és la gràfica d'una funció $z = h(x,y)$, amb $h(0,0) = 0$, és a dir que el punt $P = (0,0,0) \in S$, i tal que $T_{P(S)}$ és el pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. A més, girant la superfície anterior al voltant de l'eix de les $z's$ podem fer coincidir les direccions principals amb les direccions de l'eix de les x' i de l'eix de les $y's$ respectivament. Això es pot fer perquè les direccions principals són ortogonals.

Per fixar idees suposarem que hem fet coincidir el vector propi de valor propi k_1, e_1, amb $(1,0,0)$ i el vector propi de valor propi k_2, e_2, amb $(0,1,0)$.

Ara prenem com carta local $\varphi(x,y) = (x,y,z(x,y))$. Les fórmules de l'exercici 6.8.3 ens diuen que $h_x(0,0) = h_y(0,0) = 0$ ja que la normal unitària a l'origen ha de ser $(0,0,1)$. En particular $\varphi_x(0,0) = (1,0,0)$ i $\varphi_y(0,0) = (0,1,0)$, i aquestes són les direccions principals.

Com la primera forma fonamental a l'origen és la identitat, tant la segona forma fonamental com l'endomorfisme de Weingarten a l'origen tenen, respecte la base (φ_x, φ_y), matriu

$$W_P = II_P = \begin{pmatrix} h_{xx}(0,0) & h_{xy}(0,0) \\ h_{xy}(0,0) & h_{yy}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Però com W_P diagonalitza en la base de vectors propis ha de ser $h_{xy}(0,0) = 0$, $h_{xx}(0,0) = k_1$, $h_{yy}(0,0) = k_2$.

Si ara tallem S amb el pla $z = \epsilon$ obtenim el conjunt

$$\mathcal{D} = \{(x,y,\epsilon) \in \mathbb{R}^3; h(x,y) = \epsilon\}.$$

Si desenvolupem $h(x,y)$ per Taylor a l'origen tenim

$$h(x,y) = \frac{1}{2}h_{xx}(0,0)x^2 + h_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}h_{yy}(0,0)y^2 + R$$

amb[7]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R}{x^2+y^2} = 0.$$

Però, pel que hem comentat abans, tenim

$$h(x,y) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + R$$

Per tant,

$$\mathcal{D} = \{(x,y,\epsilon) \in \mathbb{R}^3; k_1x^2 + k_2y^2 + 2R = 2\epsilon\}.$$

Així, llevat de termes d'ordre 3

$$\mathcal{D} \simeq \{(x,y,\epsilon) \in \mathbb{R}^3; k_1x^2 + k_2y^2 = 2\epsilon\}.$$

I aquesta cònica del pla $z = \epsilon$ és homotètica per la homotècia

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}\sqrt{2\epsilon} \\ y &= \bar{y}\sqrt{2\epsilon} \end{aligned}$$

[7] Es diu que la superfície $\varphi(x,y) = (x, y, \frac{1}{2}h_{xx}(0,0)x^2 + h_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}h_{yy}(0,0)y^2)$ és una aproximació de segon ordre de la superfície donada.

a la indicatriu de Dupin $k_1\bar{x}^2 + k_2\bar{y}^2 = 1$.

Comentem finalment que aquests comentaris només tenen sentit en punts on almenys una de les dues curvatures principals és diferent de zero, ja que la indicatriu de Dupin no està definida[8] en punts on $k_1 = k_2 = 0$, anomenats *punts plans*.

De fet, els punts es poden classificar segons que la indicatriu de Dupin sigui una el·lipse, una hipèrbola, dues rectes paral·leles o el conjunt buit de la manera següent.

> **Punts el·liptics**, si $k_1k_2 > 0$. *Exemple*: el punt $(0,0,0)$ de $\varphi(x,y) = (x,y,x^2+2y^2)$ on tant k_1 com k_2 són positius, o $\varphi(x,y) = (x,y,-x^2-2y^2)$ on tant k_1 com k_2 són negatius
>
> **Punts hiperbòlics**, si $k_1k_2 < 0$. *Exemple*: el punt $(0,0,0)$ de $\varphi(x,y) = (x,y,x^2-2y^2)$. Si tallem la superfície amb el pla $z = \epsilon$ obtenim $x^2 - 2y^2 = \epsilon$ i la indicatriu de Dupin és $2x^2 - 4y^2 = 1$.
>
> **Punts parabòlics**, si $k_1k_2 = 0$ amb k_1 o k_2 diferent de zero. *Exemple*: el punt $(0,0,0)$ de $\varphi(x,y) = (x,y,x^2)$. Si tallem la superfície amb el pla $z = \epsilon$ obtenim les rectes (ϵ, y, ϵ) i $(-\epsilon, y, \epsilon)$ (és a dir, les rectes $x = \pm\epsilon$ del pla $z = \epsilon$), i la indicatriu de Dupin és $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
>
> **Punts plans**, si $k_1 = k_2 = 0$. *Exemple*: el punt $(0,0,0)$ de $\varphi(x,y) = (x,y,x^3)$ (o qualsevol punt d'un pla, òbviament). O la cadira de mico: $\varphi(x,y) = (x,y,x^3-3xy^2)$. La tercera component és la part real de $(x+iy)^3$. La indicatriu de Dupin no dóna informació.

8.6 Exercicis

Exercici 8.6.1 *Doneu una fórmula per al càlcul de les curvatures normal i geodèsica per a corbes no parametritzades per l'arc.*

Solució. Donada una corba $\gamma(t)$ considerem una reparametrització seva per l'arc. És a dir, denotem per s el paràmetre arc de $\gamma(t)$, determinat llevat de signe i translació, i definim $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ on $t = t(s)$ és el difeomorfisme que ens relaciona aquests dos paràmetres. Per definició, la curvatura geodèsica

[8] Podem pensar que en punts plans la indicatriu de Dupin és el conjunt buit, ja que tindria equació $0 = \pm 1$, però això no vol dir que en tallar la superfície per un pla paral·lel i pròxim al pla tangent obtinguem el conjunt buit, com es veu considerant la sella de mico.

de $\gamma(t)$ en el punt de paràmetre t és la curvatura geodèsica de $\tilde{\gamma}(s)$ en el punt de paràmetre $s = s(t)$. Així doncs

$$k_n(t) = \tilde{k}_n(s) = \langle \frac{d^2\tilde{\gamma}(s)}{ds^2}, \nu(s) \rangle = \langle \frac{d^2\gamma(t(s))}{ds^2}, \nu(s) \rangle.$$

Denotem $\nu = \nu(s) = \mathcal{N}(\tilde{\gamma}(s)) = \mathcal{N}(\gamma(t))$.

Per la regla de la cadena[9]

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \langle \frac{d^2\gamma(t(s))}{ds^2}, \nu \rangle \\ &= \langle \frac{d}{ds}(\frac{d\gamma}{dt} \cdot t'), \nu \rangle \\ &= \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot t'^2 + \frac{d\gamma}{dt} \cdot t'', \nu \rangle \\ &= \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot t'^2, \nu \rangle \\ &= t'^2 \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Observem com aquesta fórmula posa de manifest un resultat que ja sabíem: si canviem s per $-s$ la curvatura normal no varia.

Estudiem ara la curvatura geodèsica.

$$k_g(t) = \tilde{k}_g(s) = \langle \frac{d^2\tilde{\gamma}(s)}{ds^2}, \nu(s) \wedge \frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds} \rangle = \langle \frac{d^2\gamma(t(s))}{ds^2}, \nu(s) \wedge \frac{d\gamma(t(s))}{ds} \rangle.$$

Per la regla de la cadena

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \langle \frac{d^2\gamma(t(s))}{ds^2}, \nu \wedge \frac{d\gamma(t(s))}{ds} \rangle = \langle \frac{d}{ds}(\frac{d\gamma}{dt} \cdot t'), \nu \wedge \frac{d\gamma}{dt} \cdot t' \rangle \\ &= \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot t'^2 + \frac{d\gamma}{dt} \cdot t'', \nu \wedge \frac{d\gamma}{dt} \cdot t' \rangle \\ &= t'^3 \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \nu \wedge \frac{d\gamma}{dt} \rangle. \end{aligned}$$

Observem com aquesta fórmula posa de manifest un resultat que ja sabíem: si canviem s per $-s$ la curvatura geodèsica canvia de signe.

Resumint, si $\gamma(t)$ no està necessàriament parametritzada per l'arc, i denotem $t' = dt/ds$, on s és el paràmetre arc

[9] Escriurem $\frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot t'$. ja que $t = t(s)$ i se sobreentén que la derivada de γ respecte t és una funció de t.

$$\boxed{\begin{array}{c} k_n = t'^2 \langle \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}, \nu \rangle \\ k_g = t'^3 \langle \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}, \nu \wedge \dfrac{d\gamma}{dt} \rangle \end{array}}$$

Recordem que

$$t' = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Exercici 8.6.2 *Demostreu que*

$$(x-z)^2 \geq 4(x-y)(y-z), \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

amb igualtat si i només si $x+z=2y$.

Solució. Sumem i restem y i tenim

$$\begin{aligned} (x-z)^2 &= (x-y+y-z)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + 2(x-y)(y-z) \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 - 2(x-y)(y-z) + 4(x-y)(y-z) \\ &= (x-2y+z)^2 + 4(x-y)(y-z) \geq 4(x-y)(y-z). \end{aligned}$$

Clarament, si $x+z=2y$ tenim igualtat.

Exercici 8.6.3 *Demostreu que entre els coeficients de la primera i segona formes fonamentals hi ha la relació*

$$(Eg - eG)^2 \geq 4(Fg - fG)(Ef - eF).$$

amb igualtat si només si estem en un punt umbilical.

Solució. Si $F=0$ el terme de la dreta és negatiu o zero, ja que E i G són estrictament positius, i la desigualtat és certa. A més la igualtat es donaria si i només si $f=0$ i $Eg=eG$, que implica que estem en un punt umbilical.

Si $F \neq 0$ denotem

$$\frac{e}{E} = x, \quad \frac{f}{F} = y, \quad \frac{g}{G} = z$$

i apliquem la desigualtat de l'exercici anterior. Tenim

$$(\frac{g}{G} - \frac{e}{E})^2 \geq 4(\frac{g}{G} - \frac{f}{F})(\frac{f}{F} - \frac{e}{E})$$

que simplificant queda

$$(gE - eG)^2 \geq 4\frac{EG}{F^2}(Fg - fG)(Ef - eF).$$

Com que el determinant de la primera forma fonamental és estrictament positiu, tenim $EG > F^2$ i per tant, tant si el producte $(Fg - fG)(Ef - eF)$ és estrictament positiu com estrictament negatiu, es compleix que

$$(Eg - eG)^2 > 4(Fg - fG)(Ef - eF).$$

Per tant, la igualtat només es pot donar quan $(Fg - fG)(Ef - eF) = 0$ i $Eg - eG = 0$, que implica que estem en un punt umbilical. $\square$

Exercici 8.6.4 *Determineu les línies asimptòtiques i les línies de curvatura de l'helicoide $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$ i comproveu que la seva curvatura mitjana és zero.*

Solució. Calculem l'aplicació de Weingarten.

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-v \sin u, v \cos u, c) \\
\varphi_v &= (\cos u, \sin u, 0) \\
\nu &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + v^2}}(-c \sin u, c \cos u, -v) \\
\varphi_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0) \\
\varphi_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0) \\
\varphi_{vv} &= (0, 0, 0) \\
e &= \varphi_{uu} \cdot \nu = 0 \\
f &= \varphi_{uv} \cdot \nu = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} \\
g &= \varphi_{vv} \cdot \nu = 0
\end{aligned}$$

Per tant

$$W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2 + v^2}} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + v^2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{v^2+c^2} \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Com la traça és zero la curvatura mitjana és zero.

L'equació de les línies de curvatura és

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ v^2 + c^2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} \left(u'^2(v^2 + c^2) - v'^2 \right) = 0.$$

Resolent l'equació diferencial

$$\frac{v'}{\sqrt{v^2+c^2}} = u',$$

que és de variables separables[10], i per tant només ens cal integrar als dos costats de la igualtat

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2+c^2}} = du,$$

obtenim $v = \pm c \sinh(u+k)$, on k és una constant arbitrària.

És fàcil comprovar que aquestes direccions són ortogonals ja que

$$\begin{pmatrix} 1 & -c\cosh(u+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2+c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c\cosh(u+k) \end{pmatrix} = 0.$$

Per calcular les línies asimptòtiques resolem l'equació

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 2cu'v' = 0.$$

Per tant, les línies asimptòtiques són les línies coordenades, $u = \mathit{constant}$ i $v = \mathit{constant}$.

Exercici 8.6.5 *Demostreu que quatre línies asimptòtiques qualssevol d'una superfície reglada, diferents de les generatrius, tallen aquestes en quatre punts que tenen sempre la mateixa raó doble.*

Solució. L'equació diferencial de les línies asimptòtiques de la superfície reglada

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + tv(s)$$

és

$$es'^2 + 2fs't' + gt'^2 = 0$$

[10]Aquests tipus d'equacions diferencials també es poden integrar pensant $v = v(u)$, de manera que, per la regla de la cadena, l'equació diferencial ara s'escriu

$$\frac{v'}{\sqrt{v^2+c^2}} = 1$$

on $v' = dv/du$.

però com sabem que $g = 0$, Proposició 7.1.2, aquesta equació es redueix a

$$es' + 2ft' = 0$$

que es pot escriure com

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{2f}{e} = A(s) + B(s)t + C(s)t^2$$

ja que

$$\begin{aligned} e &= \langle \gamma''(s) + tv'', (\gamma' + tv) \wedge v \rangle \cdot \frac{1}{\|(\gamma' + tv) \wedge v\|} \\ f &= \langle v', \gamma' \wedge v \rangle \cdot \frac{1}{\|(\gamma' + tv) \wedge v\|} \end{aligned}$$

I això és una equació de Ricatti, que as everybody knows, compleix que tres solucions et donen la quarta imposant

$$\frac{t(s) - t_1(s)}{t(s) - t_2(s)} \cdot \frac{t_3(s) - t_1(s)}{t_3(s) - t_2(s)} = constant.$$

Com $t(s)$ representa la distància sobre la generatriu hem acabat.

Exercici 8.6.6 *Sigui*[11] $\gamma(s)$ *una corba sobre una superfície* S*. Demostreu que la curvatura normal de la corba* $\gamma(s)$ *en* $P = \gamma(0)$ *coincideix, llevat del signe, amb la curvatura en* P *de la corba que s'obté en projectar ortogonalment* $\gamma(s)$ *sobre el pla normal generat per* $\gamma'(0)$*, és a dir, el pla per* P *generat per* $\gamma'(0)$ *i* $\mathcal{N}(P)$*, la normal a la superfície en* P*.*

[11] Comentari de Dídac Violan.

Capítol 9

Envolvents

9.1 Envolvent d'una família uniparamètrica de superfícies

Si[1] per cada $t \in I$, I obert de $\mathbb{R}$, tenim una superfície

$$F_t(x, y, z) = 0$$

es diu que tenim una família uniparamètrica de superfícies.

És més còmode pensar que una família uniparamètrica de superfícies està donada per una equació que involucra una funció de 4 variables

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

Si fixem t, tenim una superfície, i la família uniparamètrica és diferenciable si F és diferenciable com a funció de 4 variables.

Els exemples més típics de famílies uniparamètriques de superfícies són les famílies uniparamètriques dels plans osculadors, normals o rectificants, d'una corba.

Les equacions respectives són

$$\begin{aligned} B(s) \cdot (X - \gamma(s)) &= 0 \\ T(s) \cdot (X - \gamma(s)) &= 0 \\ N(s) \cdot (X - \gamma(s)) &= 0 \end{aligned}$$

[1] Segueixo [19].

Ara tallem dues superfícies pròximes de la família. La intersecció serà una corba donada per

$$F(X,t)=0, \quad F(X,t+h)=0; \quad X=(x,y,z).$$

Però clarament la solució d'aquestes dues equacions és solució també de les dues equacions següents:

$$F(X,t)=0, \quad \frac{F(X,t+h)-F(X,t)}{h}=0. \tag{9.1}$$

Per tant, quan fem tendir h a zero, veiem que la corba

$$F(X,t)=0, \quad \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}=0, \tag{9.2}$$

és una corba sobre la superfície $F(X,t)=0$ obtinguda com la posició límit dels talls amb les superfícies pròximes. Aquesta corba es diu *característica* de la superfície $F(X,t)=0$ respecte de la família uniparamètrica considerada.

En els exemples d'envolvents de plans considerats més amunt, *cada característica és una recta* en el pla considerat.

Observem que el raonament de pas al límit que acabem de fer pot introduir solucions addicionals. La única cosa que hem vist és que si denotem C_h el conjunt de punts solució del sistema (9.1) llavors el conjunt solució de (9.2) conté els punts del conjunt $\lim_{h\to 0} C_t$, però pot contenir més punts com es veu en els exemples següents.

Nota 9.1.1 La característica pot no existir. Per exemple, si considerem esferes concèntriques de radi variable

$$F(X,t)=x^2+y^2+z^2-t^2=0$$

llavors

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2t$$

i el sistema

$$F(X,t)=0, \quad \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}=2t=0$$

té com única solució $(0,0,0)$ (no és una corba sobre l'esfera de radi t de la família).

Sembla que el motiu és que les superfícies de la família inicial eren disjuntes. Però no. Podem considerar la família de 'cilindres' disjunts

$$F(X,t) = (y-t)^3 - z = 0$$

llavors

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -3(y-t)^2$$

i el sistema

$$F(X,t) = 0, \quad \frac{\partial F(X,t)}{\partial t} = -3(y-t)^2 = 0$$

té com solució $y = t$, $z = 0$. És a dir, la característica corresponent a la superfície de paràmetre t és la recta $y = t$, $z = 0$.

⋆ ⋆ ⋆

Definició 9.1.2 *L'*envolvent *de la família uniparamètrica $F(X,t) = 0$ és la superfície (cas que ho sigui) formada per la unió de les corbes característiques.*

Les seves equacions són doncs les mateixes equacions 9.2 al considerar t variable.

És clar, doncs, que *l'envolvent d'una família de plans és una superfície reglada.*

Exercici 9.1.3 *Trobeu l'envolvent de la família uniparamètrica d'esferes de radi constant i centre sobre una recta.*

Solució. Suposem que la recta és l'eix de les $z's$ i sigui r el radi constant d'aquestes esferes. La família uniparamètrica donada és

$$E(t) : x^2 + y^2 + (z-t)^2 - r^2 = 0.$$

Derivant respecte t,

$$-2(z-t) = 0,$$

de manera que la corba característica de l'esfera $E(t)$ és la corba sobre aquesta esfera amb $z = t$. És a dir, la circumferència

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

del pla $z = t$. La unió de dotes aquestes circumferències, al variar t, és el cilindre

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

⋆ ⋆ ⋆

Observem que el que hem fet, i que serà el procediment general, és *eliminar* t entre les equacions

$$F(X,t) = 0, \quad \frac{\partial F(X,t)}{\partial t} = 0.$$

En efecte, si som capaços d'aïllar t en aquestes dues equacions tindrem

$$t = f(X), t = g(X)$$

i la corba característica $X_t(s)$, corresponent al paràmetre t, compleix aquestes dues equacions, i en particular $f(X_t(s)) = g(X_t(s))$. Per tant, la superfície donada per l'equació $f(X) = g(X)$ conté totes les característiques, i és de fet, l'envolvent.

Exercici 9.1.4 *Estudieu l'envolvent de la família uniparamètrica de plans que contenen una recta donada.*

Solució. El feix de plans que contenen l'eix de les $x's$ és

$$z - ty = 0.$$

Derivant respecte t tenim

$$y = 0.$$

Resolent el sistema format per aquestes dues equacions obtenim $y = z = 0$, és a dir, que la característica de $z - ty = 0$ és l'eix de les $x's$, per a tot t, de manera que la unió de les característiques és el propi eix, que no és una superfície.

⋆ ⋆ ⋆

El motiu del nom'envolvent' prové del resultat següent.

Teorema 9.1.5 *Sigui E l'envolvent d'una família uniparamètrica de superfícies. Llavors en cada punt d'una corba característica els plans tangents de E i de la superfície on està continguda la característica coincideixen.*

Demostració. Denotem S_t la superfície $F(x,y,z,t) = 0$. La normal en cada punt de S_t té la direcció del gradient de $G_t(x,y,z) = F(x,y,z,t)$, és a dir,

$$\operatorname{grad} G_t = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

valorat en el punt (x, y, z, t), és normal a S_t.

Sigui $\varphi(u, v)$ una carta local de E. Això vol dir que donats u, v tenim un únic punt de la superfície E, justament el punt $\varphi(u, v)$, pel qual passa una i només una de les corbes característiques que componen E. Aquesta corba està continguda en una de les superfícies S_t de la família donada. Resumint, els valors de u, v ens permeten conèixer t. Escrivim doncs $t = t(u, v)$. Per tant, l'equació de la característica continguda a S_{t_0} és

$$t(u, v) = t_0.$$

Per a cada valor de la funció $t(u, v)$ l'equació de la característica continguda a $S_{t(u,v)}$ està donada pel sistema (9.2), de manera que tenim

$$F(\varphi(u, v), t(u, v)) = 0, \quad \frac{\partial F(\varphi(u, v), t(u, v))}{\partial t} = 0.$$

Derivant respecte u la primera equació i utilitzant la segona obtenim

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi^1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi^2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi^3}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} \\
= \; & \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi^1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi^2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi^3}{\partial u} \\
= \; & \langle \operatorname{grad} G_{t(u,v)}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

(les derivades parcials de F valorades a $(\varphi(u, v), t(u, v))$).

Per tant $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ és tangent a $S_{t(u,v)}$, per ser ortogonal al seu vector normal $\operatorname{grad} G_{t(u,v)}$.

Igualment, derivant respecte v obtindríem que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ és tangent a $S_{t(u,v)}$. Per tan els plans tangents a E i $S_{t(u,v)}$ en el punt $\varphi(u, v)$ coincideixen, com volíem veure. $\square$

Eix de regressió

Així com la corba *característica* sobre cada superfície de la família uniparamètrica es troba tallant aquesta superfície amb una altra de la família infinitament pròxima, ara podem fer el mateix amb les característiques i determinar un punt sobre cada característica obtingut tallant aquesta característica amb una altra infinitament pròxima. Quan aquest conjunt de punts, un a cada característica, formen una corba que no es redueix a un punt, aquesta corba s'anomena *eix de regressió*.

Atenció per que aquesta corba pot no existir, o tenir més d'una component connexa, com es veu per exemple en l'exercici 9.2.3 o es pot reduir a un punt, com es veu a l'exercici 9.2.1.

El mateix raonament que hem fet per trobar les equacions de les característiques ens diu que l'equació de l'eix de regressió és

$$F(X,t) = 0, \quad \frac{\partial F(X,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial t^2} = 0$$

que podem escriure simplement com

$$F = F_t = F_{tt} = 0.$$

Cadascun dels punts solució de l'anterior sistema es diu *punt característic* de la superfície $F(X,t) = 0$. De manera que l'eix de regressió té un punt de cada corba característica de la família. Atenció, doncs, perquè no tot punt d'una corba característica és un punt característic!

Proposició 9.1.6 *Suposem que existeixi l'envolvent i l'eix de regressió R d'una família uniparamètrica de superfícies. Llavors en cada punt P de R la tangent a R i la tangent a la característica per P coincideixen.*

Demostració. Sigui $\gamma(s)$ l'eix de regressió. Suposem $P = \gamma(0)$. Com per cada s tenim determinada una única t tal que $\gamma(s)$ pertany a la superfície $F(X,t) = 0$, podem pensar que localment tenim $t = t(s)$. Observem que P pertany a la superfície $F(X, t(0)) = 0$.

Tenim doncs

$$F(\gamma(s), t(s)) = 0, \quad \frac{\partial F(\gamma(s), t(s))}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(\gamma(s), t(s))}{\partial t^2} = 0,$$

que derivant respecte de s la primera i usant la segona, i derivant respecte de s la segona i utilitzant la tercera, ens dóna

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\gamma^1}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\gamma^2}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\gamma^3}{ds} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{ds} \\
= \;& \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\gamma^1}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\gamma^2}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\gamma^3}{ds} \\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\frac{d\gamma^1}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}\frac{d\gamma^2}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\frac{d\gamma^3}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\frac{\partial t}{ds} \\
= \; & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\frac{d\gamma^1}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}\frac{d\gamma^2}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\frac{d\gamma^3}{ds} \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Totes aquestes derivades de $s = 0$, és a dir, en el punt P.

Així doncs els vectors

$$X = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}), \quad Y = (\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z})$$

on aquestes derivades estan avaluades en $(\gamma(0), t(0))$, són ortogonals a $\gamma\,'(0)$ i per tant $X \wedge Y$ té la direcció de $\gamma\,'(0)$.

Per altra banda, sigui $\sigma(\tau)$ la característica corresponent al valor $t = t(0)$, és a dir, continguda a $F(X, t(0)) = 0$, i que conté doncs el punt P. Suposem $P = \sigma(0)$.

Tindrem

$$F(\sigma(\tau), t(0)) = 0, \quad \frac{\partial F(\sigma(\tau), t(0))}{\partial t} = 0,$$

que derivant respecte τ ens dóna

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d\sigma^1}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\sigma^2}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{d\sigma^3}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial x}\frac{d\sigma^1}{d\tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial y}\frac{d\sigma^2}{d\tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial z}\frac{d\sigma^3}{d\tau} = 0.$$

Totes les derivades en $\tau = 0$, és a dir, en P.

Amb la notació introduïda més amunt aquestes igualtats s'escriuen com

$$\langle X, \sigma'(0)\rangle = \langle Y, \sigma'(0)\rangle = 0,$$

i per tant $\gamma\,'(0)$ i $\sigma'(0)$ tenen la mateixa direcció. $\square$

Corol·lari 9.1.7 *La superfície envolvent d'una família uniparamètrica de plans és desenvolupable.*

Demostració. La característica sobre cada pla de la família és una recta, ja que s'obté tallant amb un altre pla infinitament pròxim i la intersecció de plans és una recta. Per la proposició anterior les rectes tangents a l'eix de regressió són tangents, i per tant coincideixen, amb les característiques. Com la envolvent és la unió de característiques, hem acabat. $\square$.

Corol·lari 9.1.8 *Una superfície té curvatura de Gauss zero si i només si és desenvolupable.*

Demostració.[2] Recordem que "desenvolupable" vol dir reglada amb $\mathcal{K} = 0$, Definició 7.1.3, pàgina 169. Suposem doncs que tenim una superfície S amb $\mathcal{K} = 0$.

Per la fórmula 6.10, pàgina 143, $\mathcal{K} = 0$ si i només si

$$\det(\nu, \nu_u, \nu_v) = 0.$$

Per que això passi hi ha essencialment dues possibilitats.

a) $\nu_u = 0$ (o $\nu_v = 0$). En aquest cas ν depèn només d'un paràmetre, i la superfície és l'envolvent d'una família uniparamètrica de plans (els seus plans tangents). Pel Corol·lari 9.1.7 anterior, S és desenvolupable.

b) Hi ha punts de la superfície on $\nu_u \neq 0$. Si aquesta derivada és diferent de zero en un punt és diferent de zero en un entorn. Si $\nu_v = 0$ en aquest entorn estem en el cas a). Si $\nu_v \neq 0$ en un punt, és diferent de zero en un entorn. En aquest entorn obert on ν_u i ν_v són diferents de zero, per ser $K = 0$, ha de ser ν_u múltiple de ν_v. Suposem $\nu_u = \lambda \nu_v$, per a una certa funció λ. Tenim

$$f = \langle \nu_u, \varphi_v \rangle = \lambda \langle \nu_v, \varphi_v \rangle = \lambda g$$

$$e = \langle \nu_u, \varphi_u \rangle = \lambda \langle \nu_v, \varphi_u \rangle = \lambda f = \lambda^2 g$$

Per tant, l'equació de les línies asimptòtiques és (suposem $g \neq 0$ ja que en aquest cas estem en el cas a))

$$\lambda^2 u'^2 + 2\lambda u'v' + v'^2 = (\lambda u' + v'^2) = 0$$

equació diferencial de fàcil solució.

Prenent un feix de línies asimptòtiques com les corbes com les línies $y =$ *constant* d'un nou sistema de coordenades (x, y) tindríem,$\overline{e} = 0$, i, com $\overline{eg} - \overline{f}^2 = 0$, ha de ser $\overline{f} = 0$, de la qual cosa es desprèn que ν_x és ortogonal a ψ_x i ψ_y, i per tant és zero i estem en el cas anterior.

□

[2] [34].

9.2 Exercicis

Exercici 9.2.1 *Estudieu l'envolvent de la família uniparamètrica*

$$sx + s^2y + z = s$$

i observeu que l'eix de regressió es redueix a un punt. Proveu que és desenvolupable.

Exercici 9.2.2 *Trobeu l'eix de regressió i les característiques de la família uniparamètrica de plans $sx + s^2y + s^3z = 1 + s$. Comproveu que l'envolvent és desenvolupable.*

Solució. Resolent el sistema

$$\begin{aligned} sx + s^2y + s^3z &= 1 + s \\ x + 2sy + 3s^2z &= 1 \\ 2y + 6sz &= 0 \end{aligned}$$

obtenim que l'eix de *regressió* és $(x(s), y(s), z(s)) = (1+3/s, -3/s^2, 1/s^3)$. El seu vector tangent a a questa corba en cada punt és múltiple de $(1, -2/s, 1/s^2)$.

Si resolem només les dues primeres equacions anteriors obtenim la corba *característica*,

$$(\frac{2s + s^2}{s^2} + s^2z, -\frac{1}{s^2} + 2sz, z),$$

que és, per a cada s, la recta de vector director $s^2(1, -2/s, 1/s^2)$ el qual té la mateixa direcció que la característica, tal com firma la Proposició 9.1.6.

Exercici 9.2.3 (Superfície canal) *Sigui $\gamma(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ i considerem la família uniparamètrica d'esferes de radi constant r i centre en $\gamma(s)$. Trobeu les corbes característiques i l'envolvent.*

Solució. L'equació d'aquestes esferes és

$$F(X, s) = \langle (X - \gamma(s)), (X - \gamma(s)) \rangle - r^2 = 0, \quad X = (x, y, z).$$

Per tant

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -2\langle T(s), (X - \gamma(s)) \rangle = 0$$

La característica de l'esfera $F(X, s) = 0$ està formada per punts X tals que $X - \gamma(s)$ pertany al pla normal a la corba. Coincideix, de fet, amb tot el meridià de l'esfera determinat pel pla normal a la corba. Per a cada s fixada es pot parametritzar, doncs, com

$$X = \gamma(s) + r\cos t \cdot N(s) + r\sin t \cdot B(s).$$

La unió de tots aquests meridians és l'envolvent d'aquesta família d'esferes i es diu *superfície canal*.

Es pot parametritzar, doncs, per

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + r\cos t \cdot N(s) + r\sin t \cdot B(s). \tag{9.3}$$

Per trobar l'eix de regressió hem de resoldre els sistema

$$F = F_t = F_{tt} = 0.$$

La derivada segona és

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -2k(s)\langle N(s), X - \gamma(s)\rangle + 2 = 0,$$

equivalentment,

$$\langle N(s), X - \gamma(s)\rangle - \rho(s) = 0.$$

Però els punts X que compleixen aquesta equació i tals que $X - \gamma(s)$ pertany al pla normal, constitueixen justament l'eix polar de la corba en el punt $\gamma(s)$, i com que també han d'estar sobre l'esfera resulta que l'eix de regressió està format pels *punts d'intersecció de cada esfera amb l'eix polar* de la corba en el punt corresponent.

Per tant, l'equació de l'eix de regressió és

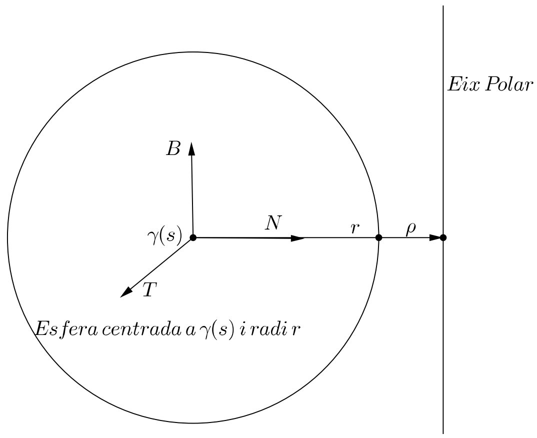
$$\sigma(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + \sqrt{r^2 - \rho(s)^2}B(s),$$

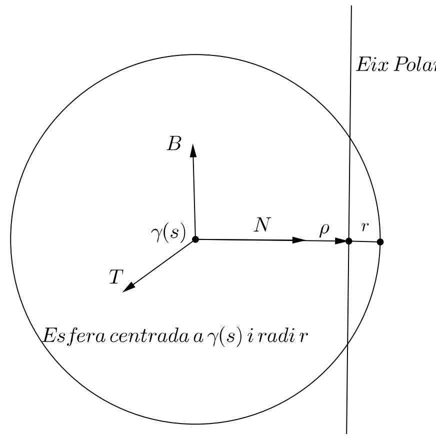
i també

$$\sigma(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) - \sqrt{r^2 - \rho(s)^2}B(s).$$

Té dues components connexes. Observeu que $\langle \sigma(s) - \gamma(s), \sigma'(s)\rangle = 0$, i $\langle T(s), \sigma'(s)\rangle = 0$, és a dir, $\sigma(s)$ és tangent a la corba característica.

Però queda clar que si $\rho(s) > r$ no hi ha eix de regressió. Si $\rho(s) < r$, cada esfera té dos punts característics, de manera que l'eix de regressió està format per dues corbes que coincideixen quan $\rho(s) = r$.





Exercici 9.2.4 *Demostreu que una de les curvatures principals d'una superfície canal és constant, i recíprocament, si una superfície té una curvatura principal constant, forma part d'una superfície canal.*

Solució. A partir de la parametrització que acabem de donar d'una superfície canal, equació (9.3), tenim

$$\varphi_s \wedge \varphi_t = -r \sin t \cdot B(s) + r \cos t N(s)$$

de manera que la normal a la superfície canal és

$$\mathcal{N}\varphi(s,t) = \nu(s,t) = -\sin t \cdot B(s) - \cos t N(s).$$

Si restringim la normal a la corba $s = \textit{constant}$ i derivem, tenim

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\cos t \cdot B(s) + \sin t N(s) = -r\varphi_t$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercici 9.2.5 (Superfície polar) *Demostreu que la superfície reglada formada per la unió dels eixos polars d'una corba (superfície polar) és l'envolvent dels plans normals. L'eix de regressió d'aquesta superfície és la corba formada pels centres de les esferes osculatrius. La superfície polar és la desenvolupable tangencial de l'eix de regressió i per tant, és desenvolupable.*

Solució. Sigui $\gamma(s)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. L'*eix polar* en el punt $\gamma(s)$ és la recta paral·lela a la binormal en aquest punt que passa pel centre de curvatura. Concretament

$$p_s(t) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + tB(s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura. Així, la superfície polar és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + tB(s).$$

Calculem ara la envolvent dels plans normals. L'equació d'aquests plans és

$$\langle T(s), X - \gamma(s)\rangle = 0. \tag{9.4}$$

Derivant respecte s,

$$\langle k(s)N(s), X - \gamma(s)\rangle + \langle T(s), -T(s)\rangle = 0$$

És a dir,

$$\langle N(s), X - \gamma(s)\rangle = \rho(s). \tag{9.5}$$

Per tant, existeix una funció $a(s)$ tal que

$$X - \gamma(s) = \rho(s)N(s) + a(s)B(s).$$

Per tota funció $a(s)$ aquest vector $X - \gamma(s)$ compleix les equacions (9.4) i (9.5), i és doncs la corba característica per al paràmetre s. Així la superfície envolvent, unió de característiques, és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + tB(s),$$

i coincideix amb la superfície polar.

Per trobar l'eix de regressió hem d'afegir a les equacions (9.4) i (9.5) l'equació donada per la derivada segona:

$$\langle -k(s)T(s) - \tau(s)B(s), X - \gamma(s)\rangle = \rho'(s),$$

és a dir

$$-\tau(s)\langle B(s), X - \gamma(s)\rangle = \rho'(s).$$

Per tant, l'eix de regressió és

$$X(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) - \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}B(s).$$

Però hem vist a la Proposició 3.10.7, pàgina 64, que el terme de la dreta és el centre de l'esfera osculatriu, per tant, l'eix de regressió és la corba formada pels centres de les esferes osculatrius.

La tangent a l'eix de regressió és tangent a la característica en el punt corresponent, però com en el nostre cas les característiques són rectes, ja que la família de superfícies que estem considerant és una família de plans, aquestes rectes tangents estan contingudes a la nostra superfície, que és així la desenvolupable tangencial de l'eix de regressió.

De fet, és fàcil veure directament que $X'(s)$ té la direcció de $B(s)$ i que la seva desenvolupable tangencial és la superfície polar.

Capítol 10

Teorema egregi

10.1 Secció 12 del *Disquisitiones.*

Si[1] *observem que es té sempre*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2,$$

es veu immediatament que $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ *és l'expressió general d'un element lineal, sobre una superfície corba. Per tant, l'anàlisi feta a l'article precedent ens ensenya que per a trobar la mesura de curvatura no calen fórmules finites que expressin les coordenades* x, y, z *com a funcions de les indeterminades* p, q*, sinó que és suficient conèixer l'expressió general de la longitud de cada element lineal. Procedim a algunes aplicacions d'aquest teorema tan important.*

Suposem que la nostra superfície es pot desenvolupar sobre una altra superfície, corba o plana, de manera que a cada punt de la primera superfície, determinat per les coordenades x, y, z*, correspongui un punt concret de la segona superfície, de coordenades* x', y', z'*. Evidentment* x', y', z' *es poden mirar també com a funcions de les indeterminades* p, q*, i per tant l'element* $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ *tindrà una expressió de la forma*

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp \cdot dq + G'dq^2}\,,$$

on E', F', G' *també denoten funcions de* p, q*. Però per la mateixa noció*

[1] Traducció del *Disquistiones*, vegeu [30]. Les primeres línies ja les hem reproduït en el peu de pàgina 1, pàgina 113.

de desenvolupament *d'una superfície sobre una altra és clar*[2] *que els elements que es corresponen l'un amb l'altre sobre les dues superfícies són necessàriament iguals. Per tant, tindrem idènticament*

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Així la fórmula de l'article precedent[3] *ens porta immediatament a l'egregi*[4]

Teorema. Si una superfície corba es desenvolupa sobre qualsevol altra superfície, la mesura de curvatura en punts corresponents no canvia.

També és evident que qualsevol part finita de la superfície mantindrà la mateixa curvatura integral després de ser desenvolupada sobre una altra superfície.

Un cas particular al qual els geòmetres havien restringit la seva atenció fins ara és el de les superfícies desenvolupables sobre un pla. La nostra teoria mostra directament que la mesura de la curvatura en cada punt d'aquestes superfícies és $= 0$*, i per tant, si la natura d'aquestes superfícies està definida d'acord amb el tercer mètode, tindrem en cada punt*

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} - (\frac{ddz}{dx \cdot dy})^2 = 0\,,$$

un criteri[5] *que, encara que conegut des de fa un temps, no ha estat demostrat, almenys que nosaltres sapiguem, amb tan rigor com és desitjable.*

10.2 El teorema egregi i les equacions de Codazzi-Mainardi

Sigui (U, φ) una carta local d'una superfície S.

Escrivim les derivades segones de φ en el punt (u, v) respecte de la base $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v), \nu(u, v)$, on $\nu = \mathcal{N} \circ \varphi$.

Tindrem les següents igualtats de funcions vectorials definides a U,

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e\nu \\
\varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + f\nu \\
\varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + g\nu
\end{aligned} \tag{10.1}$$

[2] Per nosaltres això és la Proposició 5.3.3, pàgina 124.

[3] Es refereix a la fórmula (10.4).

[4] Il·lustre, insigne.

[5] Observeu que està igualant a zero el determinant de la segona forma fonamental d'una superfície escrita com $z = x(x, y)$, hem fet els càlculs a la pàgina 150.

on e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental.

Tant els coeficients Γ_{ij}^k, que s'anomenen *símbols de Christoffel*, com les demès funcions que apareixen a la igualtat anterior són, doncs, funcions de u i v.

Multiplicant aquestes equacions per φ_u i φ_v i resolent els sistemes que es van obtenint és fàcil obtenir el valor dels símbols de Christoffel. Es poden escriure en funció dels coeficients E, F, G de la primera forma fonamental i de les seves derivades.

Només hem d'observar que

$$\begin{aligned}
E_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\
E_v &= \frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\
F_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \frac{E_u}{2} \\
\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= F_u - \frac{E_v}{2}
\end{aligned}$$

Multiplicant la primera de les equacions (10.1) primer per φ_u i després per φ_v obtenim

$$\begin{aligned}
\frac{E_u}{2} &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\
F_u - \frac{E_v}{2} &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G
\end{aligned}$$

Raonant de manera semblant amb la segona i tercera equació de (10.1) obtenim els sistemes

$$\begin{aligned}
\frac{E_v}{2} &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\
\frac{G_u}{2} &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
F_v - \frac{G_u}{2} &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\
\frac{G_v}{2} &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G
\end{aligned}$$

Resolent-los obtenim fàcilment

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)},\\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)},\\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

La importància capital d'aquestes fórmules rau en que ens diuen que *els símbols de Chirstoffel es poden calcular coneixent només els coeficients de la primera forma fonamental.* És el germen del teorema egregi.

Amb notació pròpia de Geometria Riemanniana els símbols de Christoffel s'escriuen així:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

on, en aquesta notació l'índex r suma des de $r = 1$ fins a 2 (fins a n en una varietat de Riemann arbitrària), g_{rs} és la primera forma fonamental (en general, la mètrica de Riemann) i g^{rs} la seva inversa.

En el nostre cas doncs,

$$\begin{aligned}
g_{11} &= E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G,\\
g^{11} &= \frac{G}{EG-F^2}, \quad g^{12} = \frac{-F}{EG-F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG-F^2}.
\end{aligned}$$

Per exemple, denotant $u = x_1$, $v = x_2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{r1}\left(\frac{\partial g_{1r}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{1r}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_r}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right)\\
&+ \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{11}(E_u + E_u - E_u) + \frac{1}{2}g^{21}(F_u + F_u - E_v)\\
&= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{r2}(\frac{\partial g_{r2}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{r1}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_r}) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}) \\
&+ \frac{1}{2}g^{22}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(F_u+E_v-F_u)+\frac{1}{2}g^{22}(G_u+F_v-F_v) \\
&= \frac{1}{2}g^{12}(E_v)+\frac{1}{2}g^{22}(G_u) \\
&= \frac{-FE_v+EG_u}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}$$

etc.

Ara no ens interessa massa l'expressió explícita de cada símbol de Christoffel però sí el que hem dit abans: que es poden calcular coneixent només la primera forma fonamental.

El teorema egregi i les equacions de Codazzi-Mainardi s'obtenen sense més que considerar les parts tangent i normal de les equacions

$$(\varphi_{uu})_v=(\varphi_{uv})_u; \quad (\varphi_{uv})_v=(\varphi_{vv})_u,$$

és a dir,

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^1\varphi_u+\Gamma_{11}^2\varphi_v+e\nu) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^1\varphi_u+\Gamma_{12}^2\varphi_v+f\nu) \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{12}^1\varphi_u+\Gamma_{12}^2\varphi_v+f\nu) = \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}^1\varphi_u+\Gamma_{22}^2\varphi_v+g\nu) \tag{10.3}$$

Per fer aquestes derivades necessitem recordar les equacions (6.12), pàgina 146,

$$\begin{aligned}
\nu_u &= \frac{Ff-Ge}{EG-F^2}\,\varphi_u+\frac{Fe-Ef}{EG-F^2}\,\varphi_v \\
\nu_v &= \frac{Fg-Gf}{EG-F^2}\,\varphi_u+\frac{Ff-Eg}{EG-F^2}\,\varphi_v
\end{aligned}$$

Fem doncs les derivades i mirem els coeficients dels vectors resultants que obtenim respecte de la base $(\varphi_u,\varphi_v,\nu)$

1. *Coeficient de φ_u a* (10.2).

$$(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1+e\frac{gF-fG}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^1)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1+f\frac{fF-eG}{EG-F^2}.$$

2. *Coeficient de φ_v a* (10.2).

$$(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2+e\frac{fF-gE}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2+f\frac{eF-fE}{EG-F^2}.$$

3. *Coeficient de ν a* (10.2).

$$\Gamma_{11}^1 f+\Gamma_{11}^2 g+e_v=\Gamma_{12}^1 e+\Gamma_{12}^2 f+f_u.$$

4. *Coeficient de φ_u a* (10.3).

$$(\Gamma_{12}^1)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1+\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1+f\frac{gF-fG}{EG-F^2}=(\Gamma_{22}^1)_u+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1+g\frac{fF-eG}{EG-F^2}.$$

5. *Coeficient de φ_v a* (10.3).

$$(\Gamma_{12}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2+f\frac{fF-gE}{EG-F^2}=(\Gamma_{22}^2)_u+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^2+g\frac{eF-fE}{EG-F^2}.$$

6. *Coeficient de ν a* (10.3).

$$\Gamma_{12}^1 f+\Gamma_{12}^2 g+f_v=\Gamma_{22}^1 e+\Gamma_{22}^2 f+g_u.$$

Simplificant una mica, aquestes sis equacions es poden escriure com
1. *La que prové del coeficient de φ_u a* (10.2).

$$F\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^1)_u-(\Gamma_{11}^1)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1$$

Aquí tenim el teorema egregi!!. (si $F\neq 0$)
2. *La que prové del coeficient de φ_v a* (10.2).

$$-E\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=(\Gamma_{12}^2)_u-(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2.$$

Novament el teorema egregi!! I ara sense problemes ja que $E\neq 0$.

Si tenim la paciència d'un monjo benedictí podem substituir aquests símbols de Christoffel pels seus valors i fer les derivades, etc, i obtenim justament l'expressió de la curvatura[6] del *Disquisitiones*,

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2K = & \; E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) \\ + & \; F\,(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u) \\ + & \; G\,(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2) \\ - & \; 2(EG-F^2)\,(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu})\,. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Si $F=0$ aquesta fórmula es pot escriure com

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}})\right] \tag{10.5}$$

Si, a més, $E=1$, tenim[7]

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}. \tag{10.6}$$

3. *La que prové del coeficient de* ν *a* (10.2).

$$\boxed{e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.}$$

Aquí tenim la primera equació de Codazzi-Mainardi

4. *La que prové del coeficient de* φ_u *a* (10.3).

$$G\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1.$$

---

[6]Hi ha moltes expressions equivalents per calcular la curvatura de Gauss. Una especialment interessant és la de Francesco Brioschi (1824-1897) que apareix a [3]. Aquesta expressió és

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right).$$

[7]Això passa per exemple quan les corbes $v = \textit{constant}$ són geodèsiques, com veurem més endavant. Vegeu l'exercici 11.10.11.

Novament el teorema egregi!! .

5. *La que prové del coeficient de φ_v a* (10.3).

$$-F\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2.$$

Novament el teorema egregi!! (Si $F \neq 0$).

6. *La que prové del coeficient de ν a* (10.3).

$$\boxed{f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.}$$

Aquí tenim la segona equació de Codazzi-Mainardi

Teorema 10.2.1 (Egregi) *Sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ uns isometria local entre dues superfícies. Llavors la curvatura de Gauss de S_1 en un punt $P \in S_1$ és igual a la curvatura de Gauss de S_2 en el punt $f(P)$.*

Demostració. Sigui $\varphi : U \longrightarrow S_1$ una parametrització de S_1 i prenem $\psi = f \circ \varphi$ com parametrització de S_2. D'aquesta manera si un punt de S_1 té coordenades (u,v) [respecte de φ] el punt imatge $f(P)$ té les mateixes coordenades (u,v) [respecte de ψ]. La fórmula 10.4 ens diu que si $P = \varphi(u,v)$, la curvatura de Gauss de S_1 en el punt P, $\mathcal{K}(P)$, queda determinada pels valors de E, F, G i les seves derivades en (u,v). Pel mateix motiu, la curvatura de Gauss de S_2 en el punt $f(P)$, $\mathcal{K}(f(P))$, queda determinada pels valors de E', F', G' i les seves derivades en (u,v).

Com, per la proposició 5.3.3, $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$, hem de fer exactament el mateix càlcul per calcular $\mathcal{K}(P)$ que $\mathcal{K}(f(P))$ i per tant

$$\mathcal{K}(P) = \mathcal{K}(f(P)). \quad \square$$

L'interès de les equacions de Codazzi-Mainardi està donat pel següent teorema de Bonnet, [2].

Teorema 10.2.2 (Teorema de Bonnet) *Siguin E, F, G, e, f, g sis funcions definides sobre un obert U de $\mathbb{R}^2$. Suposem que:*

1) $EG - F^2 \neq 0$,

2) Es compleixen les dues equacions de Codazzi-Mainardi,

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2, \end{aligned}$$

on els símbols de Christoffel estan donats per les equacions de la pàgina 228, (i són per tant coneguts a partir de E, F, G)

3) Es compleix l'equació de Gauss (fórmula de la curvatura)

$$-E\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2.$$

Llavors hi ha una única superfície, llevat de moviments a l'espai, que té E, F, G com coeficients de la primera forma fonamental i e, f, g com coeficients de la segona forma fonamental.

Equacions de Codazzi-Mainardi en coordenades principals

En aquest cas sabem, Proposició 6.6.1, pàgina 152, que $F = f = 0$, i les curvatures principals estan donades per $k_1 = e/E$ i $k_2 = g/G$.

Primera equació de Codazzi-Mainardi:

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2 = e\frac{E_v}{2E} - g\frac{-E_v}{2G} = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2)$$

Segona equació de Codazzi-Mainardi:

$$g_u = -e\Gamma_{22}^1 + g\Gamma_{12}^2 = e\frac{G_u}{2E} + g\frac{G_u}{2G} = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2)$$

Derivant les curvatures principals, i emprant aquestes expressions de e_v i g_u, obtenim

$$\boxed{\frac{\partial k_1}{\partial v} = \frac{E_v}{2E}(k_2 - k_1), \qquad \frac{\partial k_2}{\partial u} = \frac{G_u}{2G}(k_1 - k_2)}$$

10.3 Exercicis

Exercici 10.3.1 *Estudieu les superfícies amb les dues curvatures principals constants.*

Solució. Si són constants i iguals tots els punts són umbilicals i estem en una esfera o un pla. Vegeu, per exemple, [29]. Si són constants i diferents prenem una parametrització principal (U, φ) i apliquem la igualtat de Schwarz a

$$\begin{aligned} \nu_u &= -k_1\varphi_u \\ \nu_v &= -k_2\varphi_v \end{aligned}$$

obtenim $\varphi_{uv} = 0$, i per tant $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$.

Com $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ tenim

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle &= 0 \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

i per tant $\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0$.

Llavors, per la fórmula de la curvatura en funció dels símbols de Christoffel, punt 2 de la pàgina 230, tenim que $K = 0$.

Suposem doncs $k_1 = 0$ i k_2 constant diferent de zero. Com $k_1 = e/E$ tenim també $e = 0$.

Així

$$\varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u$$

però, per l'expressió dels símbols de Christoffel en funció dels coeficients de la mètrica, pàgina 228, tenim que

$$\Gamma^1_{11} = (\sqrt{E})_u/\sqrt{E}$$

I observem també, abans de continuar l'exercici, que $E_v = 0$, ja que

$$E_v = (\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle)_v = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = 0$$

ja que $\varphi_{uv} = 0$.

Aquestes consideracions permeten demostrar que el vector unitari

$$a = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}$$

és constant.

En efecte,

$$(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}})_u = \frac{\varphi_{uu}\sqrt{E} - (\sqrt{E})_u\varphi_u}{E} = 0,$$

i

$$(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}})_v = \frac{\varphi_{uv}\sqrt{E} - (\sqrt{E})_v\varphi_u}{E} = 0.$$

Considerem ara l'aplicació diferenciable $G : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$G(u,v) = \varphi(u,v) - \langle \varphi(u,v), a\rangle a + \frac{1}{k_2}\nu(u,v)$$

Aquesta funció és constant ja que les seves derivades parcials són

$$\begin{aligned} G_u &= \varphi_u - \langle \varphi_u, a\rangle a + \frac{1}{k_2}\nu_u = 0, \\ G_v &= \varphi_v - \langle \varphi_v, a\rangle a + \frac{1}{k_2}\nu_v = 0, \end{aligned}$$

ja que $\nu_u = 0$, $\langle \varphi_v, a\rangle = 0$ i $\nu_v = -k_2\varphi_v$. Si diem $c \in \mathbb{R}^3$ al valor constant de $G(u,v)$ tenim

$$\varphi(u,v) - \langle \varphi(u,v), a\rangle a - c = -\frac{1}{k_2}\nu(u,v) \tag{10.7}$$

Ara bé, com clarament $\langle G(u,v), a\rangle = 0$, tenim $\langle c, a\rangle = 0$. Per tant, prenent normes (al quadrat) a (10.7) tenim

$$\|\varphi(u,v) - c\|^2 - \langle \varphi(u,v) - c, a\rangle^2 = \frac{1}{k_2^2}$$

I la part esquerra d'aquesta igualtat és exactament la fórmula de la distància del punt $\varphi(u,v)$ a la recta que passa per c amb vector director a (no és més que el teorema de Pitàgores).

Per tant, tots els punts de la superfície pertanyen al cilindre circular recte d'eix la recta $c + \langle a\rangle$ i radi $1/k_2$.

Resumint, *una superfície connexa amb curvatures principals constants, o equivalentment amb curvatura mitjana i de Gauss constant, és un obert d'una esfera, d'un pla o d'un cilindre circular recte.*

Capítol 11

Curvatura geodèsica. Geodèsiques

11.1 Curvatura geodèsica

Recordem, Definició 8.1.1, pàgina 186, que la curvatura geodèsica k_g d'una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc està donada per

$$k_g = \langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle.$$

Donem una interpretació geomètrica d'aquesta curvatura.

Proposició 11.1.1 (Interpretació geomètrica de la curvatura geodèsica). *La curvatura geodèsica d'una corba $\gamma(s)$ sobre una superfície S, en un punt $P = \gamma(0)$*[1]*, coincideix, llevat del signe, amb la curvatura de la corba que s'obté en projectar $\gamma(s)$ ortogonalment sobre el pla tangent a S en P.*

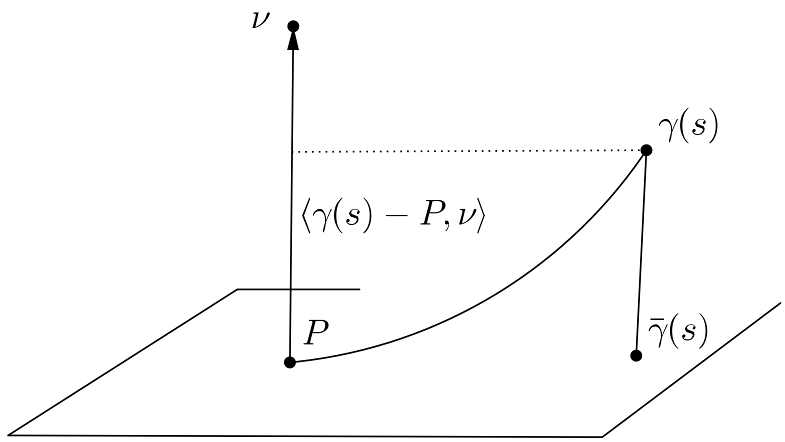
Demostració. Sigui $\nu = \mathcal{N}(P)$ el vector normal a la superfície en P. Suposarem que s és el paràmetre arc de $\gamma(s)$. La corba projectada és

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\nu \tag{11.1}$$

amb $\lambda(s)$ determinada per la condició

$$\langle \gamma(s) + \lambda(s)\nu - P, \nu \rangle = 0.$$

[1] El fet de considerar un punt amb $s = 0$ i no $s = s_0$ és únicament per alleugerir la notació i no suposa cap restricció.



