DE RIEMANN FINS ALS NOSTRES DIES

per

A. Reventós

§1. Introducció.

De les anteriors conferències es desprèn que podem fer dos tipus de Geometria: L'Euclidiana (amb el 5è postulat) i la Hiperbòlica (amb la negació del 5è postulat) i que ambdues geometries són igualment consistents.

També s'ha comentat, com resposta a una pregunta d'Enric Nart, que el 5è postulat es pot negar dient: "Per un punt exterior a una recta, no passa cap recta paral·lela a la recta donada". Ara bé, aquesta negació porta ràpidament a contradicció amb els altres postulats d'Euclides i per això en un principi no es va considerar.

No obstant, es pot evitar aquesta contradicció modificant lleugerament el 1er i 2on postulats d'Euclides. Concretament, en lloc de dir "Per dos punts passa una recta" hauríem de dir "Per dos punts passa al menys una recta" i en lloc de dir

"Les rectes són infinites" hauríem de dir "Les rectes són no acotades".

D'aquesta manera s'obté una tercera Geometria: La El·líptica, que és també consistent doncs admet com a model l'esfera S^2 (o millor encara, el projectiu P^2). Les rectes són els cercles màxims.

En aquesta conferència introduirem una infinitat de noves Geometries i les anteriors apareixeran com cassos particulars d'aquestes.

Abans, però, deixeu-me expressar el meu agraïment a totes les persones que m'han ajudat a preparar aquesta conferència, molt especialment a J. Aguadé, M. Nicolau i J. Girbau.

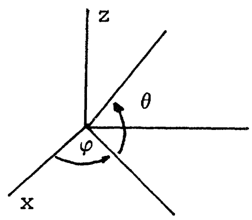
§2. KARL FRIEDRICH GAUSS

2.1. Sigui $\gamma(t)$ una corba sobre l'esfera S^2. Si considerem la parametrització usual de S^2

$$x = \cos\theta \cos\varphi$$

$$y = \cos\theta \sin\varphi$$

$$z = \sin\theta$$



podem escriure $\gamma(t) = (\cos\theta(t)\cos\varphi(t),\ \cos\theta(t)\ \sin\varphi(t), \sin\theta(t)) =$
$= (x(t),\ y(t)\ z(t))$.

La longitud de γ entre $\gamma(a)$ i (t) ve donada per

$$s(t) = \int_a^t \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\}^{1/2} dt$$

(utilitzo la mateixa t com variable d'integracció i com paràmetre). Aquesta fórmula apareix ja en l'apartat 14 del treball de Gauss "Disquisitiones generales circa superficies curvas" l'any 1827.

Simplement substituint $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ pel seu valor obtenim.

$$s(t) = \int_a^t \left\{ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\}^{1/2} dt$$

Derivant aquesta expressió obtenim

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

que en notació clàssica s'escriu

$$ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2$$

i es diu "element d'arc", "primera forma fonamental" o "mètrica".

Clarament, si en lloc de S^2, considerem una superfície parametritzada arbitrària $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ i considerem una corba $\gamma(t)$ de la forma $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t)) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))$. obtindrem un element d'arc que tindrà per expressió

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

on E,F,G (notació que prové de Gauss) son funcions sobre la superfície.

Així doncs sempre que sobre una superfície coneguem l'element d'arc podrem calcular, per integració, longituds de corbes sobre aquesta superfície. En particular aquesta longitud depèn només de les funcions E,F,G i pot per tant èsser calculada per un ésser 2-dimensional que coneixi E,F i G en cada punt encara que no pugui sortir de la superfície.

Aquest fet és essencial i veurem que conté, en germen, la teoria de varietats de Riemann.

2.2 Si podem calcular longituds de corbes, podem parlar de GEODÈSIQUES: Les línies més curtes entre dos punts. Sobre triangles geodèsics (triangles tals que els seus costats són geodèsiques) GAUSS estableix el següent essencial resultat:

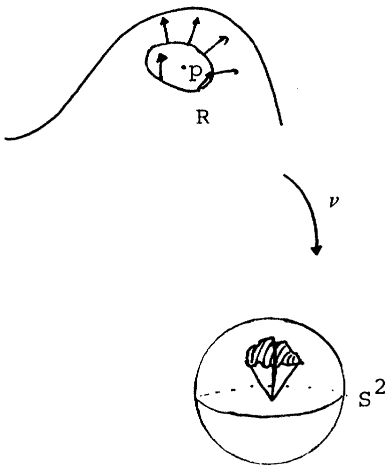
$$(1) \qquad \int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi \qquad (= - \text{excés})$$

on T és el triangle geodèsic d'angles α, β, γ i K és la curvatura de GAUSS.

Recordem breument que si p és un punt d'una superfície S es defineix la curvatura de A a p com

$$K(p) = \lim_{R \to 0} \frac{\text{àrea } \upsilon(R)}{\text{àrea } R}$$

on R és una regió que conté p i υ és l'aplicació de GAUSS. (a cada punt la seva normal unitària).



El teorema Egregi de Gauss diu que aquesta K no depèn de la normal, en el sentit de que és calculable a partir de les relacions mètriques de la superfície, és a dir a partir de l'element d'arc. Per tant pot ésser calculada per un habitant de la superfície que sàpiga mesurar distancias.

La fórmula (1) és més tard generalitzada per Bonnet (1848) a triangles no necesàriament geodèsics i posteriorment a tota la superfície obtinguent

$$(2) \qquad \int_S K = 2\pi\, \chi(s)$$

on $\chi(s) = c + v - a$ és la característica d'Euler de S.

Aquesta fórmula (2) diu que el tor no pot tenir curvatura positiva (o negativa) a tot arreu $(\chi(\text{tor}) = 0)$ i en canvi podria tenir curvatura zero a tot arreu.

També diu que el doble tor no pot tenir curvatura zero a tot arreu $(\chi(\text{doble tor}) = -2)$ i en canvi podria tenir curvatura negativa a tot arreu.

Ara veurem que hi ha tors amb curvatura zero a tot arreu i més endavant veurem que hi han dobles-tors amb curvatura constant negativa a tot arreu.

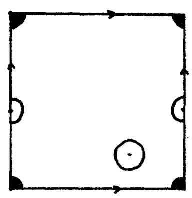
Per entendre bé això tinguem en compte dos punts.

