Treballs de Fi de Grau
Titulació de Matemàtiques

Curs 2012-2013

1 Tipus A. Propostes del professorat

1. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Exponencial de Carlitz i nombres de Bernouilli-Carlitz.
2. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions abelianes explicites sobre els racionals, teorema de Weber.
3. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions abelianes explicites sobre el cos de fraccions de l'anell de polinomis sobre un cos finit, Drinfeld-Hayes.
4. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions ciclotòmiques.
5. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer.
6. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. I
7. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. II
8. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] El teorema de les unitats de Dirichlet.
9. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] El problema invers de la teoria de Galois finita.
10. Àngel Calsina. [acalsina@mat.uab.cat] L'equació del trànsit: l'obstacle temporal.
11. Magdalena Caubergh. [leen@mat.uab.cat] Funció de període i equacions de Liénard.
12. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] Teoria de formes normals i aplicacions.
13. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] Equacions diferencials holomorfes.
14. José González Llorente. [jgllorente@mat.uab.cat] Diferenciabilitat de funcions de Takagi i Weierstrass.
15. José González Llorente. [jgllorente@mat.uab.cat] La propietat de la mitjana, derivades simètriques i sèries de Fourier.

16. Dolors Herbera. [dolors@mat.uab.cat] Grafs i àlgebra: un teorema de Gabriel
17. Dolors Herbera. [dolors@mat.uab.cat] El Problema dels quatre subespais.
18. Maria Jolis. [mjolis@mat.uab.cat] Moviment Brownià i introducció al càlcul estocàstic.
19. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Point-free topology Llengua: Opcionalment en anglès.
20. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Formal proofs in Coq Llengua: Opcionalment en anglès.
21. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Tutte polynomial, Jones polynomial, and the Potts model in statistical mechanics. Llengua: opcionalment en anglès.
22. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Combinatorial species. Llengua: opcionalment en anglès.
23. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Combinatorics of the quantum harmonic oscilator Llengua: opcionalment en anglès.
24. Joachim Kock. [kock@mat.uab.cat] Graphical calculus – from low-dimensional topology to quantum algebra. Llengua: opcionalment en anglès.
25. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Teoría de l'index i Teorema de Poincaré-Hopf per camps continus sobre superficies compactes sense vora.
26. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Cicles limits d'equacions diferencials al pla.
27. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Estudi de les solucions periòdiques d'un sistema diferencial via la teoria de la mitjana.
28. David Marin. [davidmp@mat.uab.cat] Formes diferencials discretes per modelització computacional.
29. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Geodèsiques i altres trajectòries físiques sobre superfícies
30. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Modelització de corbes i superfícies tancades mitjançant sèries de Fourier.
31. Marcel Nicolau. [nicolau@mat.uab.cat] Geometria i Dinàmica: el flux geodèsic en superfícies de curvatura negativa.
32. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] C*-àlgebres: punt de trobada de l'àlgebra, l'anàlisi i la topologia no commutatives.
33. Joaquim Roé. [jroe@mat.uab.cat] Corbes algebraiques.
34. Josep Lluís Solé. [jllsole@mat.uab.cat] Espai de Fock, productes de Wick i probabilitat.
35. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Convergence/ equiconvergence of numeric series. Llengua: en anglès.
36. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Hardy's inequality. Llengua: en anglès.
37. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Convergence of the Fourier series. Llengua: en anglès.

2 Tipus B. Línies temàtiques dels tutors

1. Lluís Alsedà. [alseda@mat.uab.cat] Sistemes dinàmics discrets (dinàmica combinatòria i topològica).
2. Lluís Alsedà. [alseda@mat.uab.cat] Caos.
3. Lluís Alsedà. [alseda@mat.uab.cat] Optimització combinatòria (numèric).
4. Pere Ara. [para@mat.uab.cat] Àlgebra no commutativa.
5. Pere Ara. [para@mat.uab.cat] Representacions de grups.
6. Josep Burgués. [josep@mat.uab.cat] Els fonaments matemàtics de la Física Quàntica. Relacions amb l'Anàlisi Funcional i Complexa (i també Real)
7. Eduard Gallego [egallego@mat.uab.cat] / Agustí Reventós [agusti@mat.uab.cat] / Gil Solanes [solanes@mat.uab.cat]. Geometria Integral.
8. Andrei Korobeinikov. [akorobeinikov@crm.cat] Mathematical biology. Llengua: en anglès.
9. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Teoría de l'index i Teorema de Poincaré-Hopf per camps continus sobre superficies compactes sense vora.
10. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Cicles limits d'equacions diferencials al pla.
11. Jaume Llibre. [jllibre@mat.uab.cat] Estudi de les solucions periòdiques d'un sistema diferencial via la teoria de la mitjana.
12. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Geometria i aplicacions.
13. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.cat] Topología algebráica,
14. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.cat] Variedades de pequeña dimensión-Teoría de nudos.
15. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.cat] Geometría de grupos.
16. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.cat] Teoría de grupos.
17. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.cat] Aspectos controvertidos de la geometría Euclidiana. Este es una oferta para alumnos interesados en aspectos más históricos de las matemáticas.
18. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Introducció a la teoria geomètrica de grups.
19. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Introducció a la topologia de varietats de dimensió baixa.
20. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Introducció a la teoria de nusos.
21. Joaquim Roé. [jroe@mat.uab.cat] Geometria Algebraica.
22. Josep Lluís Solé. [jllsole@mat.uab.cat] Les lleis dels grans nombres per a variables sense esperança finita.
23. Josep Lluís Solé. [jllsole@mat.uab.cat] Generalitzacions del procés de Poisson estàndard.