Per tant, $\lambda(s) = -\langle \gamma(s) - P, \nu \rangle$. Una primera observació és que en P, $\gamma(s)$ i $\bar{\gamma}(s)$ tenen la mateixa tangent:

$$\bar{\gamma}'(0) = \gamma\,'(0) - \lambda'(0)\nu = \gamma\,'(0),$$

ja que $\lambda'(0) = -\langle \gamma'(0), \nu \rangle = 0$.

Com $\bar{\gamma}(s)$ no està parametritzada per l'arc, per calcular la seva curvatura utilitzarem la fórmula de la pàgina 49. Això implica que $\tilde{\gamma}''(0)$ té la direcció de $e(0)$.

Derivant dos cops (11.1) obtenim

$$\bar{\gamma}''(s) = \gamma\,''(s) - \langle \gamma(s)'', \nu \rangle\, \nu.$$

En P $(s = 0)$ tenim

$$\bar{\gamma}' \wedge \bar{\gamma}'' = \gamma\,' \wedge (\gamma\,'' - \langle \gamma'', \nu \rangle \nu) = kB - (k \cos \alpha)\gamma\,' \wedge \nu,$$

on B és el binormal a la corba en P i α és l'angle entre la normal principal a la corba en P i ν.

Com $\tilde{\gamma}$ està contingut al pla tangent per $s = 0$ el vector $kB - k_n\gamma' \wedge \nu$ té la direcció de ν.

La curvatura $\bar{k}$ de $\bar{\gamma}(s)$ en $s = 0$ és

$$\bar{k} = |\bar{\gamma}' \wedge \bar{\gamma}''| = \sqrt{k^2 + k^2 \cos^2 \alpha - 2k^2 \cos \alpha \cos \alpha} = k|\sin \alpha| = |k_g|,$$

on k_g és la curvatura geodèsica de $\gamma(s)$ en P. Hem utilitzat que α és també l'angle entre B i $\gamma' \wedge \nu$.

Segon mètode. Considerem el cilindre

$$\varphi(r,s) = \gamma(s) + r\nu,$$

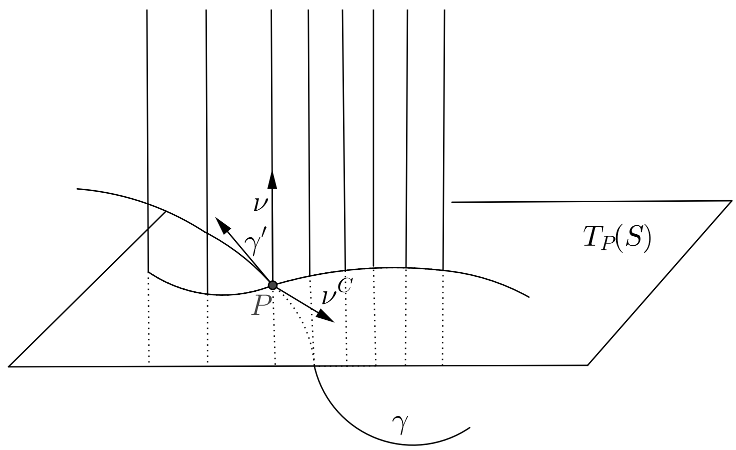
on $\nu = \mathcal{N}(P)$. Com

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \nu \\ \varphi_s &= \gamma'(s) \end{aligned}$$

el vector normal al cilindre és

$$\nu^C(s) = \nu \wedge \gamma'(s),$$

on $\nu^C(s) = \bar{\nu}^C(\varphi(r,s))$ (no depèn de r).



Projectar ortogonalment sobre $T_P(S)$ és el mateix que tallar el cilndre amb $T_P(S)$

Així doncs, per definició de curvatura normal i geodèsica d'una corba sobre una superfície, tenint en compte ara que $\gamma(s)$ és corba a la vegada de S i del cilindre, tenim, en el punt P,

$$\begin{aligned} k_g &= \langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle = \langle \gamma'', \nu^C \rangle = k_n^C \\ k_n &= \langle \gamma'', \nu \rangle = \langle \gamma'', \gamma' \wedge \nu^C \rangle = -k_g^C, \end{aligned}$$

on k_n^C i k_g^C denoten la curvatura normal i geodèsica de la corba sobre el cilindre.

Com el sentit de la normal al cilindre és arbitrari podem dir que la curvatura geodèsica k_g de la corba com corba sobre S *coincideix, llevat potser del signe, amb la curvatura normal de la corba com a corba sobre el cilindre.* Com la curvatura normal en una direcció coincideix amb la curvatura de la secció normal en aquesta direcció i la secció normal al cilindre en la direcció $\gamma'(P)$ s'obté tallant el cilindre amb el pla $\langle \nu^C, \gamma'(P)\rangle$, que coincideix amb T_PS, la corba secció normal coincideix amb la projecció de $\gamma(s)$ sobre el pla tangent T_PS, i per tant la curvatura geodèsica k_g en P de la corba com corba sobre S és igual a la curvatura en P de la corba que s'obté en projectar ortogonalment $\gamma(s)$ sobre el pla tangent a la superfície en P, com volíem provar. $\square$

Proposició 11.1.2 *Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre uns superfície. En cadascun dels seus punts, el centre de curvatura, el centre de curvatura normal i el centre de curvatura geodèsic estan alineats.*

Demostració. Sigui P un punt de la corba. Denotem per k la curvatura de $\gamma(s)$ (com corba de $\mathbb{R}^3$) en P i per $\rho = 1/k$ el radi de curvatura. Així doncs, el centre de curvatura és el punt

$$O_1 = P + \rho N,$$

on N és el vector normal principal a la corba en P.

Per definició, el centre de curvatura normal és el punt

$$O_2 = P + \rho_n N_2$$

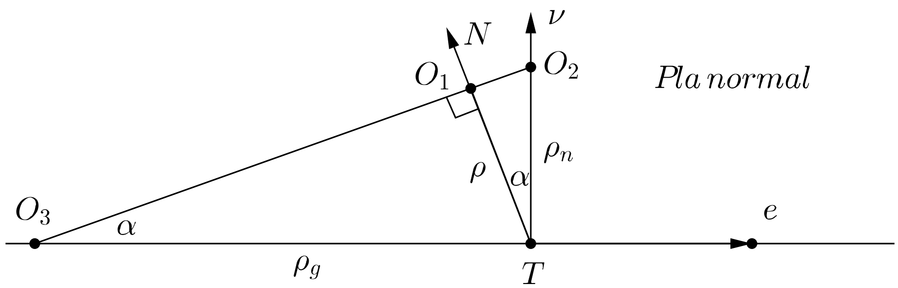
on N_2 és la normal principal de la corba secció normal i $\rho_n = |1/k_n|$ és el radi de curvatura normal. Observem que $N_2 = \pm\nu$, on $\nu = \mathcal{N}(P)$ és la normal a la superfície en P. Per la Proposició 8.4.3, N i N_2 estan en el mateix semiespai respecte del pla tangent.

El centre de curvatura geodèsic és el punt

$$O_3 = P + \rho_g N_3$$

on N_3 és la normal principal de la corba projectada ortogonalment sobre el pla tangent a la superfície en P i $\rho_g = |1/k_g|$ és el radi de curvatura geodèsic. Observem que $N_3 = \pm\nu \wedge \gamma'(P)$ (el vector e de la pàgina 185).

Es pot veure que $\langle N, N_3\rangle \geq 0$, de manera que N i N_3 estan en el mateix semiplà determinat per $\langle N_2\rangle$ a $T^\perp$ (exercici 11.10.1).



Com $\rho = \rho_n|\cos\alpha|$ i $\rho = \rho_g \sin\alpha$, la figura mostra (mireu els triangles O_1O_3T i O_1O_2T) llavors que la recta O_1O_2 talla la recta $P + \langle N_3\rangle$ en un punt que està distància ρ_g de P, en la direcció de N_3, i que és doncs el punt O_3. $\square$

La curvatura geodèsica és invariant per isometries

Proposició 11.1.3 *Sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una isometria local i sigui $\gamma(s)$ una corba a S_1. Llavors la curvatura geodèsica de $\gamma(s)$ coincideix, per a cada s, amb la curvatura geodèsica de la corba $f(\gamma(s))$.*

Demostració. Sigui (U, φ) una parametrització de S_1 i $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una corba sobre S parametritzada per l'arc. Llavors tenim

$$\gamma'(s) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$$

amb $\varphi_u = \varphi_u(u(s), v(s))$, etc. Per tant,

$$\begin{aligned}
\gamma''(s) &= \frac{d}{ds}(\varphi_u u' + \varphi_v v') \\
&= \varphi_u u'' + \varphi_v v'' + \varphi_{uu} u'^2 + 2\varphi_{uv} u'v' + \varphi_{vv} v'^2. \\
&= \varphi_u u'' + \varphi_v v'' + (\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + e\nu)u'^2 + 2(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + f\nu)u'v' \\
&+ (\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\nu)v'^2 \\
&= \varphi_u(u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2) \\
&+ \varphi_v(v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2) \\
&+ \nu(eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2) \qquad (11.2)
\end{aligned}$$

amb $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u(s), v(s))$, etc.

Escriurem doncs

$$\gamma''(s) = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu, \tag{11.3}$$

amb

$$\begin{aligned} A &= u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 \\ B &= v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 \\ C &= II(\gamma', \gamma') \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} k_g &= \det(\nu, \gamma', \gamma'') = \det(\nu, u'\varphi_u, B\varphi_v) \\ &+ \det(\nu, v'\varphi_v, A\varphi_u) \\ &= (u'B - v'A)\det(\nu, \varphi_u, \varphi_v) \end{aligned}$$

Equivalentment, per l'exercici (6.8.1), pàgina 156,

$$k_g = \sqrt{EG - F^2}(u'B - v'A) \tag{11.4}$$

Com aquesta expressió només depèn de les coordenades de la corba i de la primera forma fonamental, amb el mateix argument que en el teorema egregi, (la corba $f(\gamma(s))$ té les mateixes coordenades respecte $f \circ \varphi$ que $\gamma(s)$ respecte φ i els coeficients de la primera forma fonamental respecte $f \circ \varphi$ i φ coincideixen) k_g és invariant per isometries. $\square$

Curvatura geodèsica de les corbes coordenades d'una parametrització ortogonal

Proposició 11.1.4 *Sigui (U, φ) una parametrització ortogonal ($F = 0$) d'una superfície. Denotem k_{g1} la curvatura geodèsica de la corba $v =$ constant i k_{g2} la curvatura geodèsica de la corba $u =$ constant. Llavors tenim*

$$\begin{aligned} k_{g1} &= -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \\ k_{g2} &= \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \end{aligned}$$

Demostració. Aclarim primer la notació. Si posem $v = v_0$, $k_{g1} = k_{g1}(u)$ és la curvatura geodèsica de la corba $\varphi(u, v_0)$, i els termes de la dreta de la igualtat, E, G, E_v estan valorats en el punt (u, v_0). Anàlogament, si $u = u_0$, $k_{g2} = k_{g2}(v)$ és la curvatura geodèsica de la corba $\varphi(u_0, v)$ i els termes de la dreta de la igualtat, E, G, G_u estan valorats en el punt (u_0, v).

Com que les corbes $\varphi(u_0, v)$ i $\varphi(u, v_0)$ no estan parametritzades per l'arc, utilitzarem l'exercici 8.6.1 per calcular la seva curvatura geodèsica.

En aquest exercici veiem que la curvatura geodèsica d'una corba $\gamma(t)$ està donada per

$$k_g(t) = \frac{\langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle}{\|\gamma'\|^3}.$$

En particular l'equació (11.4) esdevé

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(u'B - v'A)}{\|\gamma'\|^3}. \tag{11.5}$$

Aplicant aquesta fórmula a la corba $\varphi(u, v_0)$ (que compleix doncs $u' = 1, v' = 0$, i per tant $B = \Gamma^2_{11} = -\frac{E_v}{2G}$) tenim

$$k_{g1} = \frac{\sqrt{EG}(B)}{\left[\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\right]^3} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Aplicant-la ara a la corba $\varphi(u_0, v)$ (que compleix doncs $u' = 0, v' = 1$ i per tant $A = \Gamma^1_{22} = -\frac{G_u}{2E}$) tenim

$$k_{g2} = \frac{\sqrt{EG}(-A)}{\left[\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right]^3} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \quad \square$$

Exemple 11.1.5 *Calculeu la curvatura geodèsica d¡un paral·lel de l'esfera.*

11.2 Fórmula de Liouville per a la curvatura geodèsica

La fórmula de Liouville consisteix en una expressió senzilla de la curvatura geodèsica k_g d'una corba continguda en una carta local (U, φ) ortogonal

($F = 0$) d'una superfície, en funció de la curvatura geodèsica de les corbes coordenades $u = constant$, $v = constant$.

Seguint [10] comencem recordant que si $\gamma : I \longrightarrow S$ és una corba sobre S, un *camp tangent a la superfície al llarg de* $\gamma(s)$ és una aplicació diferenciable

$$X : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

$$X(s) \in T_{\gamma(s)}S.$$

Tenim el resultat previ següent

Lema 11.2.1 *Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície S amb normal $\mathcal{N}$ i siguin $X(s), Y(s)$ dos camps unitaris tangents a S al llarg de $\gamma(s)$ que formen entre si un angle $\theta(s)$ (angle orientat entre $X(s)$ i $Y(s)$). Llavors*

$$\langle\frac{dY(s)}{ds}, \nu(s) \wedge Y(s)\rangle - \langle\frac{dX(s)}{ds}, \nu(s) \wedge X(s)\rangle = \frac{d\theta(s)}{ds}.$$

on $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$.

Demostració. Per alleugerir la notació escriurem $X = X(s)$, $Y = Y(s)$, $\theta = \theta(s)$, $\nu = \nu(s)$, i "primes" per a les corresponents derivades respecte s.

El que volem demostrar és doncs,

$$\langle Y', \nu \wedge Y\rangle - \langle X', \nu \wedge X\rangle = \theta'.$$

Per a això només s'ha d'observar que $(X, \nu \wedge X)$ és una base ortonormal de $T_{\gamma(s)}S$. Llavors

$$Y = aX + b\,\nu \wedge X$$

amb $a = a(s)$ i $b = b(s)$ funcions de s tals que $a^2 + b^2 = 1$. Per tant

$$\nu \wedge Y = a\,\nu \wedge X - b\,X, \tag{11.6}$$

ja que $\nu \wedge (\nu \wedge X) = -X$, per ser X ortogonal a ν. Derivant l'expressió de Y,

$$\begin{aligned} Y' &= a'X + b'\nu \wedge X \\ &+ aX' + b(\nu \wedge X)' \end{aligned}$$

Multiplicant per $\nu \wedge Y$ i tenint en compte la igualtat (11.6) tenim

$$\begin{aligned}\langle Y', \nu \wedge Y\rangle &= a'\langle X, \nu \wedge Y\rangle + b'\langle \nu \wedge X, \nu \wedge Y\rangle \\ &+ a\langle X', \nu \wedge Y\rangle + b\langle (\nu \wedge X)', \nu \wedge Y\rangle \\ &= -a'b + b'a + a^2\langle X', \nu \wedge X\rangle - b^2\langle (\nu \wedge X)', X\rangle\end{aligned}$$

Però derivant la igualtat

$$\langle X, \nu \wedge X\rangle = 0$$

obtenim

$$\langle X', \nu \wedge X\rangle + \langle X, (\nu \wedge X)'\rangle = 0,$$

i per tant

$$\langle Y', \nu \wedge Y\rangle - \langle X', \nu \wedge X\rangle = -a'b + b'a.$$

Es pot veure que si canviem els papers de X i Y, $a = \langle X, Y\rangle$ no varia però $b = \langle Y, \nu \wedge X\rangle$ canvia de signe, de manera que els dos termes de la igualtat anterior canvien de signe.[2]

Ara bé, es pot veure (vegeu exercici 11.10.3) que donades dues funcions $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables definides en un obert I de $\mathbb{R}$, amb $a^2 + b^2 = 1$, existeix $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(t) = \cos(\theta(t))$ i $b(t) = \sin(\theta(t))$, $\forall t \in I$. Es diu que $\theta(t)$ és una *determinació de l'argument* o *l'angle orientat entre el vectors unitaris* $(1, 0)$ *i* (a, b).

Però llavors,

$$-a'b + b'a = -(-\sin\theta)\theta' \sin\theta + (\cos\theta)\theta' \cos\theta = \theta'.$$

Per tant,

$$\langle Y', \nu \wedge Y\rangle - \langle X', \nu \wedge X\rangle = \theta'.$$

com volíem demostrar. □

[2]Una manera de pensar l'angle orientat entre X i Y és escriure el segon, Y, en la base ortonormal positiva $(X, \nu \wedge X)$. Existeix un únic $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $Y = \cos\theta X + \sin\theta \nu \wedge X$. Si canviem els papers, i escrivim X en la base ortonormal positiva $(Y, \nu \wedge Y)$ el cosinus queda igual i el sinus canvia de signe, o equivalentment, canviem θ per $-\theta$.

Corol·lari 11.2.2 *Sigui (U, φ) una carta local ortogonal ($F = 0$) d'una superfície S. Sigui $Y(s)$ un camp unitari tangent a S al llarg de la corba $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$. Llavors*

$$\langle Y', \nu \wedge Y \rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') + \theta'$$

on θ és l'angle orientat entre $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i Y.

Demostració. Observem primerament que per alleugerir la notació hem escrit $Y = Y(s), \nu = \nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s)), \theta = \theta(s), E = E(u(s), v(s)), G = G(u(s), v(s)), G_u = \frac{\partial G}{\partial u}(u(s), v(s)), E_v = \frac{\partial E}{\partial v}(u(s), v(s))$, i les "primes" indiquen derivada respecte de s.

Denotem ara

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \varphi_u, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \varphi_v$$

que és una base ortonormal de l'espai tangent en cada punt. En particular tenim les igualtats de funcions vectorials sobre U,

$$e_1 \wedge e_2 = \nu, \quad \nu \wedge e_1 = e_2.$$

Com sempre, escriurem $e_i(s) = e_i(u(s), v(s)), i = 1, 2$, és a dir, $e_i(s)$ és la restricció de e_i a la corba donada.

Aplicant el Lema 11.2.1 amb $X(s) = e_1(s)$ i $Y(s)$, de manera que $\theta(s)$ és ara l'angle orientat entre $e_1(s)$ i $Y(s)$, tenim

$$\langle Y', \nu \wedge Y \rangle = \langle e_1', \nu \wedge e_1 \rangle + \theta'. \tag{11.7}$$

Ara bé

$$e_1' = (\frac{1}{\sqrt{E}})' \varphi_u + \frac{1}{\sqrt{E}} (\varphi_{uu} u' + \varphi_{uv} v')$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\langle e_1', \nu \wedge e_1 \rangle &= \langle e_1', e_2 \rangle \\
&= \frac{u'}{\sqrt{EG}} \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{v'}{\sqrt{EG}} \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \\
&= \frac{u'}{\sqrt{EG}} G \Gamma_{11}^2 + \frac{v'}{\sqrt{EG}} G \Gamma_{12}^2 \\
&= -\frac{u' E_v}{2\sqrt{EG}} + \frac{v' G_u}{2\sqrt{EG}}
\end{aligned}$$

Substituint a (11.7) hem acabat. $\square$

Corol·lari 11.2.3 *Sigui (U, φ) una parametrització ortogonal d'una superfície S i sigui $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una corba sobre S parametritzada per l'arc. Llavors la curvatura geodèsica està donada per*

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u v' - E_v u'\right) + \theta' \tag{11.8}$$

on $\theta = \theta(s)$ és l'angle orientat entre $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i $\gamma'(s)$ en el punt $\gamma(s)$.

Demostració. Apliquem el Corol·lari 11.2.2 amb $Y(s) = \gamma'(s)$. Obtenim, amb la mateixa simplificació de la notació que hem emprat allà,

$$\langle \gamma'', \nu \wedge \gamma' \rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u v' - E_v u'\right) + \theta'$$

on θ és l'angle orientat entre $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i γ'.

Ara bé, el primer terme d'aquesta igualtat és exactament la curvatura geodèsica (definició 8.1.1, pàgina 186), i per tant, hem acabat. □

Corol·lari 11.2.4 (Fórmula de Liouville) *Sigui (U, φ) una parametrització ortogonal d'una superfície S i sigui $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una corba sobre S parametritzada per l'arc. Llavors la curvatura geodèsica de $\gamma(s)$ està donada per*

$$k_g = k_{g1} \cos\theta + k_{g2} \sin\theta + \theta' \tag{11.9}$$

on $\theta = \theta(s)$ és l'angle orientat entre $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i $\gamma'(s)$ en el punt $\gamma(s)$, k_{g1} i k_{g2} són respectivament les curvatures geodèsiques de les corbes $v = constant$ i $u = constant$ que passen pel punt $\gamma(s)$.

Demostració. Hem vist a la Proposició 11.1.4, pàgina 242, que[3]

$$\begin{aligned} k_{g1} &= -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \\ k_{g2} &= \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}, \end{aligned}$$

[3] També es dedueixen directament de la fórmula (11.8) aplicada a les corbes $v = constant$ i $u = constant$, tenint en compte que $u' = 1/\sqrt{E}$ i $v' = 1/\sqrt{G}$, on u' i v' denoten respectivament les derivades de u i v respecte del paràmetre arc de les corbes $\varphi(u, c)$ i $\varphi(c, v)$, c una constant arbitraria, respectivament.

de manera que l'equació (11.8) s'escriu com

$$k_g = k_{g1}\sqrt{E}u' + k_{g2}\sqrt{G}v' + \theta'. \tag{11.10}$$

Per altra banda

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \gamma' \rangle &= \sqrt{E}\cos\theta = (1,0)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = Eu', \\
\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \gamma' \rangle &= \sqrt{G}\sin\theta = (0,1)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = Gv'.
\end{aligned}$$

És a dir,

$$\cos\theta = \sqrt{E}\, u', \quad \sin\theta = \sqrt{G}\, v'. \tag{11.11}$$

Substituint a (11.10) tenim

$$\boxed{k_g = k_{g1}\cos\theta + k_{g2}\sin\theta + \theta'}\,. \quad \square$$

11.3 Fórmula de Bonnet per a la curvatura geodèsica

La coneguda fórmula de Bonnet per a la curvatura geodèsica apareix per primer cop al treball [1]. Aquesta fórmula és:

$$k_g = \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{Gm-Fn}{\sqrt{En^2-2Fmn+Gm^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{En-Fm}{\sqrt{En^2-2Fmn+Gm^2}}\right)$$

on la corba està donada per $f(u,v)=0$, i $m=f_u$, $n=f_v$.

Aquesta fórmula sembla difícil però és força senzilla si recordem algunes propietats de la curvatura geodèsica. La primera és que la curvatura geodèsica $k_g = k_g(s)$ d'una corba parametritzada per l'arc $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ sobre una superfície $\varphi(u,v)$ de normal ν, és

$$k_g(s) = \det(T(s), T'(s), \nu(\gamma(s))),$$

on $T(s) = \gamma'(s)$.

Ara pensarem la tangent $T(s)$ com una funció de u i v.

Sigui s el paràmetre arc de la corba $f(u,v) = 0$. Tindrem $f(u(s), v(s)) = 0$, i per tant,

$$f_u u' + f_v v' = 0,$$

és a dir,

$$\frac{u'}{v'} = -\frac{f_v}{f_u} = -\frac{n}{m}.$$

Ben entès que f_u vol dir la derivada parcial de f respecte de u valorada en el punt $(u(s), v(s))$, és a dir, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u(s), v(s))$, $u' = \frac{du(s)}{ds}$, etc.

Com que s és paràmetre arc, tenim

$$1 = |\gamma'(s)| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = \left|\frac{v'}{m}\right|\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2},$$

on $E = E(u(s), v(s))$, etc.

Equivalentment,

$$v' = \pm\frac{m}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}},$$
$$u' = \pm\frac{-n}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}}.$$

Així

$$\gamma'(s) = \varphi_u u' + \varphi_v v' = \pm\frac{-n\varphi_u + m\varphi_v}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}}$$

Observem que el terme de la dreta és una funció de les dues variables (u,v) valorada en els punts de la corba $(u(s), v(s))$. El signe depèn del sentit de $g\gamma(s)$, si canviem s per $-s$ el vector tangent canvia de signe.

És en aquest sentit que podem pensar el vector tangent T com funció de (u,v). Denotem

$$\widetilde{T}(u,v) = \frac{-n\varphi_u + m\varphi_v}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}}. \qquad (11.12)$$

Llavors, el que acabem de veure és que $\gamma'(s) = T(s) = \widetilde{T}(u(s), v(s))$.[4]

[4]Equivalentment, haguéssim pogut pensar que sobre la superfície no tenim només la corba $f(u,v) = 0$ sinó la família de corbes $f(u,v) = c$. Per cada punt de coordenades (u_0, v_0) passa la corba $f(u,v) = f(u_0, v_0)$. El vector tangent a cadascuna d'aquestes corbes és $(u'\varphi_u + v'\varphi_v)$ el qual és, pel mateix càlcul que hem fet per a $f(u,v) = 0$, un múltiple de $-n\varphi_u + m\varphi_v$. Al normalitzar tenim $\widetilde{T}$.

Això permet calcular T' usant la regla de la cadena.

$$T' = \frac{d}{ds}\widetilde{T}(u(s), v(s)) = \widetilde{T}_u u' + \widetilde{T}_v v'$$

on $\widetilde{T}_u = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial u}(u(s), v(s))$, etc.

Apliquem ara la fórmula de la curvatura geodèsica. Per simplificar la notació escric $k_g = k_g(s)$, $T = T(s)$, $T' = T'(s)$, $\nu = \nu(s) = \mathcal{N}(\varphi(u(s), v(s)))$.

$$k_g = \det(T, T', \nu) = (T \wedge T') \cdot \nu = ((T \wedge \widetilde{T}_u)u' + (T \wedge \widetilde{T}_v)v') \cdot \nu.$$

Com que

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

tenim

$$\sqrt{EG - F^2}\, k_g = ((T \wedge \widetilde{T}_u)u' + (T \wedge \widetilde{T}_v)v') \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v), \tag{11.13}$$

on $E = E(u(s), v(s))$, etc.

Però

$$T \wedge \varphi_u = (\varphi_u u' + \varphi_v v') \wedge \varphi_u = v'(\varphi_v \wedge \varphi_u),$$

i anàlogament

$$T \wedge \varphi_v = (\varphi_u u' + \varphi_v v') \wedge \varphi_v = u'(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Substituint aquestes darreres expressions a (11.13) obtenim (en virtut de la fórmula fonamental que relaciona el producte escalar i el producte vectorial, que hem recordat a la pàgina 115, la igualtat de Schwartz de les derivades creuades i de que $\widetilde{T}_u \cdot T = \widetilde{T}_v \cdot T = 0$)

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2}\, k_g &= (T \wedge \widetilde{T}_u)(T \wedge \varphi_v) - (T \wedge \widetilde{T}_v)(T \wedge \varphi_u) \\ &= \widetilde{T}_u \cdot \varphi_v - \widetilde{T}_v \cdot \varphi_u \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(\widetilde{T} \cdot \varphi_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\widetilde{T} \cdot \varphi_u). \end{aligned} \tag{11.14}$$

Totes les funcions de (u, v) d'aquesta igualtat valorades en els punts $(u(s), v(s))$.

Però clarament, per la definició de $\widetilde{T}$, tenim

$$\widetilde{T}_u \cdot \varphi_u = \frac{Fm - En}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}},$$

$$\widetilde{T}_u \cdot \varphi_v = \frac{Gm - Fn}{\sqrt{En^2 - 2Fmn + Gm^2}},$$

Substituint aquestes dues últimes igualtats a (11.14) tenim el resultat. □

11.4 Equacions de les geodèsiques

Definició 11.4.1 (Geodèsiques) *Una corba sobre una superfície es diu* geodèsica *si, o bé és recta, o la seva curvatura geodèsica és igual a zero. Equivalentment, les geodèsiques són aquelles corbes per a les quals la seva normal principal en cada punt de la corba coincideix, llevat del signe, amb la normal a la superfície en aquest punt.*

Equivalentment, una corba sobre una superfície és geodèsica si i només si en cada punt el centre de curvatura i el centre de curvatura normal coincideixen.

Aquesta definició no té en compte la parametrització de la corba ja que la curvatura geodèsica es defineix a partir d'una reparametrització per l'arc de la corba donada.

En aquestes notes distingirem entre *geodèsiques* i *geodèsiques parametritzades*. Les dues seran minimals de longitud però només les segones estan automàticament parametritzades per l'arc o un múltiple de l'arc.

Recordem que si $\gamma(s)$ es una corba parametritzada per l'arc, continguda en una superfície S, la seva curvatura geodèsica està donada per

$$k_g(s) = \langle \gamma''(s), \nu(s) \wedge \gamma'(s) \rangle = \det(\nu(s), \gamma'(s), \gamma''(s)),$$

on $\nu(s)$ és la restricció a la corba de la normal a la superfície, de manera que $\gamma(s)$ és geodèsica si i només si

$$\det(\nu(s), \gamma'(s), \gamma''(s)) = 0.$$

Si escrivim la corba en termes d'una carta local (U, φ), posant $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, la curvatura geodèsica d'aquesta corba, estigui o no parametritzada per l'arc està donada a la fórmula (11.5).

Podem dir doncs que la curvatura geodèsica de $\gamma(t)$ és zero si i només si

$$u'B - v'A = 0, \tag{11.15}$$

amb

$$\begin{aligned} A &= u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1, \\ B &= v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2. \end{aligned}$$

Fins aquí no ha jugat cap paper el paràmetre de la corba. Per controlar aquest paràmetre donem una definició una mica més general de geodèsica, concretament el que anomenem *geodèsica parametritzada*.

Definició 11.4.2 (Geodèsiques parametritzades) *Sigui* (U, φ) *una carta local d'una superfície* S. *Direm que una corba* $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ *és una* geodèsica parametritzada *si i només si es compleixen les equacions diferencials*

$$\begin{aligned} u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 &= 0, \\ v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Clarament tota geodèsica parametritzada és una geodèsica però no tota geodèsica és una geodèsica parametritzada. És a dir que, amb la notació anterior, podem tenir $u'B - v'A = 0$ sense que A ni B siguin zero; per exemple la recta (t^2, t^2). Vegeu la nota 11.4.4 i l'exercici **??**.

Aquestes dues darreres fórmules s'acostumen a escriure d'una manera més compacta denotant $\gamma^1 = u$, $\gamma^2 = v$, i recordant el criteri de sumació i que els símbols de Christoffel són simètrics respecte els subíndexs.

$$\boxed{\frac{d^2\gamma^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{ds}\frac{d\gamma^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2.} \tag{11.16}$$

Equacions de les geodèsiques.

Proposició 11.4.3 *Sigui* (U, φ) *una carta local d'una superfície* S. *Sigui* $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ *una* geodèsica parametritzada. *Llavors* $\|\gamma'(t)\| = constant$, *és a dir, està parametritzada proporcional a l'arc.*

Demostració. L'equació (11.3) implica que si $\gamma(t)$ és geodèsica parametritzada, $\gamma''(t)$ té la direcció de la normal a la superfície[5], i per tant,

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle = \langle\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle = 0$$

i per tant el mòdul de $\gamma'(t)$ és constant. $\square$

Nota 11.4.4 *Suposem que tenim una geodèsica parametritzada $\gamma(t)$ i fem un canvi de paràmetre $t = f(s)$. Les noves coordenades seran $\tilde{u}(s) = u(f(s)), \tilde{v}(s) = v(f(s))$. Per tant*

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= u'f', \quad \tilde{v}' = v'f' \\ \tilde{u}'' &= u''f'^2 + u'f'', \quad \tilde{v}'' = v''f'^2 + v'f'' \end{aligned}$$

Així, amb la notació de l'equació (11.3),

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{u}'' + \tilde{u}'^2\Gamma_{11}^1 + 2\tilde{u}'\tilde{v}'\Gamma_{12}^1 + \tilde{v}'^2\Gamma_{22}^1 \\ &= Af'^2 + u'f'' \end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \tilde{v}'' + \tilde{u}'^2\Gamma_{11}^2 + 2\tilde{u}'\tilde{v}'\Gamma_{12}^2 + \tilde{v}'^2\Gamma_{22}^2 \\ &= Bf'^2 + v'f'' \end{aligned}$$

La corba reparametritzada ja no és geodèsica parametrtzada *però encara és geodèsica ja que*

$$u'\tilde{B} - v'\tilde{A} = u'(Bf'^2 + v'f'') - v'(Af'^2 + u'f'') = f'^2(Bu' - Av') = 0.$$

Teorema 11.4.5 (Existència i unicitat) *Sigui S una superfície. Donat un punt $P \in S$ i una direcció $v \in T_PS$, amb $\|v\| = 1$, existeix una única geodèsica parametritzada a S que passa per P amb vector tangent v.*

Demostració. Conseqüència del teorema d'existència i unicitat de solucions de les equacions diferencials aplicat al sistema d'equacions diferencials de segon ordre (11.16) que caracteritza les geodèsiques. $\square$

Acabem observant que les isometries conserven les geodèsiques.

[5]Observeu que la fórmula (8.1) només és certa per a corbes parametritzades per l'arc. Per tant, curvatura geodèsica zero no implica automàticament que $\gamma''(t)$ tingui la direcció de la normal.

Proposició 11.4.6 *Sigui $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una isometria local entre les superfícies S_1 i S_2. Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre S_1. Llavors $\gamma(s)$ és geodèsica de S_1 si i només si $f(\gamma(s))$ és una geodèsica de S_2.*

Demostració. Conseqüència directa de que la curvatura geodèsica és invariant per isometries, Proposició 11.1.3. □

Observem que si s és paràmetre arc de $\gamma(s)$, llavors també és paràmetre arc de $f(\gamma(s))$, ja que

$$\|\frac{d}{ds}f(\gamma(s))\| = \|df_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\| = \|\gamma'(s)\| = 1.$$

És a dir, que *les isometries porten geodèsiques parametritzades a geodèsiques parametritzades.*

El perquè del nom "pla rectificant"

El motiu és el resultat següent.

Teorema 11.4.7 *Tota corba és geodèsica de la superfície envolvent dels seus plans rectificants.*

Demostració. Calculem primerament aquesta envolvent. La família uniparamètrica de plans rectificants està donada per

$$\langle N(s), X - \gamma(s)\rangle = 0. \tag{11.17}$$

Derivant respecte de s,

$$\langle -k(s)T(s) - \tau(s)B(s), X - \gamma(s)\rangle + \langle N(s), -T(s)\rangle = 0.$$

És a dir,

$$\langle -k(s)T(s) - \tau(s)B(s), X - \gamma(s)\rangle = 0. \tag{11.18}$$

Com $X - \gamma(s) = a(s)T(s) + b(s)B(s)$ per a certes funcions $a(s), b(s)$ tenim

$$-k(s)a(s) - \tau(s)b(s) = 0,$$

és a dir,

$$X - \gamma(s) = b(s)(-\frac{\tau(s)}{k(s)}T(s) + B(s)).$$

Sigui quina sigui la funció $b(s)$, aquest vector $X - \gamma(s)$ compleix les equacions (11.17) i (11.18), i és doncs la corba característica per al paràmetre s. Així la superfície envolvent, unió de característiques, és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t(-\frac{\tau(s)}{k(s)}T(s) + B(s)).$$

La normal ν a aquesta superfície té la direcció de $\varphi_s \wedge \varphi_t$. Però

$$\begin{aligned} \varphi_s &= T(s) + t\lambda(s)T(s) \\ \varphi_t &= -\frac{\tau(s)}{k(s)}T(s) + B(s) \end{aligned}$$

on $\lambda(s)$ és la derivada del quocient $-\tau(s)/k(s)$. Per tant, $\varphi_s \wedge \varphi_t$ té la direcció de $N(s)$, i per tant $\nu(\gamma(s)) = N(s)$, i $\gamma(s)$ és geodèsica. $\square$

Com l'envolvent dels plans rectificants és desenvolupable[6] i el procés de desenvolupar sobre el pla és isometria, la geodèsica passa a una recta, i ha quedat doncs "rectificada".

11.5 Coordenades geodèsiques i coordenades polars geodèsiques

Coordenades geodèsiques

Sigui $\gamma(v)$ una corba sobre una superfície S. Per cada v considerem la geodèsica $\sigma_v(u)$, ortogonal a $\gamma(v)$ en aquest punt, amb $\sigma_v(0) = \gamma(v)$, parametritzada per l'arc, i tots els vectors tangents $\sigma_v'(0)$ al mateix costat respecte $\gamma(v)$.

Definim una carta local sobre S per

$$\varphi(u,v) = \sigma_v(u), \quad v \in I, v \in (-\epsilon, \epsilon),$$

on I és l'interval de definició de $\gamma(v)$ i $\epsilon > 0$ tal que totes aquestes geodèsiques estiguin definides.

El teorema d'existència i unicitat de solucions de les equacions diferencials i la dependència diferenciable d'aquestes respecte de les condicions inicials

[6] Vegeu [29].

aplicat a les equacions de les geodèsiques ens assegura que aquest δ existeix i que φ és una verdadera carta local.

De fet, el teorema 2.0.7, ens assegura directament que $\varphi(u,v)$ és diferenciable respecte les dues variables ja que les condicions inicials queden determinades per v.[7]

En aquesta situació es diu que $\varphi(u,v)$ és un *sistema de coordenades geodèsic*.

Les corbes coordenades són les $v = constant$, que són geodèsiques i les $u = constant$ formades pels punts a distància igual a aquesta constant de $\gamma(v)$.

Demostrarem més endavant que les corbes coordenades es tallen ortogonalment, és a dir, amb la notació habitual, que $F = 0$.

Polars geodèsiques

Quan $\gamma(v)$ es redueix a un punt la construcció és essencialment la mateixa. Les geodèsiques surten totes del punt P i tenen en aquest punt vectors tangents unitaris en totes les direccions de T_PS.

Podem parametritzar aquesta família de geodèsiques a partir de les coordenades polars (r,α) de T_PS denotant per $\sigma_\alpha(r)$ la única geodèsica tal que

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(0) &= P \\ \frac{d}{dr}_{r=0}\sigma_\alpha(r) &= \sigma'_\alpha(0) = (\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2 \end{aligned}$$

on (e_1,e_2) és una base ortonormal fixada a T_PS. En particular, com per ser geodèsica $\|\sigma'_\alpha(r)\| = constant$, i en el punt $r=0$ aquesta norma és 1, tenim $\|\sigma'_\alpha(r)\| = 1$, $\forall r$, i per tant r és paràmetre arc.

Això permet definir una carta local en un entorn obert de P, del qual excloem el punt P i la geodèsica origen d'angles, per

$$\varphi(r,\alpha) = \sigma_\alpha(r),$$

amb (r,α) coordenades polars de T_PS, amb $\alpha \in (0,2\pi)$ i $r \in (0,\delta)$ amb $\delta > 0$ tal que totes les geodèsiques estiguin definides.

Com la condició inicial depèn de α el teorema 2.0.7 ens assegura que φ és diferenciable respecte les dues coordenades.

[7] En una primera lectura ometem els detalls que podeu trobar per exemple a [33].

Com en el cas anterior aquí també es compleix que les corbes coordenades es tallen ortogonalment, és a dir, amb la notació habitual, que $F = 0$. [8]

11.6 Geodèsiques com minimals de longitud

És curiós que es pot veure que les geodèsiques són minimals de longitud usant només que la geodèsica donada forma part d'una certa família uniparamètrica de geodèsiques, i el lema de Gauss.
[9]

[8]Per aplicar el teorema 2.0.7 hem de suposar que P pertany a la imatge d'una carta local (U, ψ). Les funcions $f^1(t), f^2(t)$ del teorema 2.0.7 són ara les funcions desconegudes que compleixen les equacions de les geodèsiques (les coordenades de les geodèsiques en la carta local (U, ψ)) que denotem habitualment $(u(t), v(t))$, de manera que podem escriure les equacions de les geodèsiques com

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= F^1(u(t), v(t), u'(t), v'(t)) = -\Gamma^1_{ij}(u(t), v(t)) \cdot u'_i(t) \cdot u'_j(t), \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= F^2(u(t), v(t), u'(t), v'(t)) = -\Gamma^2_{ij}(u(t), v(t)) \cdot u'_i(t) \cdot u'_j(t), \end{aligned}$$

(i, j sumant amb el conveni $u_1 = u$, $u_2 = v$).

Si $P = \psi(u_0, v_0)$, i $W = (\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2 \in T_PS$, on (e_1, e_2) és una base ortonormal fixada a $T_P(S)$, el teorema 2.0.7 ens assegura que per cada $x = (x_1, x_2)$ en un entorn de (u_0, v_0) a U i per cada $y = (y_1, y_2)$ en un entorn de $w = (w_1, w_2)$ a $\mathbb{R}^2$, amb $d\psi_{(u_0,v_0)}(w) = W$, existeixen solucions úniques $(u(t), v(t))$ dels sistema diferencial, que ara denotarem $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ per que són funcions diferenciables d'aquestes 5 variables, tals que

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= x_1, \quad v(0, x, y) = x_2, \\ \frac{du}{dt}(0, x, y) &= y_1, \quad \frac{dv}{dt}(0, x, y) = y_2. \end{aligned}$$

Llavors les geodèsiques $\sigma_\alpha(r)$ anteriors són justament (canviant r per t)

$$\sigma_\alpha(t) = \psi(u(t, u_0, v_0, w_1, w_2), v(t, u_0, v_0, w_1, w_2)),$$

(recordem que w_1 i w_2 depenen de α) ja que

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(0) &= \psi(u_0, v_0) = P \\ \sigma'_\alpha(0) &= d\psi_{(u_0,v_0)}(w_1, w_2) = W, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Com u, v són diferenciables respecte y i aquestes y passen a ser ara funcions de α, $\varphi(r, \alpha) = \sigma_\alpha(t)$ és diferenciable respecte α.

[9]Un cop vist que les geodèsiques són minimals de longitud podem comentar com trobar-

Aquest lema diu el següent.

Lema 11.6.1 (Lema de Gauss) *Sigui $\gamma(v)$ una corba sobre una superfície. Per cada v considerem la geodèsica $\sigma_v(u)$ ortogonal a $\gamma(v)$ en aquest punt, amb $\sigma_v(0) = \gamma(v)$ i totes al mateix costat respecte $\gamma(v)$. Quan sobre cadascuna d'aquestes geodèsiques, que suposem parametritzades per l'arc, considerem el punt a distància ϵ de $\gamma(v)$, per a valors petits de ϵ, el conjunt de punts que obtenim forma una corba que és una trajectòria ortogonal a les geodèsiques $\sigma_v(u)$. El resultat és igualment cert si $\gamma(v)$ es redueix a un punt.*[10]

Demostració. Primera part. Prenem coordenades geodèsiques

$$\varphi(u, v) = \sigma_v(u), \quad v \in I, v \in (0, \delta),$$

on I és l'interval de definició de $\gamma(v)$. Volem veure que la corba $u = \epsilon$, és a dir, la corba

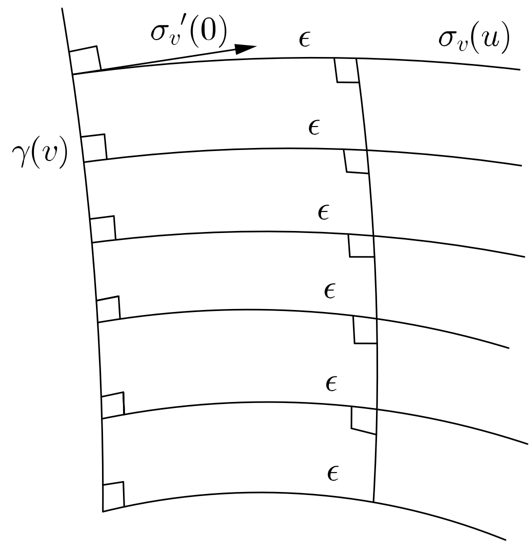
$$\varphi(\epsilon, v) = \sigma_v(\epsilon)$$

talla ortogonalment les corbes $v = constant$, és a dir, les corbes

$$\varphi(u, c) = \sigma_c(u).$$

les sobre una superfície amb una mica de cel.lo. Considerem una tira de paper en forma de rectangle de base gran i altura molt petita. Imaginem que hi tenim dibuixada una recta paral·lela a la base pel centre del rectangle. Si emboliquem la superfície amb aquesta tira de paper veurem que les tensions del paper ens van portant a una certa manera d'anar desplegant el rectangle. La corba final de contacte entre la recta donada sobre el rectangle de paper i la superfície és una geodèsica. La idea és la següent. Quan la tira de paper està plana la recta allà dibuixada no té normal principal. Si dobleguem el paper sense estirar-lo ni encongir-lo, és a dir, per isometria local, la recta passarà a tenir normal principal. Aquesta coincidirà amb la normal al paper ja que la recta torçada continua sent geodèsica del paper. Si anem desplegant el paper sobre la superfície de manera que la normal al paper coincideixi amb la normal a la superfície (intentant posar, doncs, el paper tangent a la superfície) la normal principal a la recta torçada coincidirà amb la normal a la superfície i en serà doncs una geodèsica.

[10]Gauss demostra primer aquest resultat per al cas en que $\gamma(v)$ es redueix a un punt. En dóna primer una demostració analítica i després una de geomètrica que reproduïm a la pàgina 262. L'enunciat exacte per aquest cas que dóna Gauss és *Si sobre una superfície corba es dibuixen des del mateix punt inicial un nombre infinit de línies més curtes d'igual longitud, les línies que uneixen les seves extremitats seran normals a cadascuna de les línies.* I l'enunciat per al cas general és: *Si sobre una superfície corba imaginem una línia qualsevol, i a partir de punts diferents d'ella es dibuixen perpendicularment i cap a un mateix costat una infinitat de línies més curtes de la mateixa longitud, la corba que uneix les seves altres extremitats talla cadascuna de les línies en angle recte.*



Per a això observem que la segona equació de les geodèsiques aplicada a les corbes $v = constant$, és a dir corbes del tipus $\varphi(u, v_0)$, es redueix a

$$\Gamma^2_{11} u'^2 \;=\; 0$$

ja que $v' = v'' = 0$. De fet, $u' = 1$ ja que u és paràmetre arc. Així, $\Gamma^2_{11} = 0$, però com que

$$\Gamma^2_{11} \;=\; \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

i

$$E = \langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u} \rangle = \langle \frac{d\sigma_v(u)}{du}, \frac{d\sigma_v(u)}{du} \rangle = 1$$

perquè u és el paràmetre arc de les geodèsiques $v = constant$, tenim

$$\Gamma^2_{11} \;=\; \frac{F_u}{(G - F^2)}$$

i per tant $F_u = 0$. Però com que per construcció de les coordenades geodèsiques

$$F(0, v) = \langle \frac{d\sigma_v(u)}{du}_{|u=0}, \frac{d\sigma_v(u)}{dv}_{|u=0} \rangle = \langle \sigma'_v(0), \gamma'(v) \rangle = 0,$$

ha de ser $F(u, v) = 0$ per tot u. Això prova la primera part del lema.

Segona part. Quan $\gamma(v)$ es redueix a un punt P el raonament és essencialment el mateix. Prenem coordenades polars geodèsiques

$$\varphi(r,\alpha) = \sigma_\alpha(r),$$

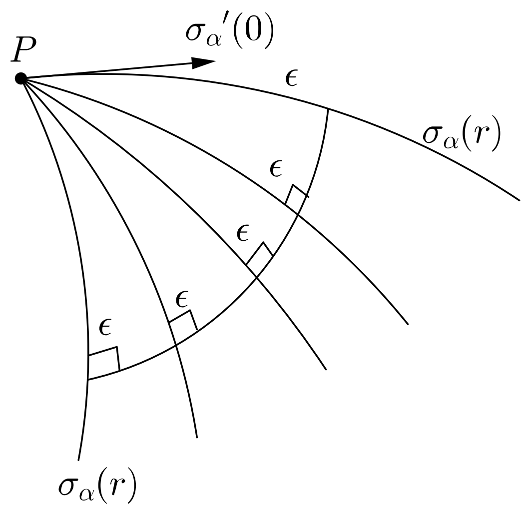
amb (r,α) coordenades polars de T_PS, amb $\alpha \in (0,2\pi)$ i $r \in (0,\delta)$ amb $\delta > 0$ tal que totes les geodèsiques estiguin definides.

Volem veure que la corba $r = \epsilon$, és a dir, la corba parametritzada per l'angle α,

$$\varphi(\epsilon,\alpha) = \sigma_\alpha(\epsilon)$$

talla ortogonalment les corbes $\alpha = constant$, és a dir les geodèsiques per l'origen

$$\varphi(r,c) = \sigma_c(r).$$



Es veu, amb exactament el mateix argument que abans sobre els símbols de Christoffel, que $F_r = 0$, és a dir, que $F(r,\alpha)$ és constant sobre les geodèsiques $\alpha = constant$.

Ara no és tan ràpid concloure d'aquí que $F(u,v) = 0$ per tot v ja que no tenim la condició inicial $F(0,v) = 0$, ja que en P les coordenades polars no estan definides (la construcció que fem no és injectiva). No obstant, es pot veure que

$$\lim_{r\to 0} F(r,\alpha) = 0.$$

D'aquí es dedueix, raonant per l'absurd, que $F(r,\alpha)=0$ per a tot (r,α) de l'obert de definició de φ.

Per demostrar que $\lim_{r\to 0} F(r,\alpha)=0$ recordem que $F=\langle \varphi_r,\varphi_\alpha\rangle$ i que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\varphi_\alpha &= \lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_\alpha(r)) \\
&= \lim_{r\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\sigma_{\alpha+h}(r)-\sigma_\alpha(r)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{r\to 0}\frac{\sigma_{\alpha+h}(r)-\sigma_\alpha(r)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sigma_{\alpha+h}(0)-\sigma_\alpha(0)}{h}=0,
\end{aligned}$$

ja que la derivada primera és contínua (commuta amb el pas al límit) i $\sigma_\alpha(0)=P$ per a tot α. Anàlogament

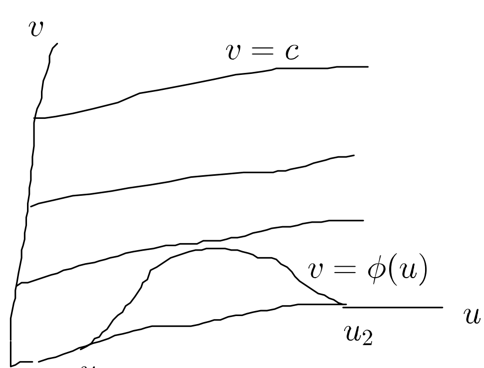
$$\lim_{r\to 0}\varphi_r=\lim_{r\to 0}\frac{\partial\sigma_\alpha(r)}{\partial r}=\sigma'_\alpha(0),$$

que té mòdul 1 (utilitzarem només que està acotat). Així,

$$\lim_{r\to 0}F(r,\alpha)=\lim_{r\to 0}\langle\varphi_r,\varphi_\alpha\rangle=\langle\lim_{r\to 0}\varphi_r,\lim_{r\to 0}\varphi_\alpha\rangle=0. \quad \Box$$

Proposició 11.6.2 *Sigui $\sigma(u)$ una geodèsica sobre S, i siguin $P=\sigma(u_1)$ i $Q=\sigma(u_2)$. Suposem que $\sigma(u)$ és la corba $\sigma_0(u)$ d'un sistema de coordenades geodèsiques (o polars geodèsiques) $\varphi(u,v)=\sigma_v(u)$. Llavors $\sigma(u)$ és, en aquest entorn, el camí més curt entre P i Q.*

Demostració. Considerem una corba arbitrària $v=\phi(u)$ que connecti els punts P i Q, com indica la figura. En particular, $\phi(u_1)=\phi(u_2)=0$.



Pel lema de Gauss la primera forma fonamental en aquestes coordenades té matriu

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

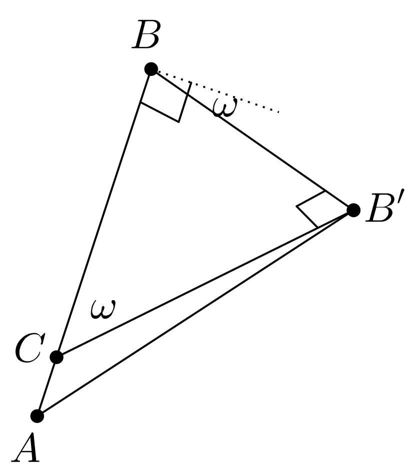
Per tant, la longitud d'aquesta corba és

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \phi' \end{pmatrix}} du = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + G\,\phi'^{\,2}}\, du,$$

i és clar que el valor mínim d'aquesta integral s'agafa quan $\phi' = 0$, que implica $\phi(u) = 0$, és a dir, quan la corba és la geodèsica $v = 0$. $\square$

L'argument geomètric de Gauss

Diu Gauss: *Hem pensat que val la pena deduir aquest teorema a partir de la propietat fonamental de les línies més curtes: però la veritat del teorema es fa evident sense cap càlcul mitjançant el raonament següent. Siguin AB, AB' dues línies de longitud mínima de la mateixa longitud que formen en A un angle infinitament petit, i suposem que algun dels angles formats per l'element BB' amb les línies BA, $B'A$ difereix d'un angle recte per una petita quantitat; llavors, per continuïtat, l'un serà més gran i l'altre més petit que un angle recte.*



Suposem que l'angle en B és $= 90° - \omega$, i prenem un punt C sobre la línia AB, tal que $BC = BB' \cdot \operatorname{cosec} \omega$: llavors, com que el triangle infinitament *petit $BB'C$ es pot considerar pla, tindrem $CB' = BC\cdot\cos\omega$, i conseqüentment*

$$AC+CB' = AC+BC\cdot\cos\omega = AB-BC\cdot(1-\cos\omega) = AB'-BC\cdot(1-\cos\omega),$$

i.e., el camí de A a B a través del punt C és més curt que la línia de longitud mínima. Q.e.a.

11.7 Desenvolupament de Taylor de $\sqrt{G}$

Hem vist que tant si prenem coordenades geodèsiques com coordenades polars geodèsiques la primera forma fonamental s'escriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

La diferència rau en que per a coordenades geodèsiques tenim

$$G(0,v) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(0,v)} = 0$$

com es dedueix trivialment de la definició i de l'expressió de la curvatura geodèsica de les corbes coordenades, Proposició 11.1.4, pàgina 242, *sempre i quan suposem que la corba $u = 0$, a partir de la qual es construeixen les coordenades geodèsiques, és també una geodèsica* de paràmetre v; i per a coordenades polars geodèsiques tenim

$$\lim_{r\to 0} G(r,\alpha) = 0, \quad \lim_{r\to 0}(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G(r,\alpha)}) = 1. \tag{11.19}$$

com es dedueix immediatament de la proposició següent (vegeu l'argument de Gauss a la pàgina 300).