(i) Les superfícies no estan forçosament ficades dins $\mathbb{R}^3$. Pensem amb la botella de Klein per exemple.

(ii) La curvatura K és un concepte intrinsec de la superfície. És a dir, depèn només de l'element d'arc.

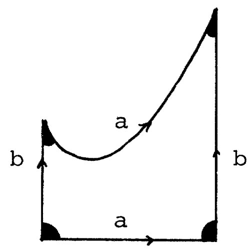
2.3. Ara ja estem en condicions de construir un "tor pla". Posem-nos a $\mathbb{R}^2$ amb la mètrica Euclìdiana i considerem el quadrat $[0,1] \times [0,1]$ amb les identificacions usuals del tor.

Fixem-nos que un habitant d'aquesta superfície sempre està en un entorn pla. És a dir, té un entorn que és un disc de $\mathbb{R}^2$ amb la mètrica Euclidiana. A la figura es mostren les tres posibilitats (disc sencer, dues mitats de disc, quatre quartes parts de disc) que són totes idènticament



iguals per a l'hipotètic habitant de la superfície que es passe ja pel quadrat identificat, tot mesurant distàncies.

Des del punt de vista topològic obtindriem també un tor fent les identificacions a la seguent figura



Però llavors, l'habitant d'aquesta superfície podria donar una petita volta al voltant del punt A sense recórrer 360º.

Podria doncs saber que no està a $\mathbb{R}^2$ fent tan sols un experiment local. En canvi, l'habitant del quadrat $[0,1]\times[0,1]$ no pot, per procediments locals, saber si està a $\mathbb{R}^2$ o en un quadrat identificat, doncs ja hem dit que si un cop situat en un punt, mira al voltant seu, veu sempre un disc Euclidià.

D'aqui es dedueix que aquest quadrat, amb les identificacions considerades, hereta la mètrica Euclidiana de $\mathbb{R}^2$ i tenim doncs un tor amb una mètrica de curvatura zero. En direm tor pla.

En un llenguatje més precís la situació és la següent:

El grup fonamental del tor, $Z \oplus Z$, actua per traslacions sobre $\mathbb{R}^2$ (recobriment universal del tor) i el tor és justament el quocient $\mathbb{R}^2/Z \oplus Z$.

Els raonaments anteriors al que diuen és que la mètrica Euclidiana de $\mathbb{R}^2$, degut a que és constant sobre les fibres de la projecció canònica $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/Z \oplus Z$, indueix una mètrica en el quocient. Aquest fet està relacionat amb la posibilitat de pavimentar $\mathbb{R}^2$ per quadrats (imatges de $[0,1] \times [0,1]$ per l'acció de $Z \oplus Z$).

El fet de que el doble tor s'obtingui d'un octògon amb certes identificacions en els costats i el fet de que $\mathbb{R}^2$ no es pot pavimentar per octogons regulars, fa que no poguem repetir sobre el doble tor el mateix procés que sobre el tor.

No obstant, veurem más endavant com actúa el grup fonamental del doble tor (grup amb quatre generadors A,B,C,D i una relació $ABCDA^{-1}B^{-1}C^{-1}D^{-1} = E$) sobre el seu recobridor universal, que torna a ser $\mathbb{R}^2$.

A partir d'aquí podrem construir una mètrica sobre el doble tor amb corvatura constant negativa a tot arreu.

§3. GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN

3.1. El 10 de juny de 1854 a la Universitat de Göttingen hi ha una "lectura inaugural". Es titula "Sobre les hipòtesi que estan a la base de la Geometria" i el seu autor és B. Riemann.

Recordem breument que Riemann llegeix la tesi el 1851, sobre funcions d'una variable complexa, i que per aspirar a ser "privat docent" (professor que cobraba directament dels alumnes) habia presentat un treball sobre la representabilitat de funcions per series trigonomètriques. Però també havia de fer una lliçó inaugural, el tema de la qual, l'elegia la Universitat, entre tres proposats pel candidat.

En aquesta ocasió, Gauss va elegir el 3er (contra el costum d'elegir el 1er) i d'aquesta manera Riemann va obrir una nova etapa en el desenvolupament de la Geometria no Euclidiana.

Aquest treball consta d'una petita introducció ("Pla d'investigació") i tres parts.

A la introducció fa una mica de filosofia sobre les dificultats trobades pels geòmetres per a fomentar la Geometria, atribuint explícitament les causes al fet de no haver definit mai ESPAI.

Els geòmetres només donen propietats de l'espai però la relació entre les propietats i el concepte d'espai resta sempre a la foscor.

Perqué no s'ha definit espai?. Esencialment perquè el concepte de "quantitat múltiplement extesa" no ha sigut explorat (paraules de Riemann).

Es proposa ell mateix dos problemes: Construir el concepte de "quantitat múltiplement extesa" i veure que sobre una mateixa "varietat" podem posar-hi diferentes "relacions mètriques". Per tant, els teoremes de la geometria Euclidiana no els podem deduïr només de les propietats topològiques de l'espai. Ha d'esser l'experiencia qui ens digui a quina 3-varietat vivim.

Fetes aquestes consideracions filosòfiques, dedica l'apartat I a definir varietat. Pensa una superfície com una corba que es mou sobre una altra corba, una varietat de dimensió 3 com una superfície que es mou sobre una corba etc....
El procés invers és el procés de prendre coordenades. Parla explícitament (remarcant la seva importància) de varietats de dimensió infinita.

L'apartat II es titula "Relacions mètriques de les quals una varietat de dimensió n és susceptible, sota les hipòtesi de que les linies tenen una longitut independent de la seva configuració, de manera que tota línia pot èsser mesurada per qualsevol altra".

Així fa referència a que en Geometria Euclidiana, assignem primer longitud a les rectes (distancia entre dos punts) i després calculem longituds comparant amb rectes.

El que fa Riemann és generalitzar els treballs de Gauss, introduint, sobre una varietat on hi té coordenades locals, $x^1,\ldots,x^n$ un element d'arc (o mètrica) de la forma

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\ dx^i\ dx^j$$

D'aquesta manera pot parlar, igual com ho fa Gauss, de longitud de corbes, geodèsiques, etc.

Riemann deixa la porta oberta a posteriors generalitzacions quant comenta que podria prendre ds^2 semidefinit positiu, en lloc de definit positiu o que podría prendre ds com arrel quarta d'una expresió de quart grau en les diferencials... .