Proposició 11.7.1 *Sigui $\varphi(r,\alpha)$ un sistema de coordenades polars geodèsiques. Llavors,*

$$m(r,\alpha) = r + o(r), \quad r \to 0$$

on $m(r,\alpha) = \sqrt{G(r,\alpha)}$ i $o(r)$ és una funció de r i α tal que

$$\lim_{r\to 0} \frac{o(r)}{r} = 0.$$

Demostració. Recordem que tenir coordenades polars geodèsiques vol dir tenir una aplicació $\varphi(r,\alpha)$ que associa a cada punt $(r,\alpha) \in [0,\infty) \times (0,2\pi)$ el punt Q de la superfície S que dista r d'un punt fixat $P \in S$ (distància mesurada per sobre la geodèsica) i tal que l'angle en P entre una geodèsica per P fixada a priori i la geodèsica PQ és α.

Per Taylor respecte de r (les derivades en $r = 0$ són derivades per la dreta) tenim

$$\varphi(r,\alpha) = \varphi(0,\alpha) + \varphi_r(0,\alpha)r + \varphi_{rr}(0,\alpha)\frac{r^2}{2} + \dots$$

que es pot escriure com

$$\varphi(r,\alpha) = P + f(\alpha)r + g(\alpha)\frac{r^2}{2} + \dots$$

i així

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = f'(\alpha)r + g'(\alpha)\frac{r^2}{2} + \dots$$

Observem que $f(\alpha) = \varphi_r(0,\alpha)$ és el vector tangent unitari a la geodèsica determinada per α, en P.

Com $\cos\alpha = \langle f(0), f(\alpha)\rangle$, derivant tenim

$$-\sin\alpha = \langle f(0), f'(\alpha)\rangle = |f'(\alpha)|\cos\xi$$

on ξ és l'angle entre $f(0)$ i $f'(\alpha)$. Però com $\langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle = 1$, tenim $\langle f(\alpha), f'(\alpha)\rangle = 0$, de manera que $\xi = \alpha + \pi/2$.[11] Per tant $-\sin\alpha = \cos\xi$ i $|f'(\alpha)| = 1$.

Fet això ja podem calcular $m = \sqrt{G}$. En efecte,

$$G = \langle\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\rangle = \langle f'(\alpha)r+g'(\alpha)\frac{r^2}{2}+\dots, f'(\alpha)r+g'(\alpha)\frac{r^2}{2}+\dots\rangle = |f'(\alpha)|^2r^2+\dots$$

on els punts suspensius corresponen a termes amb potències de r superior a 2. Com $|f'(\alpha)| = 1$ tenim

$$G = r^2 + o(r^2)$$

i per tant

$$m = r + o(r)$$

d'on es dedueixen trivialment les igualtats que volíem. $\square$

[11] S'ha d'excloure el cas $\xi = \alpha + 3\pi/2$. També es pot raonar escrivint $f(\alpha)$ respecte d'una base ortonormal e_1, e_2, amb $e_1 = f(0)$. Llavors les components de $f(\alpha)$ respecte d'aquesta base són $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$, de manera que $f'(\alpha)$ té components $-\sin\alpha, \cos\alpha$ i per tant, té norma 1.

11.8 Teorema de Minding

Teorema 11.8.1 *Dues superfícies amb la mateixa curvatura de Gauss constant són localment isomètriques.*[12]

Demostració. Volem demostrar que donades dues superfícies S_1 i S_2, i punts $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$, existeixen entorns oberts V_1 de P_1 a S_1 i V_2 de P_2 a S_2 i una isometria $\psi : V_1 \longrightarrow V_2$.

Prenem coordenades polars geodèsiques (r, α) centrades a P_1. Sabem que llavors els coeficients de la primera forma fonamental són $E = 1$, $F = 0$ i G compleix

$$(\sqrt{G})_{rr} + K\sqrt{G} = 0. \tag{11.20}$$

I sabem també, equació (11.19), que

$$\lim_{r \to 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{r \to 0} (\sqrt{G})_r = 1.$$

Cas $K = 0$. Llavors, per (11.20), $(\sqrt{G})_r = g(\alpha)$ però, per la condició inicial, ha de ser $g(\alpha) = 1$ i per tant

$$\sqrt{G} = r + f(\alpha).$$

Novament per la condició inicial ha de ser $f(\alpha) = 0$ i per tant

$$G = r^2.$$

Cas $K > 0$. Llavors, per (11.20),

$$\sqrt{G} = A(\alpha)\cos(\sqrt{K}r) + B(\alpha)\sin(\sqrt{K}r)$$

però, per la condició inicial, ha de ser $A(\alpha) = 0$ i per tant

$$(\sqrt{G})_r = B(\alpha)\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}r).$$

[12] El problema de Minding, proposat per ell el 1839 al *Journal de Crelle*, és més general. Concretament: *Trobar condicions necessàries i suficients per tal de que una superfície es pugui aplicar sobre una altra.* Aplicar vol dir aplicar isomètricament. No fa referència a curvatura constant. Podeu trobar més informació a [12], capítol IX. En canvi és curiós que donades dues superfícies qualssevol es poden aplicar sempre conformement l'una sobre l'altre (és el teorema d'existència de coordenades isotermals, vegeu per exemple [33]).

Novament per la condició inicial ha de ser $B(\alpha) = 1/\sqrt{K}$ i per tant

$$G = \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}r).$$

Cas $K > 0$. Llavors, per (11.20),

$$\sqrt{G} = A(\alpha)\cosh(\sqrt{-K}r) + B(\alpha)\sinh(\sqrt{-K}r)$$

però, per la condició inicial, ha de ser $A(\alpha) = 0$ i per tant

$$(\sqrt{G})_r = B(\alpha)\sqrt{-K}\cosh(\sqrt{K}r).$$

Novament per la condició inicial ha de ser $B(\alpha) = 1/\sqrt{-K}$ i per tant

$$G = -\frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{-K}r).$$

Fem el mateix a P_2, és a dir, considerem coordenades polars geodèsiques (r, α) centrades a P_2. Obtindrem, en els tres casos $K = 0, K > 0, K > 0$ exactament la mateixa expressió per als coeficients de la primera forma fonamental de S_2.

Considerem ara l'aplicació que envia, en cada cas, el punt de coordenades (r, α) de S_1 al punt de coordenades (r, α) de S_2. D'aquesta manera tenim una aplicació que conserva la primera forma fonamental i que per tant és isometria.

El problema és que l'origen de coordenades polars i la geodèsica respecte de la qual es comencen a mesurar els angles no pertanyen a l'obert on estan definides aquestes coordenades. No obstant, podem estendre l'anterior aplicació enviant els punts de la geodèsica inicial a S_1 que estan a distància r de P_1 als punts de la geodèsica inicial a S_2 que estan a distància r de P_2. Tenim així una isometria entre els punts de l'obert V_1 format pels punts de S_1 que estan a distància de P_1 més petita que una cert $\delta > 0$ sobre els punts de l'obert V_2 format pels punts de S_2 que estan a distància més petita que δ de P_2. $\square$

En general dues superfícies amb la mateixa curvatura de Gauss constant no són globalment isomètriques. Hi ha, per exemple, superfícies de revolució de curvatura constant positiva que no s'apliquen sobre un tros d'esfera per moviments rígids de $\mathbb{R}^3$. Per exemple, si $K = 1$, només hem de posar

$$\varphi(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin v, g(v))$$

amb $f(v) = \cos v + \sin v$, (de fet podem agafar qualsevol solució de de $f'' + Kf = f'' + f = 0$) i

$$g(v) = \int_0^v \sqrt{\sin 2v}\, dv, \quad 0 \leq v \leq \pi/2,$$

(ha de ser $f'^2 + g'^2 = 1$).

Al tractar aquests temes sempre surten integrals el·líptiques. Vegeu un estudi de superfícies de revolució de curvatura constant a [10].

Un exemple d'una superfície de curvatura de Gauss constant que no és una esfera, ni de revolució, va ser donada per Sievert a la seva tesi dirigida per Enneper. Està donada per

$$\begin{aligned} x &= r(u,v)\cos\phi(u) \\ y &= r(u,v)\sin\phi(u) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{C}}(\ln(\tan(v/2))) + (C+1)a(u,v)\cos v \end{aligned}$$

on $C > 0$ és una constant i

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \frac{2}{C+1-C\sin^2 v\cos^2 u} \\ r(u,v) &= a(u,v)\sqrt{(1+\frac{1}{C})(1+C\sin^2 u)}\sin v \\ \phi(u) &= -\frac{u}{\sqrt{C+1}} + \arctan(\sqrt{C+1}\tan u) \end{aligned}$$

També és important remarcar el teorema de rigidesa de l'esfera que donem sense demostració.

Teorema 11.8.2 (Hilbert-Liebmann) *Una superfície compacta i connexa amb curvatura de Gauss constant és una esfera.*

En canvi mitja pilota de tennis es pot modificar isomètricament pressionant-la una mica.

11.9 Equacions de Lagrange

Les equacions de les geodèsiques es poden escriure molt fàcilment, sense recorre explícitament als símbols de Christoffel, utilitzant les equacions de Lagrange del càlcul de variacions.

Suposem que tenim una funció de $2n+1$ variables

$$L = L(t,x,y), \quad x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n).$$

Suposem que volem trobar una funció $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que minimitzi la integral

$$\int_a^b L(t,h(t),h'(t))dt.$$

Per trobar $h(t)$ només hem de resoldre l'equació[13]

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y_k}) = \frac{\partial L}{\partial x_k}.$$

S'ha d'entendre que primer es calculen les derivades parcials de L, que són funcions de (t,x,y), i un cop calculades substituïm x per $h(t)$, y per $h'(t)$, i és llavors que calculem la derivada respecte t de $\partial L/\partial y_i$.

Denotem $g_{ij} = g_{ij}(x)$ els coeficients de la primera forma fonamental de manera que per calcular la longitud d'una corba $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), x_2(t))$ posem[14]

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} x'_i x'_j} dt.$$

Definim l'energia de $\gamma(t)$ com

$$e(t) = \int_0^t \sum_{i,j} g_{ij} x'_i x'_j dt.$$

Per trobar les corbes d'energia mínima podem aplicar Lagrange al funcional

$$L = L(t,x,y) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) y_i y_j$$

(no depèn explícitament de t).

[13] És relativament fàcil de demostrar aquest fet, amb els arguments típics del càlcul de variacions, que de moment acceptem.

[14] Utilitzo (x_1, x_2) i no (u, v) perquè així els càlculs es generalitzen automàticament a dimensió arbitraria.

Per aplicar Lagrange fem primer les derivades parcials

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_k} &= \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} y_i y_j \\ \frac{\partial L}{\partial y_k} &= 2\sum_j g_{kj} y_j\end{aligned}$$

Ara substituïm les $x's$ i les $y's$ de la darrera equació per les coordenades de la corba buscada i les seves derivades, és a dir, les $x's$ per $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ i les $y's$ per $x'(t) = (x'_1(t), \ldots, x'_n(t))$. I un cop fet això derivem respecte t utilitzant la regla de la cadena.

Tenim

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}(t, x(t), x'(t)) = 2\sum_j g_{kj}(x(t)) x'_j(t)$$

i per tant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_k} = 2\sum_{i,j} \frac{\partial g_{kj}(x(t))}{\partial x_i} x'_i(t) x'_j(t) + 2\sum_j g_{kj}(x(t)) x''_j(t)$$

L'equació de Lagrange s'escriu doncs

$$\sum_j g_{kj} x''_j + \sum_{i,j} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} x'_i x'_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} x'_i x'_j.$$

Per manipular millor aquest factor 1/2 escriurem aquesta fórmula com

$$\sum_j g_{kj} x''_j + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) x'_i x'_j = 0.$$

Multiplicant per g^{rk} (terme (r, k) de la matriu inversa de la matriu g_{ij}) i sumant per k obtenim

$$\sum_{j,k} g^{rk} g_{kj} x''_j + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} g^{rk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) x'_i x'_j = 0.$$

Recordant l'expressió dels símbols de Christoffel en funció de la mètrica, donada a la pàgina 228 (canviant els papers de r i k) obtenim

$$x''_r + \sum_{i,j} \Gamma^r_{ij} x'_i x'_j = 0,$$

que coincideix amb l'equació (11.16) de les geodèsiques parametritzades que hem obtingut a la pàgina 252.

Nota 11.9.1 Aquestes equacions impliquen que la corba $x(t)$ que les compleix està parametritzada proporcional a l'arc, com hem vist a la Proposició 11.4.3 i a l'exercici 11.10.18.

Això fa que els extremals d'energia siguin extremals de longitud, ja que aquests es trobarien aplicant les equacions de Lagrange, no a $L = \sum_{ij} g_{ij}(x) y_i y_j$, sinó a $\sqrt{L}$.

Però

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial y_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial x_k}$$

ja que $L(t) = \sum_{ij} g_{ij}(x(t)) x_i' x_j'$ és constant, per estar $x(t)$ parametritzada proporcional a l'arc. Per tant, $\sqrt{L}$ compleix les equacions de Lagrange.

El mateix argument mostra que ser mínim de longitud no implica ser mínim d'energia ja que en aquest cas no tenim $L(t)$ constant i no podem reproduir el càlcul anterior.

Per trobar les equacions diferencials dels mínims de longitud només hem d'aplicar Lagrange a $\sqrt{L}$.

Tenim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial y_k}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right)\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\right)'\frac{\partial L}{\partial y_k} + \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right)\\ &= \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial x_k} = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial x_k}\end{aligned}$$

És a dir,

$$2\sqrt{L}\left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\right)'\frac{\partial L}{\partial y_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$$

que, aprofitant els càlcul anteriors, es pot escriure com

$$-\frac{L'}{2L}\frac{\partial L}{\partial y_k} + 2\left(x_r'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^r x_i' x_j'\right) = 0. \tag{11.21}$$

on la L que apareix aquí s'ha de suposar restringida a la corba , és a dir, $L = \sum_{i,j} g_{ij}(x(t))x_i'(t)x_j'(t)$, $L' = dL/dt$, i la derivada $\partial L/\partial y_k$ valorada en $(x(t), x'(t))$, i.e. primer derivem $L(t, x, y)$ respecte y_k i desprès substituïm x per $x(t)$ i y per $x'(t)$.

Per exemple, la corba $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ no és una geodèsica parametritzada de $\mathbb{R}^2$ ja que no està parametritzada proporcional a l'arc. En canvi, compleix les equacions (11.21), ja que

$$L = y_1^2 + y_2^2, \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} = 2y_i, \quad L(t) = x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 = 18t^4$$

Per tant

$$-\frac{L'}{2L}\frac{\partial L}{\partial y_k} + 2(x_r'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^r x_i' x_j') = -\frac{72t^3}{36t^4} 6t^2 + 2(6t) = 0, \quad k = 1, 2.$$

11.10 Exercicis

Exercici 11.10.1 *Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície S, parametritzada per l'arc. Posem $P = \gamma(0)$. Calculeu la normal principal de la corba $\tilde{\gamma}(s)$ que s'obté projectant ortogonalment $\gamma(s)$ sobre $T_P S$.*

Solució. Left to the reader.

Exercici 11.10.2 [15]*[Evolutes sobre superfícies reglades] Sigui (U, φ) una parametrització d'una superfície S per coordenades principals, és a dir, tal que les corbes $u =$ constant i $v =$ constant són línies de curvatura. Considerem la superfície reglada formada per les rectes tangents en els punts de la línia de curvatura $u = u_0$ en la direcció de l'altre línia de curvatura que passa pel punt. Demostreu que aquesta superfície és desenvolupable i que la distància sobre cada generatriu des de cada punt $P(v) = \varphi(u_0, v)$ fins l'eix de regressió és, en valor absolut, l'invers de la curvatura geodèsica de la corba $u = u_0$ en $P(v)$ (radi de curvatura geodèsic).*

Solució. Una parametrització de la superfície que ens donen és

$$\phi(v, t) = \varphi(u_0, v) + te(v)$$

[15] Problema 882 de [13].

on $e(v)$ és el vector unitari

$$e(v) = \frac{1}{\sqrt{E(u_0, v)}}\varphi_u(u_0, v),$$

que escriurem simplement com

$$e = \frac{1}{\sqrt{E}}\varphi_u,$$

Denotem $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$ els coeficients de la segona forma fonamental d'aquesta superfície reglada. Com $\phi_{tt} = 0$, és clar que $\tilde{g} = 0$ i per tant, la curvatura de Gauss K serà zero si i només si $\tilde{f} = 0$. Però

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \phi_{vt} \cdot \frac{\phi_v \wedge \phi_t}{|\phi_v \wedge \phi_t|} \\ &= e_v \cdot \frac{(\varphi_v + te_v) \wedge e}{|(\varphi_v + te_v) \wedge e|}\end{aligned}$$

Com $e_v \cdot (e_v \wedge e) = 0$,

$$\tilde{f} = e_v \cdot \frac{\varphi_v \wedge e}{|(\varphi_v + te_v) \wedge e|}$$

Però, pel fet de que estem treballant amb coordenades principals, tenim $f = 0$, que equival a dir que φ_{uv} és tangent a la superfície, i per tant, e_v també. Com $\varphi_v \wedge e$ té la direcció de la normal a la superfíce, $\tilde{f} = 0$ com volíem demostrar.

Ara que ja sabem que és desenvolupable[16] busquem la corba que la desenvolupa, és a dir, una corba tal que les seves tangents són les rectes de la superfície reglada (eix de regressió o evoluta).

Aquesta corba serà del tipus

$$\sigma(v) = \varphi(u_0, v) + t(v)e(v)$$

amb la condició de que $\sigma'(v)$ tingui la direcció de $e(v)$. Derivant,

$$\sigma'(v) = \varphi_v(u_0, v) + t'(v)e(v) + t(v)e'(v),$$

[16] A partir d'aquí el problema es pot fer sense càlculs, només recordant la propietat de les evolutes planes (la distància entre la corba i la evoluta és el radi de curvatura), i adonar-se llavors que en el procés de desenvolupament la curvatura geodèsica és constant. En el pla la curvatura i la curvatura geodèsica coincideixen.

que escrivim

$$\sigma' = \varphi_v + t'e + te',$$

però

$$e' = (\frac{1}{\sqrt{E}})_v \varphi_u + \frac{1}{\sqrt{E}} \varphi_{uv}$$

i, per tant, perquè σ' tingui la direcció de e ha de ser

$$\varphi_v + t\frac{1}{\sqrt{E}}\varphi_{uv} = 0.$$

És a dir,

$$1 + t\frac{1}{\sqrt{E}}\Gamma^2_{12} = 0.$$

Però, en el punt (u_0, v),

$$\Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G} = \sqrt{E}\, k_{g2}$$

on $k_{g2} = k_{g2}(u_0, v)$ és la curvatura geodèsica de la línia coordenada $u = u_0$ (recordeu els valors dels símbols de Christoffel a la pàgina 228, les fórmules per a la curvatura geodèsica de les corbes coordenades a la Proposició 11.1.4, pàgina 242, i tingueu en compte que $F = 0$ per estar treballant en coordenades principals).

Per tant t, que representa la distància del punt $P(v)$ sobre la directriu fins el punt de l'eix de regressió, val

$$t = -\frac{1}{k_{g2}},$$

o més explícitament,

$$t(v) = -\frac{1}{k_{g2}(u_0, v)}$$

com volíem veure.

Exercici 11.10.3 *Demostreu que donades dues funcions $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables definides en un obert I de $\mathbb{R}$, tals que $a^2 + b^2 = 1$, existeix $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(t) = \cos(\theta(t))$ i $b(t) = \sin(\theta(t))$, $\forall t \in I$.*

Solució. Fixem $t_0 \in I$ i θ_0 tal que $a(t_0) = \cos\theta_0$ i $b(t_0) = \sin\theta_0$.

Definim

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} (ab' - ba')dt.$$

Considerem la funció

$$A(t) = (a(t) - \cos\theta(t))^2 + (b - \sin\theta(t))^2.$$

Volem demostrar que $A(t) = 0$, $\forall t \in I$. Derivem i tenim

$$\begin{aligned} A'(t) &= (2 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta))' \\ &= 2(-a(\sin\theta)\theta' + b(\cos\theta)\theta' + a'\cos\theta + b'\sin\theta) \\ &= -b'(\sin\theta)(a^2 + b^2) - a'(\cos\theta)(a^2 + b^2) + a'\cos\theta + b'\sin\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per tant $A(t)$ és constant i com en el punt t_0 val 0 hem acabat.

Exercici 11.10.4 (Torsió geodèsica) *Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície S, parametritzada per l'arc. Sigui $P = \gamma(0)$ i (T, e) una base ortonormal positiva de T_PS amb $T = \gamma'(0)$. La* torsió geodèsica[17] *de $\gamma(s)$ en P és*

$$\tau_g = \langle \nu'(0), e \rangle$$

on, com sempre, $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$, i

$$\nu'(0) = \frac{d\nu(s)}{ds}_{|s=0}.$$

Demostreu que

a)

$$\tau_g = (k_1 - k_2)\cos\alpha \sin\alpha,$$

on α és l'angle de e_1, direcció principal, a T.

b)

$$\theta'(0) = \tau - \tau_g$$

[17] Terme introduït per Bonnet, ja que coincideix amb la torsió de la geodèsica que passa pel punt amb la mateixa tangent que la corba considerada. Però a diferència de la curvatura geodèsica la torsió geodèsica no es conserva per deformacions (isometries) de la superfície.

on θ és l'angle orientat entre N i ν. Orientat vol dir que hem de sortir de N en direcció B. En particular, $\cos\theta(s) = \langle \nu(s), N(s)\rangle$. En particular, τ_g coincideix amb la torsió de la geodèsica que passa pel punt P amb la mateixa tangent que la corba considerada.

c) Les línies de curvatura tenen torsió geodèsica zero en tots els seus punts, i aquesta condició caracteritza les línies de curvatura.

Solució. a) Sigui $T = \gamma'(0)$ de manera que

$$T \;=\; \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2.$$

Apliquem l'endomorfisme de Weingarten i tenim,

$$W(T) = k_1 \cos\alpha\, e_1 + k_2 \sin\alpha\, e_2.$$

Però

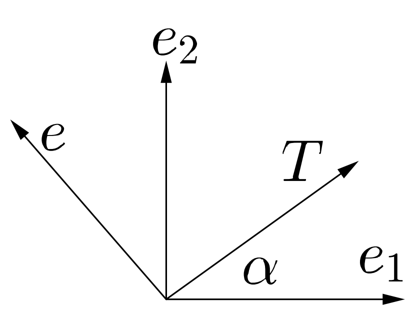
$$W(T) = -d\mathcal{N}(T) = -\nu'(0)$$

de manera que

$$\begin{aligned}\tau_g &= \langle \nu'(0), e\rangle = \langle -k_1\cos\alpha\, e_1 - k_2 \sin\alpha\, e_2, e\rangle \\ &= (k_1 - k_2)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

ja que

$$\begin{aligned}\langle e_1, e\rangle &= \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha \\ \langle e_2, e\rangle &= \cos\alpha\end{aligned}$$



Dibuix en el pla tangent, amb el normal apuntant al lector

b) Només hem de derivar

$$\cos\theta(s) = \langle \nu(s), N(s)\rangle$$

i tenim

$$\begin{aligned} -\sin\theta\,\theta' &= \langle \nu', N\rangle + \langle \nu, -kT - \tau B\rangle \\ &= \langle \nu', N\rangle - \tau\langle \nu, B\rangle, \end{aligned}$$

però (mirem el dibuix adjunt)

$$N = \langle N, e\rangle e + \langle N, \nu\rangle \nu = \cos(\theta - \pi/2)\, e + \cos\theta\, \nu = \sin\theta\, e + \cos\theta\, \nu$$

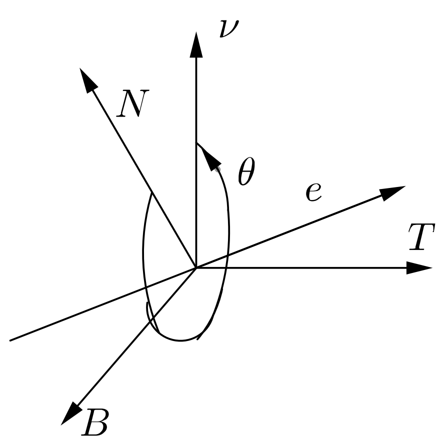
i per tant

$$\langle \nu', N\rangle = \sin\theta \langle \nu', e\rangle = \tau_g \sin\theta$$

ja que $\langle \nu', \nu\rangle = 0$.

L'angle entre ν i B és, com es veu a la figura, $2\pi - \theta + \pi/2 = 5\pi/2 - \theta$ i per tant

$$\langle \nu, B\rangle = \sin\theta$$



Així

$$-\sin\theta\,\theta' = \tau_g \sin\theta - \tau\sin\theta,$$

és a dir,

$$\theta' = -\tau_g + \tau$$

com volíem.

Si la corba donada és una geodèsica, $\theta = 0$, i per tant sobre una geodèsica la torsió i la torsió geodèsica coincideixen.

Més encara, *la torsió geodèsica de $\gamma(s)$ em $\gamma(0)$ és la torsió de la geodèsica que passa per $\gamma(0)$ amb vector tangent $\gamma'(0)$.* Això és conseqüència de l'apartat a), ja que la fórmula $\tau_g = (k_1 - k_2)\sin\alpha\cos\alpha$ ens diu, en particular, que per calcular τ_g en un punt només hem de conèixer k_1 i k_2 en aquest punt, i l'angle que forma el vector tangent a la corba amb les direccions principals, és a dir, només depèn del vector tangent.

c) Suposem $k_1 \neq k_2$. Llavors el resultat és conseqüència directa de a).

Observem que obre les geodèsiques la torsió i la torsió geodèsica coincideixen, de manera que podem dir que *una geodèsica (no recta) és plana si i només si és línia de curvatura.*

Exercici 11.10.5 *Demostreu que la torsió geodèsica d'una corba $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, pon com sempre $\varphi(u, v)$ és una carta local, està donada per*

$$\tau_g = -\frac{\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix}}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)\sqrt{EG - F^2}}.$$

Solució. Left to the reader. Compareu amb l'apartat c) del problema anterior.

Exercici 11.10.6 *Demostreu que si una corba $\gamma(t)$ sobre una superfície té curvatura geodèsica zero i $\|\gamma'(t)\| = cte$ llavors $\gamma(t)$ és geodèsica parametritzada.*

Solució. Amb la notació de la fórmula (11.4) tenim $u'B - v'A = 0$ de manera que si $u' \neq 0$ tenim $B = \mu A$ amb $\mu = v'/u'$. Per altra banda, com $\langle\gamma''(t), \gamma'(t)\rangle = 0$ la fórmula (11.3) ens diu que

$$0 = A\langle\varphi_u, \gamma'\rangle + \frac{v'}{u'}A\langle\varphi_v, \gamma'\rangle.$$

Com $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, si $A \neq 0$ tenim que $u'^2E + 2u'v'F + v'^2G = 0$ que implica $u' = v' = 0$. Com això no pot ser ha de ser $A = 0$ i per tant també $B = 0$ com volíem.

Exercici 11.10.7 (Repère Mobile) *Retrobeu les curvatures normal i geodèsica i la torsió geodèsica a partir del mètode (simplificat) de la referència mòbil.*

Solució. Suposem donada una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc sobre una superfície S. A cada punt de la corba considerem la referència afí ortonormal $\{\gamma(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ amb

$$\begin{aligned} e_1(s) &= T(s) = \gamma'(s) \\ e_2(s) &= e_3 \wedge e_1(s) \\ e_3(s) &= \nu(s) \end{aligned}$$

on $\nu(s)$ és el vector unitari normal a la superfície, que l'orienta. Observem que la base $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ és positiva ja que $e_1 \wedge e_2 = e_3$.

La idea de la referència mòbil és escriure les derivades d'aquestes tres vectors en funció dels propis vectors (com hem fet amb el triedre de Frenet).

Derivem $e_1(s)$ i recordem la fórmula (8.1), pàgina 186. Tenim

$$\frac{de_1(s)}{ds} = \gamma''(s) = k_g(s)e_2(s) + k_n(s)e_3(s),$$

que escriurem simplement com

$$\frac{de_1}{ds} = k_g e_2 + k_n e_3.$$

Derivem $e_2 = e_2(s)$. Tenim

$$\frac{de_2}{ds} = ae_1 + be_2 + ce_3$$

per a certes funcions $a = a(s), b = b(s), c = c(s)$ que anem a calcular.

$$a = \langle \frac{de_2}{ds}, e_1 \rangle = -\langle e_2, \frac{de_1}{ds} \rangle = -k_g$$

ja que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

$$b = \langle \frac{de_2}{ds}, e_2 \rangle = 0$$

ja que $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$.

$$c = \langle \frac{de_2}{ds}, e_3 \rangle = -\langle e_2, \frac{de_3}{ds} \rangle$$

ja que $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$.

Tenint en compta ara les fórmules de Frenet i que

$$e_2 = (\sin\alpha)N - (\cos\alpha)B, \quad e_3 = (\cos\theta)N + (\sin\theta)B$$

on $N = N(s), B = B(s)$ són la normal principal i el binormal a la corba i $\theta = \theta(s)$ l'angle orientat entre N i $\nu = e_e$, tenim que

$$\begin{aligned}
\frac{de_3}{ds} &= (-\theta' \sin\theta)N + \cos\theta(-kT - \tau B) + (\theta' \cos\theta)B + (\tau \sin\theta)N \\
&= (\tau - \theta')e_2 - (k\ \cos\theta)\, e_1 \\
&= (\tau - \theta')e_2 - k_n\, e_1.
\end{aligned}$$

Per tant

$$c = -\langle e_2, \frac{de_3}{ds} \rangle = \theta' - \tau.$$

Com hem definit la torsió geodèsica com $\tau_g = \tau - \theta'$ (exercici **??**) tenim

$$\frac{de_2}{ds} = -k_g e_1 - \tau_g e_3.$$

Finalment, com $\langle e_1, e_3 \rangle = 0$ tenim que

$$\frac{de_3}{ds} = -k_n e_1 + \tau_g e_2.$$

S'acostuma a escriure

$$\begin{pmatrix} \frac{de_1}{ds} \\ \frac{de_2}{ds} \\ \frac{de_3}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & -\tau_g \\ -k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Exercici 11.10.8 (Fórmula de Liouville a partir de la fórmula de Bonnet) *Demostreu la fórmula de Liouville a partir de la fórmula de Bonnet.*

Solució. Suposem que tenim una parametrització $\varphi(u, v)$ ortogonal, és a dir, tal que $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$.

Primerament apliquem la fórmula (11.14) a les corbes $v = constant$. Amb la notació de la secció anterior aquestes corbes corresponen a la funció $f(u,v) = -v$, de manera que $m = 0, n = -1$, i per tant $\widetilde{T}(u,v) = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}$.[18]

Així doncs, denotant k_{g1} la curvatura geodèsica de les corbes $v = constant$, tenim

$$k_{g1} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E}.$$

Anàlogament, si denotem k_{g2} la curvatura geodèsica de les corbes $u = constant$ obtenim

$$k_{g2} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G}.$$

Suposem ara que la corba $f(u,v) = 0$ forma un angle α amb la corba $v = constant$. Això vol dir

$$\cos\alpha = \langle \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, T\rangle$$

on T és el vector unitari tangent a la corba.

Si la corba parametritzada per l'arc és $\varphi(u(s), v(s))$, amb $f(u(s), v(s)) = 0$, llavors

$$\cos\alpha = \langle \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, T\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = u'\sqrt{E}.$$

Per ser la parametrització ortogonal també tenim

$$\sin\alpha = \langle \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}, T\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = v'\sqrt{G}.$$

Pensant així, aquest angle α seria una funció del paràmetre s de la corba. Però, de manera anàloga al que hem fet amb el vector tangent, podem definir una funció $\widetilde{\alpha}$ de les dues variables (u,v), de manera que al restringir-la a la corba tinguem $\widetilde{\alpha} = \alpha$, per la fórmula

$$\cos\widetilde{\alpha} = \langle \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \widetilde{T}\rangle.$$

on $\widetilde{T}$ és el vector unitari donat per (11.12). També tindrem

$$\sin\widetilde{\alpha} = \langle \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}, \widetilde{T}\rangle.$$

[18] Prenem $f(u,v) = -v$ i no $f(u,v) = v$ perquè volem que el vector tangent a les corbes $v = constant$ sigui φ_u i no $-\varphi_u$.

Així, la fórmula (11.14) queda

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{\sqrt{EG}}(\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\sin\widetilde{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\widetilde{\alpha})) \\ &= k_{g2}\sin\widetilde{\alpha} + k_{g1}\cos\widetilde{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{EG}}(\sqrt{G}\cos\widetilde{\alpha}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial u} + \sqrt{E}\sin\widetilde{\alpha}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial v}). \end{aligned}$$

Recordem que totes les funcions de (u, v) de la dreta d'aquesta igualtat estan valorades en els punts $(u(s), v(s))$. En particular, podem canviar $\sin\widetilde{\alpha}$ per $\sin\alpha$ i $\cos\widetilde{\alpha}$ per $\cos\alpha$ ja que $\widetilde{\alpha}(u(s), v(s)) = \alpha(s)$.

És a dir, tenim

$$k_g = k_{g2}\sin\alpha + k_{g1}\cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{E}}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{G}}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial v}.$$

Però

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\widetilde{\alpha}}{ds} = \frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{E}}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial u} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{G}}\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial v}.$$

Substituint obtenim la fórmula de Liouville

$$\boxed{k_g = k_{g1}\cos\alpha + k_{g2}\sin\alpha + \frac{d\alpha}{ds}}$$

Exercici 11.10.9 (Problema 14, secció 4-8, Struik) *Trobeu l'equació de l'angle d'inclinació de les geodèsiques a partir de la fórmula de Liouville (la que publica en la versió comentada de les* Aplicacions *de Monge).*

Solució. Aquesta fórmula diu que si tenim coordenades ortogonals (u, v) sobre una superfície, i C és una corba en aquesta carta local (U, φ), parametritzada per $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, llavors

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + (k_g)_1\cos\theta + (k_g)_2\sin\theta$$

on

- $k_g = k_g(t)$ és la curvatura geodèsica de la corba C en el punt $\gamma(t)$.

- $\theta = \theta(t)$ és l'angle en el punt $\gamma(t)$ entre C i la corba $v = constant$[19] que passa per aquest punt.

- $(k_g)_1 = (k_g)_1(t)$ és la curvatura geodèsica en el punt $\gamma(t)$ de la corba coordenada $v = constant$ que passa per aquest punt.

- $(k_g)_2 = (k_g)_2(t)$ és la curvatura geodèsica en el punt $\gamma(t)$ de la corba coordenada $u = constant$ que passa per aquest punt.

Acceptarem com a conegudes les fórmules que ens donen les curvatures geodèsiques d'un sistema ortogonal:

$$(k_g)_1 = (k_g)_{v=cte} = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{E\sqrt{G}}, \tag{11.22}$$

$$(k_g)_2 = (k_g)_{u=cte} = +\frac{1}{2}\frac{G_u}{G\sqrt{E}}, \tag{11.23}$$

on

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

és la primera forma fonamental respecte de les coordenades (u, v) (en aquest ordre).

La dificultat del problema està en que la fórmula de l'angle d'inclinació de Gauss és valida per a un sistema de coordenades arbitrari, i la volem deduir a partir de la fórmula de Liouville, que només és certa per a sistemes de coordenades ortogonals. Ara bé, la fórmula de Gauss fa referència a geodèsiques i la de Liouville a corbes generals.

Suposem doncs a partir d'ara que tenim un sistema de coordenades (u, v) sobre una superfície i que, respecte d'aquestes coordenades, la primera forma fonamental s'escriu com

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Donem a θ, k_g, $(k_g)_1$ i $(k_g)_2$ el mateix significat que els hi acabem de donar en recordar la fórmula de Liouville.

Per calcular θ només hem de multiplicar els vectors tangents a $v = cte$ i a $\gamma(t)$.

[19] Clarament parlem de la corba $\varphi(u, constant)$.

$$(u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Eu' + Fv' = \|(u'(t), v'(t))\| \cdot \|(1,0)\| \cos\theta.$$

Per tant

$$\cos\theta = \frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\sqrt{E}}.$$

Si introduïm el paràmetre arc s de $\gamma(t)$, que compleix

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2},$$

i ometem, com és habitual, el dt, tenim

$$\cos\theta\, ds = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}}.$$

Fàcilment obtenim

$$\sin\theta\, ds = \frac{\sqrt{EG - F^2}dv}{\sqrt{E}}.$$

Aquestes expressions del sinus i el cosinus apareixen exactament així ja en el *Disquisitiones*.

Per tal de poder aplicar la fórmula de Liouville necessitem coordenades ortogonals. Per a això, fem un canvi de variables del tipus

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(u, v), \\ \bar{v} &= v, \end{aligned}$$

de manera que les noves corbes $\bar{u} = cte$ siguin ortogonals a les corbes $v = cte$.

El camp tangent a les corbes $\bar{u} = cte$ és

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{v}} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}} + \frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

de manera que si imposem que sigui ortogonal a les corbes $v = cte$, obtenim

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial\bar{v}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

és a dir,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} = -\frac{F}{E}.$$

Equivalentment

$$u = -\int \frac{F}{E} d\bar{v}. \tag{11.24}$$

Apliquem la fórmula de Liouville a les coordenades ortogonals $(\bar{u}, \bar{v})$ i obtenim (posem $k_g = 0$ perquè volem l'equació de les geodèsiques):

$$\frac{d\theta}{ds} = -(k_g)_{v=cte} \cos\theta - (k_g)_{\bar{u}=cte} \sin\theta.$$

Observem que θ és el mateix independentment de si treballem en el sistema (u, v) o en el sistema $(\bar{u}, \bar{v})$ ja que és l'angle de la geodèsica amb $v = \bar{v} = cte$.

Observem també que la primera forma fonamental, respecte dels sistema $(\bar{u}, \bar{v})$ és

$$\begin{pmatrix} E\lambda^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{GE - F^2}{E} \end{pmatrix},$$

on $\lambda = \dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}$, ja que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}.$$

Observem que, per (11.24), tenim

$$\begin{aligned} \lambda &= -\int \left(\frac{F}{E}\right)_{\bar{u}} d\bar{v}, \\ \lambda_{\bar{v}} &= -\left(\frac{F}{E}\right)_{\bar{u}} = \frac{E_{\bar{u}}F - F_{\bar{u}}E}{E^2}. \end{aligned}$$

Usant les fórmules (11.22) i (11.23) tenim

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2} \frac{(E\lambda^2)_{\bar{v}}}{\lambda^2 E \sqrt{\dfrac{GE - F^2}{E}}} \cos\theta - \frac{1}{2} \frac{(\dfrac{GE - F^2}{E})_{\bar{u}}}{\dfrac{GE - F^2}{E} \lambda\sqrt{E}} \sin\theta.$$

Equivalentment

$$\sqrt{EG-F^2}d\theta = \frac{1}{2\lambda^2}\frac{(E\lambda^2)_{\bar v}}{\sqrt{E}}\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2\lambda}(\frac{GE-F^2}{E})_{\bar u}dv.$$

Coeficient de du.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\lambda^2}(E_{\bar v}\lambda^2 + 2E\lambda\lambda_{\bar v}) &= \frac{E_{\bar v}}{2} + \frac{E\lambda_{\bar v}}{\lambda} \\
&= -\frac{FE_u}{2E} + \frac{E_v}{2} + \frac{E_uF}{E} - F_u \\
&= \frac{FE_u}{2E} + \frac{E_v}{2} - F_u.
\end{aligned}$$

Coeficient de dv. Aprofitant el càlcul de $\dfrac{(E\lambda^2)_{\bar v}}{2\lambda^2}$ que acabem de fer, tenim

$$\begin{aligned}
\frac{F(E\lambda^2)_{\bar v}}{2E\lambda^2} &- \frac{(GE-F^2)_uE - E_u(GE-F^2)}{2E^2} \\
&= \frac{F}{E}(\frac{FE_u}{2E} + \frac{E_v}{2} - F_u) - \frac{G_u}{2} + \frac{FF_u}{E} - \frac{GE_u}{2E} + \frac{GE_u}{2E} - \frac{E_uF^2}{2E^2} \\
&= \frac{FE_v}{2E} - G_u.
\end{aligned}$$

Substituint, tenim

$$\boxed{\sqrt{EG-F^2}d\theta = \left(\frac{FE_u}{2E} + \frac{E_v}{2} - F_u\right)\, du + \left(\frac{FE_v}{2E} - \frac{G_u}{2}\right)\, dv}$$

que és exactament la fórmula de Gauss de les geodèsiques.

Exercici 11.10.10 *Escriviu les equacions de les geodèsiques de l'esfera respecte de la parametrització*

$$\begin{aligned}
x &= R\sin\varphi\cos\theta \\
y &= R\sin\varphi\sin\theta \\
z &= R\cos\varphi
\end{aligned}$$

Solució. En aquestes coordenades, amb ordre (φ, θ), tenim

$$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2 \sin^2 \varphi.$$

Observem de passada que aplicant la fórmula (10.5), pàgina 231, per a la curvatura de Gauss obtenim

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{G_\varphi}{2\sqrt{EG}})\right) = -\frac{1}{R^2 \sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{2R^2 \sin\varphi \cos\varphi}{2R^2 \sin\varphi}\right) = \frac{1}{R^2},$$

és a dir, l'esfera té curvatura de Gauss constant igual a $\dfrac{1}{R^2}$.

Aplicant les fórmules dels símbols de Christoffel de la pàgina 228, amb $u = \varphi$, $v = \theta$ obtenim

$$\Gamma_{12}^2 = \cot\varphi, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin\varphi\cos\varphi$$

i els demés zero.

Les equacions de les geodèsiques $(\varphi(t), \theta(t))$ són doncs

$$\begin{aligned} \varphi'' - \theta'^2 \sin\varphi\cos\varphi &= 0, \\ \theta'' + 2\theta'\varphi' \cot\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Aquests sistemes d'equacions diferencials són sempre difícils de resoldre. I hem de posar condicions inicials per a les funcions i les seves derivades. Per exemple si volem $\theta(0) = \varphi(0) = \pi/2$ i $\varphi'(0) = 1$ i $\theta'(0) = 0$, llavors $\theta = \pi/2$ i $\varphi(s) = as + b$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, és una solució. També és clar que tota corba definida per $\theta = \mathit{constant}$ (meridians), amb φ funció afí de s, és solució. Podem observar que les dues equacions anteriors impliquen

$$\varphi'^2 + \theta'^2 \sin^2\varphi = \mathit{constant}$$

simplement derivant aquesta funció i aplicant les equacions de les geodèsiques. I és que les geodèsiques estan sempre parametritzades per l'arc o una constant d'aquest, i

$$\|\gamma(s)'\|^2 = \varphi'^2 + \theta'^2 \sin^2\varphi,$$

si $\gamma(s)$ és la geodèsica en qüestió.

També podem observar que si tallem l'esfera per un pla que passi per l'origen obtenim una corba $(\varphi(s), \theta(s))$ tal que

$$a \sin\varphi\cos\theta + b \sin\varphi\cos\theta + c\cos\varphi = 0,$$

o equivalentment

$$a\cos\theta + b\cos\theta + c\cot\varphi = 0,$$

Derivant dos cops obtenim

$$(-a\sin\theta + b\cos\theta)\theta' - \frac{c}{\sin^2\varphi}\varphi' = 0,$$

$$(-a\cos\theta - b\sin\theta)\theta'^2 + (-a\sin\theta + b\cos\theta)\theta'' + \frac{2c\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi}\varphi'^2 - \frac{c}{\sin^2\varphi}\varphi'' = 0,$$

que, substituint $(-a\cos\theta - b\sin\theta)$ i $(-a\sin\theta + b\cos\theta)$ pels valors obtinguts més amunt, es pot escriure com

$$c\theta'^2\cot\varphi + \frac{c\varphi'}{\theta'\sin^2\varphi}\theta'' + \frac{2c\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\varphi'^2 - \frac{c}{\sin^2\varphi}\varphi'' = 0,$$

que es pot escriure com (suposem $c \neq 0$)

$$\theta'\big(\varphi'' - \theta'^2\sin\varphi\cos\varphi\big) - \varphi'\big(\theta'' + 2\varphi'\theta'\cot\varphi\big) = 0,$$

o encara millor com

$$A\theta' - B\varphi' = 0 \tag{11.26}$$

amb

$$\begin{aligned} A &= \varphi'' - \theta'^2\sin\varphi\cos\varphi, \\ B &= \theta'' + 2\varphi'\theta'\cot\varphi. \end{aligned}$$

Clarament doncs les geodèsiques compleixen aquesta equació, però si ara afegim a aquesta equació que les geodèsiques han d'estar parametritzades per l'arc o múltiple de l'arc, veurem que cadascun dels dos sumands de l'anterior igualtat han de ser zero i recuperem, doncs, les equacions de les geodèsiques.

En efecte, si afegim la condició

$$\varphi'^2 + \theta'^2\sin^2\varphi = \mathit{constant},$$

que derivant, és

$$\varphi'\varphi'' + \theta'^2\varphi'\sin\varphi\cos\varphi + \theta'\theta''\sin^2\varphi = 0$$

Substituint φ'' i θ'' tenim

$$\varphi'(A + \theta'^2 \sin\varphi\cos\varphi) + \theta'^2\varphi'\sin\varphi\cos\varphi + \theta'(B - 2\varphi'\theta'\cot\varphi)\sin^2\varphi = 0,$$

que simplificant queda

$$\varphi' A + \theta' B \sin^2\varphi = 0. \tag{11.27}$$

Ara és clar que la única solució del sistema format per les equacions (11.26) i (11.27), que té determinant $\theta'^2\sin^2\varphi + \varphi'^2 \neq 0$, és $A = B = 0$, que són justament les equacions (11.25) de les geodèsiques de l'esfera.

Exercici 11.10.11 *Escriviu les equacions de les geodèsiques de l'esfera respecte de la parametrització*

$$\begin{aligned} x &= R\sin\frac{s}{R}\cos\theta \\ y &= R\sin\frac{s}{R}\sin\theta \\ z &= R\cos\frac{s}{R} \end{aligned}$$

Solució. En aquest cas

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = R^2\sin^2\frac{s}{R}.$$

Els símbols de Christoffel quan $E = 1$ i $F = 0$ són

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= 0, & \Gamma^2_{11} &= 0, \\ \Gamma^1_{12} &= 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{G_u}{2G}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-G_u}{2}, & \Gamma^2_{22} &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}$$

que en el nostre cas són

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= 0, & \Gamma^2_{11} &= 0, \\ \Gamma^1_{12} &= 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{R}\cot\frac{s}{R}, \\ \Gamma^1_{22} &= -R\sin\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R}, & \Gamma^2_{22} &= 0. \end{aligned}$$

i, per tant, una corba $s(t), \theta(t)$ és geodèsica si

$$\begin{aligned} s''(t) - R\sin\frac{s(t)}{R}\cos\frac{s(t)}{R}(\theta'(t))^2 &= 0 \\ \theta''(t) + 2\frac{1}{R}\cot\frac{s(t)}{R}s'(t)\theta'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Exercici 11.10.12 (Pseudoesfera) *Calculeu les geodèsiques de la pseudoesfera.*

Solució. La tractriu, situada en el pla y, z té equació (vegeu, per exemple, [29])

$$\gamma(t) = R(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}).$$

Per raons que es veuran a continuació reparametritzem $\gamma(t)$ per l'arc. Com

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(t)\|dt = R\ln\cosh t,$$

la reparametrització és

$$\sigma(s) = \gamma(t(s)) = R(\operatorname{argcosh} e^{s/R} - e^{-s/R}\sqrt{e^{2s/R} - 1}, e^{-s/R}).$$

Si la fem girar al voltant de l'eix de les $y's$ tenim una parametrització de la pseudoesfera

$$\Psi(s, \alpha) = R(e^{-s/R}\cos\alpha, \operatorname{argcosh} e^{s/R} - e^{-s/R}\sqrt{e^{2s/R} - 1}, e^{-s/R}\sin\alpha)$$

Calculem la primera forma fonamental respecte aquesta parametrització.

$$\begin{aligned} \Psi_s &= (-e^{-s/R}\cos\alpha, e^{-s/R}\sqrt{e^{2s/R} - 1}, -e^{-s/R}\sin\alpha) \\ \Psi_\alpha &= R(-e^{-s/R}\sin\alpha, 0, e^{-s/R}\cos\alpha) \end{aligned}$$

i per tant

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2e^{-2s/R} \end{pmatrix}$$

Aplicant la fórmula (10.5), pàgina 231, per a la curvatura de Gauss obtenim

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{ss} = -\frac{1}{\sqrt{R^2e^{-2s/R}}}\left(\sqrt{R^2e^{-2s/R}}\right)_{ss} = -\frac{1}{Re^{-s/R}}(Re^{-s/R})_{ss} = -\frac{1}{R^2}$$

és a dir, la pseudoesfera té curvatura de Gauss constant igual a

$$\frac{1}{(Ri)^2}.$$

També podem calcular els símbols de Christoffel amb les fórmules de la pàgina 228, i obtenim

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{R} \\
\Gamma_{22}^1 &= Re^{-2s/R}
\end{aligned}$$

i els demés zero.

Per tant les equacions de les geodèsiques $\gamma(t) = \Psi(s(t), \alpha(t))$són

$$\begin{aligned}
s''(t) + Re^{-2s(t)/R}\alpha'(t)^2 &= 0 \\
\alpha''(t) - \frac{2}{R}s'(t)\alpha'(t) &= 0
\end{aligned}$$

Nou canvi de coordenades. Per tal de deixar clar que la pseudoesfera és un tros del semiplà de Poincaré que s'introduirà més endavant, fem

$$\begin{aligned}
x &= \alpha \\
y &= e^{s/R}
\end{aligned}$$

de manera que $dx = d\alpha$ i $ds = Re^{-s/R}dy$, i per tant

$$ds^2 + R^2e^{-2s/R}d\alpha^2 = \frac{R^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

la clàssica mètrica de l'Henry.

El canvi correspon a reparametritzar així:

$$\Phi(x, y) = \Psi(R \ln y, x) = R(\frac{\cos\alpha}{y}, \operatorname{argcosh}(y) - \frac{1}{y}\sqrt{y^2 - 1}, \frac{\sin\alpha}{y})$$

Coma ara $E = G = R^2/y^2$, i $F = 0$, els símbols de Christoffel són (ordre (x, y))

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y} \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y} \\
\Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y}
\end{aligned}$$

i els demès zero.

Exercici 11.10.13 *Retrobeu les equacions de les geodèsiques dels problemes 11.10.11 i 11.10.12 directament a partir de les equacions de Lagrange.*

Solució. L'element de longitud de l'esfera en coordenades (φ, θ) (colatitud,longitud) és

$$ds^2 = \varphi'^2 + R^2 \sin^2(\varphi)\theta'^2.$$

El funcional de Lagrange és

$$L(t, x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^2 + R^2 \sin^2(x_1) y_2^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = 2y_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = 2R^2 \sin^2(x_1) y_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2R^2 \sin(x_1)\cos(x_1) y_2^2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

Ara substituïm x_1 per $\varphi(t)$, x_2 per $\theta(t)$, y_1 per $\varphi'(t)$ i y_2 per $\theta'(t)$, i tenim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_1}\right) &= \frac{d}{dt}(2\varphi'(t)) = 2\varphi''(t), \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2R^2 \sin(\varphi(t))\cos(\varphi(t))\theta'(t)^2 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_2}\right) &= \frac{d}{dt}(2R^2 \sin^2(\varphi)\theta'(t)) = 2R^2(2\sin\varphi(t)\cos\varphi(t)\,\varphi'(t))\theta'(t) + \sin^2\varphi(t)\theta''(t), \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Si ara escrivim

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

obtenim les mateixes equacions de l'exercici 11.10.11.

L'element de longitud de la pseudoesfera en les coordenades (s, α) de l'exercici 11.10.12 és

$$d\tau^2 = ds^2 + R^2 e^{-2s/R} \alpha'^2.$$

El funcional de Lagrange és

$$L(t, x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1^2 + R^2 e^{-2x_1/R} y_2^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = 2y_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = 2R^2 e^{-2x_1/R} y_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2Re^{-2x_1/R} y_2^2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

Ara substituïm x_1 per $s(t)$, x_2 per $\alpha(t)$, y_1 per $s'(t)$ i y_2 per $\alpha'(t)$, i tenim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y_1}) &= \frac{d}{dt}(2s'(t)) = 2s''(t),\\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2Re^{-2s(t)/R}\alpha'(t)^2\\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y_2}) &= \frac{d}{dt}(2R^2e^{-2s(t)/R}\alpha'(t)) = 2R^2e^{-2s(t)/R}\Big(-\frac{2}{R}s'(t)\alpha'(t)+\alpha''(t)\Big),\\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Si ara escrivim

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y_i}) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

obtenim les mateixes equacions de l'exercici 11.10.12.

Exercici 11.10.14 (Struik p.154) *Demostreu que les evolutes d'una corba són geodèsiques de la superfície polar d'aquesta corba.*

Solució. La superfície polar de la corba $\gamma(s)$, parametritzada per l'arc, és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + tB(s).$$

Com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \rho'(s)N(s) - \rho(s)\tau(s)B(s) + t\tau(s)N(s)\\
\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= B(s)
\end{aligned}$$

el camp normal és

$$\nu(s,t) = \pm T(s)$$

Només hem de veure doncs que la normal principal de la evoluta en el punt $\varphi(s,t)$ té la direcció de $T(s)$.

Però la evoluta està donada per (vegeu la Proposició 3.12.1)

$$\beta(s) = \gamma(s) + \rho(s)[N(s) - \cot\alpha(s)\ B(s)], \quad \alpha(s) = \int_0^s \tau(u)du + c.$$

Llavors, ometent el paràmetre s per simplificar,

$$\begin{aligned} \beta' &= \rho' N - \rho\tau B - \rho' \cot\alpha B \\ &+ \rho\frac{\tau}{\sin^2\alpha}B - \rho\tau\cot\alpha N \\ &= \big(\rho' - \rho\tau\cot\alpha\big)N + \cot\alpha\big(\rho\tau\cot\alpha - \rho'\big)B \\ &= \big(\rho' - \rho\tau\cot\alpha\big)(N - \cot\alpha B) \end{aligned}$$

Denotant $V = N - \cot\alpha B$ és clar (recordeu com es calcula la normal principal d'una corba no parametritzada per l'arc) que la normal principal buscada és el vector

$$V \wedge (V \wedge V')$$

normalitzat, però

$$V' = -kT - \tau\cot\alpha(N - \cot\alpha B) = -kT - \tau\cot\alpha V$$

així

$$V \wedge V' = -kV \wedge T$$

i

$$V \wedge (V \wedge V') = kT$$

ja que V i T són ortogonals, i per tant la normal principal és igual a $\pm T$ com volíem demostrar.

Exercici 11.10.15 *Demostreu que les geodèsiques del tor de revolució*

$$\Psi(\varphi, \theta) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, a\sin\theta), \quad r = p + a\cos\theta$$

compleixen l'equació diferencial de primer ordre

$$d\varphi = \frac{ca\,d\theta}{r\sqrt{r^2 - c^2}}$$

amb c constant.

Solució. La primera forma fonamental és

$$I = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

i, per tant, els símbols de Christoffel són

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{a\sin\theta}{r},\ \Gamma_{11}^2 = \frac{r\sin\theta}{a}$$

i les demés zero. Les equacions de les geodèsiques són, doncs,

$$\begin{aligned} \varphi'' - \frac{2a\sin\theta}{r}\theta'\varphi' &= 0 \\ \theta'' + \frac{r\sin\theta}{a}(\varphi')^2 &= 0 \end{aligned}$$

La primera es pot escriure com

$$y' = -h'y, \quad y = \varphi', h = 2\ln r$$

de manera que

$$\ln y = -\ln r^2 + a,$$

és a dir,

$$\varphi' = kr^{-2},$$

per una certa constant k. Per tant, $\varphi'' = -2kr^{-3}r'$, que substituint a la primera equació ens dóna

$$\sin\theta = \frac{r\varphi''}{2a\theta'\varphi'} = -\frac{r'}{a\theta'}.$$

Substituint els valors de $\sin\theta$ i φ' a la segona equació tenim

$$\theta'' = \frac{k^2r'}{a^2r^3\theta'}.$$

que es pot escriure com

$$a^2r^3(\theta'^{\,2})' = 2k^2r'$$

i per tant

$$\theta'^{\,2} = -\frac{k^2}{a^2r^2} + \lambda$$

amb λ una constant, que per la forma d'aquesta equació ha de ser positiva.

Així,

$$\theta' = \frac{\sqrt{\lambda a^2r^2 - k^2}}{ar} = \frac{k\sqrt{r^2 - c^2}}{car},$$

amb $c = k/a\sqrt{\lambda}$.

Finalment,
$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \frac{kr^{-2}}{\theta'} = \frac{ac}{r\sqrt{r^2 - c^2}},$$
com volíem.

Exercici 11.10.16 *Demostreu que en un sistema de coordenades polars geodèsiques tenim*
$$m = r - K_0\frac{r^3}{6} + o(r^3)$$
on $m = \sqrt{G}$, *i* $K_0 = K(0,\theta)$ *és la curvatura de Gauss a l'origen.*

Solució. Desenvolupem $m = m(r,\theta)$ per Taylor. Com $m(0,\theta) = 0$ i $\frac{\partial m}{\partial r}_{|r=0} = 1$ tenim
$$m = r + a_2\frac{r^2}{2} + a_3\frac{r^3}{6} + \dots$$
Però
$$a_2 = \frac{\partial^2 m}{\partial r^2}_{|r=0} = -m(0,\theta)K(0,\theta) = 0,$$
i
$$a_3 = \frac{\partial^3 m}{\partial r^3}_{|r=0} = \frac{\partial}{\partial r}_{|r=0}(-mK) = -\frac{\partial m}{\partial r}_{|r=0}K(0,\theta) - m(0,\theta)\frac{\partial K}{\partial r}_{r=0} = -K(0,\theta),$$
i per tant
$$m = r - K_0\frac{r^3}{6} + \dots$$
com volíem.

Exercici 11.10.17 *Calcular la longitud i l'àrea del cercle geodèsic de radi R.*

Solució. Els punts que estan a distància R de P estan donats per la corba (R,θ), respecte del sistema de coordenades polars amb centre P. Derivant respecte de θ, veiem que el vector tangent a aquesta corba té coordenades $(0,1)$ i per tant la seva norma val $\sqrt{G} = m$. Així,
$$L = \int_0^{2\pi} m\,d\theta = 2\pi R - \frac{\pi}{3}K_0R^3 + \dots$$

i l'àrea

$$A = \int_0^R \int_0^{2\pi} m\, dr\, d\theta = \pi R^2 - \frac{\pi}{12} K_0 R^4,$$

que donen interpretacions geomètriques de K_0,

$$K_0 = \frac{3}{\pi} \lim_{R \mapsto 0} \frac{2\pi R - L}{R^3}, \quad K_0 = \frac{12}{\pi} \lim_{R \mapsto 0} \frac{\pi R^2 - A}{R^4}$$

Exercici 11.10.18 *Deduïu directament a partir de les equacions diferencials de les geodèsiques parametritzades* (11.16) *que el paràmetre és proporcional a l'arc.*

Solució. Això ha estat provat de manera trivial a la Proposició 11.4.3 utilitzant la normal a la superfície. Donem-ne una prova intrínseca.

Com ja hem fet anteriorment, i perquè aquesta demostració valgui en dimensió arbitrària, denotem les habituals cartes locals $\varphi(u, v)$ de les superfícies per $\varphi(x_1, x_2)$. La norma al quadrat del vector tangent a la corba $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), x_2(t))$ és

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x(t)) x_i'(t) x_j'(t), \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

i per tant el que volem veure és (prescindeixo de la referència a t)

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} g_{ij}(x) x_i' x_j' = \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} x_k' x_i' x_j' + 2 \sum_{i,j} g_{ij}(x) x_i'' x_j = 0 \qquad (11.28)$$

i les equacions de les geodèsiques

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = x_k'' + \sum_{i,j,r} \frac{1}{2} g^{kr} (\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}) x_i' x_j' = 0.$$

multiplicant per g_{ks} i sumant per k tenim

$$2 \sum_k g_{ks} x_k'' + \sum_{i,j,r} \delta_{rs} (\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}) x_i' x_j' = 0.$$

És a dir,

$$2 \sum_k g_{ks} x_k'' + \sum_{i,j} (\frac{\partial g_{sj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s}) x_i' x_j' = 0.$$

Multiplicant per x'_s i sumant per s tenim

$$2\sum_{k,s} g_{ks}x''_k x'_s + \sum_{i,j,s}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s})x'_i x'_j x'_s = 0. \tag{11.29}$$

Ara observem que fixats tres valors, iguals o diferents, $i = a, j = b, s = c$ el coeficient de $x'_a x'_b x'_c$ en el segon sumand està format per la suma estesa a $i, j, s \in \{a, b, c\}$ de

$$(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s})$$

i per tant el terme

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial x_j},$$

amb $s = a, i = b, j = c$ es compensa amb el terme

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s},$$

amb $i = a, j = b, s = c$.

Per tant, (11.29) és equivalent a

$$2\sum_{k,s} g_{ks}x''_k x'_s + \sum_{i,j,s} \frac{\partial g_{sj}}{\partial x_i} x'_i x'_j x'_s = 0.$$

que coincideix amb la igualtat (11.28) que volíem demostrar.

Exercici 11.10.19 (Càlcul de variacions) *Considerem totes les corbes f : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ amb $f(a)$ i $f(b)$ fixats. Sigui $L = L(t, x, y)$ una funció de $\mathbb{R}^{2n+1}$ a $\mathbb{R}$. Volem trobar, d'entre totes les f's anteriors, la que fa mínim l'expressió*

$$I(f) = \int_a^b L(t, f(t), f'(t))dt.$$

Solució. Considerarem variacions uniparamètriques de f i derivarem respecte aquest paràmetre. Suposem f solució del problema. Considerem

$$\Psi : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una aplicació diferenciable amb $\Psi(a, s) = f(a)$ i $\Psi(b, s) = f(b)$, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Suposem també $\Psi(t, 0) = f(0)$ i denotem f_s la corba $f_s(t) = \Psi(t, s)$.

La condició de mínim és doncs

$$\frac{d}{ds}\int_a^b L(t, f_s(t), f_s'(t))dt = 0.$$

Per la regla de la cadena,

$$\int_a^b \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k}\frac{df_s(t)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{df_s'(t)}{ds}\right)dt = 0.$$

Equivalentment,

$$\int_a^b \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k}\frac{df_s(t)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{d^2 f_s(t)}{dt\, ds}\right)dt = 0.$$

Aplicant integració per parts a la segona integral tenim,

$$\int_a^b \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k}\frac{df_s(t)}{ds} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{df_s(t)}{ds}\right)dt = 0, \tag{11.30}$$

ja que el terme que surt fora de la integral en fer integració per parts, s'anul·la:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{df_s(t)}{ds}\right]_a^b = 0$$

ja que

$$\frac{df_s(b)}{ds} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{s+h}(b) - f_s(b)}{h} = 0$$

per la condició sobre els extrems fixats. I anàlogament $\dfrac{df_s(a)}{ds} = 0$.

Com (11.30) és certa per a tota variació $\Psi(t, s)$ ha de ser

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_k} = 0,$$

com volíem.

Capítol 12

Teorema del defecte

12.1 L'angle d'inclinació al *Disquisitiones*

Recordarem la caracterització que dóna Gauss en el *Disquisitiones* de les geodèsiques, estudiant l'angle que aquestes corbes formen amb les línies coordenades (en direm *angle d'inclinació*). Això el porta a una equació de primer ordre per a les geodèsiques, i no de segon ordre com és l'equació que es dóna habitualment. Gauss diu que el seu punt de vista és millor.[1]

Fórmula de l'angle d'inclinació. Secció 18 del *Disquisitiones*

A la secció 18 del *Disquisitiones* Gauss troba la fórmula[2]

$$\sqrt{EG-FF}\cdot d\theta = \frac{F}{2E}\cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}\cdot du - \frac{dF}{du}\cdot du - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}\cdot dv\,. \tag{12.1}$$

que nosaltres escrivim

$$\sqrt{EG-FF}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{F}{2E}\cdot\frac{\partial E}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{du}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{dv}{ds}\,.$$

on s és el paràmetre arc de la geodèsica i θ és l'angle entre la geodèsica i les corbes $v = constant$. Direm que aquesta fórmula és la *fórmula de l'angle d'inclinació*.

[1] *[...] és també possible eliminar l'angle θ, i derivar-ne una equació diferencial de segon ordre entre p i q, la qual, no obstant, seria més complicada i menys útil per a les aplicacions que la fórmula precedent.*

[2] Ell utilitza p, q en lloc de u, v.

Coordenades ortogonals. Secció 19 del *Disquisitiones*

A la secció 19 del *Disquisitiones* estudia el cas particular en que tenim un sistema de coordenades ortogonals, és a dir $F = 0$. Llavors la fórmula de l'angle d'inclinació es redueix a

$$\sqrt{EG} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{du}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{dv}{ds}\,.$$

Gauss aplica la seva fórmula al cas particular de coordenades polars geodèsiques. Denotem-les[3] (r, α). Les corbes $\alpha = constant$ són geodèsiques, que suposarem parametritzades per l'arc, de manera que $E = 1$. Així la fórmula de l'angle d'inclinació és

$$\sqrt{G} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{dv}{ds}\,. \qquad (u = r, v = \alpha)$$

I la fórmula de la curvatura que Gauss havia trobat a la secció 11, que és la nostra equació (10.4), pàgina 231, queda

$$4G^2K = G_u^2 - 2GG_{uu}.$$

Gauss introdueix llavors la notació $m = \sqrt{G}$ i escriu les dues equacions anteriors com[4]

$$K = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial m}{\partial r}\frac{d\alpha}{ds}. \tag{12.2}$$

La primera és una igualtat entre funcions de les dues variables (r, α) i la segona és una igualtat entre funcions del paràmetre arc s. Si la geodèsica té equació $(r(s), \alpha(s))$, la derivada parcial de $m = m(r, \alpha)$ respecte r està valorada en aquest punt.

Gauss acaba aquesta secció demostrant que $m(0, \alpha) = 0$ i $\frac{\partial m}{\partial r}_{|(0,\alpha)} = 1$. L'argument de Gauss per veure aquesta igualtat és que l'element de longitud $ds^2 = dr^2 + Gd\alpha^2$ restringit a les corbes $r = constant$ és $ds = md\alpha$, però aquesta corba ha de ser molt pròxima, per a r petit, a un cercle de radi r, que té element de longitud $rd\alpha$ de manera que $r = m$ i per tant, a l'origen, $m = 0$ i $\frac{\partial m}{\partial r}_{|r=0} = 1$. Hem explicitat aquests càlculs a la secció 11.7.

[3] Ell les denota r, φ.

[4] Hem deduït la primera d'aquestes fórmules a (10.6) i deduirem la segona a (12.3).

12.2 Angle d'inclinació a partir de la fórmula de Liouville

En el *Disquisitiones* Gauss dedueix la fórmula de l'angle d'inclinació a partir de les fórmules de Lagrange del càlcul de variacions.

Però aquesta fórmula, en el cas particular de coordenades ortogonals, és essencialment un cas particular de la fórmula de Liouville, pàgina 281.

En efecte, si apliquem la fórmula de Liouville a una geodèsica, que té doncs $k_g = 0$, tenim

$$0 = k_{g1} \cos\theta + k_{g2} \sin\theta + \frac{d\theta}{ds}.$$

Tenint en compte els valors de les curvatures geodèsiques de les línies coordenades en una parametrització ortogonal, Proposició 11.1.4, pàgina 242, i el valor de $\sin\theta$ i $\cos\theta$, equació (11.11), pàgina 248, tenim

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\sqrt{E}\frac{du}{ds} - \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sqrt{G}\frac{dv}{ds} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}}E_v\frac{du}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}}G_u\frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

que podem escriure com

$$\sqrt{EG}\theta' = \frac{E_v}{2}u' - \frac{G_u}{2}v'$$

i que és exactament la fórmula de l'angle d'inclinació de Gauss.

Observem que si a més de tenir $F = 0$ tenim també $E = 1$ aquesta fórmula es redueix a

$$\theta' = -\frac{G_u}{2\sqrt{G}}v' = -(\sqrt{G})_u v'. \tag{12.3}$$

A l'exercici 12.5.1 deduïm la fórmula (12.1) de l'angle d'inclinació per a coordenades no ortogonals.

12.3 Angle d'inclinació a partir de l'equació de les geodèsiques

L'equació de les geodèsiques és (pàgina 252)

$$\frac{d^2\gamma^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{d\gamma^i}{ds}\frac{d\gamma^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Tenint en compte els valors del símbols de Christoffel donats a la pàgina 228, per al cas de coordenades ortogonals ($F = 0$), aquestes dues equacions es transformen en

$$\begin{aligned} u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{G_u}{2E}v'^2 = 0, \\ v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0. \end{aligned}$$

Derivant la igualtat $u' = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}}$ que hem obtingut a la pàgina 280 tenim

$$u'' = -\sin\theta\theta'\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2E\sqrt{E}}\cos\theta\frac{dE}{ds}$$

Com que $\sin\theta = v'\sqrt{G}$ i $dE/ds = E_u u' + E_v v'$, tenim

$$u'' = -v'\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\theta' - \frac{u'^2}{2E}E_u - \frac{u'v'}{2E}E_v.$$

Igualant amb el valor de u'' donat per l'equació de la geodèsica tenim

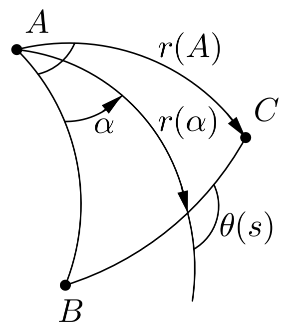
$$\sqrt{EG}\theta' = \frac{E_v}{2}u' - \frac{G_u}{2}v'$$

que torna a ser la fórmula de Gauss.

12.4 Teorema del Defecte. Secció 20 del *Disquisitiones*

Ara integrem la curvatura K sobre un triangle geodèsic T amb un dels vèrtex A en l'origen de les *coordenades polars geodèsiques*. Recordeu la definició d'integral d'una funció sobre una superfície, equació (5.1), pàgina 122.

El costat AB és la geodèsica $\alpha = 0$, el costat AC és la geodèsica $\alpha = A$ (denotem A, B, C els vèrtexs i els angles del triangle). El costat BC té equació $r = r(\alpha)$.



La mètrica en coordenades polars geodèsiques (r, α) és

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Posant $m = \sqrt{G}$ l'element d'àrea s'escriu com

$$dS = mdr\, d\alpha,$$

i per tant la integral que volem calcular és

$$\int_T K\, dS = \int_0^A \int_0^{r(\alpha)} K(r, \alpha) mdr\, d\alpha = -\int_0^A \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} dr\, d\alpha = \int_0^A (1 - \frac{\partial m}{\partial r}) d\alpha$$

ja que $\frac{\partial m}{\partial r}_{|r=0} = 1$ (fórmula (11.19), pàgina 263). Hem utilitzat l'expressió de K donada a (10.6) pàgina 231.

Ara bé, la igualtat (12.2),

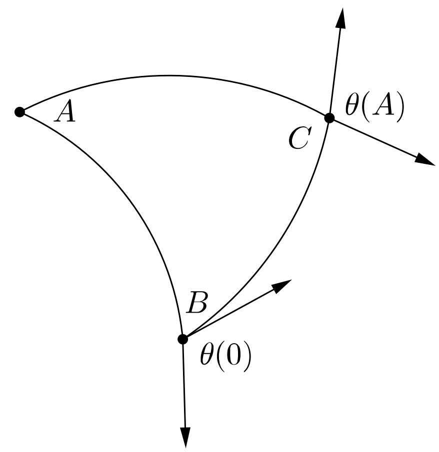
$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial m}{\partial r} \frac{d\alpha}{ds},$$

on $\theta = \theta(s)$ és l'angle que forma la geodèsica BC, d'equació $(r(s), \alpha(s))$, respecte el paràmetre arc s, amb les corbes $\alpha = \textit{constant}$, posant $s = s(\alpha)$, és a dir, reparametritzant la geodèsica per l'angle, permet escriure

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\alpha} = -\frac{\partial m}{\partial r},$$

de manera que tenim

$$\int_T K\, dS = A + \int_0^A \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = A + \theta(A) - \theta(0) = A + C - (\pi - B) = A + B + C - \pi.$$



Utilitzant que la curvatura de Gauss és el jacobià de l'aplicació de Gauss, pàgina 140, resulta que la integral de K sobre el triangle T és l'àrea, amb signe, de la porció d'esfera obtinguda per la imatge de T per l'aplicació de Gauss (vegeu comentari i fórmula (6.9), pàgina 142).

Gauss diu:

> Aquest teorema, que si no ens equivoquem, s'hauria de contar entre els més elegants de la teoria de superfícies corbes, es pot enunciar també com segueix: *L'excés sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtesGeodèsiques sobre una superfície concavo-còncava, o el dèficit sobre* 180° *de la suma dels angles d'un triangle format per línies més curtes sobre una superfície concavo-convexa, està mesurat per l'àrea de la part de l'esfera que correspon, a través de les direccions de les normals, a aquest triangle, si la superfície total de l'esfera és igual a* 720 *graus.*

Si tenim una superfície compacta triangulada per C triangles geodèsics, podem aplicar l'anterior fórmula a cadascun d'ells i sumar. Obtenim

$$\int_S K\,dS = 2\pi V - C\pi$$

on V és el nombre de vèrtexs de la triangulació.

Com que en aquesta triangulació es compleix $3T = 2A$, on A és el nombre d'arestes, la característica d'Euler val

$$\chi = C + V - A = V - \frac{1}{2}C.$$

Per tant
$$\int_S K\,dS = 2\pi\chi,$$
resultat que es coneix com teorema de Gauss-Bonnet.

12.5 Exercicis

Exercici 12.5.1 *Demostreu que si $\theta(s)$ és l'angle amb que la geodèsica $\gamma(s)$ talla les corbes coordenades $v = $ constant, llavors*

$$\sqrt{EG-FF}\cdot\theta' = \frac{F}{2E}\cdot\frac{\partial E}{\partial s} + \frac{1}{2}E_v u' - F_u u' - \frac{1}{2}G_u v'\,.$$

Solució. Utilitzarem les expressions

$$\begin{aligned} E\,\Gamma^1_{11} + F\,\Gamma^2_{11} &= \frac{E_u}{2} \\ E\,\Gamma^1_{22} + F\,\Gamma^2_{22} &= -\frac{G_u}{2} + F_v \\ E\,\Gamma^1_{12} + F\,\Gamma^2_{12} &= \frac{E_v}{2} \end{aligned} \tag{12.4}$$

que hem trobat a la pàgina 227.

Com que l'angle $\theta(s)$ és l'angle entre els vectors $\gamma'(s)$, amb $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$, i φ_u tenim

$$\frac{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{E}} = \cos\theta$$

és a dir

$$\sqrt{E}\cos\theta = Eu' + Fv', \tag{12.5}$$

igualtat de funcions de s. Per tant,

$$\sqrt{E}\sin\theta = \pm v'\sqrt{EG-F^2}, \tag{12.6}$$

com es veu fàcilment utilitzant que $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$ (s paràmetre arc).

Derivant (12.5) i utilitzant (12.6) tenim

$$(E_u u' + E_v v')u' + Eu'' + (F_u u' + F_v v')v' + Fv'' = \frac{E'}{2\sqrt{E}} \cos\theta - \theta' \sqrt{E} \sin\theta$$

Substituint u'' i v'' pel seu valor que es dedueix de les equacions de les geodèsiques tenim

$$\begin{aligned} & (E_u u' + E_v v')u' - E(\Gamma^1_{11} u'^2 + 2\Gamma^1_{12} u'v' + \Gamma^1_{22} v'^2) \\ + \ & (F_u u' + F_v v')v' - F(\Gamma^2_{11} u'^2 + 2\Gamma^2_{12} u'v' + \Gamma^2_{22} v'^2) \\ = \ & \frac{E'}{2\sqrt{E}} \cos\theta - \theta' \sqrt{E} \sin\theta \end{aligned}$$

Les fórmules (12.4) permeten escriure aquesta igualtat com

$$\begin{aligned} & (E_u u' + E_v v')u' + (F_u u' + F_v v')v' \\ - \ & \frac{E_u}{2} u'^2 - E_v u'v' + (\frac{G_u}{2} - F_v) v'^2 \\ = \ & \frac{E'}{2\sqrt{E}} \cos\theta - \theta' \sqrt{E} \sin\theta \end{aligned}$$

Substituint $\sin\theta$ i $\cos\theta$ pels seu valors

$$\begin{aligned} & (E_u u' + E_v v')u' + (F_u u' + F_v v')v' \\ - \ & \frac{E_u}{2} u'^2 - E_v u'v' + (\frac{G_u}{2} - F_v) v'^2 \\ = \ & \frac{E'}{2E}(Eu' + Fv') - \theta' v' \sqrt{EG - F^2} \\ = \ & \frac{1}{2}(E_u u' + E_v v')u' + \frac{E' F v'}{2E} - \theta' v' \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

(prenem el signe + en el valor del sinus perquè considerem $\theta \in [0, \pi]$). Dividint per v', i simplificant, obtenim

$$\theta' \sqrt{EG - F^2} = \frac{F}{2E} E' + \frac{1}{2} E_v u' - F_u u' - \frac{1}{2} G_u v'$$

com volíem demostrar.

Capítol 13

Camps vectorials

13.1 Camps vectorials a $\mathbb{R}^n$

Sigui[1] U un obert de $\mathbb{R}^n$. Un camp vectorial X sobre U consisteix en assignar a cada punt $x \in U$ un vector X_x de $\mathbb{R}^n$.

Es pot pensar, doncs, com una aplicació

$$X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que associa a cada $x \in U$ un vector X_x, de $\mathbb{R}^n$. És a dir, $X(x) = X_x$.

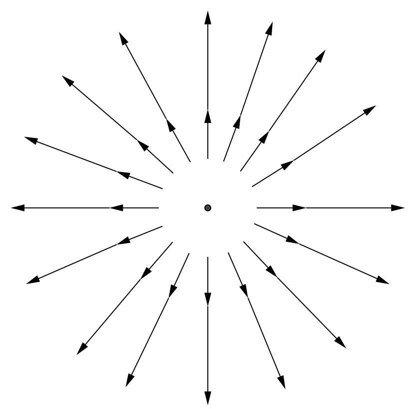
Com que tot vector de $\mathbb{R}^n$ és combinació lineal de la base canònica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$, per a cada $x \in \mathbb{R}^n$ tindrem

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) e_i, \tag{13.1}$$

on els coeficients $X^i(x)$ són números reals que depenen de x.

A l'hora de representar un camp gràficament suposarem que el vector X_x té el seu origen en el punt $x \in \mathbb{R}^n$. Per exemple, el camp de $\mathbb{R}^2$ donat per $X(x, y) = (x, y)$ el representem com

[1] Segueixo uns apunts manuscrits de Joan Girbau.



Els camps els podem sumar entre si i multiplicar per escalars de manera evident i també els podem multiplicar per funcions. Concretament si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció i X és un camp vectorial sobre U, llavors fX és el camp vectorial sobre U donat per

$$\begin{array}{rccc} fX: & U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & P & \mapsto & f(P)X_P \end{array}$$

Si denotem per $E_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ el camp constant $E_i(x) = e_i,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, l'equació (13.1) es pot escriure com

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) E_i(x),$$

que, ometent el punt x, dóna lloc a l'expressió

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i, \tag{13.2}$$

on les X^i són funcions $X^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, anomenades *components* del camp, ja que associen a cada $x \in U$ la component i-èssima del vector X_x.

Per simplificar la notació, en lloc de (13.2) escriurem

$$X = (X^1, \ldots, X^n)$$

que permet pensar els camps com 'vectors de funcions'. És a dir,

$$\begin{array}{rccc}(X^1,\ldots,X^n): & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (X^1(x),\ldots,X^n(x))\end{array}$$

Es diu que X és un camp vectorial diferenciable si les seves components X^i, $i=1,\ldots,n$, són funcions diferenciables.

Finalment observem que el producte escalar ordinari de vectors dóna lloc al producte de camps. Concretament, si X,Y són camps vectorials sobre U, definim el seu producte escalar $\langle X,Y\rangle$ com la funció

$$\begin{array}{rccc}\langle X,Y\rangle: & U\subset\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \langle X_P,Y_P\rangle\end{array}$$

13.2 Corbes integrals

Utilitzarem sovint que si X és un camp diferenciable sobre un obert U i $P\in U$, llavors existeix una petita corba $\gamma(t)$ continguda a U tal que $\gamma(0)=P$ i $\gamma'(t)=X_{\gamma(t)}$ (petita vol dir que $\gamma(t)$ només està definida quan el paràmetre t varia en un interval obert del 0). Això és conseqüència del teorema d'existència i unicitat de solucions de les equacions diferencials, i de la dependència diferenciable d'aquestes respecte de les condicions inicials.

De fet tenim

Proposició 13.2.1 *Sigui X un camp vectorial sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ i sigui $x_0\in U$. Existeixen un entorn obert V de x_0, $\epsilon>0$ i una aplicació diferenciable*

$$\psi:(-\epsilon,\epsilon)\times V\longrightarrow U$$

tal que $\psi(0,x)=x$, $\forall x\in V$, i tal que

$$\frac{d\psi(t,x)}{dt}=X_{\psi(t,x)}.$$

Demostració. Siguin $X^i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,n$, les components del camp X en la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Considerem el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\frac{d\psi^i}{dt}=X^i(\psi^1(t),\ldots,\psi^n(t));\quad i=1,\ldots,n.$$

És a dir, ens preguntem si existeixen funcions $\psi^i(t)$ que compleixin les anteriors n igualtats.

Pel teorema d'existència i unicitat de solucions i dependència diferenciable de les condicions inicials, fixat $x_0 \in U$, existeixen $\epsilon, \delta > 0$, tals que $\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$ que compleixi $|x_i - x_{0i}| < \delta$, existeix una única solució $\psi^1(t,x), \ldots, \psi^n(t,x)$ del sistema, diferenciable en t i x, definida per a $|t| < \epsilon$ i tal que $\psi^i(0, x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Agafant $V = \{x; |x_i - x_{0i}| < \delta\}$ hem acabat. $\square$

Nota 13.2.2 Si fixem x, la corba $\psi_t(x) = \psi(t,x)$ és *la corba integral del camp* ja que passa per x quan $t = 0$ i el seu vector tangent en qualsevol dels seus punts coincideix amb el valor del camp en aquest punt, és a dir,

$$\frac{d\psi_t(x)}{dt} = X_{\psi_t(x)}.$$

$\star \star \star$

Exemple 13.2.3 *Trobem la corba integral del camp $X(x,y) = (x+y, y)$ que passa pel punt $(0,1)$.*

Plantegem el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\psi^1}{dt} &= \psi^1(t) + \psi^2(t) \\ \frac{d\psi^2}{dt} &= \psi^2(t) \end{aligned}$$

que, per simplificar la notació escriurem simplement com

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t) + y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t) \end{aligned}$$

De la segona deduïm $y(t) = ce^t$, que en imposar $y(0) = 1$ ens dóna $y(t) = e^t$. De la primera deduïm $x(t) = (t+a)e^t$, que en imposar $x(0) = 0$ ens dóna $x(t) = te^t$. La corba buscada és doncs (te^t, e^t).

Observem que amb la notació de la Proposició 13.2.1 aquesta solució es denota $\psi(t,0,1)$. Si volem conèixer $\psi(t,x,y)$ per a tot (x,y) hem de trobar solucions del mateix sistema però amb les condicions inicials $x(0) = x$ i $y(0) = y$, o equivalentment $\psi(0,x,y) = (x,y)$. Obtenim $x(t) = (yt+x)e^t$ i $y(t) = ye^t$, és a dir,

$$\psi(t,x,y) = ((yt+x)e^t, ye^t).$$

Grup uniparamètric

Si fixem $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, l'aplicació $\psi_t : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donada per

$$\psi_t(x) = \psi(t, x)$$

és un difeomorfisme. Només cal observar que la seva inversa és ψ_{-t}. També es compleix que si $t, s, t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$ i $x, \psi_x(x) \in V$, llavors

$$\psi_{t+s}(x) = \psi_t(\psi_s(x)).$$

Per això es diu que el conjunt d'aplicacions $\{\psi_t\}$ forma un *grup uniparamètric local de transformacions*. No entrem de moment en més detalls que podeu trobar a [16].

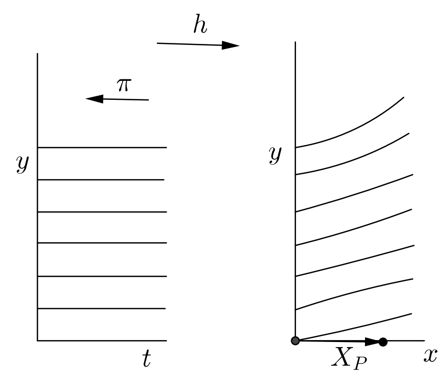
Integral primera

Veiem l'existència local d'integrals primeres al pla.

Proposició 13.2.4 *Sigui X un camp vectorial sobre un obert U de $\mathbb{R}^2$. Sigui $P \in U$. Existeix un entorn obert V de P, $V \subseteq U$, i una funció $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $dF_Q \neq 0$, per tot $Q \in W$, i tal que F és constant sobre les corbes integrals de X.*

Es diu que F és una integral primera *de X.*

Demostració. Suposem, sense perdre generalitat, que $P = (0, 0)$ i que $X_P = \lambda(1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sigui $\psi_t(x, y)$ el grup uniparamètric associat a X. Sigui $h(t, y) = \psi_t((0, y))$, definida per aquells valors de t i y on el segon terme tingui sentit.



Calculem la diferencial de h a l'origen.

$$\begin{aligned} dh_P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= X_P \\ dh_P\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Com X_P i $\frac{\partial}{\partial y}$ són linealment independents, dh_P és un isomorfisme i per tant, existeix W entorn obert del punt $(0,0)$ del pla (t,y) tal que $h : W \longrightarrow h(W)$ és un difeomorfisme local.

Definim $F = \pi \circ h^{-1}$, on π és la projecció sobre la segona component. Llavors $dF_Q \neq 0$ en un entorn obert V de P, $V \subseteq h(W)$, i

$$F(\psi_t(0,y)) = \pi(h^{-1}\psi_t(0,y)) = \pi((0,y)) = y.$$

És a dir, F és constant sobre la corba integral $\psi_t(0,y)$. $\square$

A l'exercici 13.5.1 apliquem l'anterior resultat a provar l'existència de coordenades principals.

13.3 Els camps com derivacions

Sigui f una funció diferenciable sobre U, obert de $\mathbb{R}^n$, i $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ un camp vectorial diferenciable sobre U. Si $P \in U$, denotem $X_P(f)$ el número

$$X_P(f) = \sum_{i=1}^n X^i(P) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_P , \tag{13.3}$$

que no és més que la derivada direccional de f en la direcció del vector X_P.

Com que el gradient de f és el camp vectorial sobre U que en cada punt P val

$$\operatorname{grad} f(P) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}_P, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}_P)$$

l'anterior igualtat s'escriu com

$$X_P(f) = \langle X, \operatorname{grad} f\rangle(P).$$

Aquesta expressió suggereix que donat el camp X i la funció f podem definir una nova funció $X(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ per

$$(Xf)(P) = X_P f.$$

Equivalentment,

$$X(f) = \langle X, \operatorname{grad} f\rangle$$

Mirant l'expressió explícita de $X_P(f)$ donada a (13.3), veiem que si X i f són diferenciables, la funció $X(f)$ és diferenciable[2].

Es diu que *els camps actuen sobre les funcions* assignant a cada funció diferenciable f una nova funció $X(f)$ que en cada punt P val la derivada direccional de f en la direcció X_P. Podem pensar doncs els camps X com aplicacions

$$X : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

on $\mathcal{C}^\infty(U)$ és el conjunt de funcions diferenciables sobre U.

Es comprova que $X(f+g) = X(f)+X(g)$ i que val la fórmula del producte

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

La pregunta és: qualsevol aplicació

$$D : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

prové d'un camp? La resposta és que sí, si ens limitem a aplicacions D com l'anterior que siguin lineals i compleixin la fórmula del producte

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg).$$

Aquestes $D's$ es diuen *derivacions*. Que valgui la fórmula del producte implica que la derivada de les constants és zero, ja que $D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ i per tant $D(1) = 0$. Llavors, per linealitat, si c és qualsevol constant $D(c) = D(c \cdot 1) = cD(1) = 0$.

[2] Si f fos $\mathcal{C}^k$ llavors $X(f)$ seria $\mathcal{C}^{k-1}$.

Teorema 13.3.1 *Tota derivació prové d'un únic camp.*

Demostració. Donada $D : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ considerem el camp

$$X = \sum_{i=1}^{n} (Dx_i) E_i$$

on les x_i són les funcions coordenades habituals de $\mathbb{R}^n$ (projecció sobre la i-èssima component). Volem veure que per a cada funció diferenciable f sobre U es compleix

$$Xf = Df.$$

Per comprovar aquesta igualtat de funcions mirarem que coincideixen sobre un punt x_0 arbitrari. Per a cada x considerem el segment que uneix x i x_0 i tenim

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0))dt \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i}) g_i(x) \end{aligned}$$

amb

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0))dt.$$

En particular

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = g_i(x_0).$$

Llavors

$$(Xf)(x_0) = \langle X_{x_0}, \operatorname{grad} f \rangle = \sum_{i=1}^{n} (Dx_i)(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

I

$$(Df)(x_0) = D(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i}) g_i(x))(x_0) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)(x_0) g_i(x_0),$$

i per tant, com x_0 és arbitrari, $Xf = Df$ com volíem.

La unicitat és clara ja que camps que coincideixen, com derivacions, sobre les funcions, coincideixen sobre les funcions coordenades, i per tant són iguals. $\square$

Notació. Observem que

$$E_i f = \langle E_i, \operatorname{grad} f\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

per això és costum denotar

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

i escriure els camps de $\mathbb{R}^n$ com

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

13.4 Camps vectorials sobre superfícies

Un *camp vectorial amb suport* a S, o més simplement un camp sobre S, és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} X: & V \subset S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \mapsto & X_P \end{array}$$

on V és un obert de S, que associa a cada punt[3] $P \in V$ un vector X_P de $\mathbb{R}^3$.

L'exemple paradigmàtic és l'aplicació de Gauss.

Observem que aquest tipus de camps es poden sumar i multiplicar per escalars i també es poden multiplicar per funcions definides sobre V. Concretament si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, el camp fX està definit per[4]

$$(fX)(P) = f(P)X_P.$$

Això permet escriure el camp X com

$$X = \sum_{i=1}^{3} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

[3]Si el domini de definició de X fos només un obert W de S, només hem de considerar $X : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ja que W és també una superfície. Per exemple, si (r, α) són coordenades polars de $\mathbb{R}^2$, el camp $\partial/\partial r$ no és un camp de $\mathbb{R}^2$ però sí de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

[4]Si haguéssim canviat S per un obert de S a la definició de X, perquè X no estigués definit sobre tot S, i f també estigués definida només sobre un obert de S, hauríem de tenir en compte que fX està definit només a la intersecció dels dominis de definició de f i X.

on les X^i són funcions sobre l'obert V de la superfície i $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ és la base canònica de camps de $\mathbb{R}^3$ restringida a S ($\frac{\partial}{\partial x_i}$ associa a cada punt de S el vector e_i de la base canònica de $\mathbb{R}^n$).

Direm que X és diferenciable quan les funcions $X^i : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, són diferenciables.

Definició 13.4.1 *Sigui X un camp sobre la superfície S (potser definit només en un obert de S). Si per a cada $P \in S$ es compleix que*

$$X_P \in T_P S$$

es diu que X és un camp tangent *a S.*

El primer exemple de camps tangents ve donat per les derivades parcials d'una parametrització. Concretament, si suposem que (U, φ) és una carta local de S, sabem, per la secció 4.5, que els vectors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

són tangents a la superfície en el punt $\varphi(u, v)$.

Tot i que φ és una funció sobre U, podem pensar les seves derivades com camps sobre S, en lloc de sobre U, sense més que posar

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} : & \varphi(U) \subset S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \varphi(u, v) & \mapsto & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} : & \varphi(U) \subset S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \varphi(u, v) & \mapsto & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{array}$$

Com que els vectors tangents

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

són linealment independents en cada punt, per a tot altre camp $X : \varphi(U) \subset S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tangent a S, tenim

$$X = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

on a_1, a_2 són funcions diferenciables sobre $\varphi(U) \subset S$.

És fàcil veure que X és diferenciable (les seves tres components X_1, X_2, X_3 respecte de la base canònica E_1, E_2, E_3 de $\mathbb{R}^3$ són funcions diferenciables sobre S) si i només si a_1, a_2 són diferenciables.

13.5 Exercicis

Exercici 13.5.1 (Existència de coordenades principals) *Donat un punt $P \in S$ no umbilical, existeix una carta local (V, ψ) amb $P \in \psi(V)$ tal que les corbes $u = cte$ i $v = cte$ són línies de curvatura.*

Solució. Donada una superfície S volem construir una carta local (V, ψ) tal que ψ_u, ψ_v siguin, en cada punt, direccions principals.

Com suposem que P no és umbilical, sabem que hi ha un entorn obert de P sense punt umbilicals i per tant en cada punt d'aquest entorn tenim ben definits els dos vectors propis de valors propis diferents de l'endomorfisme de Weingarten e_1, e_2, que són ortogonals.

Això ens permetrà definir, mitjançant una carta local, camps sobre un obert de $\mathbb{R}^2$ als que podrem aplicar la Proposició 13.2.4.

En efecte, considerem una carta local (U, φ) amb $P \in \varphi(U)$, i definim camps E_1, E_2 sobre U per la condició de que en cada punt $x \in U$ sigui

$$d\varphi_x(E_i(x)) = e_i(\varphi(x)), \quad i = 1, 2$$

on $e_i(\varphi(x))$ són els vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten en el punt $\varphi(x)$. Recordem que $d\varphi_x$ és isomorfisme entre $\mathbb{R}^2$ i $T_{\varphi(x)}S$.

A la Proposició 13.2.4 hem vist que existeixen localment integrals primeres, és a dir, existeix un entorn obert W de x en U i funcions F_i amb $dF_i \neq 0$, tals que F_i és constant sobre les corbes integrals de E_i, $i = 1, 2$.

Les noves coordenades són justament els valors d'aquestes constants: si parlem del punt de coordenades (x, y) ens referim al punt intersecció de les línies de curvatura

$$F_2(u, v) = x, \quad F_1(u, v) = y.$$

Això es pot formalitzar considerant l'aplicació $G(u,v) = (F_2(u,v), F_1(u,v))$ que es pot escriure com

$$\begin{aligned} x &= F_2(u,v) \\ y &= F_1(u,v) \end{aligned}$$

i que és un difeomorfisme local, ja que per tot $P \in U$

$$\begin{aligned} dG_P(E_1(P)) &= (*,0) = \lambda\frac{\partial}{\partial x} \\ dG_P(E_2(P)) &= (0,*) = \mu\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

per a certes funcions λ, μ, diferents de zero per ser $dF_i \neq 0$, per tant té inversa diferenciable i la diferencial de la inversa compleix que

$$\begin{aligned} dG^{-1}_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial x}) &= \lambda^{-1}E_1(P) \\ dG^{-1}_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial y}) &= \mu^{-1}E_2(P) \end{aligned}$$

Definim llavors

$$\psi(x,y) = \varphi(G^{-1}(x,y))$$

i tenim

$$\begin{aligned} d\psi_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial y}) &= d\varphi_P(dG^{-1}_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial y})) = \lambda^{-1}e_1(\varphi(P)) \\ d\psi_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial x}) &= d\varphi_P(dG^{-1}_{G(P)}(\frac{\partial}{\partial x})) = \mu^{-1}e_2(\varphi(P)) \end{aligned}$$

Aquestes igualtats demostren a la vegada que ψ és carta local i que les noves coordenades (x,y) són principals.

S'ha d'observar que, en general, no podrem aconseguir $\lambda = \mu = 1$ en un obert, ja que llavors la primera forma fonamental seria la identitat, i estaríem en un pla.

Exercici 13.5.2 *Sigui X un camp tangent a S i $P \in S$. Llavors la corba integral de X que passa per P està totalment continguda a S.*

Solució. Sobre una carta local que contingui P posem

$$X = a^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

on a_1, a_2 són funcions diferenciables sobre $\varphi(U) \subset S$.

L'existència de corbes integrals locals l'hem vista per a camps definits sobre oberts de $\mathbb{R}^n$ i no la podem aplicar, per tant, directament a X. Però si que la podem aplicar al camp de $\mathbb{R}^2$ (definit sobre U)

$$Y = (a_1 \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial u} + (a_2 \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Ara bé, es pot veure fàcilment que la imatge per φ de les corbes integrals de Y són corbes integrals de X, que estan doncs a S.

En efecte, per definició de la diferencial d'una aplicació en un punt es veu directament que

$$d\varphi_x Y_x = X_{\varphi(x)}, \quad \forall x \in U \tag{13.4}$$

ja que la diferencial de φ en un punt $x \in U$ és l'aplicació lineal

$$d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donada per la matriu, respecte de les bases canòniques,

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial v} \end{pmatrix}_{|x} .$$

Per tant,

$$d\varphi_x Y_x = M \begin{pmatrix} a_1(\varphi(x)) \\ a_2(\varphi(x)) \end{pmatrix} = a_1(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}_{|x} + a_2(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}_{|x} = X_{\varphi(x)}.$$

La relació (13.4) ja diu directament que les corbes integrals de X són transformades per φ en les corbes integrals de Y ja que per calcular $d\varphi_x Y_x$ s'agafa una corba integral de Y_x, es transforma per φ i es deriva.

Capítol 14

Formes

Comencem amb un breu repàs de qüestions d'àlgebra lineal sobre espais vectorials.

14.1 Aplicacions multilineals

Sigui[1] E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita. Una aplicació multilineal

$$\omega : E \times \overset{k}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diu *alternada* si per a tota permutació $\sigma \in \mathcal{S}_k$ es compleix que

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\omega(u_1, \ldots, u_k).$$

El conjunt de les aplicacions k-multilineals alternades de E es denota

$$\Lambda^k E^*.$$

Amb la suma i producte per escalars natural és un espai vectorial. Observem que $\Lambda^1 E^* = E^*$. Per conveni, $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$.

Observem també que si d'entre els k vectors $u_1, \ldots, u_k$ n'hi ha dos d'iguals llavors

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = 0.$$

En efecte, si $u_i = u_j$, com la transposició $\tau = (i, j)$ té signe -1, tenim

$$\omega(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_k) = -\omega(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_k) = 0.$$

[1] Apunts Gil Solanes.

De fet, es pot veure que aquestes condicions són equivalents, vegeu exercici 14.5.1.

Definició 14.1.1 *Siguin* $\omega \in \Lambda^k E^*$ *i* $\theta \in \Lambda^q E^*$*. El* producte exterior *de* ω *i* θ *es defineix per*

$$(\omega\wedge\theta)(u_1,\ldots,u_{k+q}) = \frac{1}{k!q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(k)})\theta(u_{\sigma(k+1)},\cdots,u_{\sigma(k+q)})$$

Per exemple, si $\omega,\theta \in \Lambda^1 E^*$ llavors

$$\omega\wedge\theta(u_1,u_2) = \omega(u_1)\theta(u_2) - \theta(u_1)\omega(u_2)$$

igualtat que posa de manifest que

$$\omega\wedge\theta = -\theta\wedge\omega.$$

Si $\omega, \in \Lambda^1 E^*$ i $\theta \in \Lambda^2 E^*$ llavors

$$\begin{aligned} \omega\wedge\theta(u_1,u_2,u_3) &= \frac{1}{2}\omega(u_1)\theta(u_2,u_3) - \frac{1}{2}\omega(u_1)\theta(u_3,u_2) \\ &- \frac{1}{2}\omega(u_2)\theta(u_1,u_3) + \frac{1}{2}\omega(u_2)\theta(u_3,u_1) \\ &+ \frac{1}{2}\omega(u_3)\theta(u_1,u_2) - \frac{1}{2}\omega(u_3)\theta(u_2,u_1) \end{aligned}$$

però com $\theta(u,v) = -\theta(v,u)$

$$\begin{aligned} \omega\wedge\theta(u_1,u_2,u_3) &= \omega(u_1)\theta(u_2,u_3) \\ &- \omega(u_2)\theta(u_1,u_3) \\ &+ \omega(u_3)\theta(u_1,u_2) \end{aligned}$$

igualtat que posa de manifest que

$$\omega\wedge\theta = \theta\wedge\omega.$$

Veurem en general que, a menys que les dues formes que multipliquem exteriorment tinguin les dues grau imparell, el producte exterior és commutatiu. En canvi, sempre és associatiu. Però abans hem de veure que el producte exterior d'aplicacions multilineals alternades és una aplicació multilineal alternada.

Proposició 14.1.2 *Siguin* $\omega \in \Lambda^k E^*$, $\theta \in \Lambda^q E^*$ *i* $\eta \in \Lambda^r E^*$. *Llavors,*

1) $\omega \wedge \theta \in \Lambda^{k+q} E^*$.

2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \omega \wedge (\theta \wedge \eta)$

3) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kq} \theta \wedge \omega$.

Demostració. 1) Hem de veure que

$$\omega \wedge \theta(u_{\tau(1)}, \ldots, u_{\tau(k+q)}) = \epsilon(\tau)\, \omega \wedge \theta(u_1, \ldots, u_{k+q}).$$

Però

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta(u_{\tau(1)}, \ldots, u_{\tau(k+q)}) &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma) \omega(u_{\sigma(\tau(1))}, \cdots, u_{\sigma(\tau(k))}) \cdot \\ &\quad \cdot \theta(u_{\sigma(\tau(k+1))}, \cdots, u_{\sigma\tau(k+q)}) \end{aligned}$$

Dient $\rho = \sigma \circ \tau$, i tenint en compte que quan σ pren tots els valors de S_{k+q} (τ fixada), ρ també pren tots els valors de S_{k+q} tenim

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta(u_{\tau(1)}, \ldots, u_{\tau(k+q)}) &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\rho)\epsilon(\tau) \omega(u_{\rho(1)}, \cdots, u_{\rho(k)}) \cdot \\ &\quad \cdot \theta(u_{\rho(k+1)}, \cdots, u_{\rho(k+q)}) \end{aligned}$$

ja que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\rho)\epsilon(\tau)$. El terme de la dreta és justament

$$\epsilon(\tau) \omega \wedge \theta(u_1, \ldots, u_k),$$

com volíem.

2) Donats $v_1, \dots, v_{k+q+r}$

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \varphi) \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+q+r})\\
&= \frac{1}{(k+q)!k!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+q+r}} \varepsilon(\sigma)(\omega\wedge\varphi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)})\eta(v_{\sigma(k+q+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q+r)})\\
&= \frac{1}{(k+q)!k!q!r!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+q+r}} \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{k+q}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\varphi(v_{\sigma\tau(k+1)}, \dots v_{\sigma\tau(k+q)})\cdot\eta(v_{\sigma(k+q+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q+r)})\\
&= \frac{1}{(k+q)!k!q!r!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+q+r}} \sum_{\tau\in\mathcal{S}_{k+q}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\varphi(v_{\sigma\tau(k+1)}, \dots v_{\sigma\tau(k+q)})\cdot\eta(v_{\sigma\tau(k+q+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+q+r)})\\
&= \frac{1}{k!q!r!} \sum_{\pi\in\mathcal{S}_{k+q+r}} \varepsilon(\pi)\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\varphi(v_{\pi(k+1)}, \dots v_{\pi(k+q)})\cdot\eta(v_{\pi(k+q+1)}, \dots, v_{\pi(k+q+r)})
\end{aligned}
$$

on hem pensat $\tau \in \mathcal{S}_{k+q}$ com un element de $\mathcal{S}_{k+q+r}$ que és la identitat sobre $k+q+1, \dots, k+q+r$.

La última igualtat és deguda a que cada $\pi \in \mathcal{S}_{k+q+r}$ es pot escriure de $(k+q)!$ maneres diferents com a composició $\pi = \sigma\circ\tau$ de $\sigma \in \mathcal{S}_{k+q+r}$ i $\tau \in \mathcal{S}_{k+q}$ (una per cada τ possible). A més, és clar que $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Si ara apliquem el mateix raonament a $\omega\wedge(\varphi\wedge\eta)$, ja es veu que arribarem al mateix resultat.

Té sentit, doncs, escriure $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k$ sense necessitat de posar-hi parèntesis.

3) Sigui

$$
\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & k+q \\ k+1 & \dots & k+q & 1 & \dots & k \end{pmatrix}
$$

Observem que podem reordenar la segona fila fins obtenir $1, 2, \dots, k+q$, o bé passant $q+k$ al final de tot, darrera la k (k salts), a continuació $q+k-1$ també darrera la k (k salts més) etc. Si k és parell, amb un número parell de salts (transposicions) haurem reordenat. Si k és imparell, cada vegada que fem els anteriors salts canviarà el signe, per tant si q és parell no canviarà el signe i si és imparell sí. És a dir, el signe serà 1 si k o q són parells i -1 en cas contrari. Això es pot resumir posat

$$
\epsilon(\tau) = (-1)^{kq}.
$$

Llavors

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge \theta(u_1, \ldots, u_{k+q}) = \\
= \;& \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(k)})\theta(u_{\sigma(k+1)}, \cdots, u_{\sigma(k+q)}) \\
= \;& \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\theta(u_{\sigma(k+1)}, \cdots, u_{\sigma(k+q)})\omega(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(k)}) \\
= \;& \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\theta(u_{\sigma(\tau(1))}, \cdots, u_{\sigma(\tau(q))})\omega(u_{\sigma(\tau(q+1))}, \cdots, u_{\sigma(\tau(k+q))}) \\
= \;& \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\theta(u_{\rho(1)}, \cdots, u_{\rho(q)})\omega(u_{\rho(q+1)}, \cdots, u_{\rho(k+q)}) \\
= \;& \frac{1}{k!q!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\sigma)\theta(u_{\rho(1)}, \cdots, u_{\rho(q)})\omega(u_{\rho(q+1)}, \cdots, u_{\rho(k+q)}) \\
= \;& \frac{1}{k!q!}\epsilon(\tau) \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{k+q}} \epsilon(\rho)\theta(u_{\rho(1)}, \cdots, u_{\rho(q)})\omega(u_{\rho(q+1)}, \cdots, u_{\rho(k+q)}) \\
= \;& (-1)^{kq}\theta \wedge \omega(u_1, \ldots, u_{k+q})
\end{aligned}$$

amb $\rho = \sigma \circ \tau$. Observem que és el mateix sumar per a totes les σ que per a totes les $\sigma \circ \tau$ i que $\epsilon(\rho) = \epsilon(\sigma) \cdot \epsilon(\tau)$.

Proposició 14.1.3 *Siguin $\omega^1, \ldots, \omega^k \in E^*$. Llavors*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_1, \ldots, u_k) = \begin{vmatrix} \omega^1(u_1) & \ldots & \omega^1(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^k(u_1) & \ldots & \omega^k(u_k) \end{vmatrix}.$$

Demostració. Procedim per inducció. El cas $k = 1$ és obvi. La idea ara és classificar les permutacions de $\mathcal{S}_k$ en k subconjunts: les que porten 1 a 1, les que porten 1 al 2, etc. Cadascun d'aquests subconjunts té $(k-1)!$ elements.

Així doncs

$$
\begin{aligned}
& \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_1, \ldots, u_k) = \omega^1 \wedge \left(\omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k\right)(u_1, \ldots, u_k) \\
= \; & \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k, \sigma(1)=i} \epsilon(\sigma) \omega^1(u_i) \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) \\
= \; & \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \omega^1(u_i) \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_1, \overset{\hat{i}}{\ldots}, u_k) \qquad (14.1)
\end{aligned}
$$

ja que per cada $\sigma \in S_k$, amb $\sigma(1) = i$, (n'hi ha $(k-1)!$ d'aquestes) es compleix que

$$
\epsilon(\sigma)\omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = (-1)^{i+1} \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_1, \overset{\hat{i}}{\ldots}, u_k) \qquad (14.2)
$$

En efecte, la permutació τ que porta $(1, \overset{\hat{i}}{\ldots}, k)$ a $(\sigma(2), \ldots, \sigma(k))$ compleix que $\epsilon(\sigma) = (-1)^{i+1}\epsilon(\tau)$ ja que podem expressar σ com la composició

$$
(1, 2, \ldots, k) \to (i, 1, \overset{\hat{i}}{\ldots}, k) \to (i, \sigma(2), \ldots, \sigma(k)),
$$

i la primera té signe $(-1)^{i+1}$ i la segona té el signe de τ. Per tant, el segon terme de (14.2) és igual a

$$
(-1)^{i+1}\epsilon(\tau)\omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k(u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(k)}))
$$

i això prova (14.2), i per tant (14.1).

Desenvolupant el determinant de l'enunciat per la primera fila i aplicant la hipòtesi d'inducció a (14.1), hem acabat. $\square$

Un cas particular interessant d'aquesta situació és quan $E = \mathbb{R}^n$ i prenem la base canònica $(e_1, \ldots, e_n)$ i la seva base dual $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Llavors la proposició anterior diu directament que

$$
e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \det(u_1, \ldots, u_n)
$$

entenent per determinant de n vectors el determinant de la matriu formada per les components d'aquests vectors respecte de la base canònica.