La pregunta central del treball de Riemann és la següent:

¿Existeix un sitema de coordenades $y^1,\ldots,y^n$ tal que $\sum g_{ij}\ dx^i\ dx^j = \sum dy^i\ dy^i$?

Riemann diu que en general això no es podrà fer, doncs tenim donades $n(n+1)/2$ funcions (les g_{ij}) mentre que tenim lliures només n funcions (les y^i), de manera que resten $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ lligadures.

Proposa anomenar varietats planes aquelles on això sigui possible.

En dimensió 2 tindrem concretament $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ lligadura. Aquesta condició resulta ser $K = 0$. Generalitzant aquest fet, Riemann defineix el concepte de curvatura per a una varietat de dimensió n com una obstrucció a que la mètrica sigui plana.

De fet el problema plantejat per Riemann no és més que una equació en derivades parcials

$$\Sigma\, g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} = \delta_{ks}$$

que té solució si i només si certes funcions R^i_{jkl} s'anul·len. Si $R^i_{jij} = 0$ en un entorn, llavors $R^i_{jkl} = 0$. És a dir, no tenim n^4 condicion d'integrabilitat $(R^i_{jkl},\ i,j,k,l = 1,\ ,n)$ sinó només $\frac{n(n-1)}{2}$ $(R^i_{jij},\ i,j = 1,\ldots,n$ amb $R^i_{jij} = R^j_{iji})$ com espera Riemann.

Les funcions R^i_{jij} són les curvatures seccionals i les funcions R^i_{jkl} són les components d'un tensor. No obstant, el càlcul tensorial no apareix fins els anys 1885-1890 amb Ricci i Levi-Civita.

A continuació Riemann es fixa en les varietats de curvatura constant. Diu concretament que les varietats de curvatura zero (té l'exemple del pla Euclidià) són un cas particular de

Aquestas varietats tenen en comú una important propietat: L'existència de moviments rígids, és a dir podem moure sòlids rígids en totes direccions.

Demostra que sobre aquestes varietats podem trobar coordenades locals $x^1,\dots,x^n$ tals que la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = \frac{1}{\{1+\frac{k}{4}\Sigma(x^i)^2\}^2}\ \Sigma(dx^i)^2$$

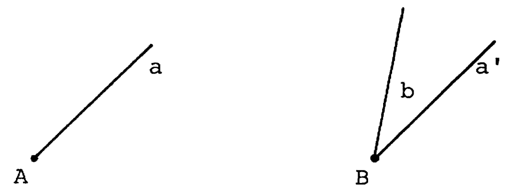
Això dóna doncs una classificació local de les varietats de curvatura constant. Es pot veure que si $k>0$ estem a S^n si $k=0$ estem a $\mathbb{R}^n$ (amb l'Euclidiana) i si $k<0$ ja en parlarem tot seguit.

Fixem-nos en que si pensem que GEOMETRIA és l'estudi de les propietats d'un espai invariants per l'acció d'un grup, llavors GEOMETRIA REIMANNIANA és l'estudi de les propietats de la varietat invariants per l'acció del grup d'isometries.

Si volem tenir una geometria on poguem "comparar punts" (portar figures d'un punt a l'altre) és clar que necesitem que l'acció sigui transitiva, és a dir, donats dos punts arbitraris p i q existeix un element del grup (una isometria en el cas Riemannià) que porta p a q. Pensem en el grup euclidià $E(n)$ actuant sobre $\mathbb{R}^n$.

Si a més volem portar rectes a rectes, plans a plans etc, necesitem tenir "girs".

Es a dir, per poder comparar la semirecta a amb origen el punt A, amb la semirecta b amb origen el punt B necesitem un element del grup (isometria) que porti A a B i després un "gir" per fer coincidir la recta imatge de a amb b.



Així doncs, per fer geometria neutra (on comparàvem rectes) hem d'exigir que el grup d'isometries actui transitivament Però si existeix una isometria que porta A a B, la curvatura de A i de B és automàticament la mateixa, doncs ja hem dit que depèn només de la mètrica.

Per tant per fer geometria Euclidiana, Hiperbòlica ó El·líptica ens hem de situar d'entrada sobre espais de curvatura constant. Haurem d'imposar alguna condició més.

§4. Model hiperbòlic.

4.1. Ara construirem una varietat de Riemann de curvatura constant negativa que correspondrà al model semiplà estudiat per J. Girbau el dia anterior.

L'any 1882, H. Poincaré, estudiant l'equació diferencial

$$a(z)w'' + b(z)w' + c(z)w = 0$$

necesita estudiar els subgrups discrets del grup de transformacions conformes

$$\frac{az + b}{cz + d} = \tilde{z}$$

El fet de que aquest grup deixi invariant el disc de centre l'origen, el porta a considerar una distància (o mètrica) sobre aquest disc que sigui també invariant pel grup.

Obté d'aquesta manera la seguent mètrica (anomenada mètrica de Poincaré) sobre el disc de radi 2

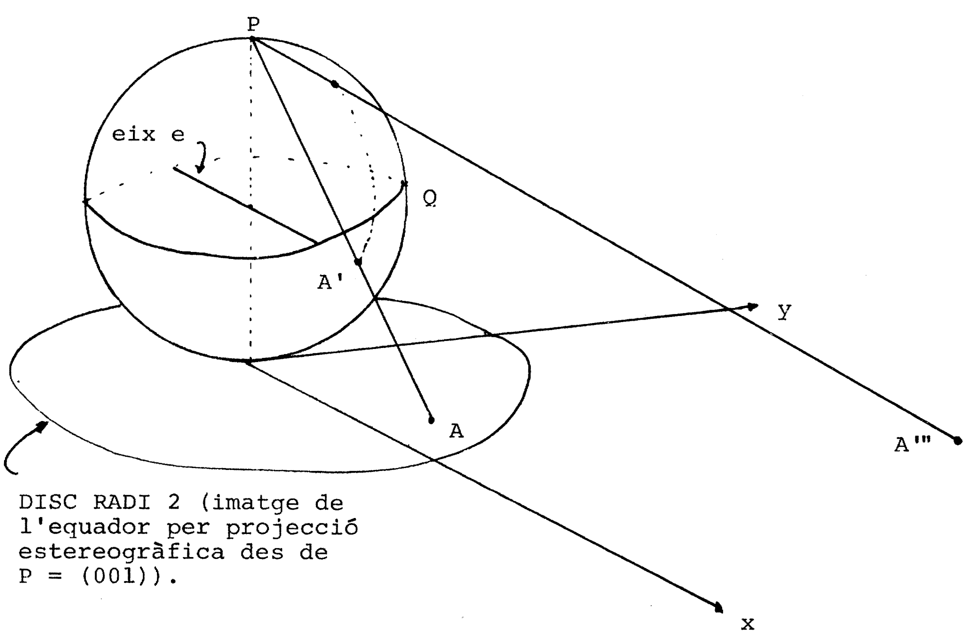
$$ds^2 = \frac{1}{\{1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\}^2} \{dx \otimes dx + dy \otimes dy\}$$