Exemple 14.1.4 Donats $u, v \in \mathbb{R}^3$ definim dos 1-formes α, β per *contracció amb la mètrica*. És a dir, $\forall X \in \mathbb{R}^3$ definim

$$
\begin{aligned}
\alpha(X) &= i_u g(X) = \langle u, X \rangle \\
\beta(X) &= i_v g(X) = \langle v, X \rangle.
\end{aligned}
$$

Llavors, utilitzant la identitat de Lagrange,

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(X,Y) &= \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X) \\ &= \langle u, X\rangle\langle v, Y\rangle - \langle u, Y\rangle\langle v, X\rangle \\ &= \langle X \wedge Y, u \wedge v\rangle \\ &= \det(u \wedge v, X, Y)\end{aligned}$$

És a dir,

$$i_u g \wedge i_v g = \det(u \wedge v, \cdot, \cdot)$$

Proposició 14.1.5 *Sigui $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de l'espai vectorial E i sigui $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la seva base dual.*

1. *Siguin $\omega \in \Lambda^k E^*$, i $u_1, \ldots, u_k \in E$. Llavors*

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} A_{j_1 \ldots j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}),$$

amb

$$A_{j_1 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} e_{j_1}^*(u_1) & \ldots & e_{j_1}^*(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j_k}^*(u_1) & \ldots & e_{j_k}^*(u_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{j_1} & \ldots & a_k^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_k} & \ldots & a_k^{j_k} \end{vmatrix},$$

amb $u_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$.

2. *Tot $\omega \in \Lambda^k E^*$ s'escriu com*

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_k}^*.$$

3. *Les aplicacions mutilineals*

$$e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_k}^*, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

formen una base de $\Lambda^k E^*$, que té doncs dimensió $\binom{n}{k}$.

Demostració. 1. Abans de fer el cas general mirem els casos $k = 1$ i $k = 2$. Si $k = 1$, ω és una 1-forma i

$$\omega(u) = \omega(ae_1) = a\omega(e_1) = e_1^*(u)\omega(e_1).$$

Si $k = n = 2$, ω és una 2-forma i

$$\begin{aligned}\omega(u_1, u_2) &= \omega(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \omega(e_1, e_2) \\ &= \begin{vmatrix} e_1^*(u_1) & e_1^*(u_2) \\ e_2^*(u_1) & e_2^*(u_2) \end{vmatrix} \omega(e_1, e_2).\end{aligned}$$

Si $k = 2$, $n = 3$, ω és una 2-forma i

$$\begin{aligned}\omega(u_1, u_2) &= \omega(a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3, a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3) \\ &= \omega(a_1^1 e_1, a_1^2 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3) \\ &+ \omega(a_1^2 e_2, a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3) \\ &+ \omega(a_1^3 e_3, a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3) \\ &= \omega(a_1^1 e_1, a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3) \\ &+ \omega(a_1^2 e_2, a_2^1 e_1 + a_2^3 e_3) \\ &+ \omega(a_1^3 e_3, a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2) \\ &= a_1^1 a_2^2 \omega(e_1, e_2) + a_1^1 a_2^3 \omega(e_1, e_3) \\ &+ a_1^2 a_2^1 \omega(e_2, e_1) + a_2^2 a_2^3 \omega(e_2, e_3) \\ &+ a_1^3 a_2^1 \omega(e_3, e_1) + a_1^3 a_2^2 \omega(e_3, e_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \omega(e_1, e_2) \\ &+ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \omega(e_1, e_3) \\ &+ \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \omega(e_2, e_3)\end{aligned}$$

Apareixen doncs els tres menors de la matriu que té per columnes les components de u_1, u_2 respecte la base inicial.

Nota. És més fàcil escriure

$$\omega(u_1, u_2) = \omega(a_1^i e_i, a_2^j e_j)$$

i pensar quin és el coeficient de $\omega(e_1, e_2)$, $\omega(e_1, e_3)$ i $\omega(e_2, e_3)$.

Aquesta mateixa idea serveix per resoldre el cas general, que no obstant explicitem.

Demostració de 1 en el cas general. Posem $u_i = \sum_j a_i^j e_j$. Llavors tenim

$$\begin{aligned}
\omega(u_1, \ldots, u_k) &= \omega(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k} a_k^{j_k} e_{j_k}) \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_k} a_1^{j_1} \cdots a_k^{j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{\sigma(j_1)} \cdots a_k^{\sigma(j_k)} \omega(e_{\sigma(j_1)}, \ldots, e_{\sigma(j_k)}) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(j_1)} \cdots a_k^{\sigma(j_k)} \right) \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})
\end{aligned}$$

La igualtat (1) prové simplement d'observar que tots els sumands que apareixen a l'esquerra de la igualtat es poden reagrupar com aquells que contenen una determinada col·lecció de k nombres (d'entre els n possibles), concretament agrupem junts els que contenen $j_1, \ldots, j_k$. Per exemple, tots els sumands que contenen el e_1, e_3, e_5, etc. Observem que a l'esquerra de (2) hi ha V_n^k sumands ja que elegim k elements entre n ordenats o no, i a la dreta $\binom{n}{k} \cdot k! = V_n^k$. Convé pensar S_k com el grup de pemutacions dels k números $j_1, \ldots, j_k$.

Observem que el sumatori entre parèntesis és el menor format per les files $j_1, \ldots, j_k$ de la matriu $n \times k$ formada per les components dels vectors u_i,

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \ldots & a_k^1 \\
a_1^2 & \ldots & a_k^2 \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
a_1^n & \ldots & a_k^n
\end{pmatrix}$$

amb $a_i^j = e_j^*(u_i)$. És a dir,

$$\begin{vmatrix}
a_1^{j_1} & \ldots & a_k^{j_1} \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
a_1^{j_k} & \ldots & a_k^{j_k}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
e_{j_1}^*(u_1) & \ldots & e_{j_1}^*(u_k) \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
e_{j_k}^*(u_1) & \ldots & e_{j_k}^*(u_k)
\end{vmatrix}$$

Per tant,

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} A_{j_1 \ldots j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}),$$

com volíem.

2. Conseqüència immediata de l'apartat anterior i la Proposició 14.1.3.

3. L'apartat anterior ens diu que aquestes $\binom{n}{k}$ formes generen l'espai vectorial de k-formes $\Lambda^k E^*$. Veiem que són linealment independents. Si

$$\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n,} \lambda_{j_1,\ldots,j_k} e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_k} = 0,$$

apliquem els dos termes d'aquesta igualtat a $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ i com que

$$\begin{array}{rcl} e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) & = & 1 \\ e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) & = & 0, \ si\, \{j_1, \ldots, j_k\} \neq \{i_1, \ldots, i_k\} \end{array}$$

(a la matriu corresponent hi hauria una columna de zeros) obtenim

$$\lambda_{j_1,\ldots,j_k} = 0. \quad \square$$

Observem que l'apartat 1), en el cas $k = n$, s'escriu com

$$\omega(u_1, \ldots, u_n) = \det(e^*_i(u_j))\omega(e_1, \ldots, e_n).$$

Determinant

Observem que $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$. Com $e^*_1 \wedge \cdots \wedge e^*_n$ és una n forma no nul·la de $\mathbb{R}^n$, és automàticament una base de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ 362 Com que

$$e^*_1 \wedge \cdots \wedge e^*_n(v_1, \ldots, v_n) = \det(e^*_i(u_j))$$

denotarem

$$\det = e^*_1 \wedge \cdots \wedge e^*_n$$

Éa dir, la n-forma det associa a cada n vectors el determinant de la matriu que té per columnes les components d'aquesta vectors respecte la base canònica (o respecte una base ortonormal positiva qualsevol, exercici 14.5.3).

Exemple 14.1.6 Donats $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ definim tres 1-formes α, β, η per *contracció amb la mètrica*. És a dir, $\forall X \in \mathbb{R}^3$ definim

$$\begin{array}{rcl} \alpha(X) & = & i_u g(X) = \langle u, X\rangle \\ \beta(X) & = & i_v g(X) = \langle v, X\rangle \\ \eta(X) & = & i_u g(X) = \langle w, X\rangle \end{array}$$

Llavors,

$$\alpha \wedge \beta \wedge \eta = \lambda \det$$

ja que $\dim \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* = 1$ i det és una base d'aquest espai.

Per conèixer λ apliquem $\alpha \wedge \beta \wedge \eta$ justament als mateixos vectors u, v, w.

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta \wedge \eta(u, v, w) &= \begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix} \\
&= \det((u, v, w)^t \cdot (u, v, w)) \\
&= \det(u, v, w)^2
\end{aligned}$$

on (u, v, w) denota la matriu 3×3 que té per columnes les components de u, v, w respecte la base canònica.

Per tant, $\lambda = \det(u, v, w)$, i

$$i_u g \wedge i_v g \wedge i_w g = \det(u, v, w) \det$$

Determinants i volum

Geomètricament el determinant de n vectors és el volum del paral·lelepíped que formen.

Proposició 14.1.7 *Siguin $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. El volum del paral·lelepípede P de costats $v_1, \ldots, v_n$ està donat per*

$$vol(P) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|$$

Demostració. Per inducció. Per $n = 1$ és clar. Fem-ho com exercici per a $n = 2$.

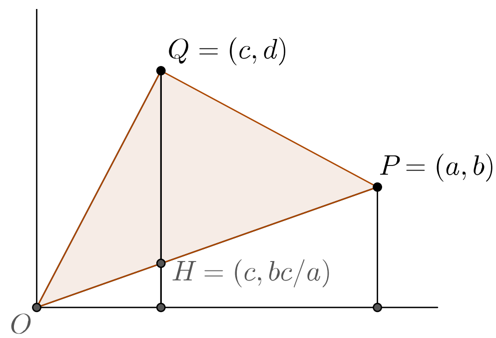
En aquest cas sabem que l'àrea del paral·lelogram format pels vectors u, v, que formen entre ells un angle α, és igual a la longitud de la base per l'altura.

Així doncs

$$\begin{aligned}
\text{Àrea} &= |v| \cdot h = |v||u| \sin\alpha = |v||u|\sqrt{1 - \left(\frac{u \cdot v}{|v||u|}\right)^2} \\
&= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2} = \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} \\
&= |\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}| = |\det(u, v)|.
\end{aligned}$$

Una altra manera és mirar el dibuix i adonar-se que la figura ratllada està formada per dos triangles de la mateixa base QH i altures respectives c i $a-c$, de manera que l'àrea del paral·lelogram de costas OP, OQ és igual a

$$\text{Àrea} = 2\frac{1}{2}QH.(c+a-c) = (d-\frac{bc}{a})\cdot a = ad-bc = \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}).$$



Passem al cas general. El volum d'un paral·lelepípede n-dimensional es pot definir per recurrència com

$$Vol(v_1,\dots,v_n) = Vol(v_1,\dots,v_{n-1})\cdot h$$

on h és l'altura del paral·lelepípede sobre l'hiperplà $E=\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$, és a dir, $v_n = u+hN$ on $u\in E$ i N és ortogonal a E (amb el producte habitual de $\mathbb{R}^n$) i unitari.

Es pot veure que aquesta definició no depèn de quin dels vectors v_i fa el paper de v_n.

Per inducció, identificant E amb $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$Vol(v_1,\dots,v_n) = |\det(v_1,\dots,v_{n-1})|\cdot h$$

on $\det(v_1,\dots,v_{n-1})$ vol dir el determinant de la matriu $(n-1)\times(n-1)$ formada per les components de $v_1,\dots,v_{n-1}$ respecte de una base ortonormal (no importa quina) de E.

Ara tenim

$$\begin{aligned}\det(v_1,\dots,v_n) &= \det(v_1,\dots,v_{n-1},u+hN) = \det(v_1,\dots,hN)\\ &= h\det(v_1,\dots,v_{n-1},N) = h\det(v_1,\dots,v_{n-1}).\end{aligned}$$

Per tant,

$$Vol(v_1,\dots,v_n) = |\det(v_1,\dots,v_n)|. \quad \square$$

14.2 Formes diferencials a $\mathbb{R}^n$

Definició 14.2.1 *Una k-forma diferencial definida en un obert U de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació diferenciable*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*.$$

Com l'espai vectorial de la dreta s'identifica amb $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ té sentit dir que ω és diferenciable.

Denotant $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base dual de la base canònica $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sabem que $\forall x \in U$,

$$\omega(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*.$$

Dir que ω és diferenciable vol dir, per definició, que cada component, respecte d'una base de l'espai vectorial de la dreta ho és. És a dir, ω és diferenciable si i només si les $\binom{n}{k}$ funcions $a_{i_1\ldots i_k}$ són diferenciables.

El conjunt de k-formes diferenciables sobre U es denota $\Omega^k(U)$.

Les operacions sobre els elements de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ es passen a k-formes. Per exemple, si $\omega \in \Omega^r(U)$ i $\eta \in \Omega^s(U)$, llavors $\omega \wedge \eta$ és la $(r+s)$-forma sobre U donada per

$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x).$$

En particular, podem multiplicar una funció f sobre U per una k-forma ω sobre U, i tindrem

$$(f\omega)(x) = f(x) \wedge \omega(x) = f(x)\omega(x),$$

ja que $f(x)$ és un número real, o equivalentment, quan l'apliquem a k vectors $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$

$$(f\omega)(x)(u_1, \ldots, u_k) = \Big(f(x)\omega(x)\Big)(u_1, \ldots, u_k) = f(x)\Big(\omega(x)(u_1, \ldots, u_k)\Big).$$

Podem escriure doncs $f \wedge \omega = f\omega$.

Nota 14.2.2 *En lloc d'escriure $\omega(x)(u_1, \ldots, u_k)$ és habitual escriure $\omega(x; u_1, \ldots, u_k)$ de manera que*

$$(f\omega)(x; u_1, \ldots, u_k) = f(x)\omega(x; u_1, \ldots, u_k).$$

Observem que les k-formes sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ es poden pensar com aplicacions multilineals alternades $\omega : \mathcal{X}(U)\times\cdots\times\mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ on $\mathcal{X}(U)$ denota el conjunt de camps diferenciables sobre U i $\mathcal{F}(U)$ el conjunt de les funcions diferenciables sobre U, definides per

$$\omega(X_1,\ldots,X_k)(P) = \omega(P)(X_{1P},\ldots,X_{kP}). \tag{14.3}$$

D'aquesta manera les 1-formes es poden considerar com duals dels camps.

Diferencial d'una funció com 1-forma

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable la seva diferencial en cada punt $x \in U$ és l'aplicació lineal que té per matriu respecte de les bases canòniques

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(totes aquestes derivades en el punt x). En particular, $df_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ i podem pensar doncs

$$\begin{array}{rrcl} df: & U & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & x & \mapsto & df_x \end{array}$$

com una 1-forma sobre U.

Per tant podem escriure

$$df_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) e_i^*$$

Però

$$a_i(x) = df_x(e_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

i per tant

$$df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i^*.$$

Cas particular fonamental és quan f és la funció coordenada x_i, és a dir, la funció que assigna a cada punt $P \in \mathbb{R}^n$ la seva coordenada i-èssima respecte de la base canònica. Llavors la fórmula anterior queda

$$(dx_i)_x = e_i^*$$

ja que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

Per tant,

$$df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(dx_i)_x,$$

que ens dóna la igualtat de 1-formes

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Observem que si $n = 1$ aquesta expesió és la que escrivim quan fem un canvi de variables $t = t(s)$ per al càlcul de primitives: canviem t per s i dt per $dt = t'(s)ds$.

Com que en cada punt x, $(dx_1)_x, \ldots, (dx_n)_x$ són una base de $(\mathbb{R}^n)^*$, per la Proposició 14.1.5, tenim que tota k-forma ω sobre U es pot escriure com

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

amb $a_{i_1 \ldots i_k}$ funcions sobre U. És en aquest sentit que es diu que $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, amb $i_1 < \cdots < i_k$, és una base de $\Omega^k(U)$ (són una base en cada punt).

Exemples a $\mathbb{R}^3$.

a) 0-*formes.* Les 0-formes són simplement les funcions diferenciables sobre U.

b) 1-*formes.* dx, dy, dz són una base de les 1-formes. Tota 1-forma ω es pot escriure com $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ amb A, B, C funcions de x, y, z. Per exemple, $\omega = x\,dy - y\,dx$

c) 2-*formes.* $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$ són una base de les 2-formes. Tota 2-forma ω es pot escriure com $\omega = Adx \wedge dy + Bdx \wedge dy + Cdy \wedge dz$ amb A, B, C funcions de x, y, z. Per exemple,$\omega = xy\,dx \wedge dy - dx \wedge dz$.

d) 3-*formes*. $dx \wedge dy \wedge dz$ és una base de les 3-formes. Tota 3-forma ω es pot escriure com $\omega = Adx \wedge dy \wedge dz$ amb $A = A(x, y, z)$. Per exemple, $\omega = x^2 y\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Proposició 14.2.3 *Donats un camp X i una funció f sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ es compleix que*

$$df(X) = Xf.$$

Demostració. Per a cada punt $P \in U$ tenim

$$df(X)(P) = df_P(X_P) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) e_i^*\right)(X_P) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle(P) = X_P f.$$

Per tant,

$$df(X) = Xf. \quad \square$$

En particular, si prenem $f = x_j$ i considerem el camp $X = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i$ tenim

$$dx_j(X) = X(x_j) = X_j$$

ja que

$$E_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

En particular,

$$dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta_{ij},$$

i per això diem que les 1-formes $dx_1, \ldots, dx_n$ són duals dels camps $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Nota 14.2.4 (Formes a valors vectorials) *Donada $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable podem pensar que $F = (F_1, \ldots, F_m)$ i cada F_i, les components de F, és una aplicació $F_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Per tant cada dF_i és una 1-forma

$$dF_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$$

i això permet pensar dF com una 1-forma a valors vectorials

$$dF : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

donada per

$$dF(P) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_P = \begin{pmatrix} dF_{1P} \\ \vdots \\ dF_{mP} \end{pmatrix}.$$

(Cada dF_{iP} representa la fila de la matriu jacobiana)

Pull-back

Definició 14.2.5 *Donada $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ diferenciable entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ definim el pull-back de F com l'aplicació*

$$F^* : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$$

donada per

$$(F^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(F(x))(dF_x v_1, \dots, dF_x v_k),$$

$\forall x \in U, v_i \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega^k(V)$.

Si $k = 0$, $\Omega^0(V)$ és el conjunt de les funcions diferenciables $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, i definim $F^*(f) = f \circ F$. Observem que $f \circ F \in \Omega^0(U)$.

Proposició 14.2.6 *Sigui $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ diferenciable entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, i siguin $\alpha, \beta \in \Omega^r(V)$ i $\eta \in \Omega^s(V)$. Llavors*

1. $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$.
2. $F^*(\alpha \wedge \eta) = F^*\alpha \wedge F^*\eta$.
3. *Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable,*
$$F^*(df) = d(f \circ F).$$
4. *Si $G : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^p$ és diferenciable, llavors*
$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

Demostració. Els apartats 1 i 2 són conseqüència directa de les definicions. Per provar 3 apliquem aquestes 1-formes a un punt i a un vector. Per la regla de la cadena,

$$d(f \circ F)_x(v) = (df_{F(x)} \circ dF_x)(v) = (F^*(df))_x(v). \quad \square$$

Observem que, en particular, $F^*(f\alpha) = (f \circ F)F^*\alpha$ i que

$$F^* dx_i = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j$$

ja que les components F_i de F són, per definició, $F_i = x_i \circ F$.

L'apartat 4 el deixem com exercici. $\square$

Element de volum

La n-forma

$$\eta = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

de $\mathbb{R}^n$ rep el nom de "element de volum" ja que en cada punt $x \in \mathbb{R}^n$ tenim

$$\eta_x = (dx_1)_x \wedge \cdots \wedge (dx_n)_x = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \det$$

i ja sabem que el determinant és el volum.

Proposició 14.2.7 *Sigui $F : U \longrightarrow V$ diferenciable entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i sigui ω una n-forma de $\mathbb{R}^n$. Llavors*

$$F^*\omega = (\omega \circ F)(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n})\, \eta.$$

Demostració. Com $F^*\omega$ és una n-forma és clar que

$$F^*\omega = \lambda\, \eta$$

per a una certa funció λ, amb $\eta = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Com en cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenim $\eta(x)(e_1, \ldots, e_n) = 1$, on $(e_1, \ldots, e_n)$ és la base canònica, tenim que (recordem (14.3))

$$\begin{aligned} \lambda(x) = (F^*\omega)(x)(e_1, \ldots, e_n) &= \omega(F(x))(dF_x e_1, \ldots, dF_x e_n) \\ &= \omega(F(x))(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)) \\ &= (\omega \circ F)(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n})(x). \quad \square \end{aligned}$$

Corol·lari 14.2.8 *Sigui $F : U \longrightarrow V$ diferenciable entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i sigui $\eta = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ l'element de volum de $\mathbb{R}^n$. Llavors*

$$F^*\eta = J_F \eta$$

on J_F és el jacobià de F.

Demostració. Pel teorema anterior

$$\begin{aligned} F^*\eta &= (\eta \circ F)(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n})\, \eta \\ &= \det(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n})\eta. \quad \square \end{aligned}$$

Diferencial exterior

Definició 14.2.9 *La* diferencial exterior *és una aplicació*

$$d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

que associa a cada k-forma

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$$

la $(k+1)$-forma

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} da_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^{k+1}(U).$$

Proposició 14.2.10 *La diferencial exterior compleix les propietats següents:*

1. $d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta$.
2. $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta, \quad \alpha\in\Omega^k(U), \beta\in\Omega^q(U)$.
3. $d^2 = 0$.
4. *Si $F : U \longrightarrow V$ és un difeomorfisme, i $\omega \in \Omega^k(V)$, llavors*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Demostració. 1) Evident.

2) Comencem amb el cas particular en que α i β són 0-formes, és a dir, funcions sobre U. Diguem-ne f i g.

Llavors

$$\begin{aligned}
d(fg) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}dx_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dx_i \\
&= dfg + fdg \\
&= df\wedge g + f\wedge dg.
\end{aligned}$$

Per linealitat només cal provar 2) per al cas particular

$$\begin{aligned}\alpha &= f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},\\ \beta &= g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.\end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned}d(\alpha\wedge\beta) &= d(fg dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q})\\ &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}\\ &= (df)g \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}\\ &+ f(dg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}\\ &= (df) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}\\ &+ (-1)^k f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}\\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \quad \square\end{aligned}$$

3) Per linealitat només cal provar-ho per al cas particular

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Però llavors

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

$$\begin{aligned}d(d\alpha) &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_r} dx_r \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\\ &= \sum_{1\le r<j\le n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_r} dx_r \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_r} dx_j \wedge dx_r\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

4) Com que sabem, per la Proposició 14.2.6, que aquesta igualtat és certa per a $k=0$ procedim per inducció. Per linealitat podem suposar $\omega = dx_i \wedge \eta$, amb $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$

Llavors, utilitzant que $d(F^*(dx_i)) = d^2 F^* x_i = 0$, tenim

$$\begin{aligned}F^*(d\omega) &= F^*(d(dx_i \wedge \eta)) = -F^*(dx_i \wedge d\eta)\\ &= -F^*(dx_i) \wedge F^*(d\eta)\\ &\overset{HI}{=} -F^*(dx_i) \wedge d(F^*\eta)\\ &= d(F^*(dx_i) \wedge F^*\eta)\end{aligned}$$

Exemple 14.2.11 *Siguin (x_1, x_2) i (y_1, y_2) dos sistemes de coordenades de $\mathbb{R}^2$. Per exemple polars i cartesianes. Suposem que*

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 = b_1 dy_1 + b_2 dy_2. \tag{14.4}$$

Demostreu que la definició de diferencial "no depèn de les coordenades", és a dir

$$(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2 = (\frac{\partial b_2}{\partial y_1} - \frac{\partial b_1}{\partial y_2}) dy_1 \wedge dy_2.$$

Solució. Hem de veure que

$$(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}) = (\frac{\partial b_2}{\partial y_1} - \frac{\partial b_1}{\partial y_2}) \det(J),$$

on J és el jacobià del canvi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Com

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} dx_2,$$

substituint a (14.4) tenim

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ a_2 &= b_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Derivant la primera respecte x_2, la segona respecte x_1 i restant obtenim el resultat.

Exemple 14.2.12 *Calculem la diferencial de les formes de $\mathbb{R}^3$, $\alpha = xdy + dz$, $\beta = x^2 dy \wedge dz$, $\gamma = xdx \wedge dy \wedge dz$.*

Solució.

$$\begin{aligned} d\alpha &= dx \wedge dy, \\ d\beta &= 2x dx \wedge dy \wedge dz, \\ d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 14.2.13 [2]Sigui $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$F(u, v) = (u^2, v^2, 2uv).$$

Sigui $\omega = x\, dy \wedge dz$. Calculem $F^*\omega$.

Solució. Utilitzant les dues propietats vistes a la proposició anterior tenim

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*(x\, dy \wedge dz) = F^*(x)\, F^*(dy) \wedge F^*(dz) \\ &= (x \circ F) d(y \circ F) \wedge d(z \circ F) \\ &= (u^2) d(v^2) \wedge d(2uv) \\ &= u^2 (2v dv) \wedge (2u dv + 2v du) \\ &= -4u^2 v^2 du \wedge dv \end{aligned}$$

Observeu doncs que a la pràctica per calcular el pull-back de ωnomés hem de substituir x per u^2, y per v^2 i z per $2uv$ a l'expressió de ω.

14.3 Formes diferencials sobre superfícies

Quan treballem amb superfícies sovint tenim subconjunts de $\mathbb{R}^3$ que no són oberts, i als que no podem per tant aplicar de manera automàtica els resultats sobre formes obtinguts a la secció anterior per a formes sobre oberts. Una de les maneres d'arreglar això és definir formes sobre superfícies.

Només en donarem unes pinzellades ja que no és l'objectiu d'aquestes notes.

Definició 14.3.1 *Una k-forma diferencial ($k = 0, 1, 2$) definida en un obert W d'una superfície S de $\mathbb{R}^3$ és una aplicació*

$$\omega : W \longrightarrow \bigcup_{x \in S} \Lambda^k (T_x S)^*$$

tal que

$$\omega(x) \in \Lambda^k (T_x S)^*.$$

Pràcticament és la mateixa definició de formes sobre oberts de $\mathbb{R}^n$ però ara tenim en cada punt aplicacions multilineals alternades no de tot $\mathbb{R}^n$ sinó del subespai vectorial $T_x S$, que va canviant doncs, amb cada punt.

[2]Apunts Gil Solanes.

A partir d'aquí es pot veure que, excepte la diferencial exterior, les demés operacions introduïdes per a formes de $\mathbb{R}^n$ a la secció 14.2, pull-back, producte exterior, etc., funcionen exactament igual per a formes sobre superfícies, ja que consisteixen en copiar en cada punt fets d'àlgebra lineal.

La diferenciabilitat de ω és una mica més delicada de definir que en el cas de formes sobre $\mathbb{R}^n$ ja que a la dreta no tenim un espai vectorial.

Abans de concretar aquest punt donem l'exemple paradigmàtic.

La diferencial d'una funció com 1-forma

Si f és una funció diferenciable definida en un entorn obert W de S, es defineix[3] la diferencial de f en un punt $x \in W$ com l'element de $(T_xS)^*$ donat per

$$df_x(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(f \circ \gamma(t))$$

on $\gamma(t)$ és una corba sobre S tal que $\gamma(0) = x$ i $\gamma'(0) = v$.

Podem pensar doncs

$$df : W \longrightarrow \bigcup_{x \in S} (T_xS)^*$$

de manera que *la diferencial d'una funció sobre S és una 1-forma sobre S.*

Diferenciabilitat

Sigui (U, φ) una carta local de S. Direm que una 1-forma sobre S és diferenciable si les aplicacions de U a $\mathbb{R}$ donades per

$$x \mapsto \omega(\varphi(x))(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x)), \qquad x \mapsto \omega(\varphi(x))(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x))$$

són diferenciables.

Direm que una 2-forma és diferencaible si l'aplicació de U a $\mathbb{R}$ donada per

$$x \mapsto \omega(\varphi(x))(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x))$$

és diferenciable.

[3]Valen els mateixos comentaris que hem fet per definir diferencial d'una aplicació entre superfícies, Definició 4.6.3, pàgina 102.

14.4 Element d'àrea

Definició 14.4.1 *L'element d'àrea d'una superfície és la 2-forma definida sobre aquesta superfície per al condició de que valgui* 1 *sobre una base ortonormal.*

Sigui S una superfície orientada per la seva aplicació de Gauss $\mathcal{N} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Llavors l'element d'àrea sobre S és la 2-forma[4]

$$dS : S \longrightarrow \bigcup_{x \in S} \Lambda^2(T_x S)^*$$

donada per

$$dS(x)(X, Y) = \langle \mathcal{N}(x), X \wedge Y \rangle = \det(\mathcal{N}(x), X, Y), \quad X, Y \in T_x S.$$

En efecte, si (e_1, e_2) és una base ortonormal positiva de $T_x S$ llavors

$$dS(x)(e_1, e_2) = \det(\mathcal{N}(x), e_1, e_2) = 1.$$

Recíprocament, si una certa 2-forma ω sobre S compleix que en cada punt $x \in S$ i per cada base ortonormal positiva (e_1, e_2) de $T_x S$ compleix $\omega(x)(e_1, e_2) = 1$ llavors

$$\omega(x)(X, Y) = \det(X, Y) = \det(\mathcal{N}(x), X, Y) = dS(x)(X, Y), \quad X, Y \in T_x S.$$

("determinant" sempre vol dir el determinant de les components d'aquests vectors respecte d'una base ortonormal).

Proposició 14.4.2 *Sigui* (U, φ) *una carta local de* S *i sigui* dS *l'element d'àrea de* S*. Llavors*

$$\varphi^*(dS) = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$$

Demostració. El pull-back de dS s'escriu com

$$\varphi^*(dS) = A du \wedge dv$$

per a una certa funció $A = A(u, v)$, ja que aquest pull-back és una 2-forma sobre U. La funció A la podem determinar així:

$$A = \varphi^*(dS)(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = dS(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = \det(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = \|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|.$$

[4] La notació dS no indica la diferencial d'alguna cosa.

Per tant,

$$\varphi^*(dS) = \|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v}\| du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv. \quad \square$$

L'element d'àrea el podem considerar, almenys localment, com la restricció a la superfície d'una 2-forma definida sobre un obert de $\mathbb{R}^3$. En efecte, suposem per simplificar que S és la gràfica de $z = z(x, y)$.

Llavors estenem la definició del normal a la superfície $\mathcal{N}$ a un obert de S així

$$\mathcal{N}(x, y, z) = \mathcal{N}(x, y, z(x, y))$$

Llavors definim

$$\omega = i_{\mathcal{N}}\, \eta$$

on $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ és l'element de volum de $\mathbb{R}^3$.

La notació $i_{\mathcal{N}}\, \eta$, anomenada contracció de η amb $\mathcal{N}$, es defineix així:

$$i_{\mathcal{N}}\, \eta(X, Y) = \eta(\mathcal{N}, X, Y)$$

D'aquesta manera, si prenem una base ortonormal positiva e_1, e_2 de $T_P(S)$ tenim

$$\omega(e_1, e_2) = \eta(\mathcal{N}, e_1, e_2) = 1$$

ja que $(\mathcal{N}, e_1, e_2)$ és una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$.

És a dir, ω restringida a la superfície és el seu element d'àrea.

També podem estendre $\mathcal{N}$ a un entorn tubular (definició 6.7.1, pàgina 153) $N_\epsilon S$ de S definint

$$\mathcal{N}(F(t, x)) = \mathcal{N}(x)$$

on

$$F(x, t) = x + t\mathcal{N}(x)$$

parametritza l'entorn tubular.

14.5 Exercicis

Exercici 14.5.1 *Demostreu que una aplicació k- multilineal ω és alternada si i només si $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$ quan almenys dos d'aquests vectors són iguals.*

Demostració. Suposem que ω és zero quan dos dels k vectors als quals s'aplica són iguals. Prenem $v_1, \ldots, v_k$ arbitraris i per a cada parella $1 \leq i, j \leq k$ posem la suma $v_i + v_j$ als llocs i i j. Tenim

$$\omega(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots v_i + v_j, \ldots, v_n) = 0$$

i per tant

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots v_j, \ldots, v_n) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots v_i, \ldots, v_n)$$

Com tota permutació és producte de transposicions i el signe és -1 elevat al número de transposicions, hem acabat.

Exercici 14.5.2 *Demostreu que per a tota $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ existeix $a \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\omega(u, v) = \langle a, u \wedge v \rangle = \det(a, u, v).$$

Observeu que, si a és unitari, $|\omega(u, v)|$ és l'àrea del paral·lelogram generat per u, v projectat sobre $a^\perp$.

Solució. Sabem que

$$\omega = Adx \wedge dy + Bdx \wedge dz + Cdy \wedge dz$$

Per tant, si posem $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$ tenim

$$\omega(u, v) = A(u_1v_2 - u_2v_1) + B(u_1v_3 - u_3v_1) + C(u_2v_3 - u_3v_2) = \det(a, u, v)$$

on $a = (C, -B, A)$.

Prenem ara una base ortonormal (e_1, e_2) a $a^\perp$ de manera que $(e_1, e_2, \frac{a}{\|a\|})$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Llavors, si posem $u = (u_1', u_2', u_3')$ i $v = (v_1', v_2', v_3')$ les coordenades de u, v en aquesta base, tenim

$$\det(a, u, v) = \begin{vmatrix} 0 & u_1' & v_1' \\ 0 & u_2' & v_2' \\ \|a\| & u_3' & v_3' \end{vmatrix} = \|a\| \begin{vmatrix} u_1' & v_1' \\ u_2' & v_2' \end{vmatrix}$$

i aquest determinant 2×2 és l'àrea del paral·lelogram determinat per les projeccions de u i v sobre $a^\perp$.

Exercici 14.5.3 *Demostreu que si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *i* $(u_1, \ldots, u_n)$ *són dues bases ortonormals positives de* $\mathbb{R}^n$ *llavors*

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = u_1^* \wedge \cdots \wedge u_n^*$$

Solució. Sabem que

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \lambda u_1^* \wedge \cdots \wedge u_n^*$$

i per tant

$$\lambda = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \det(e_j^*(u_i))$$

però la matriu $(e_j^*(u_i))$ és la matriu del canvi de base entre bases ortonormals i per tant és una matriu ortogonal. El seu determinant és doncs ± 1. Si les dues bases són positives aquest determinant és 1.

Capítol 15

Subvarietats

15.1 Subvarietats de dimensió k de $\mathbb{R}^n$

En aquestes notes no sortim mai de $\mathbb{R}^3$ però ara necessitem generalitzar la definició de superfície, que és un objecte de 'dimensió' 2, a dimensió 1 i 3. Per tal de fer un únic tractament per a dimensions $1, 2$ i 3 donem la definició general de k-subvarietat, que val en particular per a aquestes tres situacions a la vegada.

Definició 15.1.1 *Una k-subvarietat o subvarietat de dimensió k de $\mathbb{R}^n$, és un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $P \in M$ existeix un entorn obert W de P a $\mathbb{R}^n$ i una aplicació $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, on U és un obert de $\mathbb{R}^k$, amb $\varphi(U) = W \cap M$, tal que*

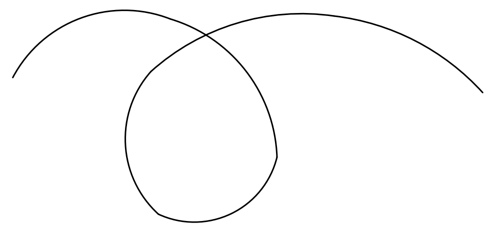
1. *$\varphi : U \longrightarrow W \cap M$ és homeomorfisme (quan dotem $W \cap M$ de la topologia induïda),*
2. *Per a tot $x \in U$, l'aplicació diferencial $d\varphi_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és de rang k (és a dir, injectiva).*

Es diu que la parella (U, φ), que apareix a la definició anterior, és una carta local de M.

Definició 15.1.2 (Atles) *Un* atles *d'una k-subvarietat M és una família de cartes locals (U_α, ψ_α) que recobreixen M, és a dir, $M = \bigcup_\alpha \psi_\alpha(U_\alpha)$.*

Si $n = 2$ o $n = 3$, i $k = 1$ les 1-subvarietats són essencialment les traces de corbes parametritzades injectives definides sobre oberts.

La condició d'injectivitat és per evitar situacions com la de la figura.



En canvi, el cercle S^1 de $\mathbb{R}^2$ és una 1-subvarietat de $\mathbb{R}^2$ ja que es pot recobrir, per exemple, per les cartes

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t), \quad t \in (0, 2\pi)\\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t), \quad t \in (\pi, 3\pi)\end{aligned}$$

en canvi no es pot parametritzar per una sola carta injectiva.

Per exemple, la unió de dos cercles disjunts és una 1-subvarietat (no connexa). Però no és una corba parametritzada. En canvi, la figura de la pàgina 82 és una corba parametritzada que no és 1-subvarietat.

Si $n = 3$ i $k = 2$ les 2-subvarietats són les superfícies.

Si $n = 2$ i $k = 2$ les 2-subvarietats són els oberts de $\mathbb{R}^2$.

Si $n = 3$ i $k = 3$ les 3-subvarietats són els oberts de $\mathbb{R}^3$.

Els resultats del capítol 4 sobre superfícies s'adapten sense massa dificultat a k-subvarietats. Però una diferència important que apareix és que no tenim codimensió 1, sinó $n - k$.

Per exemple,

Proposició 15.1.3 *Sigui $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable. El* gràfic *de F,*

$$M = \{(x, F(x)); x \in \mathbb{R}^k\},$$

és una k-subvarietat de $\mathbb{R}^{k+n}$.

Demostració. Es pot adaptar la mateixa demostració que fèiem per a superfícies, Proposició 4.2.1, vegeu l'exercici 15.2.1.□

Proposició 15.1.4 *Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, amb U obert, una aplicació diferenciable. Si la diferencial en cada punt de la* fibra *$F^{-1}(a)$, per a un cert $a \in \mathbb{R}^k$, és exhaustiva (rang k), llavors $F^{-1}(a)$ és una $(n-k)$-subvarietat.*

Demostració. Conseqüència del teorema d'estructura de les submersions locals, vegeu l'exercici 15.2.2. □

Proposició 15.1.5 *Un subconjunt M de $\mathbb{R}^n$ és una k-subvarietat si i només si per cada punt $P \in M$ existeix un entorn obert W de P a $\mathbb{R}^n$, un altre conjunt V obert de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : W \longrightarrow V$ tal que*

$$h(W \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Demostració. Conseqüència del teorema d'estructura de les submersions locals, vegeu l'exercici 15.2.3. □

Els canvis de coordenades són difeomorfismes, etc.

Espai tangent

El concepte d'espai tangent en un punt d'una superfície es generalitza sense problemes a k-subvarietats. Copiem la definició 4.5.1:

Definició 15.1.6 *Sigui P un punt d'una k-subvarietat M. L'espai tangent a M en P, T_PM, és el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ format pel vectors tangents en P de totes les corbes sobre M que passen per P.*

És un espai vectorial de dimensió k (adaptació arguments Proposició 4.5.2, vegeu l'exercici 15.2.4).

Orientació

Orientar M és orientar els seus plans tangents, de manera diferenciable. En el cas de superfícies això és equivalent a l'existència de l'aplicació de Gauss, ja que podem dir llavors que una base $(e_1, e_2) \in T_PS$ és positiva si i només si $(e_1, e_2, \mathcal{N})$ és positiva, però ara les coses es compliquen perquè no tenim codimensió 1. Més concretament,

Definició 15.1.7 *Direm que una k-subvarietat M és orientable si hem pogut elegir una orientació sobre cada T_PM (és a dir, fixar una base[1]) de manera*

[1] De fet una orientació en un espai vectorial és una classe d'equivalència en el conjunt de totes les bases respecte de la relació d'equivalència que diu que dues bases són equivalents si només si el determinant de la matriu del canvi de base és positiu. Clarament només hi ha dues classes. Orientar l'espai vectorial vol dir elegir-ne una d'elles.

que per cada punt $P \in M$ existeix una carta local (U, φ) tal que tots els isomorfismes $d\varphi_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{\varphi(x)}M$, $\forall x \in U$, conserven la orientació.

Suposem sempre $\mathbb{R}^k$ amb la orientació canònica, és a dir, la que fa que la base canònica sigui positiva.

Que $d\varphi_x$ conservi la orientació vol dir que la base $(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k})$ de $T_{\varphi(x)}M$ sigui positiva (el determinant de la matriu del canvi de base entre aquesta base i la base prefixada sigui positiu).

Aquestes cartes que conserven la orientació es diuen *compatibles amb la orientació.*

Proposició 15.1.8 *Una k-subvarietat M és orientable si i només si es pot recobrir per un atles (U_α, ψ_α) tal que en qualsevol punt P de la intersecció de dues d'aquestes cartes, $P \in \psi_\alpha(U_\alpha) \cap \psi_\beta(U_\beta)$, es compleixi*

$$\det a_{ij} > 0,$$

on (a_{ij}) és la matriu del canvi de base, és a dir,

$$\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_j}.$$

Demostració. Si és orientable, prenem un atles format per cartes compatibles, que existeix per definició, i és clar que aquest atles compleix la condició.

Recíprocament si existeix un atles amb canvis de coordenades positius, orientem cada espai tangent amb la base de parcials corresponent a qualsevol carta i hem acabat. □

15.2 Exercicis

Exercici 15.2.1 *Sigui $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable. El* gràfic *de F,*

$$M = \{(x, F(x)); x \in \mathbb{R}^k\},$$

és una k-subvarietat de $\mathbb{R}^{k+n}$.

Solució. Adaptem la demostració de la Proposició 4.2.1.

Exercici 15.2.2 *Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, amb U obert i $n \geq k$, una aplicació diferenciable tal que la diferencial en cada punt de la* fibra *$F^{-1}(a)$, per a un cert $a \in \mathbb{R}^k$, és exhaustiva (rang k). Demostreu que $F^{-1}(a)$ és una $(n-k)$-subvarietat.*

Solució. Pel teorema d'estructura de les submersions locals sabem que per a cada punt $P = (p_1, \ldots, p_n) \in F^{-1}(a)$ de la fibra existeix un difeomorfisme local $h : V \longrightarrow h(V)$, amb $P \in h(V)$, tal que

$$F(h(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Com $P \in h(V)$, tenim $P = h(Q)$ amb $Q \in V$, i per la igualtat anterior i ser $F(P) = a$,

$$Q = (a, q_{k+1}, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Prenem com carta local (W, φ) amb

$$U = \{(x_{k+1}, \ldots, x_n); (a, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in V\}$$

i

$$\varphi(x_{k+1}, \ldots, x_n) = h(a, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Observem que $(q_{k+1}, \ldots, q_n) \in U$ de manera que U és un obert no buit, i que

$$F(\varphi(x_{k+1}, \ldots, x_n)) = Fh(a, x_{k+1}, \ldots, x_n) = a.$$

és a dir, $\varphi(W) \subseteq F^{-1}(a)$.

Ara és fàcil veure que φ és un homeomorfisme amb diferencial injectiva.

Exercici 15.2.3 (Definició equivalent de k-subvarietat) *Proveu que un subconjunt M de $\mathbb{R}^n$ és una k-subvarietat si per cada punt $P \in M$ existeix un entorn obert W de P a $\mathbb{R}^n$, un altre conjunt V obert de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : W \longrightarrow V$ tal que*

$$h(W \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V; x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

Solució. Que tota k-subvarietat es pot posar localment "plana" és conseqüència del teorema d'estructura de les immersions locals, Teorema 2.1.1. Recíprocament, si per cada punt $P \in M$ existeix un entorn obert W de P a $\mathbb{R}^n$, un altre conjunt V obert de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : W \longrightarrow V$ tal que

$$h(W \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

llavors M és una k-subvarietat ja que podem agafar cartes locals (U, φ) amb

$$\begin{aligned} U &= F^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) \\ \varphi &= h^{-1} \circ F_{|U} \end{aligned}$$

on $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ està fonada per $F(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. És immediat comprovar que φ és homeomorfisme amb diferencial injectiva.

Exercici 15.2.4 *Sigui P un punt d'una k-subvarietat M de $\mathbb{R}^n$. Demostreu que $T_P M$ és un espai vectorial de dimensió k.*

Solució. Aquest resultat, per al cas de superfícies, és la Proposició 99, pàgina 99. Els mateixos arguments valen aquí. Sigui (U, φ) una carta local amb $P \in \varphi(U)$. Les corbes sobre M que passen per P es poden escriure com $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$, on $\alpha(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$ és una corba de U. Això és conseqüència del Corol·lari 4.4.3, que tot i que està enunciat per a superfícies val exactament igual, amb la mateixa demostració, per a k-subvarietats, ja que el resultat és conseqüència directa del teorema d'estructura de les immersions locals.

Prenem una d'aquestes corbes i suposem que $P = \varphi(p)$ amb $p = (p_1, \dots, p_k)$, i $\alpha(t_0) = (p_1, \dots, p_k)$ de manera que $\gamma(t_0) = \varphi(\alpha(t_0)) = P$.

Per calcular el vector tangent en el punt P només hem de derivar,

$$\frac{d\varphi(\alpha(t))}{dt}_{|t=t_0} = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_p \frac{du}{dt}_{|t=t_0} \tag{15.1}$$

Ara bé,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_p = \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial \varphi^n}{\partial u_i}\right)_p$$

és el vector tangent a la corba $\varphi(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_k)$ en $t = 0$.

Així doncs, la igualtat (15.1) diu que tot vector tangent a M en P és combinació lineal dels k vectors de $\mathbb{R}^n$ (linealment independents per definició de k-subvarietat) tangents a la superfície en P

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right)_p$$

Recíprocament, qualsevol combinació lineal d'aquests vectors

$$\sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_p$$

és vector tangent en P a una corba sobre M, concretament a la corba $\varphi(p_1 + \lambda_1 t, \dots, p_k + \lambda_k t)$, en $t = 0$.

Així, doncs, hem vist que

$$T_P M = \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right)_p \right\rangle,$$

per a qualsevol carta local que contingui P.

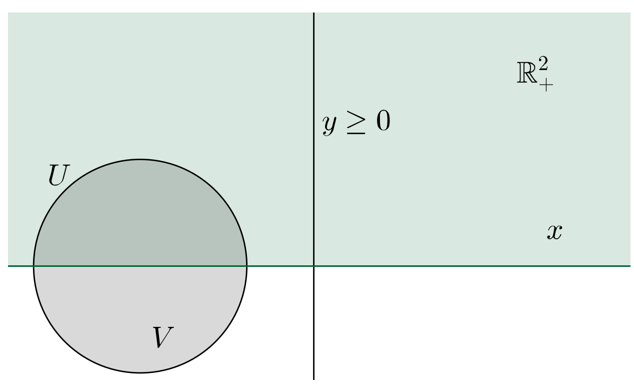
Capítol 16

Subvarietats amb vora

16.1 El semiespai $\mathbb{R}^k_+$

Denotem
$$\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k; x_k \geq 0\}.$$

Dotem aquest *semiespai* de la topologia induïda per $\mathbb{R}^k$: els oberts U de $\mathbb{R}^k_+$ són de la forma $U = \mathbb{R}^k_+ \cap V$, essent V obert de $\mathbb{R}^k$.



I per poder parlar de diferenciabilitat sobre aquest espai topològic donem la definició següent.

Definició 16.1.1 *Una aplicació $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre un obert U de $\mathbb{R}^k_+$ es diu* diferenciable *en un punt $P \in U$ si existeix un entorn obert V de P a $\mathbb{R}^k$ i una aplicació diferenciable $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_{U\cap V} = f|_{U\cap V}$.*

En aquest cas es defineix la *diferencial* de f com la diferencial de l'extensió F, és a dir, per a tor punt $P \in U$, U obert de $\mathbb{R}^k_+$,

$$(df)_P = (dF)_P : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

No depèn de l'extensió. En efecte, suposem F i G funcions diferenciables definides en un entorn obert V[1] de P a $\mathbb{R}^k$ i tals que $F|_{V\cap U} = G|_{V\cap U}$. Llavors, com $P \in V \cap U$, que és un obert de $\mathbb{R}^k_+$, per a valors petits de t positius encara tindrem $P + te_i \in V \cap U$, on $e_1, e_2, \ldots, e_k$ és la base canònica de $\mathbb{R}^k$. Per tant,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_P = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(P+te_i) - F(P)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(P+te_i) - G(P)}{t} = \frac{\partial G}{\partial x_i}\Big|_P.$$

Diem que f és diferenciable a U quan és diferenciable en tots els punts de U. Això no implica, en principi, que f sigui la restricció a U d'una sola extensió.

Resumint, *els oberts de $\mathbb{R}^k_+$ són la restricció a $\mathbb{R}^k_+$ dels oberts de $\mathbb{R}^k$ i les aplicacions diferenciables de $\mathbb{R}^k_+$ són, localment, la restricció a $\mathbb{R}^k_+$ de les aplicacions diferenciables de $\mathbb{R}^k$. La diferencial d'aquestes aplicacions és la diferencial de les seves extensions.*

16.2 Subvarietats amb vora

Les subvarietats amb vora que ara estudiarem són, essencialment, subconjunts de $\mathbb{R}^n$ que locament són com $\mathbb{R}^k_+$.

Definició 16.2.1 (Subvarietat amb vora) *Una k-subvarietat amb vora és un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $P \in M$ existeix un entorn W de P en $\mathbb{R}^n$, i una aplicació $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, on U és un obert de $\mathbb{R}^k_+$, amb $\varphi(U) = W \cap M$, tal que*

1. *$\varphi : U \longrightarrow W \cap M$ és homeomorfisme (quan dotem $W \cap M$ de la topologia induïda),*
2. *Per a tot $x \in U$, l'aplicació diferencial $d\varphi_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és de rang k (és a dir, injectiva).*

[1] V és la intersecció dels oberts on estan definides F i G.

És a dir, exactament la mateixa definició 15.1.1 de subvarietat, canviant $\mathbb{R}^k$ per $\mathbb{R}^k_+$.

Cada parell (U, φ) amb les anteriors propietats es diu *carta local* o *parametrització local*.

Definició 16.2.2 (Vora) *Direm que un punt P de M és* interior *si existeix una carta local (U, φ) de M tal que $P \in \varphi(U \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+))$. El conjunt de punts no interiors s'anomena* vora *de M i es denota ∂M.*

Així $P \in \partial M$ si $P = \varphi(p_1, \ldots, p_{k-1}, 0)$.

Teorema 16.2.3 *La definició de punt interior no depèn de la carta local.*

Demostració. Exercici 16.4.8.[2] □

El que vol dir aquest teorema és que si tenim dues cartes (U, φ), (V, ψ) que contenen P i $P \in \varphi(U \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+))$ llavors $P \in \psi(V \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+))$. Equivalentment, si P és interior respecte φ llavors també és interior respecte ψ.

Resumint, podem dir que P *és interior si la seva última coordenada és estrictament positiva, i de la vora si la seva última coordenada és* 0 (respecte qualsevol carta).

Veurem a la Proposició 16.2.9 que el conjunt de punts interiors d'una k-subvarietat amb vora és una k-subvarietat sense vora, i el conjunt de punts de la vora és una $(k-1)$-subvarietat sense vora.

Atenció perquè no s'ha de confondre la vora amb la frontera topològica. Per exemple, l'interval $M = (0, 1]$ és una 1-subvarietat de $\mathbb{R}$ amb vora, la seva vora és $\partial M = \{1\}$, i la seva frontera topològica és el conjunt de dos elements $Fr(M) = \{0, 1\}$. Amb la nostra definició sempre es compleix que $\partial(M) \subset M$, mentre que en general $Fr(M) \not\subset M$.

Exemples.

a) $\mathbb{R}^k_+$ és una k-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^k$.

b) $[0, 1] = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}$ és una 1-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^2$ (exercici 16.4.1).

c) La bola tancada de $\mathbb{R}^n$ (exercici 16.4.4).

[2] Vegeu també l'observació 16.2.8.

d) L'hemisferi tancat $S^2 \cap \mathbb{R}^3_+$ (exercici 16.4.5).

e) Un cilindre tancat (exercici 16.4.6).

Per qüestions tècniques va bé tenir present el resultat següent.

Teorema 16.2.4 *Els canvis de coordenades entre cartes d'una k-subvarietat amb vora són diferenciables.*

Demostració. Exercici 16.4.12. □

Espai tangent

Observem primerament que si (U, φ) és una carta local de M, malgrat que tots els punts de U compleixen $x_k \geq 0$, el vector $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ està ben definit com

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = (d\varphi)_p(\frac{\partial}{\partial x_k}) = (d\varphi)_p(0, \ldots, 0, 1).$$

Recordeu que hem demostrat que la diferencial de φ està ben definida en el sentit de que no depèn de l'extensió.

Per tant, té sentit la definició següent.

Definició 16.2.5 *Sigui M una k-subvarietat amb vora i sigui $P \in M$. Sigui (U, φ) una carta local amb $P = \varphi(p) \in \varphi(U)$. Llavors*

$$T_P(M) = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}_p, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}_p \rangle.$$

En particular $T_P M$ un espai vectorial de dimensió k. Aquesta definició té sentit tant si P és interior com de la vora. Si el punt és interior podem caracteritzar aquest espai així:

Proposició 16.2.6 *Sigui P un punt interior d'una k-subvarietat amb vora M. L'espai tangent a M en P, $T_P M$, és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ format pels vectors tangents en P de totes les corbes sobre M que passen per P.*

Demostració. Com a 4.5.2. □

Ara bé, per als punts de la vora a vegades convé parlar dels vectors tangents "interiors".

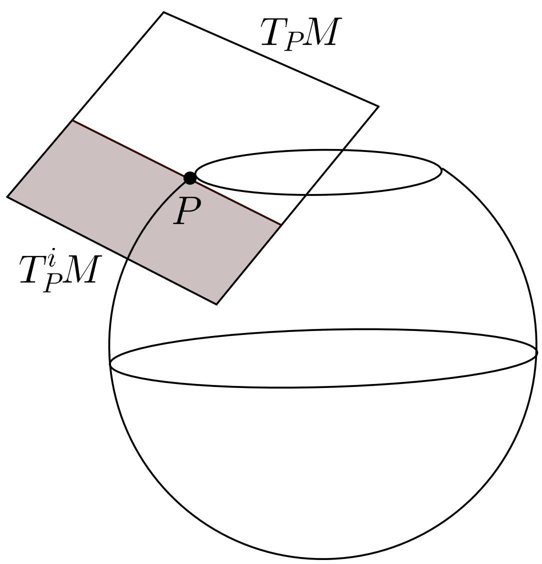
Es defineix el conjunt de vectors interiors T_P^iM de T_PM, amb $P \in \partial M$, per

$$T_P^iM = \{v \in T_PM; v = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}_p, \ a_k \geq 0\},$$

on (U, φ) és una carta local que conté P amb $P = \varphi(p)$.

Equivalentment

$$T_P^iM = d\varphi_p(\mathbb{R}^k_+).$$



Aquests vectors es poden caracteritzar pel resultat següent que demostra de passada que *la definició de T_P^iM que hem donat no depèn de la carta.*

Proposició 16.2.7 *Sigui M una k-subvarietat amb vora i $P \in \partial M$. Es compleix que*

$$T_P^iM = \{\alpha'(0); \alpha : [0, \delta) \longrightarrow M \text{ diferenciable amb } \alpha(0) = P\}. \qquad (16.1)$$

Demostració. Exercici 16.4.13. □

Recordem que dir que $\alpha : [0, \delta) \longrightarrow M$ és diferenciable en 0 vol dir[3], per la definició 16.1.1, que existeix $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que

$$\beta(t) = \alpha(t), \quad t \geq 0.$$

La notació $\alpha'(0)$ vol dir $\beta'(0)$, o, com hem comentat en el peu de pàgina, la derivada de α en el 0 per la dreta.