La varietat de Riemann formada pel disc i aquesta mètrica, es diu "DISC DE POINCARÉ"

Les geodèsiques resulten ser els diàmetres i els semicercles perpendiculars a la vora del disc.

Fixemnos que si ens col·loquem en una d'aquestes geodèsiques i anem en direcció a la vora del disc amb velocitat constant, mai arribem a la vora. Això és degut a que ds^2 és molt gran en acostarnos a la vora. Correspon a dir que les rectes (geodèsiques) són no acotades.

Resulta que a través de la transformació de Cayley, el semiplà és el mateix que el disc. La transformació de Cayley $\tilde{z} = -i \frac{z + i}{z - i}$ es pot visualitzar de la següent forma



FUNCIONAMENT.

Sigui A un punt del disc de radi 2. Llavors A' és el punt de l'hemisferi sud, antiimatge de A per la projecció estereogràfica des de . A" és el punt imatge de A' al fer girar l'hemisferi sud al voltant de l'eix e (paral·lel a l'eix x per (001)) de manera que passi a P. Llavors la imatge de A per l'aplicació de Cayley és el punt A"' obtingut de A" per projecció estereogràfica des de P.

A través d'aquesta aplicació passem la mètrica de Poincarè del disc a una mètrica sobre el semiplà $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y>0\}$. Concretament s'obté

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\{dx \otimes dx \otimes dy + dy\}$$

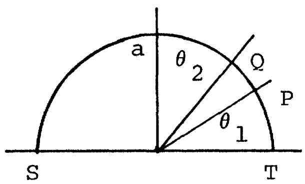
Les geodèsiques són ara les rectes y = constant i les semicircunferències perpendiculars a x = 0. La curvatura d'aquesta varietat de Riemann resulta ser k = -1.

Hem obtingut doncs el "model semiplà" de la geometria hiperbòlica utilitzat el darrer dia per J. Girbau, com una varietat de Riemann de curvatura constant negativa (en direm semiplà de Poincaré o pla hiperbòlic).

4.2. Situem-nos al semiplà amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{y^2}\{dx \otimes dx + dy \otimes dy\} \qquad R = \text{constant}$$

i fem un parell de càlculs. Ara la curvatura és $K = -R^2$, calculem primerament la distància entre dos punts. Veurem que coincideix amb els calculs fets per J. Girbau. Per fer-ho mès fàcil estudiarem el cas on els dos punts P i Q estan sobre una geodèsica (recta) que és un semicircle de centre l'origen i radi a.



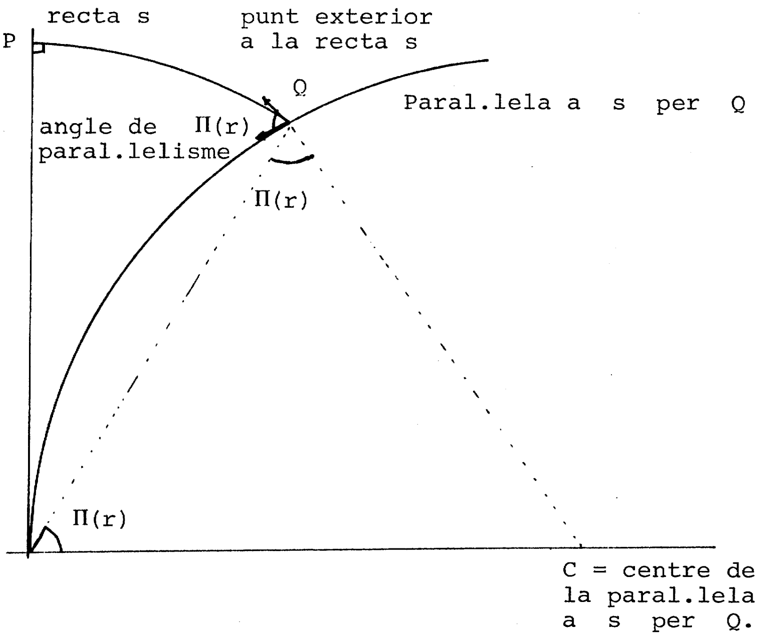
Prenem $\gamma(t) = a \cos t + ai \sin t$ llavors $\gamma(\theta_1) = P$ i $\gamma(\theta_2) = Q$ i per tant $d(P,Q) =$ Longitud de γ entre P i $Q = L_P^Q$.

$$L_P^Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|(-a \sin t, a \cos t)\| \, dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R}{\sin t} \, dt = R\{\ln|\operatorname{tg} \tfrac{t}{2}|\}_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Això diu que la constant R que apareixía a la conferència anterior es pot interpreta com l'arrel quadrada de menys la curvatura, doncs és obvi que la raò doble (PQST) és igual a

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right|$$

Finalment calculem l'angle de paral·lelisme ajudant-nos del seguent dibuix



$$r = \text{distancia hiperbòlica entre P i Q} = R \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi/2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Pi(r)}{2}} \right| =$$

$$= - R \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\Pi(r)}{2} \right|$$

$$\Rightarrow \Pi(r) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-r/R} .$$

§5. El problema de Klifford-Klein.

Ja hem vist que les varietats de Riemann que poden ser, a priori, models de les geometries clàssiques són les de curvatura constant que tenen geodèsiques no acotades (completes).

El problema de Klifford-Klein consisteix en classificar les varietats de Riemann completes connexes i de curvatura constant.