Observació 16.2.8 Els arguments de la prova d'aquest resultat, donats a l'exercici 16.4.13, mostren que un punt P no pot ser interior respecte una carta i de la vora respecte un altre. En efecte, si P és interior respecte una carta (V, φ), $P = \varphi(p)$, el conjunt de vectors $\alpha'(0)$, amb $\alpha(t)$ corba sobre M amb $\alpha(0) = P$, és tot el subespai $d\varphi_p(\mathbb{R}^k)$.

Com un subespai no pot ser igual a un semiespai, P no pot ser de la vora respecte d'una carta i interior respecte d'una altra. Vegeu una altra prova d'aquest fet a l'exercici 16.4.8.

Els vectors de $T_PM \setminus T_P^iM$ es diuen *exteriors*. És a dir, $v \in T_PM$ és exterior si respecte una certa parametrització (U, φ) (i per tant, pel que acabem de dir a l'observació, respecte tota parametrització) s'escriu com

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}_p, \ a_k < 0.$$

La vora és una subvarietat sense vora

Ara que ja sabem que el concepte de punt interior i per tant de punt de la vora està ben definit ja podem demostrar el resultat següent.

Proposició 16.2.9 *El conjunt de punts interiors d'una k-subvarietat amb vora és una k-subvarietat sense vora, i el conjunt de punts de la vora és una $(k-1)$-subvarietat sense vora.*

Demostració. Primera part: punts interiors. Sigui N el conjunt de punts interiors d'una k-subvarietat amb vora M, i sigui $P \in N$. Això vol dir que existeix una carta (U, φ) de M amb

$$P = \varphi(p_1, \ldots, p_k), \quad (p_1, \ldots, p_k) \in U, \quad p_k > 0.$$

[3] Es pot definir dient que existeixin derivades de tots els ordres per la dreta i es pot veure que aquesta definició i la que donem nosaltres són equivalents, però és un teorema complicat ja que s'ha de construir explícitament una extensió.

Per tant, denotant

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \{(x_1,\ldots,x_k)\in U; x_k>0\},\\ \tilde{\varphi} &= \varphi\big|_{\tilde{U}}.\end{aligned}$$

tenim que $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ és una carta local al voltant de P que compleix les condicions de la definició 15.1.1 de k-subvarietat (sense vora).

Segona part: punts de la vora. Sigui P un punt de la vora. Això vol dir que existeix una carta (U,φ) de M amb

$$P=\varphi(p_1,\ldots,p_k),\quad (p_1,\ldots,p_k)\in U,\quad p_k=0.$$

Denotem per i la injecció canònica $i:\mathbb{R}^{k-1}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ donada per $i(x_1,\ldots,x_{k-1}) = (x_1,\ldots,x_{k-1},0)$,
i definim

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= i^{-1}(U)\\ \tilde{\varphi} &= \varphi\circ i_{|\tilde{U}}\end{aligned}$$

Derivant $\tilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_{k-1})=\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},0)$ tenim

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}(y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(i(y)),\quad i=1,\ldots,k-1,\quad y\in\tilde{U}$$

i per tant les $k-1$ primeres columnes de la matriu de $d\tilde{\varphi}_y$ són linealment independents i per tant té rang $k-1$.

Com $\tilde{\varphi}$ és clarament homeomorfisme, $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ és una carta local al voltant de P que compleix les condicions de la definició 15.1.1 de $(k-1)$-subvarietat (sense vora). $\square$

Observem que hem demostrat de passada que si (U,φ) és una carta local d'una varietat amb vora M, llavors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_{k-1}}(x)$$

és una base de $T_{\varphi(x)}(\partial M)$.

16.3 Orientació de subvarietats amb vora

Com en cada punt d'una k-subvarietat amb vora hi tenim definit l'espai tangent $T_P M$, la definició de subvarietat orientable sembla adaptar-se automàticament a subvarietats amb vora: orientar una subvarietat amb vora vol dir elegir, de manera diferenciable, una orientació sobre cada espai tangent.

Però, amb aquesta definició, una subvarietat amb vora tan fàcil com l'interval $[0,1]$, no seria orientable ja que no es pot tapar, com subvarietat amb vora, amb dues cartes d'orientacions compatibles. Vegeu el problema 16.4.1.

Per això es dóna la definició següent.

Definició 16.3.1 *Una k-subvarietat amb vora es diu orientable quan la k-subvarietat sense vora formada pels seus punts interiors és orientable.*

Orientació de la vora

Donada una orientació en una k-subvarietat amb vora M, és a dir, un atles orientable de la k-varietat dels punts interiors $\mathring{M}$, hi ha una manera canònica d'orientar ∂M que és la següent.

Definició 16.3.2 *Direm que una carta (U,ψ) de M és compatible amb la orientació de $\mathring{M}$ si per cada punt interior $y \in \psi(U)$, la base $(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_k})$ de $T_y M$ és positiva respecte de la orientació donada a $\mathring{M}$. En cas contrari, direm que (U,ψ) és negativa.*

Per continuïtat, i ser U connex, aquesta definició no depèn del punt interior.

Excepte en el cas $k = 1$, que es comporta diferent, si M és orientable, sempre podrem trobar al voltant de cada punt $P \in \partial M$ una carta compatible amb la orientació de $\mathring{M}$.

Proposició 16.3.3 *Si M és una k-varietat amb vora, $k \neq 1$, orientable, existeix un atles compatible amb la orientació.*

Demostració. Prenem un punt $P \in M$ i una carta (U,ψ) que el contingui. Podem suposar, fent un a translació, que $\psi(0, p_2, \ldots, p_k) = P$. Definim llavors

$\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_k) = \psi(-x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Això implica que haurem de restringir[4] U a aquells punts de U tals que al canviar de signe la primera component encara estiguin a U (com U és obert de $\mathbb{R}^k_+$ aquesta restricció es pot fer, excepte si $k = 1$ ja que no podem canviar el signe de x_k que ha de ser sempre positiva).

Com

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \; i = 2, \ldots, n$$

una de les dues bases

$$(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_k}), \quad (\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_k})$$

és positiva. Per tant, (U, ψ) o $(U, \tilde{\psi})$ és compatible amb la orientació. $\square$

Corol·lari 16.3.4 *Si M és una k-varietat amb vora, $k \neq 1$, orientable, llavors ∂M és orientable.*

Demostració. Sigui $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atles de M compatible amb la orientació, que existeix per la proposició anterior. Si P és un punt de la vora i $P \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ orientem $T_P(\partial M)$ dient que la base

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_{k-1}} \in T_P(\partial M),$$

és positiva.

Si també $P \in \varphi_\beta(U_\beta)$, a la intersecció $U_\alpha \cap U_\beta$ d'aquestes dues cartes, com[5]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{k} b_{ij} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i}, \quad b_{kj} = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1 \\
\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^{k} a_{ik} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i}, \quad a_{kk} > 0
\end{aligned}$$

la matriu del canvi de base és de la forma

[4]Considerem $U \cap s(U)$ on $s(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (-x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

[5]Utilitzem ara que la vora va a la vora.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1k} \\ & b_{ij} & & a_{2k} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{k-1,k} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{kk} \end{array}\right)$$

la qual té en els punts interiors determinant positiu, per ser l'atles compatible, i per tant, per continuïtat també té determinant positiu en els punts de la vora. Així el determinat del canvi de base

$$\det b_{ij} = \det(\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1})' > 0$$

amb $\tilde{\varphi}_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1}) = \varphi_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$, serà positiu en P. $\square$

Per motius que es veuran més endavant, quan estudiem el teorema de Stokes, orientarem la vora tal com acabem de fer en aquest corol·lari només quan k és parell; quan k és senar agafarem l'orientació oposada.[6]

Definició 16.3.5 *Sigui M és una k-varietat amb vora, $k \neq 1$, orientable, i sigui (U, φ) és una carta de M, compatible amb l'orientació. Sigui $P \in \partial M$.*

Llavors la base

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}} \in T_P(\partial M)$$

és positiva si i només si la base

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, (-1)^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in T_P(M)$$

és positiva.

Quan orientem ∂M d'aquesta manera direm que té la *orientació induïda* per la orientació de M.

Tenim el resultat següent.

Proposició 16.3.6 *Sigui M és una k-varietat amb vora, $k \neq 1$, orientable, i sigui (U, φ) és una carta de M, compatible amb l'orientació. Sigui $P \in \partial M$ i sigui $\nu \in T_P M$ un vector exterior*[7]*.*

---

[6]Estem distingint entre orientable i orientada.

[7]Observem que un vector ν és *exterior* si $-\nu$ és interior, és a dir, si hi ha una corba diferenciable $\gamma : [0, \epsilon) \longrightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = -\nu$. He denotat ν a aquest vector exterior perquè aquest paper el pot jugar el vector normal exterior. Però per a la definició la perpendicularitat no cal.

Llavors la base

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}} \in T_P(\partial M)$$

és positiva si i només si la base

$$(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}}) \in T_P(M)$$

és positiva.

Demostració. La base

$$(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}}) \in T_P(M)$$

és positiva si i només si la base

$$(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}}, (-1)^{k-1}\nu) \in T_P(M)$$

és positiva, i per tant si i només si

$$(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, (-1)^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) \in T_P(M)$$

és positiva, ja que ν i $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ tenen sentits oposats.□

Observem que podem dir que una base $(e_1, \dots, e_{k-1}) \in T_P(\partial M)$ és positiva si i només si $(\nu, e_1, \dots, e_{k-1}) \in T_P(M)$ és positiva. En efecte, per definició, $(e_1, \dots, e_{k-1})$ és positiva si

$$e_i = \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \text{ amb } \det(a_{ij}) > 0.$$

Per tant el determinant de la matriu del canvi de base entre $(\nu, e_1, \dots, e_{k-1})$ i $(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-1}})$ coincideix amb $\det(a_{ij})$ i és per tant positiu.

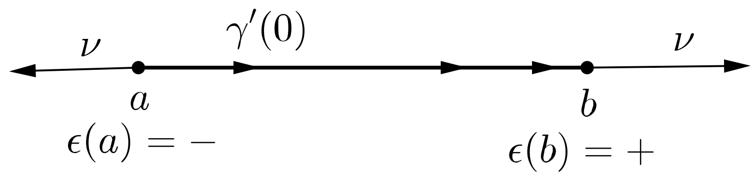
Mirem uns casos concrets.

Orientació de la vora de 1*-varietats.* En aquest cas la vora està formada per dos punts, si la 1-varietat donada és connexa amb vora no buida, i diem que la orientació d'un d'aquests punts x, és $\epsilon(x) = -1$ si la carta local

$\gamma : [0, a) \longrightarrow C$ amb $\gamma(0) = x$ és tal que $\gamma'(s)$, $s > 0$, és positiu respecte de la orientació dels punts interiors. I $\epsilon(x) = 1$ en cas contrari.

Tot i que estrictament parlant la definició 16.1.1 no té sentit per a $k = 1$, si l'apliquem a aquest cas diríem que la orientació és positiva si el vectors exterior ν és positiu respecte la orientació interior i negatiu en cas contrari. Per això la orientació és negativa a l'esquerra i positiva a la dreta.

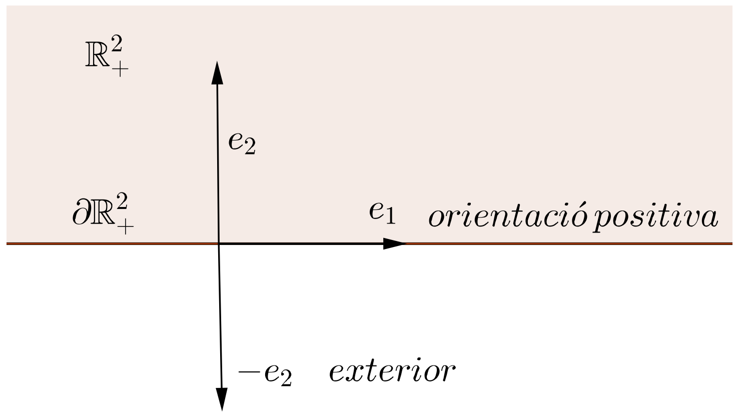
Així, la subvarietat amb vora $[a, b]$, parametritzada per $a \leq t \leq b$, que és orientable perquè (a, b) és orientable (està tapada per una sola carta $\varphi(t) = t$), té una vora formada disconnexa formada pels dos punts $\{a, b\}$ amb $\epsilon(b) = 1$ i $\epsilon(a) = -1$.



Observem que no hi ha cap carta de la subvarietat amb vora $[a, b]$ que contingui b compatible amb la orientació natural de (a, b). No tenim un atles compatible amb la orientació.

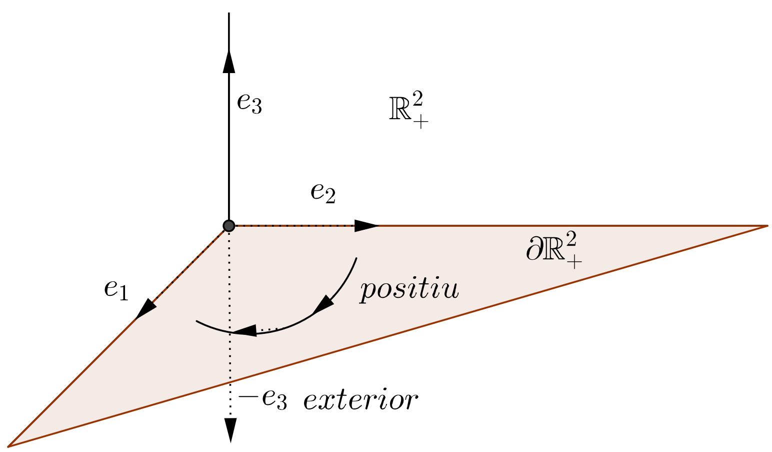
Orientació de $\partial\mathbb{R}^2_+$ induïda per la orientació de $\mathbb{R}^2_{>0}$. Prenem la base canònica (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ com orientació positiva de $\mathbb{R}^2_{>0}$. En particular e_1 és tangent a $\partial\mathbb{R}^2_+$.

Prenem com vector exterior $-e_2$. Llavors la base $(-e_2, e_1)$ és positiva respecte de la base canònica (el determinant del canvi de base és positiu) i per tant la orientació positiva de $\partial\mathbb{R}^2_+$ ve donada per $e_1 = \frac{\partial}{\partial x}$. Vegeu l'exercici 16.4.2.



Per això es diu que la orientació positiva de la vora és la que obtenim quan la recorrem de manera que deixem el recinte a l'esquerra.

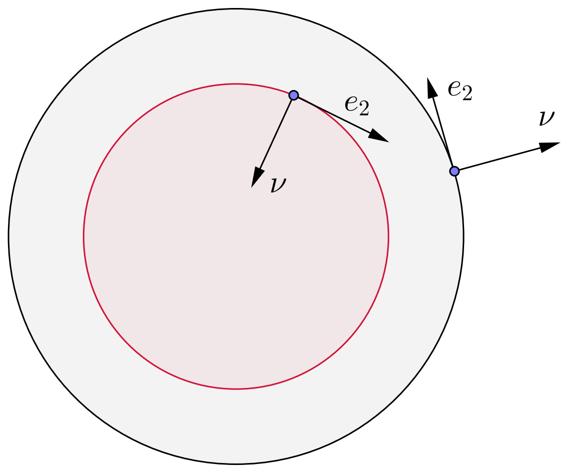
Orientació de $\partial\mathbb{R}^3_+$ induïda per la orientació de $\mathbb{R}^3_>$. Prenem la base canònica (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ com orientació positiva de $\mathbb{R}^3_{>0}$. En particular (e_1, e_2) és una base $\partial\mathbb{R}^3_+$. Prenem com vector exterior $-e_3$. Llavors la base $(-e_3, e_1, e_2)$ és negativa respecte de la base canònica (el determinant del canvi de base és negatiu), i per tant la orientació negativa de $\partial\mathbb{R}^3_+$ ve donada per la base $(e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y})$. Equivalentment, (e_2, e_1) és positiva amb la orientació induïda a la vora. Vegeu l'exercici 16.4.3.



Per això es diu que la orientació positiva de la vora és la que obtenim quan girem de manera que, en aplicar la llei de la ma dreta o llei del llevataps, anem en la direcció exterior al recinte.

Orientació de $\partial\mathbb{R}^k_+$. Els dos càlculs anteriors fan veure que $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k-1}})$ és positiva si i només si k és parell.

Orientació en un anell pla. A la figura es mostra el vector e_2 que dóna orientació positiva de la vora d'un anell per ser la base (ν, e_2) positiva essent ν el normal exterior.



Es per això que es recorda fàcilment el criteri d'orientació dient que *la orientació positiva correspon a caminar sobre la vora deixant el recinte a l'esquerra.*

16.4 Exercicis

Exercici 16.4.1 *Demostreu que*

$$[0,1] = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1\}$$

és una 1*-subvarietat amb vora de* $\mathbb{R}^2$*.*

Solució. Prenem les cartes locals (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) donades per

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & [0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (t,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & [0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (1-t,0) \end{array}$$

És immediat que es compleixen les condicions de subvarietat amb vora. Observeu que és orientable.

Exercici 16.4.2 *Demostreu que*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1\}$$

és una 2-subvarietat amb vora, orientable, de $\mathbb{R}^2$. Estudieu la orientació induïda a la vora.

Solució. Left to the reader.

Exercici 16.4.3 *Demostreu que*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1\}$$

és una 3-subvarietat amb vora, orientable, de $\mathbb{R}^2$. Estudieu la orientació induïda a la vora.

Solució. Left to the reader.

Exercici 16.4.4 *Demostreu que la bola tancada de radi r, $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq r\}$, és una 2-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^2$.*

Solució. En coordenades polars podem trobar cartes del tipus

$$\varphi(x, y) = ((r - y)\cos x, (r - y)\sin x), \quad x \in (0, 2\pi), 0 \leq y < r.$$

Amb una carta no n'hi ha prou. Podem tapar tots els punts interiors amb la carta identitat $\psi(x, y) = (x, y)$ i encara faltarà tapar el punt $(1, 0)$ que podem tapar amb 'girant' φ.

Exercici 16.4.5 *Demostreu que l'hemisferi tancat $H = S^2 \cap \mathbb{R}^3_+$, és una 2-subvarietat amb vora.*

Solució. És clar que l'hemisferi obert (és a dir, el subconjunt de H format pels punts amb tercera coordenada $z > 0$) és una superfície, i per tant tenim cartes locals per a tots els seus punts. Només hem d'estudiar els punts $P = (x, y, 0) \in H$. Com $x^2 + y^2 = 1$, posem $P = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ i definim

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2_+; \theta - \delta < u < \theta + \delta, 0 \leq v < \pi/2\}$$

i

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

És fàcil veure que (U, φ) és la carta local buscada.

Exercici 16.4.6 *Expliciteu cartes locals que provin que el cilindre tancat*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$$

és una 2-subvarietat amb vora.

Solució. Prenem les cartes

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (\cos u, \sin u, b - v), \quad 0 \leq v < b - a, 0 < u < 2\pi \\ \psi(u, v) &= (\cos u, \sin u, v + a), \quad 0 \leq v < b - a, 0 < u < 2\pi. \end{aligned}$$

Ara prenem dues cartes més, girades d'aquestes, per cobrir els punts amb $u = 0$, i hem acabat.

Exercici 16.4.7 (Aplicacions obertes) *Sigui*[8] $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *obert i* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una funció diferenciable tal que* $\forall x \in U$, df_x *és isomorfisme. Proveu que* f *és oberta, és a dir, que per a cada obert* $A \subseteq U$, $f(A)$ *és obert.*

Solució. Per provar que $f(A)$ és obert prenem $f(a) \in f(A)$ amb $a \in A$. Volem veure que hi ha un entorn obert de $f(a)$ totalment contingut a $f(A)$. Con df_a és isomorfisme, sabem, pel teorema de la funció inversa, que existeix un entorn obert W de a tal que $f(W)$ és obert i $f : W \longrightarrow f(W)$ és difeomorfisme. Per ser difeomorfisme podem assegurar que $f(W \cap A)$ és obert. Hem trobat doncs un obert tal que $f(a) \in f(W \cap A) \subset f(A)$, i per tant $f(A)$ és obert.

Exercici 16.4.8 *Demostreu que si un punt* P *d'una* k*-subvarietat amb vora és interior respecte d'una carta local, també és interior respecte de qualsevol altre carta local que el contingui.*

Solució. Aquest[9] resultat és conseqüència de que la imatge d'un obert de $\mathbb{R}^k$ per una aplicació diferenciable, amb diferencial no singular, porta oberts a oberts (vegeu l'exercici 16.4.7)[10]. L'aplicarem a l'aplicació "canvi de coordenades".

---

[8] Problema 2.36 de [32].

[9] Una solució diferent a quest exercici és la donada a la Proposició 16.1, pàgina 361.

[10] No calen tantes hipòtesis. El *Teorema de la invariància del domini*, diu: *Si* U *és un obert de* $\mathbb{R}^n$ *i* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *és una aplicació contínua i injectiva, llavors* $V = f(U)$ *és obert i* f *és un homeomorfisme entre* U *i* V. No obstant, com aquest teorema és de difícil demostració, amb eines de topologia algebraica, i nosaltres no treballem amb funcions només contínues, sinó diferenciables i no singulars, en donem una demostració directa per aquest cas a l'exercici 16.4.7.

Siguin doncs (U, φ), (V, ψ) dues cartes d'una k-subvarietat amb vora M, que contenen P, amb $P = \varphi(x) = \psi(y)$. Demostrarem que si $x \in U \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+)$ llavors $y \in V \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+)$.

En efecte, sabem que el canvi de coordenades $\psi^{-1} \circ \varphi$ és diferenciable, exercici 16.4.12, i per tant només hem de veure que la diferencial és injectiva. Però

$$d(\psi^{-1} \circ \varphi)_x = d(g \circ \varphi)_x = dg_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x$$

on g és l'aplicació diferenciable de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$ que estén ψ^{-1}. Així $d(\psi^{-1} \circ \varphi)_x$ és la composició de dos isomorfismes

$$\begin{aligned} d\varphi_x &: \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{\varphi(x)}M \\ dg_{\varphi(x)} &: T_{\varphi(x)}M \longrightarrow \mathbb{R}^k, \end{aligned}$$

i és, per tant, un isomorfisme. Per veure $dg_{\varphi(x)}$ és isomorfisme suposem $dg_{\varphi(x)}(v) = 0$ amb $v \in T_{\varphi(x)M}$, i apliquem $d\psi_y$ als dos membres de la igualtat. Obtenim

$$0 = d\psi_y(dg_{\varphi(x)}(v)) = d(\psi \circ g)_{\varphi(x)}(v) = d(id)_{\varphi(x)} = v.$$

Així, doncs, $\psi^{-1} \circ \varphi$ restringida a l'obert $W = U \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+)$, està en les hipòtesis de l'exercici 16.4.7 i podem assegurar que $\psi^{-1} \circ \varphi(W)$ és un obert de $\mathbb{R}^k$. Ara bé, per la construcció de ψ, aquest obert està contingut a $\mathbb{R}^k_+$, per tant ha d'estar contingut al semiespai $x_k > 0$, i en particular $P_2 = \psi^{-1} \circ \varphi(P_1) \in V \setminus \partial(\mathbb{R}^k_+)$, com volíem veure.

Això demostra que punts interiors van a punts interiors, i per tant punts de la vora han d'anar a punts de la vora, ja que si un punt de la vora anés a parar a un punt interior, aplicant el resultat anterior a l'invers del canvi de coordenades tindríem una contradicció.

Exercici 16.4.9 (Definició equivalent de k-subvarietat am vora) *Proveu que un subconjunt M de $\mathbb{R}^n$ és una k-subvarietat amb vora si per cada punt $P \in M$ existeix un entorn obert U de P a $\mathbb{R}^n$, un altre conjunt V obert de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : U \longrightarrow V$ tal que*

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V; x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},$$

o bé, existeix un entorn obert U de P a $\mathbb{R}^n$, un altre conjunt V obert de $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $h : U \longrightarrow V$ tal que

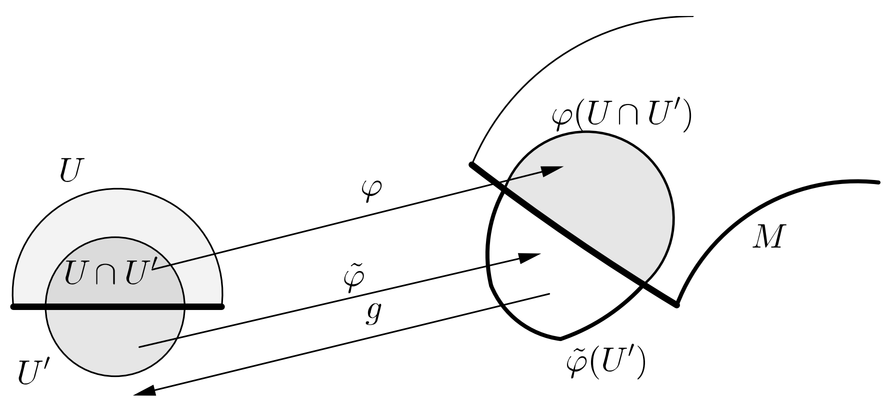
$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k_+ \times \{0\}) = \{x \in V; x_k \geq 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

Solució.

Exercici 16.4.10 [11] *Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k_+ \longrightarrow M$ una carta local d'una k-subvarietat amb vora $M \subset \mathbb{R}^n$. Demostreu que per cada punt $x \in U$, existeix un entorn obert V de $\varphi(x)$ a $\mathbb{R}^n$, un entorn obert U' de x a $\mathbb{R}^k$, i una aplicació diferenciable $g : V \longrightarrow U'$ tal que $g(V)$ és obert de U' i tal que, sobre $V \cap \varphi(U \cap U')$, $g = \varphi^{-1}$.*

Solució. Si x és interior estem en les hipòtesis del Corol·lari 2.1.2 amb $U = U'$ i hem acabat.

Suposem doncs que x és de la vora. Per definició de diferenciabilitat sobre tancats existeix $\tilde{\varphi} : U' \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable sobre un entorn obert U' de x a $\mathbb{R}^k$ que coincideix amb φ a $U' \cap \mathbb{R}^k_+$. A més, quan diem a la definició de k-subvarietat amb vora que $d\varphi_x$ és injectiva, volem dir que $d\tilde{\varphi}_x$ és injectiva, és a dir és una immersió local.



Pel Corol·lari 2.1.2 aplicat a $\tilde{\varphi}$ sabem que existeix un obert V de $\tilde{\varphi}(x)$ a $\mathbb{R}^n$, i una aplicació diferenciable $g : V \longrightarrow U'$ tal que $g(V)$ és obert de U' i tal que sobre $V \cap \tilde{\varphi}(U')$, $g = \tilde{\varphi}^{-1}$.

Sobre $V \cap \varphi(U \cap U') = V \cap \tilde{\varphi}(U \cap U')$ tenim $g = \varphi^{-1}$ ja que si $y = \varphi(z)$ amb $z \in U \cap U'$, $y \in V$,

$$\varphi(g(y)) = \varphi(\tilde{\varphi}^{-1})(\varphi(z)) = \varphi(\tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(z)) = y. \quad \square$$

Exercici 16.4.11 [12] *Sigui (U, φ) una parametrització local d'una k-subvarietat amb vora $M \subset \mathbb{R}^n$. Suposem que $\psi : A \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ és una aplicació diferenciable definida en un obert $A \subset \mathbb{R}^s_+$, per alguna $s \in \mathbb{N}$. Demostreu que la composició $\varphi^{-1} \circ \psi : A \to U$ és diferenciable.*

[11] Generalització a varietats amb vora de la Proposició 4.4.2.

[12] Generalització a varietats amb vora del Corol·lari 4.4.3.

Demostració. Sigui $y \in A$ i sigui $x \in U$ tal que $\varphi(x) = \psi(y)$. Sabem, per lla Proposició 16.4.10, que existeix un entorn obert V de $\varphi(x)$ a $\mathbb{R}^n$, un entorn obert U' de x a $\mathbb{R}^k$, i una aplicació diferenciable $g : V \longrightarrow U'$ tal que $g(V)$ és un entorn obert de x a U', i tal que sobre $V \cap \varphi(U \cap U')$, $g = \varphi^{-1}$.

Per tant, sobre $\psi^{-1}(V \cap \varphi(U \cap U'))$ tenim

$$\varphi^{-1} \circ \psi = g \circ \psi.$$

Com la composició de diferenciables (sobre oberts de $\mathbb{R}^k$ o $\mathbb{R}^k_+$) és diferenciable[13], hem acabat. □

Exercici 16.4.12 (Canvi de coordenades) *Els canvis de coordenades entre cartes d'una k-subvarietat amb vora són diferenciables.*[14]

Demostració. Això vol dir que si (U, φ) i (V, ψ) són cartes d'una k-subvarietat amb vora M, l'aplicació $\varphi^{-1} \circ \psi$ definida a $\psi^{-1}(\psi(V) \cap \varphi(U))$ és diferenciable. Però això és conseqüència directa de l'exercici anterior 16.4.11, amb $s = k$. □

Exercici 16.4.13 *Sigui M una k-subvarietat amb vora i $P \in \partial M$. Es compleix que*

$$T^i_P M = \{\alpha'(0); \alpha : [0, \delta) \longrightarrow M \textit{ diferenciable amb } \alpha(0) = P\}.$$

Solució. Observem que si (U, ψ) és una carta local de M amb $P = \psi(p)$, el que hem de provar equival a provar que

$$d\psi_p(\mathbb{R}^k_+) = \{\alpha'(0); \alpha : [0, \delta) \longrightarrow M \text{ diferenciable amb } \alpha(0) = P\}.$$

Sigui $v = \alpha'(0)$ amb $\alpha : [0, \delta) \longrightarrow M$ diferenciable amb $P = \alpha(0)$.

Per l'exercici 16.4.11, amb $s = 1$, existeix $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable, amb $\gamma(t) \subset U$ per $t \geq 0$, tal que

$$\psi(\gamma(t)) = \alpha(t), \quad t \geq 0.$$

---

[13] Si $\tilde{\psi}$ és una extensió diferenciable de ψ, $g \circ \tilde{\psi}$ és una extensió diferenciable de $g \circ \psi$.

[14] Generalització a varietats amb vora de la Proposició 4.4.4. Observem que no podem dir, en principi, que són la restricció al seu domini de definició d'un difeomorfisme de $\mathbb{R}^k$ definit en oberts més grans. Això és degut a que la definició de diferenciabilitat a $\mathbb{R}^k_+$ involucra extensions de les aplicacions donades i aquestes extensions, fora de l'obert inicial, no les controlem, no sabem que siguin homeos per exemple.

A més,

$$\begin{aligned} d\psi_p(\gamma'(0)) &= \lim_{t\mapsto 0} \frac{\tilde{\psi}(\gamma(t)) - P}{t} \\ &= \lim_{t\mapsto 0^+} \frac{\tilde{\psi}(\gamma(t)) - P}{t} \\ &= \lim_{t\mapsto 0^+} \frac{\psi(\gamma(t)) - P}{t} \\ &= \lim_{t\mapsto 0^+} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} \\ &= v. \end{aligned}$$

on $\tilde{\psi}$ és una extensió diferenciable de ψ.

Com $\gamma(0) = \psi^{-1}(\alpha(0)) = p \in \partial(\mathbb{R}^k_+)$, si posem $\gamma(t) = (u_1(t), \ldots, u_k(t))$ ha de ser $u_k(0) = 0$. I com $u_k(t) \geq 0$, ja que per a $t \geq 0$ és $\gamma(t) = \psi^{-1}\alpha(t)$, ha de ser $u'_k(0) \geq 0$ i per tant $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^k_+$.

És a dir,

$$v \in d\psi_p(\mathbb{R}^k_+).$$

La inclusió contrària és clara. En efecte, sigui $w = d\psi_p(v)$ amb $v \in \mathbb{R}^k_+$. Denotant $\tilde{\psi}$ una extensió diferenciable de ψ tenim

$$w = d\psi_p(v) = d\tilde{\psi}_p(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\tilde{\psi}(p + tv))$$

Només hem d'agafar

$$\alpha(t) = \tilde{\psi}(p + tv), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

i tenim $\alpha([0, \epsilon)) \subset M$, ja que quan $t \geq 0$ $\alpha(t) = \psi(p + tv)$ (aquí usem que $v \in \mathbb{R}^k_+$), $\alpha(0) = P$ i $\alpha'(0) = w$. Per tant $w \in T^i_P(M)$ com volíem.

Capítol 17

Integració

17.1 Integració de k-formes a $\mathbb{R}^k_+$

Comencem integrant k-formes sobre oberts de $\mathbb{R}^k_+$. Les formes sobre oberts de $\mathbb{R}^k_+$ es defineixen pràcticament igual que sobre oberts de $\mathbb{R}^k$, definició 14.2.1.[1]

Definició 17.1.1 *Una k-forma diferencial definida en un obert U de $\mathbb{R}^k_+$ és una aplicació diferenciable*

$$\omega : U \subseteq \mathbb{R}^k_+ \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)^*.$$

I com sempre, diferenciable vol dir que tot punt $x \in U$ té un entorn obert de $\mathbb{R}^k$ on ω és restricció d'una forma diferenciable de $\mathbb{R}^k$.

El suport de ω és

$$\operatorname{supp} \omega = \overline{\{x \in U; \omega(x) \neq 0\}}$$

tenint en compte que $\omega(x) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^k)^*$, és a dir, el 0 que apareix a l'anterior fórmula és l'aplicació multilineal alternada zero. Ara bé, com per tot $x \in U$ tenim

$$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

podem escriure

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

[1] No ens preocupem de les r-formes a $\mathbb{R}^k_+$ amb $r \neq k$.

on f és una funció diferenciable (per ser ω diferenciable). Llavors és clar que

$$\operatorname{supp}\omega = \operatorname{supp} f.$$

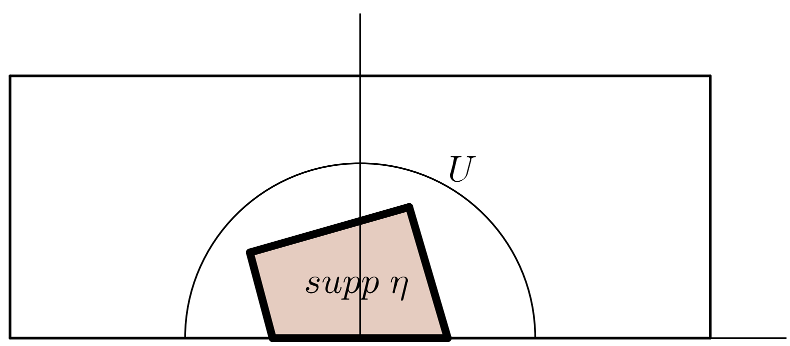
Com $\mathbb{R}^k_+$ és un tancat de $\mathbb{R}^k$ és el mateix considerar adherències[2] a $\mathbb{R}^k_+$ que a $\mathbb{R}^k$. Però observem que no podem assegurar que $\operatorname{supp}\omega \subset U$ sinó tan sols que $\operatorname{supp}\omega \subset \overline{U}$.

Definició 17.1.2 *Sigui $\omega(x) = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ una k-forma definida sobre un obert U de $\mathbb{R}^k_+$ ($x_1, \ldots, x_k$ són les coordenades cartesianes habituals de $\mathbb{R}^k$). Suposem que* $\operatorname{supp}\omega$ *és un compacte de $\mathbb{R}^k_+$ contingut a U.*

Llavors la integral de ω sobre U es defineix per

$$\int_U \omega = \int_U f(x)dx_1 \ldots dx_k$$

La integral de la dreta és la integral múltiple habitual d'una funció a $\mathbb{R}^k$ i està ben definida ja que podem pensar que estem integrant no sobre U sinó sobre un rectangle[3] tancat que contingui U, i la funció que integrem és la funció que val $f(x)$ sobre U i zero fora del compacte $\operatorname{supp}\omega$. Com aquesta funció és clarament contínua i tota funció contínua sobre un rectangle tancat de $\mathbb{R}^k$ és integrable, la integral de la dreta està ben definida.



[2]Si el nostre espai topològic inicial fos un obert U de $\mathbb{R}^k$, no és el mateix l'adherència a U d'un subconjunt de U que l'adherència d'aquest mateix subconjunt a $\mathbb{R}^k$. Per exemple, si $U = (0,1)$, llavors l'adherència de U a U, és U, en canvi l'adherència de U a $\mathbb{R}$ és $[0,1]$. Encara que treballem amb formes definides sobre oberts considerarem els suports a $\mathbb{R}^k$.

[3]Suposem coneguda la teoria d'integració de funcions. Remetem sempre a [32], on la integració es defineix primer per a funcions definides sobre rectangles i que si hem d'integrar sobre quelcom que no és un rectangle multipliquem per la funció característica.

La hipòtesis de suport compacte sempre es pot aconseguir multiplicant la forma a integrar per funcions tipus 'particions de la unitat'[4], que tenen suport compacte, integrar aquest producte i passar al límit.

Veiem un exemple.

Exemple 17.1.3 *Sigui* $\omega = y\,dx \wedge dy$ *i denotem* $U = B(0;1) \cap \mathbb{R}^2_+$. *Calculem*

$$\int_U \omega.$$

Solució. En principi no estem en les hipòtesis de la definició anterior, ja que el suport de ω no està contingut a U. A la pràctica no ens preocuparem d'aquest fet i procedirem com si estiguéssim en les hipòtesis de la definició 17.1.2. Fem

$$\int_U \omega = \int_U y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin\alpha\,dr\,d\alpha = \frac{2}{3}.$$

Per justificar aquests càlculs considerem $f_\epsilon : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^\infty$ que val 1 en el compacte

$$\overline{U}_{2\epsilon} = \overline{B}(0; 1-2\epsilon) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2\epsilon\}$$

i 0 fora de l'obert

$$U_\epsilon = B(0; 1-\epsilon) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > \epsilon\},$$

que sabem que existeix per la Proposició A.1.2.

Ara té sentit integrar $f_\epsilon \omega$ sobre U perquè estem en les hipòtesis de la definició anterior ja que el suport de $f_\epsilon \omega$ està contingut a U i és compacte, per ser un subconjunt tancat del compacte $\overline{U}_\epsilon$. Tenim doncs

[4]Sempre utilitzarem el mateix fet: donat un compacte de $\mathbb{R}^n$ i un obert que el conté existeix una funció diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ que val 1 en el compacte i 0 fora de l'obert, Proposició A.1.2.

$$\begin{aligned}
\int_U \omega &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_U f_\epsilon\omega = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{U_\epsilon} f_\epsilon\omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{U_{2\epsilon}} f_\epsilon\omega + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{U_\epsilon\setminus U_{2\epsilon}} f_\epsilon\omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{U_{2\epsilon}} \omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\pi \left[\int_{2\epsilon/\tan\alpha}^{1-2\epsilon} r^2\sin\alpha\,dr\right] d\alpha \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\pi \sin\alpha\left[\frac{(1-2\epsilon)^3}{3} - \frac{1}{3}(\frac{2\epsilon}{\tan\alpha})^3\right] d\alpha \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} 2\frac{(1-2\epsilon)^3}{3} = \frac{2}{3}. \quad \square
\end{aligned}$$

17.2 Integració de k-formes sobre k-subvarietats

Ara que ja sabem integrar formes a $\mathbb{R}^k_+$ mirem com s'integren sobre varietats amb vora.

Cas en que el suport està contingut en una carta local

Definició 17.2.1 *Sigui ω una k-forma definida sobre un obert V de $\mathbb{R}^n$. Sigui M una k-subvarietat amb vora i orientada tal que $M \subset V$. Suposem* $\operatorname{supp}\omega \cap M$ *és compacte i que està contingut en una carta local*[5] (U, φ) *de M compatible amb la orientació, és a dir*

$$\operatorname{supp}\omega \cap M \subset \varphi(U), \quad U \text{ obert de } \mathbb{R}^k_+.$$

Llavors definim la integral de ω sobre M per

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^*\omega. \tag{17.1}$$

[5]Aquesta hipòtesis del suport contingut en una carta local la fem per simplificar les demostracions. No obstant, emprant particions de la unitat, es pot donar la definició general d'integral d'una k-forma sobre una k-varietat sense aquesta hipòtesis. Vegeu l'apèndix A.2.

A la Proposició 14.2.7 hem vist que[6]

$$\varphi^*\omega = (\omega \circ \varphi)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Així, per la Definició 17.1.2

$$\int_M \omega = \int_U (\omega \circ \varphi)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1})dx_1 \dots dx_k. \tag{17.2}$$

Observem també que perquè la definició anterior tingui sentit necessitem que $\operatorname{supp} \varphi^*\omega$ sigui un compacte de $\mathbb{R}^k_+$ contingut a U. Però això és clar ja que *el suport del pull-back està contingut en l'antiimatge del suport.* És a dir,[7]

$$\operatorname{supp}(\varphi^*\omega) \subseteq \varphi^{-1}(K), \quad K = \operatorname{supp} \omega \cap M. \tag{17.3}$$

En efecte, com

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{supp}(\varphi^*\omega) & = & \overline{\{x \in U; \omega(\varphi(x)) \neq 0\}} \\ \varphi^{-1}(K) & = & \{x \in U; \varphi(x) \in \operatorname{supp} \omega\} \end{array}$$

prenent adherències a l'inclusió clara

$$\{x \in U; \omega(\varphi(x)) \neq 0\} \subset \{x \in U; \varphi(x) \in \operatorname{supp} \omega\}$$

i tenint en compte que $\varphi^{-1}K$ és compacte (igual a la seva adherència) per ser φ^{-1} contínua,[8] tenim

$$\operatorname{supp}(\varphi^*\omega) \subseteq \varphi^{-1}(K).$$

Com tot subconjunt tancat d'un compacte és un compacte, la inclusió 17.3 demostra directament que $\operatorname{supp}(\varphi^*\omega)$ és un compacte contingut a U, i té sentit doncs escriure el segon terme de 17.1.

[6]Estem pensant $(\omega \circ \varphi)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1})$ com una funció sobre U, concretament la funció que a cada $x \in U$ li assigna

$$\omega(\varphi(x))(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)).$$

[7]En general no es pot afirmar que el suport del pull-back sigui igual a l'antiimatge del suport, vegeu l'exercici 17.6.2. Ni tan sols que estigui contingut, vegeu l'exercici 17.6.3.

[8]Tot compacte de U amb la topologia relativa ho és de $\mathbb{R}^k$.

Una altra observació important és que encara que ω està definida sobre un obert de $\mathbb{R}^n$, per definir la seva integral només necessitem conèixer el valor de ω sobre els punts de la subvarietat. Per això *si dues k-formes definides sobre un obert de $\mathbb{R}^n$ coincideixen sobre els punts de M (com aplicacions d'aquest obert a $\Lambda^k(\mathbb{R}^k)^*$) llavors tenen la mateixa integral.*

També és cert que en la definició d'integral només apareix el valor de ω sobre punts de la k-subvarietat M, i aplicada llavors aquesta aplicació multilineal a camps tangents a M. Això implica que formes diferents però que sobre els punts de M coincideixin quan s'apliquen a camps tangents a la subvarietat tenen també la mateixa integral.

Aquest és també el motiu pel qual podem integrar formes definides només sobre subvarietats, tot i que com ja hem comentat, en aquestes notes no desenvolupem aquest punt de vista.

Proposició 17.2.2 *La definició d'integral d'una k-forma que acabem de donar no depèn de la carta. És a dir, si (V,φ) i (W,ψ) són cartes locals d'una k-subvarietat amb vora orientada M, compatibles amb la orientació, amb $\operatorname{supp}\omega \cap M \subset \varphi(V) \cap \psi(W)$, llavors*

$$\int_V \varphi^*\omega = \int_W \psi^*\omega.$$

Demostració. Sigui $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ l'aplicació 'canvi de coordenades', i posem

$$h(x) = (h^1(x), \dots, h^k(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_k).$$

Aquesta aplicació h és un homeomorfisme entre un obert V_1 de V i un obert W_1 de W i és diferenciable a V_1 (restricció d'una aplicació diferenciable definida sobre un obert de $\mathbb{R}^k$), vegeu l'exercici 16.4.12. Concretament $V_1 = \varphi^{-1}(\varphi(V) \cap \psi(W))$ i $W_1 = \psi^{-1}(\varphi(V) \cap \psi(W))$.

La condició sobre el suport de ω ens diu que és el mateix integrar $\varphi^*(\omega)$ sobre V que sobre V_1 i que és el mateix integrar $\psi^*(\omega)$ sobre W que sobre $W_1 = h(V_1)$. Concretament, per (17.3), tenim

$$\operatorname{supp}\varphi^*\omega \subseteq \varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega \cap M) \subseteq V_1$$

i anàlogament per a $\psi^*\omega$.

La regla de la cadena[9], aplicada a la composició de funcions $\varphi = \psi \circ h$, dóna

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;=\; \sum_{j=i}^{k} (\frac{\partial \psi}{\partial y_j} \circ h) \frac{\partial h^j}{\partial x_i}, \tag{17.4}$$

on tant les x_i com les y_j representen les coordenades canòniques de $\mathbb{R}^k$, que denotem diferent per conveniència. Equival a pensar $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ i $\psi = \psi(y_1, \ldots, y_k)$.

Així,

$$\begin{aligned}
\int_W \psi^* \omega &= \int_{h(V_1)} \psi^* \omega \\
&\overset{(1)}{=} \int_{h(V_1)} (\omega \circ \psi)(\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_k}) dy_1 \ldots dy_k \\
&\overset{(2)}{=} \int_{V_1} (\omega \circ \varphi)(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \circ h, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_k} \circ h) \cdot J_h \, dx_1 \ldots dx_k \\
&\overset{(3)}{=} \int_{V_1} (\omega \circ \varphi)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) dx_1 \ldots dx_k \\
&= \int_{V_1} \varphi^* \omega \\
&= \int_{V} \varphi^* \omega.
\end{aligned}$$

on la igualtat (1) és per la Proposició 14.2.7, la igualtat (2) és el teorema del canvi de variable[10], més el fet de que $J_h > 0$ per haver agafat cartes compatibles amb la orientació i la igualtat (3) és conseqüència de la igualtat (17.4) i de la Proposició 14.1.5, pàgina 327 (apartat 1 amb $k = n$). $\square$

[9] La regla de la cadena la podem aplicar a la composició de dues funcions diferenciables entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ i h només és diferenciable a $\mathbb{R}^k_+$. Per provar la igualtat (17.4) l'apliquem a un punt arbitrari $P \in V_1$, i apliquem la regla de la cadena a la funció $\psi \circ \tilde{h}$ on $\tilde{h}$ és una aplicació diferenciable que estén h en un entorn P. La igualtat matricial $d\varphi_x = d\psi_{h(x)} \cdot d\tilde{h}_x = d\psi_{h(x)} \cdot dh_x$ dóna, igualant columnes, la igualtat (17.4).

[10] Per aplicar el teorema 2.0.8 del canvi de variable necessitem que les funcions estiguin definides sobre oberts de $\mathbb{R}^k$. En el nostre cas W_1 és un obert de $\mathbb{R}^k_+$, però el podem aproximar per $W_\epsilon = W_1 \cap \mathbb{R}^k_\epsilon$, on $\mathbb{R}^k_\epsilon = \{(x_1, \ldots, x_k); x_k > \epsilon\}$. I utilitzar a continuació que si f és integrable a W_1, $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{W_\epsilon} f = \int_{W_1} f$.

Exercici 17.2.3 *Integrem* $\omega = zdx \wedge dy$ *sobre el tor* T *donat per*

$$\varphi(u,v) = ((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Solució. A la pràctica integrarem no sobre tot el tor sinó sobre la carta local (U,φ) amb $U = (0,2\pi)\times(0,2\pi)$ i la φ donada més amunt. Els punts no considerats tenen mesura zero i no modifiquen el resultat. Procedirem "com si" el suport de ω estigués contingut a $\varphi(U)$. Així, com

$$\begin{aligned}
d(x\circ\varphi) &= \frac{\partial(x\circ\varphi)}{\partial u}\,du + \frac{\partial(x\circ\varphi)}{\partial v}\,dv \\
&= -(2+\cos v)\sin u\,du - \cos u \sin v\,dv \\
d(y\circ\varphi) &= \frac{\partial(y\circ\varphi)}{\partial u}\,du + \frac{\partial(y\circ\varphi)}{\partial v}\,dv \\
&= (2+\cos v)\cos u\,du - \sin u \sin v\,dv
\end{aligned}$$

tenim

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(zdx\wedge dy) = (z\circ\varphi)d(x\circ\varphi)\wedge d(y\circ\varphi) = \sin^2 v(2+\cos v)du\,dv,$$

i per tant

$$\int_T \omega = \int_U \varphi^*(\omega) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 v(2+\cos v)du\,dv = 4\pi^2.$$

Justificació d'aquest darrer càlcul. Com que la diferència entre els conjunts T i $\varphi(U)$ té mesura zero

$$\int_T \omega = \int_{\varphi(U)} \omega = \int_U \varphi^*(\omega).$$

Ara bé, per ser rigorosos hem de fer el mateix argument que a l'exercici 17.1.3, ja que formalment no podem integrar ω sobre $\varphi(U)$ ja que no és cert que $\operatorname{supp}\omega \cap T \subset \varphi(U)$.

Prenem $C_\epsilon = (\epsilon, 2\pi-\epsilon)\times(\epsilon,2\pi-\epsilon)$ i $C_{2\epsilon} = [2\epsilon, 2\pi-2\epsilon]\times[2\epsilon,2\pi-2\epsilon]$ i considerem una funció f_ϵ que valgui 1 sobre el compacte $\varphi(C_{2\epsilon})$ i 0 fora de l'obert $\varphi(C_\epsilon)$. Insistim que l'existència d'aquestes funcions està garantida per la Proposició A.1.2, pàgina 444.

Llavors

$$\begin{aligned}
\int_T \omega &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_T f_\epsilon\omega = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\varphi(C_\epsilon)} f_\epsilon\omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\varphi(C_{2\epsilon})} f_\epsilon\omega + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\varphi(C_\epsilon)\setminus\varphi(C_{2\epsilon})} f_\epsilon\omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\varphi(C_{2\epsilon})} \omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_{2\epsilon}} \varphi^*\omega \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon}\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \sin^2 v(2+\cos v)\,du\,dv = 4\pi^2.
\end{aligned}$$

Les mateixes consideracions, que ja no repetim, s'apliquen a l'exercici següent.

Exercici 17.2.4 *Sigui* $M = S^2 \cap \mathbb{R}^3_+$ *on* S^2 *és l'esfera* 2*-dimensional de centre l'origen de* $\mathbb{R}^3$ *i radi* 1*. Sigui* $\omega = z\,dx\wedge dy$*. Calculem*

$$\int_M \omega$$

Solució. Com M és compacta, $\operatorname{supp}\omega \cap M$ també. Considerem la carta local (U,φ) amb[11]

$$U = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2_+; 0 < u < 2\pi, 0 \le v < 1\}$$

i

$$\varphi(u,v) = ((1-v)\cos u, (1-v)\sin u, \sqrt{2v-v^2}).$$

Així,

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^*\omega = \int_U (z\circ\varphi) d(x\circ\varphi)\wedge d(y\circ\varphi)$$

Però

$$\begin{aligned}
d(x\circ\varphi) &= -\cos u\,dv - (1-v)\sin u\,du \\
d(y\circ\varphi) &= -\sin u\,dv + (1-v)\cos u\,du
\end{aligned}$$

per tant

$$\int_M \omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-v)\sqrt{2v-v^2}\,du\,dv = \frac{2\pi}{3}.$$

[11] Vegeu l'exercici 16.4.4.

17.3 Teorema del canvi de variables

Observem primerament que el teorema clàssic del canvi de variables per integrals definides a $\mathbb{R}^n$, teorema 2.0.8, que diu

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det g'|,$$

o equivalentment

$$\int_{g(A)} f\, dy_1 \dots dy_n = \int_A (f \circ g)|\det g'|\, dx_1 \dots dx_n \tag{17.5}$$

on A és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, g un difeomorfisme i $f : g(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable.

En llenguatge de formes i pel cas en que g conserva orientacions, la igualtat (17.5) es pot escriure així:

$$\int_{g(A)} \alpha = \int_A g^*(\alpha) \tag{17.6}$$

on $\alpha = f\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, ja que

$$g^*(\alpha) = (f \circ g) g^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (f \circ g) \det g' dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

I ara apliquen la definició 17.1.2.

La igualtat (17.6) és certa en general sobre varietats. Concretament tenim el resultat següent.

Proposició 17.3.1 (Teorema del canvi de variables) *Sigui M una k-subvarietat orientada amb vora i sigui $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfisme. Sigui (U, φ) una carta local de M i sigui ω una k-forma de $\mathbb{R}^n$ amb $K =$ $\operatorname{supp} \omega \cap F(M)$ compacte contingut*[12] *a $F(\varphi(U))$. Llavors*

$$\int_{F(M)} \omega = \int_M F^* \omega,$$

quan orientem $F(M)$ de manera que dF_P porti bases positives de $T_P M$ a bases positives de $T_{F(P)} F(M)$, per a tot $P \in M$.

[12] Aquesta hipòtesis del suport contingut en una carta local la fem per simplificar les demostracions. Aquest teorema és cert sense aquesta hipòtesis com es veu a l'apèndix, Proposició A.2.4, pàgina 447.

Demostració.[13] Observem que tant ω com $F^*(\omega)$ tenen el suport (compacte) contingut en una única carta local, ja que $(U, F \circ \varphi)$ és una carta de $F(M)$, i de la inclussió $K \subset F(\varphi(U))$ deduïm $\operatorname{supp}(F^*\omega) \subset \varphi(U)$.

Ara tenim

$$\begin{aligned} \int_{F(M)} \omega = \int_{F(\varphi(U))} \omega &\overset{(1)}{=} \int_U (F \circ \varphi)^* \big(\omega\big) = \int_U \varphi^* F^*(\omega) \\ \overset{(2)}{=} \int_{\varphi(U)} F^*\omega = \int_M F^*\omega. \end{aligned}$$

Les igualtats (1) i (2) per la igualtat (17.1), definició 17.2.1. □

Nota 17.3.2 És suficient que F sigui una aplicació bijectiva diferenciable amb inversa diferenciable definida a M, $F : M \longrightarrow F(M) \subset \mathbb{R}^n$. No cal que sigui un difeomorfisme de tot $\mathbb{R}^n$ com es veu revisant la demostració anterior.

Integració sobre una 1-varietat amb vora

Tal com hem comentat a la pàgina 368 per a $k = 1$ no podem suposar que existeix un atles compatible amb la orientació. Per tant la demostració del teorema anterior no funciona. No obstant el resultat continua essent correcte si prenem la definició següent d'integració sobre 1-varietats.

Definició 17.3.3 *Sigui $C = \gamma(I)$, amb $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, i una 1-forma ω de $\mathbb{R}^3$. Llavors*

$$\int_C \omega = \int_I \gamma^*\omega,$$

on $I = (a, b), I = (a, b], I = [a, b)$ o $I = [a, b]$.

Ja hem comentat a l'exercici 17.6.1 que no hi ha diferència entre integrar sobre $I = (a, b), I = (a, b], I = [a, b)$ o $I = [a, b]$.

Pel teorema del canvi de variable aquesta integral no depèn de la parametrització de C sempre que la nova parametrització conservi orientacions. Si les canvia, canvia de signe.

[13]Observem que si a la fórmula que volem demostrar canviem F per φ i M per U tenim la definició 17.2.1 d'integral. Però φ no és un difeomorfisme de $\mathbb{R}^n$ ni ω té el suport en una carta local.