Va ser proposat explicitament per Killing, l'any 1893 amb el nom "The Clifford Klein space form problem" després que Clifford publiqués un treball sobre superfícies de curvatura zero finitament exteses i Klein un sobre geometries no euclidianes.

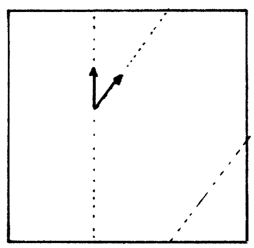
SOLUCIÓ LOCAL. La solució local és ja de Riemann, molts anys abans de Killing, doncs diu ja com s'escriu la mètrica en un cert sistema de coordenades. A la vista d'aquesta expressió (apartat 3) és clar que la varietat en questió és localment isomètrica a S^n, $\mathbb{R}^n$ ó H^n (espai hiperbòlic = $\{(y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n > o\}$ amb al mètrica $ds^2 = \frac{1}{(y_n)^2} \Sigma(dy^i)^2$.

SOLUCIÓ GLOBAL. Degut inicialment a Ricci i finalment a Hopf l'any 1925. Diu concretament que M és isomètrica a

a) S^n/Γ, $\Gamma \subset 0(n+1)$ $K > 0$
b) $\mathbb{R}^n/\Gamma$, $\Gamma \subset E(n)$ $K = 0$
c) H^n/Γ, $\Gamma \subset \text{Iso } H^n$, $K < 0$

on Γ és un subgrup del grup d'isometríes respectiu que actúa lliurement i prôpiament discontínuament sobre S^n, $\mathbb{R}^n$ ó H^n. Que l'acció sigui lliure i prôpiament discontínua asegura que el quocient és una varietat.

COMENTARI. Es pot comprobar fàcilment que els únics bons models per a les geometries clàsiques son S^n, $\mathbb{R}^n$ i H^n. Fixem-nos, per exemple, que el tor pla no funciona doncs no tenim "girs" (és a dir, el grup d'isometries actúa transitivament a nivell de punts però no a nivell d'espais tangents). En efecte, es suficient observar que per un punt qualsevol del tor pla passen geodèsiques (són rectes!) que tanquen i altres (les de pendent irracional) que no tanquen. No puc doncs passar d'una a l'altre per isometria



La solució total del problema de les formes de l'espai depên essencialment doncs de dues preguntes

QUINS GRUPS ?

QUINES ACCIONS ?

Exemple 1. El tor pla. El grup és $Z \oplus Z$ i l'acció la natural per traslacions.

Exemple 2. Problema esfèric de dimensió parella. És a dir quins grups i quines accions podem tenir sobre S^{2n}. El grup que busquem, Γ, està contingut a $O(2n+1)$. Per tant $\det \gamma = \pm 1 \ \forall \ \gamma \in \Gamma$.

Si $\det \gamma = 1$, per ser $2n+1$ imparell, existeix un vector propi de valor propi 1, és a dir un punt fix per γ. Però com γ actua lliurament, això implica que $\gamma = id$.

Si $\det \gamma = -1$, llavors $\det \gamma^2 = 1$ i pel raonament anterior $\gamma^2 = id$ i per tant $\gamma = \pm\, id$.

Conclusió: El grup que actúa és el neutre o Z_2 i la manera d'actuar és com $\{id\}$ ó com $\{\pm id\}$. Per tant les úniques varietats de Riemann completes convexes de corvatura constant positiva i dimensió parella són les esferes i els projectius $P^{2n} = S^{2n}/\{\pm id\}$.

La geometria projectiva es pot pensar com la part de la geometria el·líptica (la de P^n) que es preocupa de les realcions d'incidència.

El problema esfèric de dimensió imparella, el problema euclidià (grups i accions sobre S^n) i el problema hiperbòlic (grups i accions sobre H^n) són però molt més dificils. Comentem-los breument.

PROBLEMA ESFÈRIC.

Els primers resultats són de Seifert i Threlfall publicats a Math. Annalen el 1930. Resolen el problema en dimensió tres i apareixen espais lenticulars. L'any 1946 apareixen als Comm. Math. Helvetici els treballs de Vincent que estudia el problema en dimensió $4k + 1$. La classificació completa és deguda a Wolf l'any 1967 que la fa aplicant resultats de Zassenhaus, sobre grups resolubles amb subgrups de Sylow ciclics, al grup fonamental de la varietat.

PROBLEMA EUCLIDIÀ.

La classificació isomètrica completa en dimensió $\leqslant 3$ és deguda també a Wolf. Utilitza grups cristal·logràfics (subgrups discrets de $E(n)$ de quocient compacte). Demostra, per exemple, que des d'el punt de vista afí, hi han 6 varietats de Riemann 3-dimensionals planes, que són les que corresponen als grups d'holonomia 1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, $Z_2 \times \mathbb{Z}_2$.

No donem més informació sobre aquests punts doncs hauriem d'entrar forçosament en questions massa tècniques.

PROBLEMA HIPERBÒLIC

Es coneix relativament poc d'aquest problema. No obstant ha rebut un gran impuls aquests darrers anys degut al gran geòmetre W. Thurston.

Els primers resultats eren sobre condicions necesàries perquè una varietat fos hiperbòlica, és a dir admetés una mètrica de Riemann completa de curvatura constant negativa. L'any 1977 Thurston publica un teorema d'existència de mètriques hiperbòliques sobre 3-varietats. Dóna condicions topològiques suficients (grup fonamental no abelià, infinit,...) per a l'existència d'una tal mètrica.

Sobre 2-varietats el problema és però més senzill. A l'apartat següent donarem una classificació completa de les superfícies hiperbòliques de volum finit.

§6. Superfícies hiperbòliques.

6.1. Sigui V una varietat de Riemann de dimensió 2, completa convexa y orientable, de volum finit i curvatura constant -1 .

Del teorema de Gauss-Bonnet es dedueix que vol $(V) = 2\pi\chi(v)$ i que per tant els possibles valors de vol(V) són 2π, 4π, 6π,... (Ja hem vist que el tor i S^2, amb caracteristiques d'Euler 0 i 2 respectivament, no admeten mètriques de curvatura negativa. També podriem veure que S^2 amb un o dos forats, caracteristica d'Euler 1 i 0 respectivament, tampoc admet mètriques hiperbòliques).

També es pot veure que fixat un volum $2\pi k$, hi ha només un número finit de V'^s topològicament diferents amb aquest volum. De fet si k és imparell, en tenim $(k+3)/2$ is si k és parell $(k/2)+2$.