Exemple 17.3.4 *Sigui $C = \gamma(I)$ amb $I = [0, 2\pi]$ i $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Sigui $\omega = x^3 dy$. Calculem*

$$\int_C \omega.$$

Solució.

$$\int_C \omega = \int_I \gamma^* \omega = \int_I (x \circ \gamma)^3 d(y \circ \gamma) = \int_I \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}.$$

Si canviem la orientació considerant la corba $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, -\sin t)$. tenim

$$\int_C \omega = \int_I \tilde{\gamma}^* \omega = \int_I (x \circ \tilde{\gamma})^3 d(y \circ \tilde{\gamma}) = -\int_I \cos^4 t \, dt = -\frac{3\pi}{4}. \quad \Box$$

Per comparar la definició anterior 17.3.3 amb la definició A.2.2 donem el següent resultat per al cas $I = [a, b]$ (els altres casos són iguals).

Proposició 17.3.5 *Sigui $C = \gamma(I)$, amb $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, i una 1-forma ω de $\mathbb{R}^3$. Sigui (U, γ_1), (U, γ_2) amb*

$$U = [0, b - a), \quad \gamma_1(t) = \gamma(t + a), \quad \gamma_2(t) = \gamma(-t + b),$$

un atles de C. Sigui (f_1, f_2) una partició de la unitat relativa al compacte C i subordinada a aquest recobriment. Llavors

$$\int_C \omega = \int_I \gamma^*(f_1 \omega) - \int_I \gamma^*(f_2 \omega).$$

Demostració. Recordem primerament que U té aquesta forma perquè ha de ser un obert de $\mathbb{R}^1_+$. Recordem també que per ser la partició de la unitat subordinada al recobriment tenim $\operatorname{supp} f_i \cap C \subset \gamma_i(U)$, $i = 1, 2$.

Observem que γ_1 és compatible amb la orientació natural de (a, b), i γ_2 no. Posem $\gamma_1 = \gamma \circ T$ amb $T(t) = t + a$ i $\gamma_2 = \gamma \circ S$ amb $S(t) = -t + b$.

Llavors tenim

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{2} \int_C f_i \omega \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{2} \int_U \gamma_i^*(f_i \omega) \\
&\overset{(3)}{=} \int_U T^* \gamma^*(f_1 \omega) + \int_U S^* \gamma^*(f_2 \omega) \\
&\overset{(4)}{=} \int_I \gamma^*(f_1 \omega) - \int_I \gamma^*(f_2 \omega).
\end{aligned}$$

La igualtat (1) és per la definició de partició de la unitat. La igualtat (2) és per la definició 17.3.3 a cada sumand tenint en compte que ens podem restringir a les corbes $\gamma_i(U)$. La igualtat (3) és per la definició de γ_i. La igualtat (4) és certa perquè S canvia orientacions i la definició d'integral utilitza cartes compatibles amb la orientació.

17.4 Teorema de Stokes

Teorema 17.4.1 (Teorema de Stokes sobre k-subvarietats) *Sigui M una k-subvarietat de $\mathbb{R}^n$ orientada amb vora. Sigui ω una $(k-1)$-forma diferencial definida sobre un obert de $\mathbb{R}^n$ que conté M. Suposem que $K = \operatorname{supp}\omega \cap M$ és compacte i està contingut en una carta local (U, φ). És a dir $K \subset \varphi(U)$. Aleshores,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

on ∂M té la orientació induïda per la orientació de M.

Demostració. Calculem el primer terme.

$$\int_M d\omega \overset{(1)}{=} \int_{\varphi(U)} d\omega \overset{(2)}{=} \int_U \varphi^* d\omega \overset{(3)}{=} \int_U d\rho \overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^k_+} d\rho.$$

Hem posat

$$\rho = \varphi^* \omega.$$

Les igualtats (1) i (4) per qüestions de suport. La igualtat (2) per la definició 17.2.1. La igualtat (3) perquè la diferencial commuta amb el pull-back.

A partir d'aquí i per simplificar els càlculs[14] suposarem $k = 2$ de manera que

$$\rho = a_1 dx_1 + a_2 dx_2,$$

i per tant

$$d\rho = (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2$$

[14]A l'apèndix hi ha la demostració totalment general d'aquest teorema.

Pel teorema de Fubini, que permet canviar l'ordre d'integració,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2_+} d\rho &= \int_{x_2=0}^{x_2=\infty}\left(\int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2 - \int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}\left(\int_{x_2=0}^{x_2=\infty}\frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x_1,0)dx_1\end{aligned}$$

ja que la primera integral és zero per tenir les funcions a_j suport compacte.

Estudiem ara

$$\int_{\partial M}\omega.$$

La carta (U,φ) indueix la carta (V,ψ) donada per

$$\begin{aligned}V &= i^{-1}(U)\\ \psi &= \varphi\circ i\end{aligned}$$

on $i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2_+$ és l'aplicació $i(x_1)=(x_1,0)$.

Llavors tenim

$$\int_{\partial M}\omega \overset{(1)}{=} \int_V \psi^*(\omega) = \int_V i^*\varphi^*\omega = \int_V i^*\rho \overset{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} i^*\rho,$$

Les igualtats (1) i (3) per qüestió de suports.

Ara bé, com $x_2\circ i = 0$, tenim

$$i^*\rho = a_1(x_1,0)dx_1,$$

i per tant

$$\int_{\partial M}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x_1,0)dx_1,$$

i això acaba la demostració. □

La condició de que el suport de la forma estigui contingut en una carta local la fem per comoditat però asumirem a partir d'ara que el teorema de Stokes és cert sense aquesta condició, tal com es prova a l'apèndix, pàgina 448.

En particular tenim

Corol·lari 17.4.2 *Sigui M una k-subvarietat sense vora. Llavors per a tota k-forma ω de $\mathbb{R}^n$,*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Demostració. Conseqüència de Stokes. □

Observem que el teorema de Stokes quan $M = [a, b]$ i $\omega = f$ és una funció (0-forma) no és més que el teorema fonamental del càlcul,

$$\int_a^b f'(t)dt = \int_{[a,b]} df = \int_{\partial([a,b])} f = f(b) - f(a).$$

Exemple 17.4.3 *Calculem*

$$\int_{S_R} \omega$$

on $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ i S_R és l'esfera de radi R i centre l'origen de $\mathbb{R}^3$.

Solució. Primer mètode. Observem que $d\omega = 3\eta$ on $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ és l'element de volum de $\mathbb{R}^3$. Així, denotant B_R la bola de radi R i centre l'origen,

$$\int_{S_R} \omega = \int_{\partial B_R} \omega = \int_{B_R} d\omega = 3(\frac{4}{3}\pi R^3),$$

Segon mètode. També podríem haver raonat així: Sigui n la normal a S_R estesa a $\mathbb{R}^3$, és a dir,

$$n(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}$$

Llavors

$$i_n\eta = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdy \wedge dz$$

i podem trobar A, B, C fàcilment. Per exemple,

$$A = \eta(n, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = n^3$$

on n^3 és la tercera component de n, i per tant, $n^3 = \frac{z}{\|(x,y,z)\|}$ Anàlogament calcularíem B i C i obtenim

$$i_n\eta = \frac{1}{\|(x, y, z)\|}(zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)$$

Sobre S_R tenim doncs

$$Ri_n\eta = \omega$$

i per tant

$$\int_{S_R} \omega = \int_{S_R} Ri_n\eta = R4\pi R^2,$$

ja que $i_n\eta$ restringit a l'esfera és el seu element d'àrea.

Tercer mètode. Utilitzant el teorema de la divergència, vegeu exercici 20.4.5, pàgina 430.

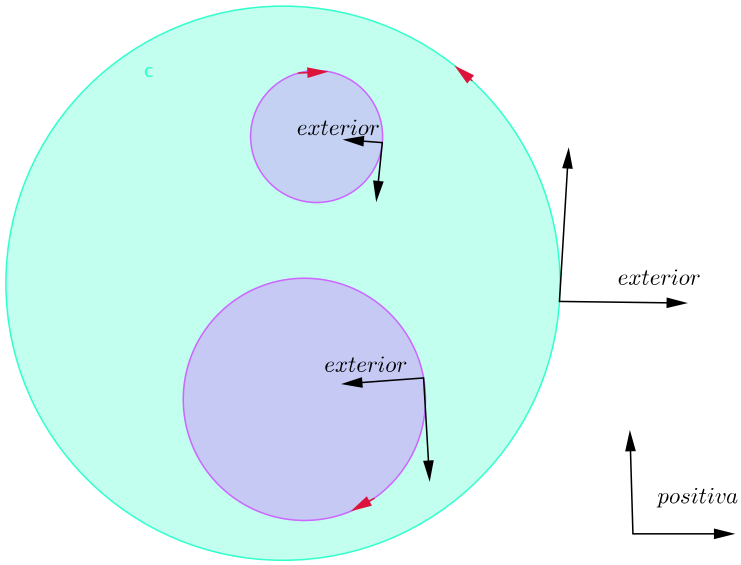
17.5 Fórmula de Green

Teorema 17.5.1 *Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ un domini regular (2-subvarietat amb vora). Siguin$P(x,y), Q(x,y)$ dues funcions diferenciables definides en un obert que contingui D. Llavors*

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Demostració. Apliquem Stokes a la 1-forma $\omega = Pdx + Qdy$. $\square$

La orientació de la vora, tal com l'hem definit a la pàgina 364, es pot recordar fàcilment dient que la vora s'ha de recórrer de tal manera que el recinte d'integració D quedi a l'esquerra.



Suposem $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donada per $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, és una parametrització de ∂D, que és una 1-varietat. Llavors la fórmula de Green s'escriu com

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \int_I \gamma^* \omega = \int_I (Px' + Qy')dt$$

on $P = P(x(t), y(t))$, $Q = Q(x(t), y(t))$.

Observem que podem calcular l'àrea de D prenent $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$, llavors

$$\text{àrea}(D) = \int_{\partial D} x dy$$

o bé prenent $P = -y$, $Q = x$, llavors

$$\text{àrea}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy$$

Piecewise boundary

Suposem que D és un domini tal que ∂D és una corba diferenciable a troços. Això vol dir que es pot parametritzar per una aplicació $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable excepte en un número finit de punts. Equivalentment, podem suposar que llevat d'aquest número finit de punts, ∂D és la unió de r corbes $\gamma_r : I_r \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

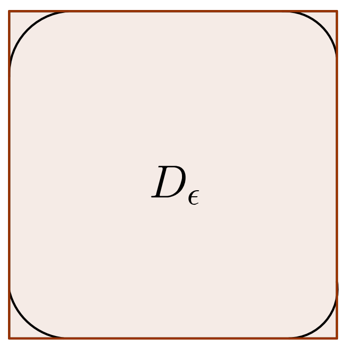
Llavors la fórmula de Green s'escriu com

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \sum_r \int_{I_r} \gamma_r^* \omega.$$

Per justificar aquesta igualtat hem d'aproximar el nostre recinte per recintes diferenciables als quals podem aplicar el teorema 17.5.1 i passar al límit.

Per exemple, podem definir D_ϵ com el recinte que obtenim a partir de D unint per una corba diferenciable punts situats a distància ϵ de cada vèrtex.

Per poder veure que no hi ha problemes de convergència és fonamental que ω, o equivalentment les funcions P, Q, siguin contínues i estiguin definides en un entorn de D. Els detalls tècnics són complicats i no els farem aquí.



Els mateixos comentaris valen per a la formula de Stokes sobre varietats amb arestes. Per exemple, sobre un cub de $\mathbb{R}^3$, un cilindre amb les seves tapes, etc, la fórmula de Stokes és certa. Però una demostració rigorosa implicaria donar bones definicions de varietats amb arestes, etc.

Exemple 17.5.2 *Comproveu la fórmula de Green sobre el quadrat* $D = [0,1] \times [0,1]$ *i la 1-forma* $\omega = x\, dy$.

Solució. Com $d\omega = dx \wedge dy$, que és l'element d'àrea de $\mathbb{R}^2$,

$$\int_D d\omega = 1.$$

Ara recorrem la vora deixant el recinte D a la nostra esquerra i la parametritzem amb les quatre corbes

$$\begin{array}{rcl}\gamma_1(t) & = & (t,0), \quad 0\le t\le 1,\\ \gamma_2(t) & = & (1,t), \quad 0\le t\le 1,\\ \gamma_3(t) & = & (1-t,1), \quad 0\le t\le 1,\\ \gamma_4(t) & = & (0,1-t), \quad 0\le t\le 1.\end{array}$$

Així

$$\begin{array}{rcl}\gamma_1^*\omega & = & \gamma_1^*(x\,dy)=(x\circ\gamma_1)d(y\circ\gamma_1)=0,\\ \gamma_2^*\omega & = & \gamma_2^*(x\,dy)=(x\circ\gamma_2)d(y\circ\gamma_2)=dt,\\ \gamma_3^*\omega & = & \gamma_3^*(x\,dy)=(x\circ\gamma_3)d(y\circ\gamma_3)=0,\\ \gamma_4^*\omega & = & \gamma_4^*(x\,dy)=(x\circ\gamma_4)d(y\circ\gamma)=0.\end{array}$$

Per tant

$$\sum_r\int_{I_r}\gamma_r^*\omega=\int_{[0,1]}dt=1.$$

Exemple 17.5.3 (Diferenciabilitzant el quadrat) *Donat* $\epsilon>0$ *trobeu una funció diferenciable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *tal que*

$$x(t)=\left\{\begin{array}{cc}1 & 0\le t\le 1\\ 2-t & 1+\epsilon\le t\le 2\end{array}\right.$$

Observeu que fent un procés similar amb la segona component tenim una corba diferenciable que aproxima el camí γ_2 *seguit de* γ_3 *del problema anterior.*

Solució. Considerem el parell de funcions palangana següents:

$$p(t)=\left\{\begin{array}{cc}1 & -\infty<t\le 1\\ 0 & 1+\epsilon\le t<\infty\end{array}\right.$$

$$q(t)=\left\{\begin{array}{cc}0 & -\infty<t\le 1\\ 1 & 1+\epsilon\le t<\infty\end{array}\right.$$

Definim

$$f(t)=p(t)+(2-t)q(t)$$

i hem acabat.

Exemple 17.5.4 *Comproveu la fórmula de Stokes sobre el cilindre* $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, *i la 2-forma* $\omega = xy\,dy \wedge dz + y^2 dx \wedge dz + z dx \wedge dy$.

Solució. Calculem $d\omega$.

$$d\omega = (1-y)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Així

$$\int_C d\omega = \int_C dx \wedge dy \wedge dz - \int_C y dx \wedge dy \wedge dz = \pi,$$

ja que la primera integral és el volum del cilindre i la segona és zero per simetria.

Integral sobre la tapa inferior. Aquí $z = 0$, i per tant $\omega = 0$ i la integral és zero. En realitat estem utilitzant el mateix argument que a l'exercici 17.2.3. Considerem una parametrització de la tapa T, $\varphi(x,y) = (x,y,0)$, i

$$\int_T \omega = \int_D \varphi^*\omega = \int_D \varphi^*(xy\,dy \wedge dz + y^2 dx \wedge dz + z dx \wedge dy) = 0,$$

ja que $z \circ \varphi = 0$. (D és el disc unitat del pla x, y centrat a l'origen).

Integral sobre la tapa superior. Aquí $z = 1$, i per tant $\omega = dx \wedge dy$, que és l'element d'àrea i per tant la integral de ω a la tapa superior val π.

Integral sobre la superfície lateral. Passant a polars tenim

$$\int_C (\cos^2\theta \sin\theta d\theta \wedge dz - \sin^3\theta d\theta \wedge dz)$$

ja que $dx = -\sin\theta d\theta$ i $dy = \cos\theta d\theta$ sobre la superfície lateral.

Així,

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2\theta \sin\theta d\theta\, dz - \sin^3\theta d\theta\, dz) = 0.$$

17.6 Exercicis

Exercici 17.6.1 *Sigui* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua. Proveu que*

$$\int_{(a,b)} f = \int_{[a,b]} f.$$

Solució. Seguint [32] definim la integral de funcions sobre rectangles, en aquest cas sobre $[a, b]$, i definim integral sobre oberts com la integral sobre un rectangle més gran de la funció que volem integrar multiplicada per la funció característica d'aquest obert.

En el nostre cas, doncs,

$$\int_{(a,b)} f = \int_{[a,b]} f\chi,$$

on $\chi(x) = 1$ si $x \in (a, b)$, i $\chi(a) = \chi(b) = 0$.

És fàcil veure, per la definició d'integral de Riemann, que funcions que coincideixen excepte en un conjunt finit de punts, tenen la mateixa integral (problema 3.2 de [32]).

Per tant,

$$\int_{(a,b)} f = \int_{[a,b]} f\chi = \int_{[a,b]} f.$$

El teorema fonamental del càlcul ens diu essencialment que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua existeix $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en tots els punts (a a per la dreta i a b per l'esquerra) tal que $F' = f$. I que

$$\int_{(a,b)} f = \int_{[a,b]} f = F(b) - F(a).$$

Exercici 17.6.2 *Donada la* 1*-forma de* $\mathbb{R}^3$*,* $\omega = dz$*, i la carta local de la* 2*-subvarietat* $M = \{z = 0\}$ *donada per* $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$ *estudieu el suport del pull-back* $\varphi^*\omega$ *i l'antiimatge del suport de* ω*,* $\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$*.*

Solució. La 1-forma ω no s'anul·la mai, per tant

$$\operatorname{supp}\omega = \mathbb{R}^3$$

i així

$$\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega) = \mathbb{R}^2.$$

Per altra banda, $\varphi^*(\omega) = d(z \circ \varphi) = 0$ i per tant

$$\operatorname{supp}\varphi^*(\omega) = \emptyset,$$

és a dir, tenim un exemple on la inclusió 17.3

$$\operatorname{supp}\varphi^*(\omega) \subset \varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$$

és estricte.

Exercici 17.6.3 *Donada la* 1*-forma de* $\mathbb{R}^2$*,* $\omega = dx$*, i la carta local de la* 1*-subvarietat* $M = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1\}$*,* $\varphi : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donada per* $\varphi(x) = (x,0)$ *estudieu el suport del pull-back* $\varphi^*\omega$ *i l'antiimatge del suport de* ω*,* $\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$*.*

Solució. La 1-forma ω no s'anul·la mai, per tant

$$\operatorname{supp}\omega = \mathbb{R}^2$$

i així

$$\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega) = (0,1).$$

Per altra banda, $\varphi^*(\omega) = d(x \circ \varphi) = dx$ que no s'anul·la mai, i per tant

$$\operatorname{supp}\varphi^*(\omega) = \overline{(0,1)} = [0,1].$$

Així doncs en aquest cas la inclusió

$$\operatorname{supp}\varphi^*(\omega) \subset \varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$$

és falsa.

Capítol 18

Teorema de Gauss-Bonnet

En aquest capítol generalitzarem el teorema del defecte a triangles no geodèsics. Concretament, la millora que Bonnet fa del teorema del defecte és la següent.

18.1 Generalització del teorema del defecte

Teorema 18.1.1 *Sigui $T = \triangle ABC$ un triangle sobre una superfície. Llavors*

$$\int_T \mathcal{K}\, dS = A + B + C - \pi - \int_{\partial T} k_g\, ds,$$

on dS és l'element d'àrea de la superfície i ds l'element de longitud de la vora.

Demostració. Abans de començar la demostració precisem l'enunciat. Com la curvatura de Gauss $\mathcal{K}$ és una funció sobre la superfície S, $\mathcal{K}dS$ és una 2-forma sobre S i la podem integrar sobre una regió de S.

Les lletres A, B, C de la dreta de la igualtat representen la mesura dels angles del triangle.

La vora del triangle ∂T està formada pels seus tres costats que es poden considerar 1-varietats amb vora. Els denotem ∂T_i.

Com k_g és una funció sobre la 1-varietat $\partial T = \cup_i \partial T_i$ la seva integral està definida per

$$\int_{\partial T} k_g ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial T_i} k_g d\sigma_i$$

on $d\sigma_i$ és la l'element de longitud (1-forma que val 1 sobre un vector tangent unitari) de ∂T_i.

En particular, si $\gamma_i : I_i \longrightarrow \partial T_i$ és una parametrització per l'arc de ∂T_i

$$\int_{\partial T} k_g ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial T_i} k_g d\sigma_i = \sum_{i=1}^{3} \int_{I_i} \gamma_i^*(k_g d\sigma_i) = \sum_{i=1}^{3} \int_{I_i} k_{gi}(s) ds$$

ja que $\gamma_i^*(d\sigma_i) = ds$ (denotem per comoditat tots els paràmetres arc per s, encara que corresponen a tres corbes diferents) i hem denotat $k_{gi}(s) = k_g(\gamma_i(s))$. Considerarem aquestes corbes γ_i orientades de manera que la vora quedi orientada d'acord amb el teorema de Stokes.

Fetes aquestes consideracions iniciem la demostració del teorema.

Suposarem que el triangle està situat en una carta local (U, φ) ortogonal, és a dir, $F = 0$.

L'expressió de la curvatura geodèsica d'una corba parametritzada per l'arc $\gamma(s) = \varphi(\alpha(s))$, amb $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ corba sobre U, està donada per (Corol·lari 11.2.3, pàgina 247),

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\theta}{ds} \tag{18.1}$$

on θ és l'angle positiu entre $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i $\gamma'(s)$, i totes les funcions de la dreta són funcions de s: $E = E(u(s), v(s))$, etc.

Aquesta expressió suggereix definir la 1-forma sobre U,

$$\omega = Adu + Bdv$$

amb

$$A = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \qquad B = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}},$$

de manera que, restringint aquestes funcions a la corba $\alpha(s)$, amb $\gamma(s) = \varphi(\alpha(s))$, tindrem

$$k_g(s) = A(\alpha(s))u'(s) + B(\alpha(s))v'(s) + \theta'(s),$$

o, equivalenmet

$$\alpha^*(\omega) = (k_g(s) - \theta'(s))\, ds. \tag{18.2}$$

que no és més que (18.1) "multiplicada" per ds.

Si calculem ara la diferencial de ω i recordem l'expressió de la curvatura $\mathcal{K}$ en el punt $\varphi(u,v)$ (fórmula (10.5), pàgina 231, $\mathcal{K}\circ\varphi = K$)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

on totes les funcions de la dreta són funcions de (u,v): $E = E(u,v)$, etc. tenim

$$\begin{aligned} dw &= -(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u})\, du\wedge dv \\ &= \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right) du\wedge dv \\ &= -K\sqrt{EG}du\wedge dv \end{aligned}$$

Per tant, per definició d'integral de formes, l'expressió 14.4.2 per a $\varphi^*(dS)$ i el teorema de Stokes tenim

$$\begin{aligned} \int_T \mathcal{K}\, dS &= \int_{T'} \varphi^*(\mathcal{K}dS) \\ &= \int_{T'} K\sqrt{EG}du\wedge dv \\ &= -\int_{T'} d\omega = -\int_{\partial T'}\omega \end{aligned} \tag{18.3}$$

on T' és el "triangle" a U tal que $\varphi(T') = T$.

Siguin $\alpha_i(s)$ parametritzacions per l'arc[1] dels costats de T'. Les corbes $\gamma_i(s) = \varphi(\alpha_i(s))$ són parametritzacions dels costats de T.

Tenint en compte (18.2) sobre cada costat del triangle tenim

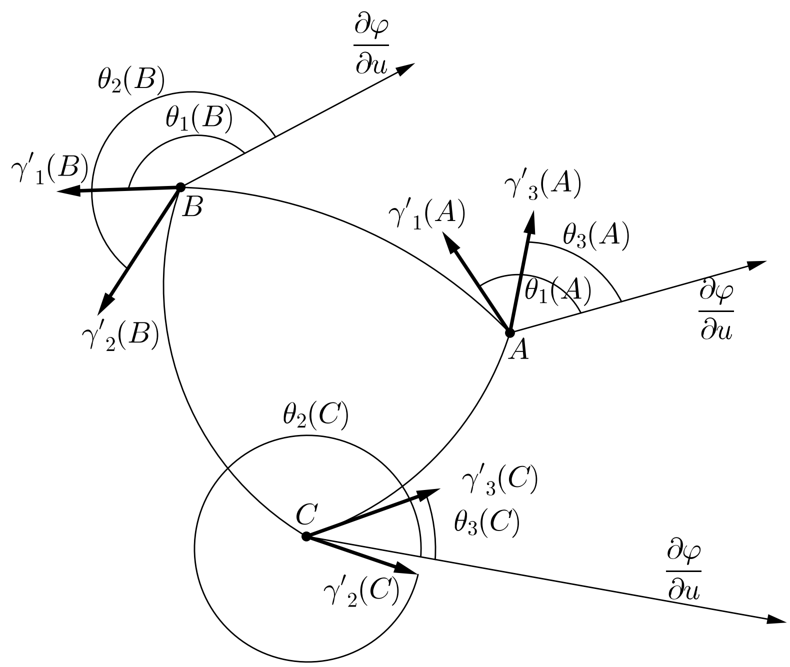
$$\begin{aligned} \int_{\partial T'}\omega &= \sum_{i=1}^{3}\int_{I_i}\alpha_i^*(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\int_{I_i}(k_{gi}(s) - \theta_i'(s))ds \\ &= \int_{\partial T} k_g ds - \sum_{i=1}^{3}\int_{I_i} d\theta_i. \end{aligned}$$

[1]Com abans denotem per comoditat tots els paràmetres arc per s, encara que corresponen a tres corbes diferents.

on hem posat k_{gi} per referir-nos a la curvatura geodèsica del costat i i $d\theta_i = \theta_i'(s)ds$. Substituint aquest valor a (18.3) tenim

$$\int_T \mathcal{K}\, dS = \sum_{i=1}^{3} \int_{I_i} d\theta_i - \int_{\partial T} k_g ds \tag{18.4}$$

Ara bé,



$$\begin{aligned}
\int_{I_1} d\theta_1 &= \theta_1(B) - \theta_1(A)\\
\int_{I_2} d\theta_2 &= \theta_2(C) - \theta_2(B)\\
\int_{I_3} d\theta_3 &= \theta_3(A) - \theta_3(C)
\end{aligned}$$

Sumant

$$\int_{\partial T} d\theta = (\theta_3(A) - \theta_1(A)) + (\theta_1(B) - \theta_2(B)) + (\theta_2(C) - \theta_3(C))$$

I mirant la figura

$$\int_{\partial T} d\theta = (-(\pi - A)) + (-(\pi - B)) + (C + \pi) = A + B + C - \pi.$$

I per tant, substituint aquest valor a (18.4), tenim

$$\int_T \mathcal{K} dS = A + B + C - \pi - \int_{\partial T} k_g(s) ds \quad \square$$

18.2 Gauss-Bonnet per a regions amb vora

Teorema 18.2.1 *Sigui R una regió de l'espai amb vora diferenciable a troços. Llavors*

$$\int_R K + \int_{\partial R} k_g + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi\chi(R),$$

on α_i són els angles externs (orientats) en els vèrtexs de la vora i $\chi(R)$ és la característica d'Euler de R.

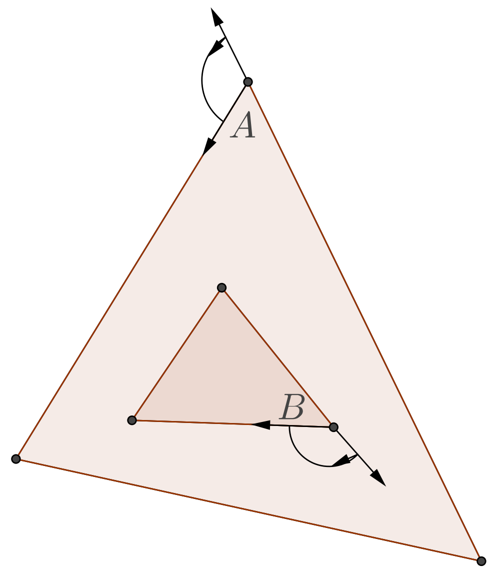
Demostració. Dividim la regió en triangles interiors geodèsics[2] i altres triangles amb dos costats geodèsics i un formant part de la frontera. Aplicant el teorema del defecte a cada triangle i sumant tenim

$$\int_R K + \int_{\partial R} k_g = 2\pi V_i + \pi V_e^1 - C\pi + \sum_i \theta_i \tag{18.5}$$

on V_i és el nombre de vèrtexs interiors, V_e^1 és el nombre de vèrtexs a la frontera que no són vèrtexs de la vora, C és el nombre de triangles i la suma està estesa als vèrtexs de la vora. Cada θ_i és la suma dels angles dels triangles de la triangularitzacio que coincideixen en el i-èssim vèrtex de la vora.

Tal com es veu a la figura els θ_i coincideixen amb suplementaris dels

[2]Per a la demostració no cal que siguin geodèsics, ho faig per simplificar.



angles exteriors orientats, $\theta_i = \pi - \alpha_i$, ja que, per exemple, en el punt A, $\alpha_A = \pi - A = \pi - \theta_A$, i en el punt B, degut a que la orientació és la oposada, $\alpha_B = -(\pi - B) = B - \pi$ i $\theta_B = 2\pi - B = \pi - (B - \pi) = \pi - \alpha_B$.

Per tant, denotant V_e^2 el nombre de vèrtexs de la vora, tenim

$$\sum_i \theta_i = \sum_i (\pi - \alpha_i) = \pi V_e^2 - \sum_{i=1}^{V_e^2} \alpha_i$$

Per tant, (18.5) queda

$$\begin{aligned} \int_R K + \int_{\partial R} k_g &= 2\pi V_i + \pi V_e^1 - C\pi + \pi V_e^2 - \sum_{i=1}^{V_e^2} \alpha_i \\ &= 2\pi V_i + \pi V_e - C\pi - \sum_{i=1}^{V_e^2} \alpha_i \end{aligned} \tag{18.6}$$

La integral de la curvatura geodèsica sobre la vora ∂R vol dir la suma de les integrals de $k_g(s)$ sobre cadascuna de les corbes diferenciables en que descompon ∂R.

Si pensem que cada aresta ho és de dues cares, excepte les de la frontera, tenim

$$3C = 2A - A_e = 2A - V_e$$

on A és el nombre d'arestes, A_e és el nombre d'arestes sobre la frontera, i V_e és el nombre de vèrtexs sobre la frontera. Com

$$C + V - A = \chi(R)$$

Per tant

$$C + V - \frac{3C + V_e}{2} = \chi(R),$$

és a dir

$$2V - C - V_e = 2\chi(R),$$

o

$$2V_i + V_e - C = 2\chi(R).$$

Substituint a (18.5), tenim el resultat. □

Observem que si R és una regió amb vora diferenciable, llavors

$$\int_R K + \int_{\partial R} k_g = 2\pi,$$

Exercici 18.2.2 *Comprovem Gauss-Bonnet en un casquet esfèric.*

L'àrea d'el casquet esfèric delimitat pel paral·lel de radi r a l'esfera de radi R és

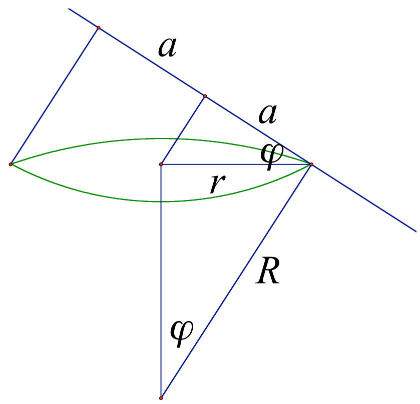
$$A = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi), \quad \text{on} \quad \sin\varphi = \frac{r}{R}.$$

Per tant, com $K = 1/R^2$,

$$\int_R K = \int_R K dS = 2\pi(1 - \cos\varphi).$$

Per altra banda la curvatura geodèsica del paral·lel es pot calcular o bé analíticament o bé amb el següent argument: La curvatura geodèsica del paral·lel en un punt P és igual a la curvatura en P de la corba plana que s'obté en projectar el paral·lel sobre el pla tangent a l'esfera en P. Vegeu secció 11.1.1.

Aquesta projecció és una el·lipse de semieixos $a = r\cos\varphi$, $b = r$, com es veu directament a la figura.



Però tothom sap que la curvatura de l'el·lilpse de semieixos a, b en el vèrtex corresponent al punt P és $k = \dfrac{a}{b^2}$. Per tant

$$k_g = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

I

$$\int_{\partial R} k_g = 2\pi r \cdot \frac{\cos\varphi}{r} = 2\pi\cos\varphi$$

És a dir

$$\int_R K = 2\pi - \int_{\partial R} k_g,$$

com volíem veure.

Capítol 19

Repère mobil

19.1 Referències ortonormals a $\mathbb{R}^3$

Seguirem O'Neill [25]. Un punt de vista similar el podeu trobar,entre d'altres, al llibre de H. Cartan [6].

Siguin E_1, E_2, E_3 tres camps de $\mathbb{R}^3$ tals que per a cada punt $p \in \mathbb{R}^3$, $(E_1(p), E_2(p), E_3(p))$ és una base ortonormal.

Com cada E_i és una aplicació $E_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la seva diferencial és, en cada punt $p \in \mathbb{R}^3$, l'aplicació lineal

$$dE_i(p) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donada per la matriu jacobiana.

Per tant, per a cada $v \in \mathbb{R}^3$, $dE_i(p)(v)$, que escriurem $dE_i(p; v)$, és un vector de $\mathbb{R}^3$ i es pot escriure doncs com

$$dE_i(p; v) = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j(p; v) E_j(p).$$

Per simplificar la notacióі degut a que és clar que els camps s'apliquen a un punt i les formes a un punt i un vector, l'anterior càlcul s'escriu simplement com

$$dE_i = \omega_i^j E_j$$

amb el conveni de sumació d'Einstein.

Aquest és el punt central del mètode de la referència mòbil: *escriure les derivades dels vectors de la base en termes de la pròpia base.*

Observem que les ω_i^j són 1-formes ordinàries, en el sentit de que són a valors reals. Es diuen *formes de connexió.*

Com (E_1, E_2, E_3) és una base ortonormal tenim que

$$\omega_i^j(p; v) = \langle dE_i(p; v), E_j(p) \rangle$$

que pels motius ja exposats escrivim com

$$\omega_i^j = \langle dE_i, E_j \rangle.$$

Denotarem per $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ la base dual de la base de camps (E_1, E_2, E_3). És a dir, són les 1-formes definides per la condició

$$\theta_i(p; E_j(p)) = \delta_{ij}, \quad p \in \mathbb{R}^3,$$

que escriurem només com

$$\theta_i(E_j) = \delta_{ij}.$$

Teorema 19.1.1 *Les formes de connexió són antisimètriques, és a dir*

$$\omega_i^j = -\omega_j^i.$$

Demostració. Com

$$\langle E_i, E_j \rangle = 0$$

l'exercici 19.5.1 ens diu que

$$(0, 0, 0) = E_i^t \cdot dE_j + E_j^t \cdot dE_i.$$

que, en aplicar-ho a un punt $p \in \mathbb{R}^3$ i a un vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ ens dóna

$$\begin{aligned} 0 &= E_i^t(p) \cdot dE_j(p; \xi) + E_j^t(p) \cdot dE_i(p; \xi) \\ &= \langle E_i(p), dE_j(p; \xi) \rangle + \langle E_j(p), dE_i(p; \xi) \rangle = \omega_j^i(p; \xi) + \omega_i^j(p; \xi), \end{aligned}$$

com volíem. $\square$

Teorema 19.1.2 (Càlcul de les formes de connexió) *Sigui A la matriu del canvi de base entre la base (E_1, E_2, E_3) i la base canònica (e_1, e_2, e_3), és a dir,*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad E_i = \sum_{j=i}^{3} a_i^j e_j.$$

Llavors les formes de connexió estan donades per

$$\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} da_i^k \cdot a_j^k = \sum_{k=1}^{3} da_i^k \cdot [a^t]_k^j.$$

Observació. Matricialment el teorema diu que

$$\omega = dA \cdot A^t,$$

en el ben entès que

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}$$

*Demostració.*Com $E_i = \sum_{k=1}^3 a_i^k e_k$ tenim que[1]

$$dE_i(p;\xi) = \sum_{k=1}^{3} da_i^k(p;\xi) e_k.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \omega_i^j(p;\xi) &= \langle dE_i(p;\xi), E_j(p)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{3} da_i^k(p;\xi)e_k, \sum_{r=1}^{3} a_j^r(p)e_r\rangle \\ &= \sum_{k,r=1}^{3} da_i^k(p;\xi)a_j^r(p)\delta_{kr} \\ &= \sum_{k=1}^{3} da_i^k(p;\xi)[a^t]_k^j(p), \end{aligned}$$

com volíem. □

Observem com a la pràctica, en el moment que coneixem la base de camps, i per tant A, obtenim les formes de connexió amb un simple producte de matrius.

[1] La base canònica és constant, $e_i(p) = e_i$, i té doncs derivada zero.

Nota 19.1.3 *Amb el conveni de notació que ja hem comentat, de no escriure ni punts ni vectors, l'anterior càlcul s'escriu simplement com*

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= \langle dE_i, E_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{3} da_i^k e_k, \sum_{r=1}^{3} a_j^r e_r\rangle \\ &= \sum_{k,r=1}^{3} da_i^k\ a_j^r\ \delta_{kr} = \sum_{k=1}^{3} da_i^k [a^t]_k^j. \end{aligned}$$

Teorema 19.1.4 (Equacions d'estructura) *Sigui (E_1, E_2, E_3) una referència ortonormal de camps amb base dual $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ i formes de connexió ω_i^j.*

Llavors

1) [Primeres equacions d'estructura]

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \theta_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

2) [Segones equacions d'estructura]

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Observació. Observem, abans de començar la demostració, que les dues equacions d'estructura, en notació matricial, s'escriuen simplement com

$$\begin{aligned} d\theta &= \omega \wedge \theta \\ d\omega &= \omega \wedge \omega \end{aligned}$$

on

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

i el producte 'wedge' $\wedge$ és el producte ordinari de matrius, però com les entrades de les matrius que estem multiplicant són 1-formes, les multipliquem amb el producte exterior.

Demostració de la primera equació d'estructura. La igualtat $E_i = \sum_{k=1}^3 a_i^k e_k$ implica

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{3} a_i^k dx_k$$

propietat estàndard de les bases duals.

Per tant,

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{3} da_i^k \wedge dx_k$$

La igualtat matricial $\omega = dA \cdot A^t$, junt amb el fet de que $A^t \cdot A = Id$ ens dóna

$$dA = \omega \cdot A,$$

o, equivalentment

$$da_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \; a_k^j.$$

Substituint,

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_{j=1}^{3}(\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \; a_k^j) \wedge dx_j = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \omega_i^k \wedge a_k^j \, dx_j \\ &= \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \sum_{j=1}^{3} a_k^j \, dx_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge d\theta_k. \end{aligned}$$

Demostració de la segona equació d'estructura. Com

$$\omega_i^j = \sum_{r=1}^{3} da_i^r [a^t]_r^j$$

i $d^2 = 0$, tenim

$$d\omega_i^j = -\sum_{r=1}^{3} da_i^r [da^t]_r^j.$$

Per altra banda observem que la igualtat

$$dA \cdot A^t + A \cdot dA^t = 0$$

ens diu que el terme (k,j) de $dA\cdot A^t$ és igual a menys el terme (k,j) de $A\cdot dA$, és a dir,

$$\sum_{s=1}^{3} da_k^s[a^t]_s^j = -\sum_{s=1}^{3} a_k^s[da^t]_s^j.$$

Així,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{r=1}^{3} da_i^r[a^t]_r^k\right) \wedge \left(\sum_{s=1}^{3} da_k^s[a^t]_s^j\right)\\
&= -\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{r=1}^{3} da_i^r\right) \wedge [a^t]_r^k\left(\sum_{s=1}^{3} a_k^s[da^t]_s^j\right)\\
&= -\sum_{k,r,s=1}^{3} da_i^r \wedge [a^t]_r^k a_k^s[da^t]_s^j\\
&= -\sum_{r,s=1}^{3} da_i^r \wedge \delta_{r,s}[da^t]_s^j\\
&= -\sum_{r=1}^{3} da_i^r \wedge [da^t]_r^j
\end{aligned}$$

i per tant $d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ com volíem. $\square$

19.2 Referències mòbils adaptades a superfícies

Donada una superfície orientable S direm que una referència mòbil (E_1, E_2, E_3) definida en un obert de $\mathbb{R}^3$ que contingui S és adaptada a la superfície si

$$E_3(p) = \nu(p), \quad p \in S$$

on ν és el camp unitari normal a S que la orienta.

Recordem que només considero el cas de referències ortonormals de manera que $E_1(p), E_2(p)$ és una base ortonormal (positiva ja que el seu producte exterior és $E_3(p)$) de l'espai tangent $T_p(S)$a la superfície en p.

Donada S orientada per ν podem prendre una base ortonormal local de camps E_1, E_2 definida a S i estendre-la a un petit obert que contingui S definint

$$E_i(q) = E_i(p), \quad i = 1,2,3$$

per a tot q de la normal a S per p, molt pròxim a p. No detallem aquesta construcció.

Les formes de connexió i la base dual d'una referència adaptada (E_1, E_2, E_3) es consideren sempre *restringides* a la superfície, és a dir *actuen únicament sobre punts de la superfície i sobre vectors tangents a la superfície en aquest punt*.

Aquestes restriccions les denotem igualment θ_i i ω_i^j.

Teorema 19.2.1 *Sigui (E_1, E_2, E_3) una referència adaptada a S. La seva base dual $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ i les formes de connexió ω_i^j compleixen les equacions d'estructura següents:*

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \omega_1^2 \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 &= \omega_2^1 \wedge \theta_1 \\ 0 &= \omega_3^1 \wedge \theta_1 + \omega_3^2 \wedge \theta_2 \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 &= \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{aligned}$$

Demostració. Conseqüència directa de les equacions d'estructura 19.1.4 i del fet de que $\theta_3 = 0$ ja que (la restricció) només actua sobre vectors tangents a S. En efecte, com $\omega_i^i = 0$, $i = 1, 2, 3$ tenim

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \omega_1^1 \wedge \theta_1 + \omega_1^2 \wedge \theta_2 + \omega_1^3 \wedge \theta_3 = \omega_1^2 \wedge \theta_2. \\ d\theta_2 &= \omega_2^1 \wedge \theta_1 + \omega_2^2 \wedge \theta_2 + \omega_2^3 \wedge \theta_3 = \omega_2^1 \wedge \theta_1. \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 &= \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{aligned}$$

Finalment observem que pel fet de ser $\theta_3 = 0$ sobre la superfície també tenim $d\theta_3 = 0$ sobre la superfície. En efecte, si (U, φ) és una carta local, és clar que $\varphi^*\theta_3 = 0$ i com la diferencial commuta amb el pull-back, tenim que

$$0 = d\varphi^*\theta_3 = \varphi^* d\theta_3$$

i per tant, $d\theta_3$ restringida a la superfície és zero. Vegeu també l'exercici 19.5.2.

Per tant
$$0 = d\theta_3 = \omega_3^1 \wedge \theta_1 + \omega_3^2 \wedge \theta_2. \quad \square$$

Teorema 19.2.2 (Endomorfisme de Weingarten) *Les formes duals i les formes de connexió d'una referència adaptada a una superfície compleixen que*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & d\omega_1^2 & = & -K\theta_1 \wedge \theta_2 \\ 2) & \omega_1^3 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_2^3 & = & 2H\theta_1 \wedge \theta_2 \end{array}$$

on K és la curvatura de Gauss i H la curvatura mitjana.

Demostració. La observació fonamental és que encara que $\mathcal{N}$ no estigui definida en un obert de $\mathbb{R}^3$ es compleix que

$$d\mathcal{N}(p;\xi) = dE_3(p,\xi), \quad p \in S, \xi \in T_p(s)$$

ja que aquuest valor és, en ambdós casos,

$$\frac{d}{dt}_{t=0}\mathcal{N}(\gamma(t))$$

on $\gamma(t)$ és una corba sobre S amb $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = \xi$.

Recordem que l'endomorfisme de Weingarten $W_p = -d\mathcal{N}_p$ és un endomorfisme de T_pS i per tant podem escriure,

$$W_p(E_i(p)) = a_i^1 E_1(p) + a_i^2 E_2(p), \quad i = 1, 2$$

i podem calcular a_i^j posant

$$\begin{array}{rcl} a_i^j & = & \langle W_p(E_i(p)), E_j(p)\rangle = -\langle d\mathcal{N}(p; E_i(p)), E_j(p)\rangle \\ & = & -\langle dE_3(p; E_i(p)), E_j(p)\rangle = -\omega_3^j(p; E_i(p)) \end{array}$$

Si pensem que p varia el que hem vist és la igualtat funcional

$$a_i^j = -\omega_3(E_i).$$

Per tant, la matriu de l'endomorfisme de Weingarten en la base (E_1, E_2), en cada punt p que ometo per simplificar notació és

$$W = \begin{pmatrix} -\omega_3^1(E_1) & -\omega_3^1(E_2) \\ -\omega_3^2(E_1) & -\omega_3^2(E_2) \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\begin{aligned} K &= \det W = \omega_3^1(E_1)\omega_3^2(E_2) - \omega_3^1(E_2)\omega_3^2(E_1) = (\omega_3^1 \wedge \omega_3^2)(E_1, E_2) \\ &= -(\omega_1^3 \wedge \omega_3^2)(E_1, E_2) \\ &= -d\omega_1^2(E_1, E_2), \end{aligned}$$

que prova la primera igualtat del teorema.

Anàlogament,

$$2H = -\omega_3^1(E_1) - \omega_3^2(E_2) = (\omega_1^3 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_2^3)(E_1, E_2)$$

que prova la segona igualtat del teorema. □

19.3 Referències mòbils adaptades a corbes sobre superfícies

Repetim l'exercici 11.10.7, pàgina 278, en llenguatge de formes.

Suposem donada una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc sobre una superfície S. A cada punt de la corba considerem la referència afí ortonormal $\{\gamma(s); e_1, e_2, e_3\}$ donada per

$$\begin{aligned} e_1(\gamma(s)) &= T(s) = \gamma'(s) \\ e_2(\gamma(s)) &= e_3(\gamma(s)) \wedge e_1(\gamma(s)) \\ e_3(\gamma(s)) &= \nu(s) \end{aligned}$$

on $\nu(s)$ és el vector unitari normal a la superfície, que l'orienta. És a dir, $\nu(s) = \mathcal{N}(\gamma(s))$.

Observem que la base (e_1, e_2, e_3) és positiva ja que $e_1 \wedge e_2 = e_3$.

Ara no és possible pensar que aquesta referència és la restricció a la corba d'una referència definida sobre un obert de $\mathbb{R}^3$. No tenim informació sobre els punts de la superfície que no estan a la corba.

El que farem serà agafar una referència mòbil sobre S i relacionar, sobre els punts de $\gamma(s)$, les dues referències (e_1, e_2, e_3) i (E_1, E_2, E_3).

Les formes de connexió ω_i^j i les formes duals θ_i fan referència doncs a (E_1, E_2, E_3).

Com $e_3 = E_3$, tenim que sobre els punts de $\gamma(s)$

$$\begin{aligned} e_1 &= (\cos\varphi)E_1 + (\sin\varphi)E_2 \\ e_2 &= -(\sin\varphi)E_1 + (\cos\varphi)E_2 \end{aligned}$$

Explicitem la dependència de s de la primera equació,

$$T(s) \quad = \quad (\cos\varphi(s))E_1(\gamma(s)) + (\sin\varphi(s))E_2(\gamma(s))$$

i derivem (ometem la dependència de s)

$$\begin{aligned} kN &= (-\varphi' \sin\varphi)E_1 + (\varphi' \cos\varphi)E_2 \\ &+ \cos\varphi[\omega_1^2(T)E_2 + \omega_1^3(T)E_3] + \sin\varphi[\omega_2^1(T)E_1 + \omega_2^3(T)E_3] \end{aligned}$$

Per definició de curvatura geodèsica tenim

$$k_g = \langle kN, e_2 \rangle = \varphi' + \omega_1^2(T).$$

Aquesta igualtat es pot escriure com una igualtat de 1-formes a l'interval $I \subset \mathbb{R}$ de definició de la corba $\gamma(s)$. Concretament,

$$\gamma^*\omega_1^2 = (k_g - \varphi')ds. \tag{19.1}$$

19.4 Gauss-Bonnet

Ens limitem al cas de domini amb vora diferenciable ja que l'estudi del cas diferenciable a troços seria repetir els arguments de la pàgina 403.

Teorema 19.4.1 *Sigui R una regió de l'espai simplement connexa amb vora diferenciable. Llavors*

$$\int_R K\, dS + \int_{\partial R} k_g\, ds = 2\pi.$$

Demostració. Pel teorema de Stokes i la primera equació d'estructura tenim

$$\int_R K\, dS = \int_R K\theta_1 \wedge \theta_2 = -\int_R d\omega_1^2 = -\int_{\partial R} \omega_1^2.$$

Aplicant ara la definició d'integral i la relació (19.1) tenim

$$-\int_{\partial R} \omega_1^2 = -\int_I \gamma^*\omega_1^2 = -\int_I (k_g - \varphi')ds = -\int_{\partial R} k_g ds + \varphi(L) - \varphi(0).$$

Com podem pensar que la corba és la imatge per una carta local d'una corba tancada i simple, $\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi$, i tenim el resultat. $\square$

19.5 Exercicis

Exercici 19.5.1 *Siguin $X, Y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos camps de $\mathbb{R}^3$ i considerem la funció $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per*

$$h = \langle X, Y \rangle.$$

Per cada $p \in \mathbb{R}^3$ pensarem $X(p)$ i $Y(p)$ com vectors columna (matrius de tres files i una columna).

Demostreu la igualtat matricial

$$dh = X^t \cdot dY + Y^t \cdot dX.$$

Solució. *Com*

$$h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} X_i(x, y, z) Y_i(x, y, z)$$

tenim

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x} Y_i + X_i \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right) = \langle \frac{\partial X}{\partial x}, Y \rangle + \langle X, \frac{\partial Y}{\partial x} \rangle.$$

i anàlogament per a $\frac{\partial h}{\partial y}$ i $\frac{\partial h}{\partial z}$.

Per tant és clar que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_1}{\partial y} & \frac{\partial Y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x} & \frac{\partial Y_2}{\partial y} & \frac{\partial Y_2}{\partial z} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial x} & \frac{\partial Y_3}{\partial y} & \frac{\partial Y_3}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} & \frac{\partial X_1}{\partial z} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} & \frac{\partial X_2}{\partial z} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x} & \frac{\partial X_3}{\partial y} & \frac{\partial X_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercici 19.5.2 *Considerem la superfície S donada per $f(x, y, z) = 0$. Calculeu la 1-forma θ_3 corresponent a una referència adaptada (E_1, E_2, E_3) i la seva diferencial.*

Solució. Sabem que

$$E_3 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|} \operatorname{grad} f = \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\|\operatorname{grad} f\|}$$

Considerem
$$\theta_3 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}(f_x dx + f_y dy + f_z dz).$$

Llavors

$$\theta_3(E_3) = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2}(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) = 1.$$

A més, $T_p(S)$ està generat per $u = (f_y, -f_x, 0), v = (f_z, 0, -f_x)$ i

$$\theta_3(u) = f_x f_y - f_y f_x = 0, \quad \theta_3(v) = f_x f_z - f_z f_x = 0.$$

Per tant, θ_3 així definit és la tercera component de la base dual de (E_1, E_2, E_3).

És fàcil veure, per Schwarz, que

$$d(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = 0$$

de manera que

$$d\theta_3 = da \wedge (f_x dx + f_y dy + f_z dz) = da \wedge \frac{1}{a}\theta_3, \qquad a = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}.$$

Per tant, com $\theta_3 = 0$ sobre S, $d\theta_3 = 0$ sobre S (en canvi θ_3 no és tancada com forma de $\mathbb{R}^3$).

Capítol 20

Càlcul vectorial clàssic

20.1 Formes associades a un camp

Definició 20.1.1 *Sigui $X : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camp vectorial diferenciable definit sobre un obert U de $\mathbb{R}^3$.*

a) La 1-forma diferencial associada a X és la 1-forma

$$\alpha_X : U \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$$

donada per

$$\alpha_X(P)(v) = \langle X_P, v\rangle, \quad P \in U, v \in \mathbb{R}^3.$$

b) La 2-forma diferencial associada a X és la 2-forma

$$\omega_X : U \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$$

donada per

$$\omega_X(P)(v, w) = \langle X_P, v \wedge w\rangle = \det(X_P, v, w), \quad P \in U, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Observem que si pensem les 1-formes actuant sobre camps,

$$\boxed{\alpha_X(Y) = \langle X, Y\rangle}$$

amb $X, Y \in \mathcal{X}(U)$.

Si pensem les 2-formes actuant sobre parelles de camps

$$\boxed{\omega_X(Y,Z) = \det(X,Y,Z)}$$

amb $X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$.

Expressió en coordenades. Escrivim

$$X = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Com α_X és una 1-forma sabem que

$$\alpha_X = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$$

amb a_i funcions sobre U, i així

$$a_i = \alpha_X(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \langle X, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = X_i.$$

Resumint

$$\alpha_X = X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3.$$

Podem dir, doncs, amb certa imprecisió, que *la 1-forma associada a un camp és la 1-forma que té les mateixes components que el camp.*

Com ω_X és una 2-forma tenim que

$$\alpha_X = b_1dx_2 \wedge dx_3 + b_2dx_3 \wedge dx_1 + b_3dx_1 \wedge dx_2.$$

i així, utilitzant permutacions cícliques a $\mathbb{Z}/(3)$,

$$b_i = \omega_X(\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}) = \langle X, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}\rangle = \langle X, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle = X_i.$$

Resumint

$$\omega_X = X_1dx_2 \wedge dx_3 + X_2dx_3 \wedge dx_1 + X_3dx_1 \wedge dx_2.$$

Podem dir, doncs, amb certa imprecisió, que *la 2-forma associada a un camp és la 2-forma que té les mateixes components que el camp.*

Observeu l'ordre en la base de 2-formes: $dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2$.

20.2 Integrals de línia

Definició 20.2.1 *Sigui C una 1-subvarietat orientada, compacta, amb vora de $\mathbb{R}^3$ i X un camp de $\mathbb{R}^3$ definit en un entorn obert de C. La integral*

$$\int_C \alpha_X$$

es diu integral de línia *o* circulació *del camp X sobre C.*

Per que aquesta integral tingui sentit hem de suposar $\operatorname{supp} \alpha_X \cap C$ és compacte.

Proposició 20.2.2 *Sigui C una 1-subvarietat orientada, compacta, amb vora de $\mathbb{R}^3$ i X un camp de $\mathbb{R}^3$ definit en un entorn obert de C. Sigui $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrització de C que conserva orientacions. Llavors*

$$\int_C \alpha_X = \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Demostració. Tenim

$$\int_C \alpha_X \overset{(1)}{=} \int_{[a,b]} \gamma^*(\alpha_X) = \int_a^b \alpha_X(\gamma(t))(\frac{d\gamma}{dt})dt = \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt. \quad \square$$

La igualtat (1) és la Definició 17.3.3, i el fet de que γ conserva orientacions.

Observem, doncs, que la integral

$$\int_a^b \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

no depèn de la parametrització positiva de $\gamma(t)$, ja que és igual a la integral de α_X sobre C. No obstant, si canviem la orientació de $\gamma(t)$ aquesta integral canvia el signe.

Escriurem, per simplificar i recordar fàcilment el resultat de la Proposició anterior,[1]

[1] Podem generalitzar la definició 14.3.1 de formes sobre superfícies a formes sobre corbes. Llavors $\langle X, T\rangle\, dt$ és una 1-forma sobre C, $\langle X, T\rangle$ és una funció sobre C essent T el vector tangent unitari, i ds és l'element de longitud (equivalent de l'element d'àrea), és a dir una 1-forma que val 1 sobre T.

$$\boxed{\int_C \alpha_X = \int_C \langle X, T\rangle\, dt}$$

Exemple 20.2.3 *Donat el camp $X = (-y, 0, z)$ de $\mathbb{R}^3$ calculeu la circulació al llarg de la circumferència C de radi 1 i centre l'origen del pla $z = 0$.*

Solució. L'enunciat no ens especifica la orientació de C. Només observem que segons com la parametritzem ens canvia el signe del resultat.

Si parametritzem C per

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

tenim

$$\begin{aligned}\int_C \alpha_X &= \int_0^{2\pi} \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle(-\sin t, 0, 0), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi.\end{aligned}$$

Si fem un canvi de variable $t = t(s)$, amb $t(s_1) = 0$ i $t(s_2) = 2\pi$, tenim

$$\begin{aligned}\int_C \alpha_X &= \int_{[s_1,s_2]} \langle X(\gamma(t(s))), \gamma'(t(s))\rangle\, |t'(s)|\, ds \\ &= \int_{[s_1,s_2]} \langle(-\sin t(s), 0, 0), (-\sin t(s), \cos t(s), 0)\rangle\, |t'(s)|\, ds \\ &= \int_{[s_1,s_2]} \sin^2 t(s)\, |t'(s)|\, ds = \pm\pi.\end{aligned}$$

Observem que el signe de $t'(s)$ no varia, ja que per ser difeomorfisme $t'(s) \neq 0$.

Proposició 20.2.4 *Un camp X definit en un obert connex U de $\mathbb{R}^3$ té la propietat de que la seva integral de línia només depèn dels punts inicial i final de la corba si i només si aquest camp deriva d'un potencial.*

Demostració. Suposem primerament que X deriva d'un potencial, és a dir, existeix una funció diferenciable definida a U tal que $X = \nabla f$. Sigui $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferenciable. Llavors

$$\int_{\gamma([a,b])} \alpha_X = \int_a^b \langle(\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

resultat que depèn, doncs, només de $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.

Suposem ara que la integral de línia de X al llarg de qualsevol corba depèn només dels punts inicial i final d'aquesta corba. Sigui $O \in U$. Per cada $x \in U$ definim

$$F(x) = \int_C \langle X, T\rangle dt$$

on C és qualsevol corba continguda a U que uneix O amb x, és a dir, existeix $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ tal que C és la traça de γ, amb $\gamma(a) = O$ i $\gamma(b) = x$. Llavors $T = \sigma'(t)$.

F està ben definida ja que el valor d'aquesta integral no depèn de la corba elegida, que vagi de O a x.

Estudiem les derivades parcials de F.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h, y, z) - F(x, y, z)}{h}$$

Prenem com corba de O a $(x + h, y, z)$ la corba que haguem agafat prèviament de O a (x, y, z) seguida de

$$\sigma(t) = (x + ht, y, z), \quad t \in [0, 1].$$

Llavors la diferència d'integrals que apareix en estudiar el numerador anterior es redueix a

$$\int_\sigma \langle X(\sigma(t)), (h, 0, 0)\rangle dt = \int_\sigma X_1(\sigma(t))hdt$$

i per tant

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_\sigma X_1(\sigma(t))hdt}{h} = X_1(x, y, z)$$

Anàlogament es demostra que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = X_2, \frac{\partial F}{\partial z} = X_3.$$

És a dir,

$$X = \nabla F. \quad \square$$

Observem que aquesta demostració dóna el mètode per construir el potencial del qual deriva el camp (sempre que aquest camp tingui la propietat de que les seves integrals de línia només depenguin dels punts inicial i final).

Observem també que X *deriva d'un potencial si i només si* α_X *és exacta*, ja que

$$X = \nabla f \Leftrightarrow \alpha_X = df.$$

20.3 Integrals de superfície

Definició 20.3.1 *Sigui M una 2-subvarietat orientada, compacta, amb vora de $\mathbb{R}^3$ i X un camp de $\mathbb{R}^3$ definit en un entorn obert de M. La integral*

$$\int_M \omega_X$$

es diu integral de superfície *o* flux *del camp X sobre M.*

Per que aquesta integral tingui sentit hem de suposar $\operatorname{supp} \omega_X \cap M$ és compacte.

Proposició 20.3.2 *Sigui X un camp diferenciable sobre una superfície S. Llavors*

$$\int_S \omega_X = \int_S \langle X, \mathcal{N} \rangle dS,$$

on $\mathcal{N}$ és el camp normal a S.

Demostració. Suposarem, per simplificar, que $\operatorname{supp} \omega_X \cap S \subset \varphi(U)$ on (U, φ) és una carta local.

Llavors

$$\begin{aligned}
\int_S \omega_X &= \int_{\varphi(U)} \omega_X = \int_U \varphi^*(\omega_X) \\
&= \int_U \det(X \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) du\, dv. \\
&= \int_U \langle X \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle\, du\, dv \\
&= \int_U \langle X \circ \varphi, \nu \rangle \| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \|\, du\, dv \\
&= \int_S \langle X, \mathcal{N} \rangle dS. \quad \square
\end{aligned}$$

Observem que tant dS com $\langle X, \mathcal{N}\rangle\, dS$ són 2-formes definides sobre S, en principi no sobre un obert de $\mathbb{R}^3$. Ja hem comentat que les podem considerar així ampliant $\mathcal{N}$ via entorns tubulars.

Proposició 20.3.3 *Sigui X un camp diferenciable sobre una superfície S i denotem per ϕ_t el seu grup uniparamètric. Llavors*

$$\int_S \omega_X = \frac{d}{dt}_{t=0} vol(A_t),$$

on

$$A_t = \{\phi_s(x); x \in S, 0 \leq s \leq t\}.$$

Demostració. Suposarem S donada per una sola carta local (U, φ). Sigui

$$F : (0,t) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la carta local de A_t donada per

$$F(s,u,v) = \phi_s(\varphi(u,v)).$$

El volum de A_t, $vol(A_t)$, es pot calcular així:

$$\begin{aligned} vol(A_t) &= \int_{A_t} dx \wedge dy \wedge dz = \int_{F((0,t)\times U)} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{(0,t)\times U} F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \int_0^t \int_U J_F \; ds\, du\, dv \end{aligned}$$

on J_F és el jacobià de F, és a dir $J_F = \det(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v})$.

Llavors

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} vol(A_t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_0^t \int_U J_F \, ds\, du\, dv \\ &= \int_U \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_0^t J_F\, ds \right) du\, dv \\ &= \int_U J_{F|t=0}\; du\, dv. \end{aligned}$$

Recordem

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(x) = X_x.$$

Així

$$\begin{aligned} J_{F|t=0} &= \det(\frac{\partial F}{\partial t}_{|t=0}, \frac{\partial F}{\partial u}_{|t=0}, \frac{\partial F}{\partial v}_{|t=0}) = \\ &= \det(\frac{\partial \phi_t(\varphi(u,v))}{\partial t}_{|t=0}, \frac{\partial \phi_t(\varphi(u,v))}{\partial u}_{|t=0}, \frac{\partial \phi_t(\varphi(u,v))}{\partial v}_{|t=0}) \\ &= \det(X_{\varphi(u,v)}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}). \end{aligned}$$

Resumint

$$\frac{d}{dt}_{t=0} vol(A_t) = \int_U \det(X_{\varphi(u,v)}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v})\, du\, dv = \int_S \omega_X. \quad \square$$

Exemple 20.3.4 *Calculeu el flux del camp $X = (x, 0, 0)$ a través de l'esfera S de centre el punt $(1, 1, 1)$ i radi 1. Calculeu el volum de l'esfera deformada pel camp, tot comprovant en aquest cas particular la Proposició 20.3.3.*

Solució. Només hem de calcular

$$\int_S \omega_X = \int_S \langle (x, 0, 0), (x-1, y-1, z-1) \rangle dS = \int_S x(x-1) dS.$$

Observem que el camp $(x-1, y-1, z-1)$ és un camp de $\mathbb{R}^3$ que restringit a S és el camp unitari normal exterior a S.

Si parametritzem S per

$$\begin{aligned} x &= 1 + \sin\varphi \cos\theta \\ y &= 1 + \sin\varphi \sin\theta \\ z &= 1 + \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\int_S x(x-1) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \sin\varphi\cos\theta)(\sin\varphi\cos\theta) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

Aquesta integral és trivial perquè

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta = 0, \quad \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta = \pi.$$

Repetiu aquest problema quan hàgim vist el teorema de la divergència.

Calculem ara el grup uniparamètric associat al camp. Posem $\phi_t(x) = \phi(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x))$. Hem de resoldre el sistema d'equacions diferencials (fixada x)

$$\frac{d}{dt} f_i = X(f_1, f_2, f_3).$$

En el nostre cas,

$$\begin{aligned} f_1' &= f_1, \\ f_2' &= 0, \\ f_3' &= 0, \end{aligned}$$

amb la condició inicial $f_1(0,x) = x_1$, $f_2(0,x) = x_2$, , $f_3(0,x) = x_3$. Per tant,

$$\phi_t(x) = (x_1 e^t, x_2, x_3)$$

L'esfera deformada pel flux d'quest camp es pot parametritzar per

$$F(s,\varphi,\theta) = \phi_t(\Psi(\varphi,\theta)) = ((1+\sin\varphi\cos\theta)e^s, 1+\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

El Jacobià val

$$J_F = \det(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = e^s(1+\sin\varphi\cos\theta)\sin^2\varphi\cos\theta.$$

Així,

$$vol(A_t) = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J_F ds\, d\varphi\, d\theta = (e^t - 1)\frac{4\pi}{3}.$$

I clarament

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{vol} A_t = \frac{4\pi}{3} = \int_S \omega_X.$$

20.4 Divergència

Definició 20.4.1 *Donat un camp de $\mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$, es defineix la* divergència *de X com la funció*

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3},$$

on x_1, x_2, x_3són les coordenades cartesianes de $\mathbb{R}^3$.

Observem que si ω_X és la 2-forma associada al camp X,

$$\omega_X = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

llavors

$$d\omega_X = \operatorname{div} X \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \tag{20.1}$$

Els camps amb divergència zero es diuen *solenoidals.*

Proposició 20.4.2 *La divergència d'un camp mesura la velocitat de variació relativa del volum del fluid al voltant d'un punt. Concretament,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{vol(\phi_t C_\epsilon)}{vol(C_\epsilon)} = \operatorname{div} X(0),$$

on $C_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)^3$ *és un petit cub centrat a l'origen de* $\mathbb{R}^3$*, i* ϕ_t *és el grup uniparamètric associat al camp* X*.*

Demostració. El cub C_ϵ, en el transcurs del temps t, s'ha transformat en una figura $\phi_t(C_\epsilon)$ el volum de la qual val (pel teorema del canvi de variable)

$$vol(\phi_t C_\epsilon) = \int_{C_\epsilon} J_{\phi_t} \eta,$$

on $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ és l'element de volum de $\mathbb{R}^3$. Pel teorema del valor mitjà, existeix un punt $\xi \in C_\epsilon$ tal que

$$vol(\phi_t C_\epsilon) = J_{\phi_t}(\xi) \cdot vol(C_\epsilon)$$

Per tant,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{vol(\phi_t C_\epsilon)}{vol(C_\epsilon)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J_{\phi_t}(0).$$

Però aquesta derivada és justament la divergència del camp a l'origen. En efecte utilitzant que

$$\frac{\partial \phi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0} = X_x, \quad \phi_0(x) = x$$

tenim

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_{\phi_t}(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det\left(\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_3}\right)\Big|_{x=0} \\
&= \det\left(\frac{\partial^2 \phi_t(x)}{\partial t \partial x_1}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_3}\right)\Big|_{x=0,t=0} \\
&+ \det\left(\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 \phi_t(x)}{\partial t \partial x_2}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_3}\right)\Big|_{x=0,t=0} \\
&+ \det\left(\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 \phi_t(x)}{\partial t \partial x_3}\right)\Big|_{x=0,t=0} \\
&= \det\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\Big|_{x=0}, e_2, e_3\right) + \det\left(e_1, \frac{\partial X}{\partial x_2}\Big|_{x=0}, e_3\right) + \det\left(e_1, e_2, \frac{\partial X}{\partial x_3}\Big|_{x=0}\right) \\
&= \mathrm{div}(X)(0). \quad \square
\end{aligned}
$$

Teorema 20.4.3 (Teorema de la divergència) *Sigui M una 3-subvarietat compacta orientada amb vora de $\mathbb{R}^3$. Sigui $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ l'element de volum de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{N}$ el camp normal exterior.*

Per tot camp vectorial definit en un obert que conté M es compleix que el flux a través de la vora és la integral de la divergència en el domini:

$$\int_M \mathrm{div}(X)\, \eta = \int_{\partial M} \omega_X = \int_{\partial M} \langle X, \mathcal{N} \rangle dS.$$

Demostració. Conseqüència de Stokes i la igualtat 20.1. La darrera igualtat és la Proposició 20.3.2. $\square$

Exemple 20.4.4 *Calculeu el volum d'una esfera de radi r, B_r.*

Solució. Apliquem el teorema de la divergència la camp identitat $X = (x, y, z)$. Com $\mathrm{div}\, X = 3$,

$$\int_{B_r} 3\eta = 3vol(B_r) = \int_{\partial(B_r)} \langle X, \mathcal{N} \rangle dS = \int_{\partial(B_r)} r dS,$$

ja que, sobre $\partial(B_r)$, $X = r\mathcal{N}$ on $\mathcal{N}$ és el normal exterior de l'esfera. Per tant,

$$vol(B_3) = \frac{r}{3} \text{àrea}(\partial(B_r)).$$

Exemple 20.4.5 *Calculem*

$$\int_{S_R} \omega$$

on $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ *i* S_R *és l'esfera de radi* R *i centre l'origen de* $\mathbb{R}^3$ *(exemple 17.4.3).*

Solució. Com $\omega = \omega_X$ amb $X = (x, y, z)$

$$\int_{S_R} \omega = \int_{\partial(B_R)} \omega = \int_{B_R} d\omega_X = \int_{B_R} \operatorname{div} X\eta = 3(\frac{4}{3}\pi R^3).$$

Exemple 20.4.6 (Principi d'Arquimedes) *La força que empeny cap amunt un cos submergit en un fluid és igual al pes del volum desallotjat.*

Sigui $F(x, y, z) = (0, 0, \rho z)$ i $M \subseteq \{z \leq 0\}$ una subvarietat tridimensional compacta amb vora. El camp F es pot interpretar com la pressió cap al fons d'un fluid de densitat constant ρ a $\{z \leq 0\}$. Donat que el fluid exerceix pressió en totes direccions, es defineix l'empenyiment a M exercit pel fluid com $\int_{\partial M} F \cdot \mathcal{N}\, dS$. Observem que $F \cdot \mathcal{N}$ és la component normal del camp F.

Pel teorema de la divergència l'empenyiment és

$$\int_{\partial M} \langle F, \mathcal{N} \rangle\, dS = \int_M \operatorname{div}(F)\eta = \rho \operatorname{vol}(M).$$

Pensem M com un subconjunt ideal ocupat pel fluid, és a dir, un subconjunt de $\{z \leq 0\}$. Podem pensar que el fluid és en equilibri, de manera que el pes del volum que ocupa aquesta regió és $\rho \operatorname{vol}(M)$ és compensat per una força igual i de sentit contrari.

Si ara canviem aquest volum de fluid per un cos amb el mateix volum però de pes diferent aquest cos surarà o no en funció de si el seu pes compensa o no el pes del volum desallotjat.

20.5 Rotacional

Podeu trobar aquest tema molt ben desenvolupat a [5] o a [11].

Definició 20.5.1 *Donat un camp de* $\mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$, *es defineix el* rotacional *de* X *com el camp*

$$\operatorname{rot} X = (\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}),$$

on x_1, x_2, x_3 *són les coordenades cartesianes de* $\mathbb{R}^3$.

Hi ha qui escriu

$$\operatorname{rot} X = \nabla \times X$$

ja que utilitzen la norma mnemotècnica

$$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}.$$

Observem que si α_X és la 1-forma associada al camp X,

$$\alpha_X = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3,$$

llavors

$$\begin{aligned} d\alpha_X &= (\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}) dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ (\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}) dx_3 \wedge dx_1 \\ &+ (\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

i per tant,

$$\boxed{d\alpha_X = \omega_{\operatorname{rot} X}}$$

És a dir, *la diferencial de la* 1*-forma associada a un camp és la* 2*-forma associada al rotacional d'aquest camp.*

Com que tota 1-forma β es pot escriure com

$$\beta = \alpha_Y$$

per a un cert camp Y (el que té les mateixes components que β) tenim que

$$d\beta = d\alpha_Y = \omega_{\operatorname{rot} Y}.$$

Proposició 20.5.2 *Sigui* X *un camp de* $\mathbb{R}^3$.

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$.

2. $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$, *per a tota funció diferenciable* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Recordem que el gradient de* f *és* $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$

Demostració. 1) Com $d\alpha_X = \omega_{\operatorname{rot} X}$, tenim

$$0 = d^2(\alpha_X) = d(\omega_{\operatorname{rot} X}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} X)\eta,$$

on η és l'element de volum. Per tant, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$.

2) Només hem d'observar que

$$\boxed{\alpha_{\nabla f} = df}$$

per tant

$$0 = d^2 f = d(\alpha_{\nabla f}) = \omega_{\operatorname{rot}(\nabla f)}.$$

Per tant, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. $\square$

Exemple 20.5.3 *Estudieu el moment angular d'un petit cub* $C = (-\epsilon, \epsilon)^3$ *respecte d'un camp de velocitats* Y*, que suposarem lineal.*

Solució. El moment angular d'una partícula és el producte vectorial del vector posició de la partícula amb el seu vector velocitat. Si pensem el cub com la unió dels seus punts el moment angular serà

$$M = \int_C (x_1, x_2, x_3) \times Y(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Si posem $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ amb

$$Y_i = \sum a_{ij} x_j$$

$$\begin{aligned} M \;\; = \;\; & \int_C (\sum_j (x_2 a_{3j} x_j - x_3 a_{2j} x_j), \sum_j (x_3 a_{1j} x_j - x_1 a_{3j} x_j), \\ & \sum_j (x_1 a_{2j} x_j - x_2 a_{1j} x_j))\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \end{aligned}$$

Tenint en compte que les integrals dels productes x_ix_j, amb $i \neq j$, són zero, tenim

$$\begin{aligned} M &= \int_C (x_2^2 a_{32} - x_3^2 a_{23}, x_3^2 a_{13} - x_1^2 a_{31}, x_1^2 a_{21} - x_2^2 a_{12})\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \\ &= \frac{2\epsilon^3}{3}(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})(2\epsilon)(2\epsilon) \\ &= \frac{8\epsilon^5}{3} \operatorname{rot} Y \end{aligned}$$

Això vol dir, que quan ϵ és petit, aproximant cada camp per Taylor, el rotacional ens dóna el moment angular per unitat de volum.

Teorema 20.5.4 (Teorema del rotacional) *Sigui M una superfície de $\mathbb{R}^3$, compacta orientada i amb vora. Per tot camp vectorial definit en un obert que conté M es compleix*

$$\int_M \omega_{\operatorname{rot} X} = \int_{\partial M} \alpha_X.$$

Equivalentment,

$$\boxed{\int_M \langle \operatorname{rot} X, \mathcal{N} \rangle dS = \int_{\partial M} \langle X, T \rangle ds,}$$

on T és el vector tangent a la vora i $\mathcal{N}$ el normal a la superfície.

Demostració. Primer comentem que la integral de l'esquerra depèn de la orientació $\mathcal{N}$ fixada a M, i la de la dreta té la orientació induïda a la vora. Recordem que aquesta es pot caracteritzar dient que $v \in T_P(\partial M)$ és positiu si $v \wedge \mathcal{N}$ és exterior.[2]

Fets aquests comentaris el teorema és conseqüència directa del teorema de Stokes i de que $\omega_{\operatorname{rot} X} = d\alpha_X$.

La manera clàssica d'escriure el teorema del rotacional és

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, \mathcal{N} \rangle dS = \int_{\partial M} \langle X, T \rangle ds,$$

[2]Això equival a dir que la base (e, v) amb e exterior, és positiva, és a dir, $e \wedge v = \mathcal{N}$.

on ara el ds de la dreta és l'element de línia de la vora: la 1-forma que val 1 sobre una base ortonormal, que en aquest cas és redueix a un sol vector, com es desprèn directament de les Proposicions 20.2.2 i 20.3.2. □

Igual que passa amb el teorema de Green aquest teorema és cert quan la vora de M és diferenciable a troços. És a dir, si llevat d'aquest número finit de punts, ∂M és la unió de r corbes $\gamma_r : I_r \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\int_M \omega_{\mathrm{rot}\, X} = \int_M \langle \mathrm{rot}\, X, \mathcal{N} \rangle \, dS = \sum_{j=i}^{r} \int_{I_r} \langle X(\gamma(t)), \gamma'_j(t) \rangle dt$$

Podem donar ara una segona demostració del Teorema de Green, Teorema 17.5.1, pàgina 392.

Corol·lari 20.5.5 (Teorema de Green) *Sigui D una 2-subvarietat de $\mathbb{R}^2$, compacta i amb vora. Sigui$X = (P(x,y), Q(x,y))$ un camp diferenciable definit en un obert que contingui D. Llavors*

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Demostració. Pensem $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. I pensem $X = (P, Q, 0)$. Llavors

$$\alpha_X = Pdx + Qdy, \quad \mathrm{rot}\, X = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

i

$$\omega_{\mathrm{rot}\, X} = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$$

Com $\alpha_X = Pdx + Qdy$,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_D \omega_{\mathrm{rot}\, X} = \int_{\partial D} \alpha_X = \int_{\partial D} Pdx + Qdy. \quad \square$$

Exemple 20.5.6 *Comproveu el teorema del rotacional per a un camp lineal $X = (ax + by + cz, dx + ey + fz, 0)$ i $M = D$, el disc tancat del pla x, y, de centre l'origen i radi r.*

Solució. La vora es parametritza per $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ de manera que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \langle X, T\rangle ds = \\
= &\int_{\partial D} \langle X, (-r\sin t, r\cos t, 0)\rangle dt \\
= &\int_0^{2\pi} -r\sin t(ar\cos t + br\sin t) + r\cos t(dr\cos t + er\sin t)dt \\
= &\ \pi r^2(d-b).
\end{aligned}$$

I

$$\begin{aligned}
&\int_D \langle \operatorname{rot} X, \mathcal{N}\rangle dS = \\
= &\int_D \langle \operatorname{rot} X, e_3\rangle dx\, dy \\
= &\int_D (\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}) dx\, dy \\
= &\int_D (d-b) dx\, dy \\
= &\ \pi r^2(d-b)
\end{aligned}$$

Com tot camp es pot aproximar per un lineal considerant els seus primers termes de Taylor, si r és petit, el càlcul de la primera integral en la que apareix ja l'expressió $d-b$, que ara serà la diferència de derivades parcials, ja motiva la definició de rotacionals, vegeu [5], pàgina 131.

20.6 Lema de Poincaré

Proposició 20.6.1 (Lema de Poincaré) *Sigui U un obert estrellat respecte l'origen de $\mathbb{R}^n$. Tota forma tancada sobre U és exacta.*

Demostració. Definim l'operador

$$I : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

que associa a la k-forma

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

la $(k-1)$-forma

$$I\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1,\ldots i_k}(tx)dt \right) \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} dt$$

Es comprova que

$$\omega = dI\omega + Id\omega.$$

D'aquí es dedueix que si ω és tancada, llavors és exacta. $\square$

Exercici 20.6.2 *Completeu els detalls de la demostració del Lema de Poincaré per a $k=1$ i $n=2$.*

Solució. En aquest cas

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$$

amb $a_i = a_i(x_1, x_2)$.

Ara bé, per linealitat és suficient comprovar la fórmula $\omega = dI\omega + Id\omega$ per a

$$\omega = a_1 dx_1,$$

ja que el mateix càlcul demostraria que és certa per a $a_2 dx_2$, i sumaríem.

Suposem doncs $\omega = a_1 dx_1$. La diferencial de ω és

$$d\omega = -\frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

L'operador I aplicat a ω és la funció

$$I\omega = \left(\int_0^1 a_1(tx_1, tx_2)dt \right) x_1.$$

La diferencial d'aquesta funció és

$$dI\omega \ = \ \left(\int_0^1 a_1(tx_1, tx_2)dt \right) dx_1 + x_1 d \left(\int_0^1 a_1(tx_1, tx_2)dt \right)$$

Però

$$d \left(\int_0^1 a_1(tx_1, tx_2)dt \right) \ = \ (\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2)tdt)dx_1 + (\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2)tdt)dx_2.$$

Per tant

$$\begin{aligned} dI\omega &= \left(\int_0^1 a_1(tx_1,tx_2)dt) + x_1\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2)t\,dt\right)dx_1 \\ &+ \left(x_1\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2)t\,dt\right)dx_2 \end{aligned}$$

Per altra banda

$$\begin{aligned} Id\omega &= \int_0^1 t(-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2))dt(x_1dx_2 - x_2dx_1) \\ &= \left(x_2\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2))t\,dt\right)dx_1 \\ &- \left(x_1\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2))t\,dt\right)dx_2 \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} & Id\omega + dI\omega = \\ =& \left(\int_0^1 a_1(tx_1,tx_2)dt) + x_1\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2)t\,dt + x_2\int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2))t\,dt\right)dx_1 \\ =& \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}(a_1(tx_1,tx_2)t)dt\right)dx_1 \\ =& a_1(x_1,x_2)dx_1 \\ =& \omega. \qquad \square \end{aligned}$$

Camps conservatius

Definició 20.6.3 *Direm que un camp X de $\mathbb{R}^3$ és* conservatiu *si* $\operatorname{rot} X = 0$. *I direm que* deriva d'un potencial *si existeix una funció diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $X = \nabla f$.*

Com $\omega_{\operatorname{rot} X} = d\alpha_X$, *un camp és conservatiu si i només si la* 1*-forma α_X associada al camp és tancada.* Recordem que *un camp deriva d'un potencial si i només si la* 1*-forma α_X associada al camp és exacta.*

Hem vist, a la Proposició 20.5.2 que $\operatorname{rot} \nabla f = 0$, és a dir, *tot camp que derivi d'un potencial és conservatiu.*

El recíproc no és cert en general, és a dir, hi ha camps conservatius (α_X és tancada) que no deriven d'un potencial (α_X no exacta), vegeu exercici 20.7.1). No obstant sí que és cert aquest recíproc quan el camp X està definit sobre un tipus particular d'obert.

Proposició 20.6.4 *Tot camp conservatiu, definit sobre un obert simplement connex, deriva d'un potencial.*

Demostració. Com $\omega_{\mathrm{rot}\,X} = d\alpha_X$, si X és conservatiu $d\alpha_X = 0$, és a dir, α_X és tancada. Si estem en un obert simplement connex, tota 1-forma tancada és exacta,[3] i per tant existeix una funció diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha_X = df$. Però això vol dir, per la definició de α_X, que $X = \nabla f$. $\square$

Seguint [11] veiem la relació entre camps solenoidals i camps que deriven d'un potencial vectorial, és dir, camps que són rotacionals d'un altre camp.

Proposició 20.6.5 *Sigui U un obert estrellat i X un camp sobre U. Són equivalents:*

(1) X és el rotacional d'un camp, $X = \mathrm{rot}\, Y$.

(2) El flux de X a través de qualsevol superfície sense vora tancada S de U és nul.

(3) Donada una corba tancada C a U, el flux de X a través de qualsevol superfície $S \subset U$ amb vora C és independent de la superfície.

(4) X és solenoidal, $\mathrm{div}\, X = 0$.

Demostració. (1) $\Rightarrow$ (2). Conseqüència del teorema de la divergència, ja que

$$\int_S \langle X, \nu \rangle dS = \int_V \mathrm{div}\, X \eta = \int_V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, Y \eta = 0,$$

on V és la regió tancada per S, ν la normal a S i η l'element de volum de $\mathbb{R}^3$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Si S_1 i S_2 són dues superfícies amb $\partial(S_1) = \partial(S_2) = C$, llavors el flux a través de $S_1 \cup S_2$ és

$$\int_{S_1} \langle X, \nu_1 \rangle dS_1 + \int_{S_2} \langle X, \nu_2 \rangle dS_2$$

[3] És ben sabut que si U és simplement connex, el primer grup de cohomologia $H^1(U, \mathbb{R}) = 0$. En donem una demostració directa a l'exercici 20.7.5.

on ν_1, ν_2 són els normals exteriors, de manera que aquest flux és zero si i només si

$$\int_{S_1} \langle X, \nu_1 \rangle dS_1 = -\int_{S_2} \langle X, \nu_2 \rangle dS_2 = \int_{S_2} \langle X, -\nu_2 \rangle dS_2,$$

i, com els vectors ν_1 i $-\nu_2$ indueixen la mateixa orientació en C, hem acabat.

(3) $\Rightarrow$ (4). Com (2) i (3) són equivalents veiem que (2) $\Rightarrow$ (4). El teorema de la divergència, juntament amb la condició (2), ens diu que

$$\int_M \operatorname{div} X \eta = 0$$

sobre qualsevol subvarietat M compacta amb vora de $\mathbb{R}^3$. Si $\operatorname{div} X \neq 0$ en un punt, és diferent de zero (per exemple, positiu) en un entorn d'aquest punt. Prenent com M una bola de centre el punt i radi prou petit com perquè estigui continguda en aquest obert on la divergència és positiva arribem a contradicció.

(4) $\Rightarrow$ (1). Donat un tal camp X sabem que

$$d\omega_X = \operatorname{div} X \eta$$

on η és l'element de volum. Per tant, $\operatorname{div} X = 0$ implica que ω_X és tancada, i pel Lema de Poincaré, exacta. És a dir, existeix una 1-forma β tal que

$$\omega_X = d\beta.$$

Però com $\beta = \alpha_Y$ per a un cert camp Y,

$$\omega_X = d\alpha_Y = \omega_{\operatorname{rot} Y},$$

i per tant $X = \operatorname{rot} Y$. $\square$

La condició d'obert estrellat no es pot canviar, en general, per la d'obert simplement connex, com es veu a l'exercici 20.7.4. És a dir, ω_X pot ser tancada ($\operatorname{div} X = 0$) però no exacta (X no és rotacional).[4]

Resum

[4]En llenguatge de cohomologia això vol dir que, a menys que U sigui estrellat, no podem assegurar que $H^2(U, \mathbb{R}) = 0$.

$$\begin{array}{|rcl|}\hline \text{div rot } X &=& 0 \\ \text{rot grad } f &=& 0 \\ \text{div } X &=& 0 \Rightarrow X = \text{rot Y}, \quad \textit{sobre oberts estrellats} \\ \text{rot X} &=& 0 \Rightarrow X = \nabla f, \quad \textit{sobre oberts simplement connexos} \\ \hline \end{array}$$

20.7 Exercicis

Exercici 20.7.1 *Comproveu que la* 1*-forma*

$$\alpha = \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx + xdy)$$

definida a l'obert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *és tancada però no és exacta.*

Solució. És fàcil veure que es tancada. Suposem que fos exacta. Hi hauria una funció f definida a U tal que $\omega = df$. Integrant ω sobre el cercle unitat tindríem

$$\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = 0$$

ja que S^1 no té vora. Ara bé, si calculem directament

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} -\sin(t)d(\cos(t)) + \cos(t)d(\sin(t)) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Observem que aquest exercici diu que el camp

$$X = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})$$

tal que $\alpha_X = \alpha$ és conservatiu (α_X tancada) i en canvi no deriva d'un potencial (α_X no és exacta).

Exercici 20.7.2 *Calculeu el flux d'aigua que passa per una membrana no plana que tapa una tuberia d'aigua.*

Solució. Sigui M una superfície amb vora tal que ∂M està continguda al cilindre $x^2 + y^2 = 1$, amb un punt i només un sobre cada generatriu del cilindre. Suposem que el camp que descriu el moviment de l'aigua és $X = (0, 0, 1)$.

Observem que si $V = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$, llavors

$$\operatorname{rot} V = X$$

Per tant, si $\mathcal{N}$ és el camp normal a M,

$$\int_M \omega_{\operatorname{rot} V} = \int_M \langle X, \mathcal{N} \rangle dS = \int_{\partial M} \alpha_V$$

Ara, per les hipòtesis restrictives que hem posat sobre la vora, aquesta es pot parametritzar per

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, z(t))$$

per a una certa funció $z(t)$.

Per tant

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \alpha_V &= \int_0^{2\pi} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t, 0), (-\sin t, \cos t, z'(t)) \rangle dt = \pi.
\end{aligned}$$

Exercici 20.7.3 *[11] Trobeu el potencial del camp*

$$X(x, y, z) = (x^2, 2yz, y^2)$$

Solució. Observem primerament que

$$\operatorname{rot} X(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

i per tant, deriva d'un potencial (aquest camp està definit a tot $\mathbb{R}^3$ que és un obert simplement connexa de $\mathbb{R}^3$).

Per trobar un potencial només hem de fixar un punt, per exemple $O = (0, 0, 0)$ i definir $F(x, y, z)$ com la integral de X al llarg d'una corba (qualsevol, i per tant n'agafarem una fàcil) que uneixi O amb (x, y, x).

Per exemple,

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \int_0^x \langle X(t, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle dt + \int_0^y \langle X(x, t, 0), (0, 1, 0) \rangle dt \\
&+ \int_0^z \langle X(x, y, t), (0, 0, 1) \rangle dt \\
&= \int_0^x t^2 dt + \int_0^z y^2 dt \\
&= \frac{x^3}{3} + y^2 z.
\end{aligned}$$

Exercici 20.7.4 *Demostreu que el camp*

$$X(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

és un camp solenoidal de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. *Demostreu que no és el rotacional de cap camp.*

Solució. Es deixa al lector. Vegeu [11], p.191.

Exercici 20.7.5 *Sigui* α *una* 1*-forma tancada definida sobre un obert* U *simplement connex de* $\mathbb{R}^3$. *Proveu que existeix una funció* f *definida sobre* U *tal que* $\alpha = df$.

Demostració. Sigui C una corba tancada de U. Per definició de *simplement connex* existeix una superfície $S \subset U$ tal que $C = \partial S$. Sigui X el camp sobre U tal que $\alpha = \alpha_X$.

Pel teorema de Stokes

$$\int_C \alpha_X = \int_S d\alpha_X = 0.$$

El fet de que la integral al llarg de qualsevol corba tancada sigui zero equival a dir que la integral de línia no depèn del camí. Per tant, per la Proposició 20.2.4, X deriva d'un potencial, que equival, com hem vist a la pàgina 442, a que α_X sigui exacta. $\square$.

Apèndix A

Integració de formes quan el suport no està contingut en una carta local

A.1 Particions de la unitat

Lema A.1.1 *Donades dues boles tancades concèntriques $B_1 \subset B_2$ existeix una funció $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ amb valors a $[0,1]$ que val 1 a B_1 i 0 fora de B_2.*

Demostració. Podem[1] suposar, sense perdre generalitat que

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq \sqrt{a}\}, \\ B_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq \sqrt{b}\}, \end{aligned}$$

Considerem $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$g(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x-a}) & a < x < b \\ \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Es pot veure que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Ara definim

$$\Phi(x) = \frac{\int_x^b g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

[1]Segueixo[16].

També es compleix que $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Aquesta funció val 1 a $(-\infty, a]$, és decreixent entre a i b, i val 0 a $[b, \infty)$.

Ara definim

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \Phi((x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2)$$

i tenim que $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, té valors a $[0,1]$, val 1 a B_1 i 0 fora de B_2, com volíem. □

Proposició A.1.2 (Particions de la unitat) *Sigui K un compacte de $\mathbb{R}^n$ i $\{V_\alpha\}$ un recobriment de K per oberts. Llavors existeixen funcions $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, a valors $[0,1]$, tals que*

1. $\sum_{i=1}^m f_i(x) = 1, \forall x \in K,$
2. *Cada f_i té el suport*[2] *contingut en algun V_α.*

Demostració. Per cada $x \in K$ prenem dues boles obertes centrades a x, $B(x)$ i $D(x)$, amb $B(x) \subsetneq D(x)$, contingudes en algun V_α. Com x pertany a algun V_α i els V_α són oberts, no hi ha problema per construir $\overline{B(x)}$ i $D(x)$. Les agafem més petites si cal per poder assegurar també que $\overline{D(x)} \subset V_\alpha$.

Per ser K compacte existeix un nombre finit de punts $x_1, \dots, x_m$ tals que

$$K \subset B(x_1) \cup \cdots \cup B(x_m).$$

Pel lema anterior existeixen funcions $g_1, \dots, g_m$, amb valors a $[0,1]$, tals que valen 1 a $\overline{B}(x_i)$ i 0 fora de $D(x_i)$.

Definim noves funcions $f_1, \dots, f_m$ per

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 \\ f_2 &= (1-g_1)g_2 \\ f_3 &= (1-g_1)(1-g_2)g_3 \\ &\vdots \\ f_i &= (1-g_1)\dots(1-g_{i-1})g_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

[2]El suport d'una funció és l'adherència del conjunt de punts x on $f(x) \neq 0$. Escriurem

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}.$$

L'adherència és respecte de la topologia de $\mathbb{R}^n$, és a dir, el suport d'una funció f definida a $\mathbb{R}^n$ és el subconjunt tancat més petit de $\mathbb{R}^n$ que conté $\{x; f(x) \neq 0\}$. Se sobreentén que x varia en el domini de definició de f.

És clar que totes elles són funcions a valors a $[0, 1]$. A més, a l'igual que les g_i, les f_i valen 0 fora de $D(x_i)$. Així $\operatorname{supp} f_i \subset \overline{D(x_i)} \subset V_\alpha$. Això demostra el punt 2) de la proposició.

Per veure el punt 1) demostrarem per inducció que

$$f_1 + \cdots + f_m = 1 - (1 - g_1) \dots (1 - g_m) \tag{A.1}$$

En efecte, si $m = 1$, tenim $f_1 = 1 - (1 - g_1) = g_1$ i la igualtat és certa. Suposem certa fins $i - 1$.

$$f_1 + \cdots + f_{i-1} = 1 - (1 - g_1) \dots (1 - g_{i-1})$$

Llavors

$$\begin{aligned} f_1 + \cdots + f_{i-1} + f_i &= 1 - (1 - g_1) \dots (1 - g_{i-1}) + f_i \\ &= 1 - (1 - g_1) \dots (1 - g_{i-1}) + (1 - g_1) \dots (1 - g_{i-1}) g_i \\ &= 1 - (1 - g_1) \dots (1 - g_i). \end{aligned}$$

Ara és clar, aplicant (A.1), que

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) = 1, \forall x \in K,$$

ja que donat $x \in K$, existeix j, $1 \leq j \leq m$, tal que $x \in B(x_j)$ i per tant $g_j(x) = 1$, i el terme de la dreta de (A.1) es redueix a 1. □

En aquesta situació es diu que el conjunt de funcions $\{f_i\}$ formen una *partició de la unitat relativa al compacte K i subordinada al recobriment* $\{V_\alpha\}$.

Observem que la proposició anterior demostra que donat un compacte de $\mathbb{R}^n$ i un obert que el conté, *existeix una funció diferenciable que val* 1 *en el compacte i* 0 *fora de l'obert.* Només hem d'agafar $g(x) = \sum_i f_i(x)$.

A.2 Integral de formes amb suport no contingut en una única carta local

Definim partició de la unitat subordinada a un atles.

Definició A.2.1 *Sigui* (U_α, ψ_α) *un atles de* M. *Per definició de carta local, existeixen oberts* W_α *de* $\mathbb{R}^3$ *tals que* $\psi_\alpha(U_\alpha) = W_\alpha \cap M$. *Una partició de la unitat* $\{f_i\}$ *relativa a un cert compacte* $K \subseteq M$, *i subordinada a la família* $\{W_\alpha\}$, *és diu* subordinada a l'atles $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$.

Com que per a cada i existeix α_i tal que

$$\operatorname{supp} f_i \subset W_{\alpha_i}$$

tenim que

$$\operatorname{supp} f_i \cap M \subset W_{\alpha_i} \cap M = \psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}) \tag{A.2}$$

Definició A.2.2 *Sigui* ω *una* k*-forma definida sobre un obert* U *de* $\mathbb{R}^n$. *Sigui* M *una* k*-subvarietat orientada amb vora tal que* $M \subset U$. *Suposem* $K = \operatorname{supp}\omega \cap M$ *és compacte. La integral de* ω *sobre* M *es defineix per*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M f_i\omega,$$

on $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *és una partició de la unitat relativa al compacte* $\operatorname{supp}\omega \cap M$, *subordinada a un atles orientable* (U_α, ψ_α) *de* M.

Observem que les integrals de la dreta tenen sentit perquè $\operatorname{supp}(f_i\omega)$ està contingut a $\psi_\alpha(U_\alpha)$ per a alguna α, i $\operatorname{supp}(f_i\omega) \cap M$ és compacte per ser un subconjunt tancat del compacte K. Podem aplicar, doncs, la definició 17.2.1. Però necessitem que l'atles sigui orientable. Sabem, per la proposició 16.3.3 que un tal atles sempre existeix ai $k \neq 1$. El cas $k = 1$ el tractarem a part.

Proposició A.2.3 *La definició anterior no depèn de l'atles orientable* $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, *ni de la partició de la unitat* $\{f_i\}$ *subordinada a* $K = \operatorname{supp}\omega \cap M$ *que elegim.*

Demostració. Sigui $\{g_j\}$ una segona partició de la unitat, aquesta subordinada a un atles $\{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$. Per a cada i tenim

$$f_i\omega = \sum_j g_j f_i \omega \qquad \text{sobre } M$$

ja que en els punts del compacte $K = \operatorname{supp}\omega \cap M$ es compleix que $\sum_j g_j = 1$ i en els punts de $M \setminus K$ els dos termes de la igualtat s'anul·len.

Llavors, tenint en compte que formes que coincideixen sobre M tenen la mateixa integral, com hem comentat a la pàgina 382, tenim

$$\sum_i \int_M f_i\omega = \sum_{i,j} \int_M g_j f_i\omega = \sum_j \int_M g_j\omega. \quad \square$$

Proposició A.2.4 (Teorema del canvi de variables) *Sigui M una k-subvarietat orientada amb vora i sigui $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfisme. Sigui ω una k-forma de $\mathbb{R}^n$ amb $K = \operatorname{supp}\omega \cap F(M)$ compacte. Llavors*

$$\int_{F(M)} \omega = \int_M F^*\omega,$$

quan orientem $F(M)$ de manera que dF_P porti bases positives de T_PM a bases positives de $T_{F(P)}F(M)$, per a tot $P \in M$.

Demostració.[3] Sigui (U_α, ψ_α) un atles de M, compatible amb la orientació, i sigui $\{f_i\}$ una partició de la unitat relativa al compacte K i subordinada a l'atles $(U_\alpha, F \circ \psi_\alpha)$ de $F(M)$. Observem que $\{f_i \circ F\}$ és una partició de la unitat relativa al compacte $F^{-1}(K)$, i subordinada a l'atles (U_α, ψ_α).

En particular, per a cada i existeix α_i tal que

$$\operatorname{supp} f_i \cap F(M) \subset F\psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}). \tag{A.3}$$

Ara bé, amb un raonament semblant al fet per provar (17.3), però que ara permet demostrar la igualtat perquè F és difeomorfisme, es veu que

$$F^{-1}(\operatorname{supp} f_i) = \operatorname{supp}(f_i \circ F),$$

i per (A.3)

$$\operatorname{supp}(f_i \circ F) \cap M = F^{-1}(\operatorname{supp} f_i \cap F(M)) \subset \psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}). \tag{A.4}$$

Com $\operatorname{supp}(f_i\omega) \cap F(M)$ és un subconjunt tancat del compacte K, és compacte i com es compleix (A.3) estem en les hipòtesis de la definició 17.2.1 d'integral de formes amb suport contingut en una carta local, i podem aplicar per tant el teorema del canvi de variables 17.3.1, pàgina 386, demostrat en aquesta situació.

Tindrem doncs,

$$\int_{F(M)} \omega = \sum_i \int_{F(M)} f_i\,\omega = \sum_i \int_M (f_i \circ F) \cdot F^*\omega = \int_M F^*\omega. \quad \square$$

[3]Observem que si a la fórmula que volem demostrar canviem F per φ i M per U tenim la definició 17.2.1 d'integral. Però φ no és un difeomorfisme de $\mathbb{R}^n$ ni ω té el suport en una carta local.

A.3 Teorema de Stokes

Teorema A.3.1 (Teorema de Stokes sobre k-subvarietats) *Sigui M una k-subvarietat de $\mathbb{R}^n$ orientada amb vora. Sigui ω una $(k-1)$-forma diferencial definida sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ que conté M. Suposem* $\operatorname{supp}\omega\cap M$ *és compacte. Aleshores,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

on ∂M té la orientació induïda per la orientació de M.

Demostració. Sigui (U_α,ψ_α) un atles de M compatible amb la orientació. Sigui $f_1,\dots,f_m$ una partició de la unitat relativa al compacte[4] $K=\operatorname{supp}\omega\cap M$ i subordinada a l'atles (U_α,ψ_α). Tenim

$$\omega=\sum_{i=1}^m f_i\omega,\quad \text{sobre } M$$

ja que sobre K la suma de les f_i és 1 i fora de K els dos termes s'anul·len.

Per ser aquesta partició de la unitat $\{f_i\}$ subordinada a l'atles (U_α,ψ_α) sabem, relació (A.2), que per cada i existeix α_i tal que

$$\operatorname{supp} f_i\cap M\subset\psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}).$$

En particular,

$$\operatorname{supp} d(f_i\omega)\cap M\subset\psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}). \tag{A.5}$$

Denotem $\rho_i=\psi^*_{\alpha_i}(f_i\omega)$. Observem que, per (17.3),

$$\operatorname{supp}\rho_i=\operatorname{supp}\psi^*_{\alpha_i}(f_i\omega)\subseteq\psi^{-1}_{\alpha_i}(\operatorname{supp} f_i\omega)\subset U_{\alpha_i}.$$

A continuació veurem que el teorema de Stokes és cert per a la forma $f_i\omega$, és a dir,[5]

$$\int_M d(f_i\omega)=\int_{\partial M} f_i\omega. \tag{A.6}$$

---

[4]Observem que la hipòtesi $\operatorname{supp}\omega\cap M$ compacte, implica les dues hipòtesis que necessitem perquè les dues integrals tinguin sentit: $\operatorname{supp} d\omega\cap M$ i $\operatorname{supp}\omega\cap\partial(M)$ compactes.

[5]Això ja ho hem vist a la secció 17.4, ja que aquestes formes tenen l suport contingut en una carta local, però repetim els arguments per tal de que aquest apèndix sigui autocontingut.

Observem que aquestes integrals tenen sentit ja que els conjunts $\operatorname{supp} d(f_i\omega) \cap M$ i $\operatorname{supp} f_i\omega \cap \partial M$ són compactes per ser subconjunts tancats del compacte $K = \operatorname{supp} \omega \cap M$.

Calculem el primer terme.

$$\int_M d(f_i\omega) \overset{(1)}{=} \int_{\psi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})} d(f_i\omega) \overset{(2)}{=} \int_{U_{\alpha_i}} \psi_{\alpha_i}^* d(f_i\omega) \overset{(3)}{=} \int_{U_{\alpha_i}} d\rho_i \overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^k_+} d\rho_i.$$

La igualtat (1) per (A.5). La igualtat (2) per la definició 17.2.1. La igualtat (3) perquè la diferencial commuta amb el pull-back. La igualtat (4) perquè $\operatorname{supp} d\rho_i \subset \operatorname{supp} \rho_i \subset U_{\alpha_i}$.

Per calcular la integral de $d\rho_i$ sobre $\mathbb{R}^k_+$ calculem primer $d\rho_i$. Com que[6]

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{k} a_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

la diferencial de ρ_i és

$$d\rho_i = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Pel teorema de Fubini, que permet canviar l'ordre d'integració,[7]

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k_+} d\rho_i &= \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}_+} \left(\int_{x_j=-\infty}^{x_j=\infty} (-1)^{j+1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_k \\
&+ (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{x_k=0}^{x_k=\infty} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
&= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1}
\end{aligned}$$

ja que les integrals del primer sumand són totes zero per tenir les funcions a_j suport compacte.

[6] Recordem que $\widehat{dx_j}$ vol dir que el terme dx_j no hi és.

[7]
$$\int_{\mathbb{R}^k_+} = \int_{x_k=0}^{x_k=\infty} \int_{x_{k-1}=-\infty}^{x_{k-1}=\infty} \cdots \int_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}$$

Resumint

$$\int_M d(f_i\omega) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots x_{k-1} \tag{A.7}$$

Estudiem ara

$$\int_{\partial M} f_i \omega.$$

Per poder integrar sobre la vora necessitem primer tenir un atles de la vora compatible amb la orientació. Considerem l'atles que s'obté per restricció, que sabem que és compatible si i només si k és parell.

Concretament aquest atles està donat per

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\alpha &= \{(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}; (x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \in U_\alpha\} = F^{-1} U_\alpha \\ \tilde{\psi}_\alpha &= \psi_\alpha \circ F \end{aligned}$$

on $F : \tilde{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k_+$ és l'aplicació $F(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$.

Llavors tenim

$$\int_{\partial M} f_i \omega \overset{(1)}{=} (-1)^k \int_{\tilde{U}_{\alpha_i}} \tilde{\psi}^*_{\alpha_i}(f_i \omega) \overset{(2)}{=} (-1)^k \int_{\tilde{U}_{\alpha_i}} F^* \rho_i \overset{(3)}{=} (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} F^* \rho_i,$$

La igualtat (1) és deguda a que

$$\operatorname{supp} \tilde{\psi}^*_{\alpha_i}(f_i \omega) = \operatorname{supp} F^* \rho_i \subset F^{-1}(\operatorname{supp} \rho_i) \subset \tilde{U}_{\alpha_i},$$

i el signe $(-1)^k$ és per assegurar-nos que treballem amb un atles compatible amb la orientació. La igualtat (2) és perquè $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha \circ F$. La igualtat (3) és novament perquè $\operatorname{supp} F^* \rho_i \subset \tilde{U}_{\alpha_i}$

Ara bé, com $x_k \circ F = 0$, tenim

$$\begin{aligned} (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} F^* \rho_i &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} (a_k \circ F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1} \end{aligned}$$

Resumint

$$\int_M f_i \omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots x_{k-1} \tag{A.8}$$

Comparant (A.7) i (A.8) veiem que la igualtat (A.6) és certa. I d'aquesta igualtat se'n deriva el teorema en el cas general. En efecte,

$$\int_M d\omega \;=\; \sum_i \int_M d(f_i\omega) = \sum_i \int_{\partial M} f_i\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad \square$$

Bibliografia

[1] Pierre Ossian Bonnet, *Note sur la courbure géodésique*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **42** (1856), 1137–1139.

[2] ______, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, Journal de l'École Polytechnique **25** (1867), 31–151, cahier 42.

[3] Francesco Brioschi, *Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie (Lettera al prof. B. Tortolini)*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **III** (1852), 271–276, també, Vol I de [4], p.11-13.

[4] ______, *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, Pubblicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli), Milano, U. Hoepli, 1901-1909.

[5] Joaquim Bruna and Julià Cufí, *Anàlisi complexa*, Manuals UAB, Vol. 49, 2008.

[6] Henry Cartan, *Formes differentielles*, Hermann, París, 1967.

[7] Antonio Costa, Manuel Gamboa, and Porto Ana M., *Notas de Geometria Diferencial de Curvas y Superfícies*, Sanz y Torres, 1997.

[8] Julià Cufí, *La desigualtat isoperimètrica*, Nou Biaix (2016).

[9] René Descartes, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, Plus la Dioptrique, les Météores, et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*, Leiden, 1637, Traducció comentada al català de La Géométrie, a càrrec de Josep Pla i Pelegrí Viader, Clàssics de la Ciència, IEC, 1999.

[10] Manfredo P. Do Carmo, *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976, Traduït al castellà el mateix any amb el títol *Geometría diferencial de curvas y supefícies* per Alianza Editorial, AUT/135.

[11] Pere Pascual Gainza ed., *Càlcul integral per a enginyers*, Edicions UPC, Politext 132, 2002, Carles Bonet, Albert Compta, Neus Cónsul, Mercè Ollé, Agustí Roig.

[12] Luther P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, 1909.

[13] Fedenko, A.S., *Problemas de geometria diferencial*, Mir, 1991.

[14] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae, **VI** (1828), 99–146, presentat el 8 d'octubre, 1827. Vegeu també [15], vol *IV*, p. 217-258.

[15] ______, *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. 1-12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, també http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D38910.html.

[16] Joan Girbau, *Geometria diferencial i Relativitat*, Manuals UAB, vol.10, 1993.

[17] William C. Graustein, *Differential Geometry*, Dover, 2006, primera edició de 1935.

[18] Wilhelm Klingenberg, *Curso de geometría diferencial*, Alhambra, 1978, edició original: *Eine vorlesung über differentialgeometrie*, 1973.

[19] Erwin Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover, 1991, reproducció de les notes de la Universitat de Toronto, de 1959, n. 11, *Mathematical Expositions*.

[20] Antonio López and Agustín de la Villa, *Geometría Diferencial*, Clagsa, 1997.

[21] Gaspard Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. París. (1781), 666–704.

[22] ______, *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide*, Journal de l'École Polytechnique (1795), cahier II, 145–165, reproduït a la secció XVI, p.139, de les *Applications*, [?].

[23] ______, *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géomètrie à l'usage de l'École Polytechnique*, Baudouin, Imprimeur du Corps Législative, du Tribunat, et de l'Institut National, (Thermidor an 9), París, 1801, Éditions Jaques Gabay en fa una reimpressió el 2008.

[24] Sebastian Montiel and Antonio Ros, *Curvas y Superfícies*, Proyecto Sur, 1997.

[25] Barrett O'Neill, *Elementos de Geometria Diferencial*, Limusa, 1966.

[26] Pere Pascual, *Apunts de Geometria Diferencial*, FME, UPC (2014).

[27] Agustí Reventós, *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*, Springer, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011, Traducció de *Afinitats, Moviments i Quàdriques*, Manuals UAB, Vol. 50, 2008.

[28] ______, *Notes sobre els inicis històrics de la geometria diferencial*, http://mat.uab.es/ agusti/HGD.pdf, 2014.

[29] ______, *Problemes clàssics de corbes i superfícies*, http://mat.uab.es/ agusti/geodif2015, 2014.

[30] Agustí Reventós and Carlos J. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss*, Societat Catalana de Matemàtiques, 2005, http://blogs.iec.cat/scm/wp-content/uploads/sites/20/2011/02/MainGaussColor.pdf.

[31] John W. Rutter, *Geometry of Curves*, Chapman and Hall, 2000.

[32] Michael Spivak, *Càlculo en variedades*, Ed. Reverté, 1970.

[33] ______, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, 2a ed., 5 v.

[34] Dirk J. Struik, *Geometría Diferencial clásica*, Aguilar, 1970, traducció de *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1950.