La demostració es basa en que $V = H/\Gamma$ i que podem pensar que Γ admet una regió fonamental formada per un polígon, de manera que podem pensar V com un poligon hiperbòlic amb certes identificacions sobre els costats.

Abans de continuar construirem amb detall una mètrica hiperbòlica sobre el doble tor perquè serveixi com a exemple.

CONSTRUCCIÓ DEL DOBLE TOR HIPERBÒLIC

Igual com les superfícies topològicament es pensen com polígons amb costats identificats, les superfícies hiperbòliques les pensarem com polígons del pla o disc hiperbòlic amb costats identificats.

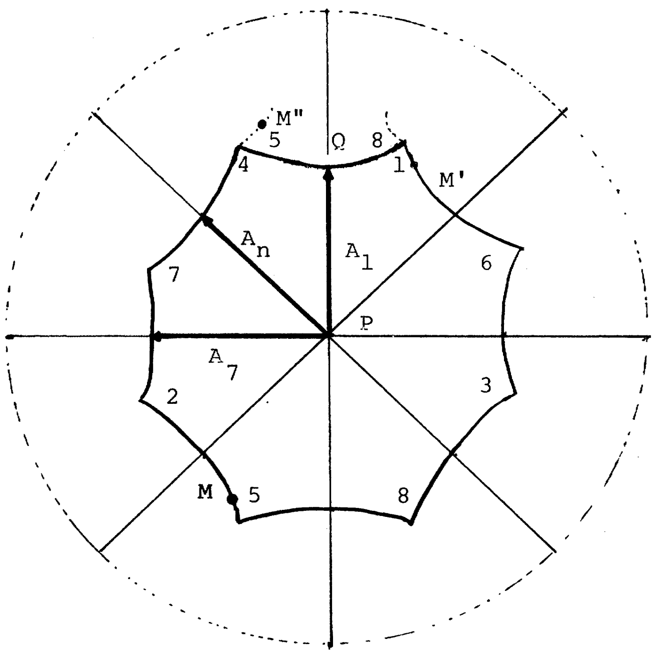
Recordem també que per posar una mètrica plana sobre el tor hem necesitat considerar quadrats (costals iguals i angles iguals). També hem comentat que si poguéssim dividir el pla en octògons regulars (costats iguals i angles interiors iguals i de suma 2π) podriem posar una mètrica plana sobre el doble tor.

Considerem un polígon regular sobre el disc de Poincaré de $4g$ costats (g és el gènere de la superfície). Imaginem-lo centrat a l'origen i diguem r a la distància del centre als vertexs. Per aplicació directa del teorema de Gauss-Bonnet tenim.

Suma angles interiors del polígon $= \Sigma(r) = (4g-2)\pi -$ - àrea del poligon. Observi's que $\Sigma(r)$ és realment funció de la distància i que quan $r \longrightarrow \infty$, $\Sigma(r) \longrightarrow 0$ i que quan $r \longrightarrow 0$, $\Sigma(r) \longrightarrow (4g-2)\pi$.

Així, sempre que $g \geqslant 2$ (això elimina el tor) tenim $(4g-2)\pi > 2\pi$ i existeix, per continuitat, un r tal que $\Sigma(r) = 2\pi$.

En particular, tornant al doble tor, podem construir un octògon regular amb $\Sigma(r) = 2\pi$. Fem-ho



EXPLIQUEM LA FIGURA

Quan posem A_1 volem dir "translació hiperbòlica de vector A_1". És a dir simetria primer respecte P i després respecte Q. Simetria vol dir obviament simetria hiperbòlica (les rectes són les geodèsiques).

Així per exemple, el punt 5 passa per simetria respecte

P al punt 1 i aquest, per simetria respecte Q, al punt 4. Escriurem $A_1(5) = 4$. També $A(8) = 1$. Com que és una isometria, porta geodèsiques a geodèsiques i per tant el costat 5 8 al costat 4 1.

El punt M, passa primer a M' i després a M", $A_1(M) = M''$ i en el dibuix es mostra el transformat de l'angle 5. És fàcil veure que A_1(polígon donat) és un polígon petitet situat a sobre del polígon donat.

Si fem les 8 traslacions hiperbòliques seguides $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ resulta la identitat. Com $A_5 = A_1^{-1}$, $A_6 = A_2^{-1}$, $A_7 = A_3^{-1}$ i $A_8 = A_4^{-1}$ tenim $A_1A_2A_3A_4A_1^{-1}\ A_2^{-1}\ A_3^{-1}\ A_4^{-1} = \mathrm{id}$.

Es a dir, el grup donat pels quatre generadors $A_1A_2A_3A_4$ i la relació $A_1A_2A_3A_4A_1^{-1}\ A_2^{-1}\ A_3^{-1}\ A_4^{-1} = E$ (El grup fonamental del doble tor!) actua sobre el DISC de Poincaré (homeomorf al pla, recubriment universal del doble tor) i indueix sobre l'octogon regular de la figura les identificacions en els costats propies del doble tor.

L'actuació d'aquest grup sobre l'octògon de la figura ens dóna una descomposició del disc en octògons regulars tots ells isomètrics al donat, encara que aparentment euclidianament siguin més petits.

Així doncs, pel mateix raonament que en el cas del tor, el doble tor hereta la mètrica hiperbòlica del disc. És a dir, la mètrica hiperbòlica del disc és constant sobre les fibres de la projecciò canònica

$$\text{DISC} \longrightarrow \text{DISC/GRUP}$$

i indueix per tant una mètrica en el quocient (el doble tor) amb la mateixa curvatura.

Un cop vist que el doble tor és una superfície hiperbòlica tornem al problema de classificar les superfícies hiperbòliques de volum finit.

6.2. Sigui V una superfície hiperbòlica de volum $2\pi k$. Podem pensar que V s'obté d'un polìgon hiperbòlic amb els costats convenientment identificats.

Teníem $\Sigma(r) = (4g - 2)\pi -$ àrea

Però també $\Sigma(r) = 2\pi$ (perquè pugui heretar la mètrica) i àrea $= 2\pi k$. Per tant obtenim

(*) $4g =$ nº de costats $= 4 + 2k$

Ara bé, si $\Sigma(r) = 0$ (no hi ha vèrtexs en el polìgon) podem obtenir també tesselacions del disc hiperbòlic (descomposició en figures regulars) de manera que podrem passar al quocient com abans i obtindrem mètriques hiperbòliques sobre superfícies que no seran compactes però sí completes. (Mireu dibuixos posteriors).

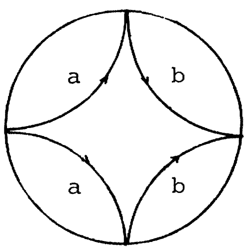
En aquest cas (no compacte) el gènere g no cumpleix $4g$ = nº de costats, però tenim igual que abans

$$0 = (n-2)\pi - 2\pi k \qquad (n = \text{nº de costats})$$

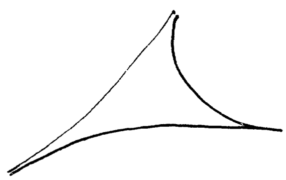
i per tant

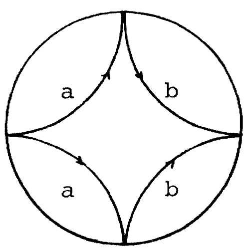
$$(**) \qquad n = 2 + 2k$$

<u>Exemple.k = 1.</u> En aquest cas estem forçosament a la fòrmula (**) i per tant $n = 4$. Estem doncs parlant d'un quadrat amb vertexs a l'infinit. És fàcil veure que les possibles identificacions sobre els costats són només les dues mostrades a la figura (qualsevol altra és una d'aquestes).



Esfera 3 punxes



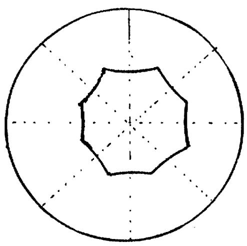


Tor 1 punxa

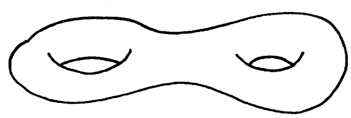
Observem que en el primer cas hi ha 3 vèrtexs a l'infinit (degut a les identificacions) i en el segon cas tan sols un.

Recordem també que igual que parlem de identificar costats, podem parlar d'un grup que actua sobre el disc donant lloc a aquestes identificacions.

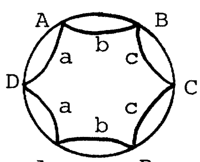
<u>Exemple.k = 2.</u> En aquest cas podem estar a (*) o a (**). Si estem a (*), llavors n = 8 per tant estem parlant d'un octògon, amb els vertexs a l'interior del disc i podriem veure com abans que l'única identificació possible és la que dona lloc al doble tor ja estudiat



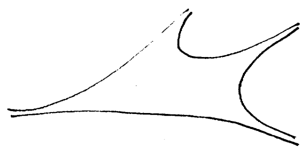
Doble tor

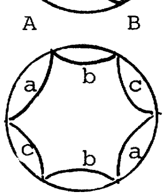


Si estem a (**) llavors n= 6 i com estem sempre en el cas orientable les dues úniques posibilitats són

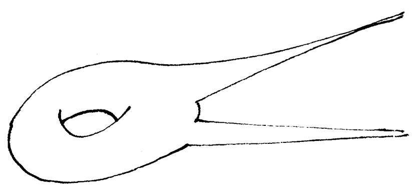


Esfera 4 punxes

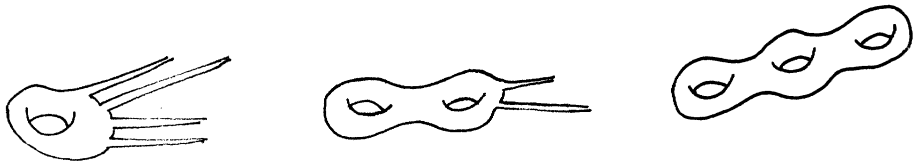


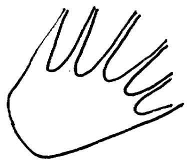


Tor 2 punxes



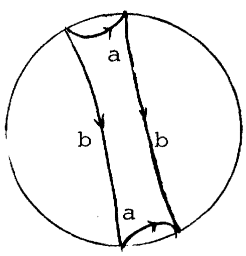
D'aquets exemples es dedueix fàcilment que els diferents tipus topològics amb volum fixat $2\pi k$ s'obtenen a partir del tor amb k punxes ajuntant-les de dos en dos per a obtenir nous tors. Si $k = 4$ obtindríem doncs



i trencant el tor inicial, l'esfera amb 6 punxes 

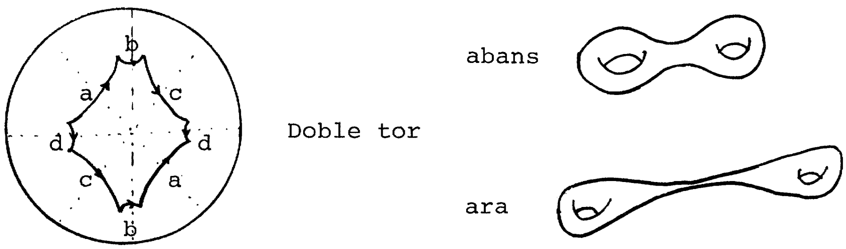
Es obvi doncs que si k és parell tenim $\frac{k}{2} + 2$ posibilitats i que si k és imparell en tenim $\frac{k+3}{2}$.

NOTA. Els dibuixos següents mostren que totes les superfícies anteriorment citades admeten un continu de mètriques completes de curvatura constant negativa, excepte l'esfera amb 3 punxes. És interesant recalcar-ho doncs no és pas la situació que tindrem en dimensió 3.



Tor 1 punxa

No puc pas identificar com ho feiem amb l'esfera de 3 punxes doncs a i b tenen longitud diferent.


b
a
c
d
d
c
a
b
Doble tor
abans
ara

§7. Teoremes de Rigidesa.

Les varietats de dimensió ≥ 4 es comporten devant la funció vol (V) de manera semblant a la dimenssió 2.

Teorema de Wang (1972). Si $n \geq 4$, el conjunt de valors de vol (V) (V variant en el conjunt de les varietats hiperbòliques de dimensió ≥ 4) és un subconjunt discret de $\mathbb{R}$.

Això és el que passa també en dimensió 2.

No obstant el teorema de Wang també diu que hi ha un nombre finit de classes d'isometria amb un volum fixat, mentre que en dimenssió 2 hi havia un nombre finit de classes topològiques però no isomètriques com hem dit.

Tenim de fet el següent increïble teorema de rigidesa.

Teorema de Rigidesa (Mostow-Prasard)(1971-1973). Si dues varietats hiperbòliques de volum finit i dimensió ≥ 3 tenen grups fonamentals isomorfs, son isomètriques.

En particular, invariants geomètrics com vol, longitut de geodèsiques tancades, valors propis de la Laplaciana, són també invariants topològics.

Vigneras, l'any 1980, en els Annals of Math. dóna un exemple per a demostrar que aquests particulars invariants mètrics no determinen la topología de la 3-varietat hiperbòlica.

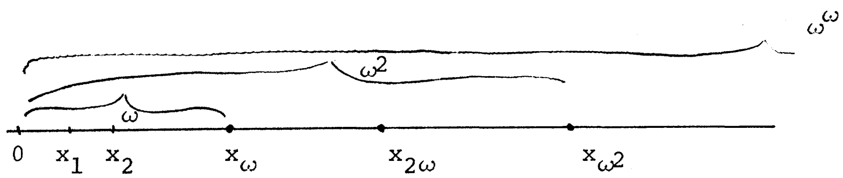
Finalment i en contrast amb el teorema de rigidesa tenim.

<u>Teorema de no Rigidesa</u> (Thurston. 1978). Sigui $M = H^3/\Gamma$ una 3-varietat hiperbòlica no compacta però amb volum finit. Llavors existeix una successió infinita de varietats hiperbòliques $M_j = H^3/h_j(\Gamma)$ amb volum estrictament més petit que vol de M i tals que $M_j \longrightarrow M$.

COMENTARIS. 1. El grup d'isometries de H^3 és $PSL(2:C)$. Dixi $\Gamma \subset PSL(2:C)$ i els h_j son morfismes (representacions) de Γ a $PSL(2:C)$. Quan diem $M_j \longrightarrow M$ volem dir exactament que els morfismes h_j tendeixen a la inclusió canònica en la topologia de la convergència puntual. Això implica $vol(M_j) \longrightarrow vol(M)$.

2. Les M_j tenen volums diferents, de manera que, pel teorema de rigidesa, no són homeomorfes entre sí ni homeomorfes a M.

3. Els valors de la funció vol(V), quan V varia en el conjunt de les varietats hiperbòliques de dimensió 3 i volum finit, formen un subconjunt tancat <u>no discret de $\mathbb{R}$</u>, ben ordenat i d'ordinal ω^ω (= ordinal de $\mathbb{N}$) concretament tenim

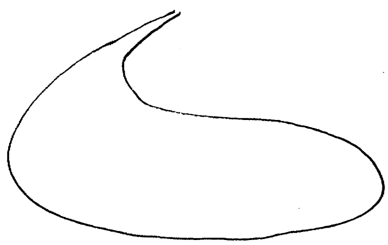


amb $x_\omega = \lim x_i$. $x_i = vol(V_i)$.

x_ω representa el volum d'una varietat hiperbòlica completa no compacta, $x_{2\omega}$ és el volum més petit ($>x_\omega$) d'una completa no compacta, etc.

$x_{\omega 2}$ correspon a la primera varietat amb dues cúspides o capcinells. La cúspide ve a èsser la punxa de les superfícies, però en dimensió 3. Es pot definir com el (tor pla) x $\mathbb{R}$ amb la mètrica $e^{-r} ds^2 + dr^2$ on ds^2 és la mètrica del tor i dr^2 la usual de $\mathbb{R}$. És important de recalcar que els capcinells tenen volum finit. Les trajectòries ortogonals a les geodèsiques que van cap a l'infinit son tors plans. El grup fonamental d'un d'aquests tors plans $(Z \oplus Z)$ es diu grup perifèric i el podem pensar sumergit en el grup fonamental de M.

La idea de Thurston és modificar la varietat inicial



tallant el capcinell "prop de l'infinit" de manera que la secció sigui un tor pla i enganxant en aquest tor un tor solid (modificant així el volum). Ara bé s'ha d'enganxar "rebregat", és a dir de manera que s'introdueixi la relació $x^p y^q = id$ on x,y són els generadors del grup perifèric. Això modifica el grup fonamental i en particular les h_j i és el procés utilitzat per a construir les M_j del teorema. Aquest mètode de tallar i cosir es diu cirugia de Dehn.

Citem finalment la conjectura de Thurston, publicada en el Bull. Amer. Math. Soc. el maig de 1982.

"L'interior de tota 3-varietat compacta admet una descomposició en peçes les quals admeten una estructura geomètrica".

Una estructura geomètrica vol dir una mètrica de Riemann completa i localment homogènia (el grup d'isometries actua localment transitivament). Aquesta conjectura està intimament relacionada amb la conjectura de Poincaré i Thurston espera que, en quan a l'estudi de 3-varietats, sigui més productiva.

Per donar aquestes estructures geomètriques es necesiten 8 geometries (o espais homogènis). Entre elles apareixen $S^3/SO(4)$ (geometria el·líptica), $\mathbb{R}^3 \times SO(3)/E^3$ (geometria euclidiana i $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} / PGL(2;C)$ (geometria hiperbòlica).

No entrerem però en més detalls, que ens portarien sens dubte massa lluny. Serveixi no obstant, aquesta conjectura com exemple que en el camp de les geometries no euclidianes encara hi ha moltes coses a dir. Endavant doncs!

REFERÈNCIES

EPSTEIN, D.B.A. Geometric Structures on Manifolds. The Mathematical Intelligencer. 4(1982) 5-17.

COXETER, H.S.M., MOSER, W.O.J. Generators and relations for discrete groups. Springer Verlag. 1972.

GROMOV, M. Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen. Séminaire Bourbaki. 1979/80 nº 546.

MILNOR, J. Hyperbolic geometry: he first 150 years Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), 9-24.

SPIVAK, M. Differential Geometry. Publish or Perish, 2ª Edició, vol. 2.

THURSTON, W.P. Three dimensional manifolds, Klenian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982) 357-381.

WOLF, J.A. Spaces of constant curvature. Publish or Perish. 4ª Edició.