3 Resums dels treballs tipus A

Exponencial de Carlitz i nombres de Bernouilli-Carlitz. Tutor: Francesc Bars

La funció exponencial de Carlitz és un analeg en caracteristica positiva de la funció exponencial. Els nombres complexos són substituits per un altre cos i que té una propietat peculiar, hi ha xarxes de rang tan gran com volem. Un com hem entengut l'anàlisi involucrat i definir la exponencial de Carlitz, els nombres de Bernouilli-Carlitz apareixen de manera anàloga com surten per la exponencial complexa, aquí el desenvolupament en series via el factorial es canvia per un factorial convenient. És un problema obert estudi de congruències entre aquests nombres, el problema clàssic va ser resolt per Kummer, congruències de Kummer.

Referencies:
David Goss: Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer 1996.
David Goss: The ongoing binomial revolution. Preprint 2011.
David Goss: ζ-phenomenology. Preprint 2009.To appear

Extensions abelianes explicites sobre els racionals, teorema de Weber. Tutor: Francesc Bars

És demostrar el teorema de Weber que afirma que tota extensió finita $K/\mathbb{Q}$ Galois amb grup de Galois abelià es té que $K \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$ per cert m.

Extensions abelianes explicites sobre el cos de fraccions de l'anell de polinomis sobre un cos finit, Drinfeld-Hayes. Tutor: Francesc Bars

El treball vol demostrar que tota extensió finita $L/\mathbb{F}_q(t)$ Galois amb grup de Galois abelià compleix que $L \subseteq \mathbb{F}_q(t)[C_L]$ on C_L és certa torsió del mòdul de Carlitz (o de Drinfeld). És pot fer el cas general de Drinfeld en un dels papers clau què van fer concedir-li la medalla Fields.

Bibliografia:
David Goss: Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer, 1996.
Dinesh Thakur: Function Field Arithmetic. Academic Press.

Extensions ciclotòmiques. Tutor: Francesc Bars

Ja heu vist que el primer lloc on apareixen les extensions ciclotòmiques és en l'estudi de la resolubilitat de les equacions per radicals. Aquest tema consisteix en un estudi profund d'extensions ciclotòmiques.

Referencies:
D. Washington: Cyclotomic Fields, GTM, Springer.

S. Lang: Cyclotomic Fields I, II. GTM, Springer.

Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer. Tutor: Francesc Bars

Un dels resultats matemàtics més importants en els últims anys és la demostració de Andrew Wiles de l'últim teorema de Fermat, és a dir que l'equació $X^n + Y^n = Z^n$ amb $n \geq 3$ no té cap solució amb $XYZ \neq 0$ amb $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$.
Fixeu-vos que podem escriure l'equació en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ mitjançant:

$$\prod_{j=1}^{n}(X + e^{2\pi ij/n}Y) = Z^n$$

i per tant una primera idea per atacar l'últim Teorema de Fermat és estudiar factoritzacions d'elements en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$.

Lammé en l'any 1847 va presentar una demostració en l'Acadèmia de les Ciències de Paris. Kummer ja sabia que era errònea la demostració. Perquè? Doncs la demostració de Lammé suposava que l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ era un DFU (domini de factorització única) i Kummer ja havia demostrat en l'any 1844 que per tan sols un nombre finit de n l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ és un DFU.

El treball consisteix en treballar propietats dels anells $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ o més en general del que es coneixen actualment dels anells anomenats dominis de Dedekind, un cas concret són els anells $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. En particular el treball consisteix en demostrar que aquests anells tenen factorització única amb ideals. Si l'alumne té més interés i vol aprofundir més, podrà intentar donar unes traces de la prova del teorema de Fermat per a primers regulars obtinguda per Kummer (resultat més important del teorema de Fermat fins que el 1995 Wiles enunciava una demostració modular seguint la idea de Frey que traslladava el teorema de Fermat al camp modular de corbes el.líptiques).

Algunes referencies:
Dino Lorenzini: "An invitation to Arithmetic Geometry". Chapter I and III§$1-4$. SGM volum 9, American Mathematical Society.
M.F.Atiyah-I.G.Macdonald: "Introducción al Álgebra conmutativa". Ed. Reverté. Capítol 9.
Z.I.Borevich-I.R.Shafarevich:"Number Theory", Academic Press. Chapter III.
K.Kato-N.Kurokawa-T.Saito:"Number theory 1: Fermat's dream". Iwasawa series, AMS. Chapter 4.

La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. I Tutor: Francesc Bars

Considerem la funció zeta de Riemann

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

per $s \in \mathbb{C}$ amb $Re(s) > 1$, on $Re(s)$ denota la part real del nombre complex s.

Euler als 28 anys va aconseguir sumar $\zeta(2k)\pi^{-2k} \in \mathbb{Q}$ amb $k \geq 1$ un natural. Primer misteri de la funció zeta: en els enters positius $2k$ existeix un nombre transcendent Ω_{2k} sobre $\mathbb{Q}$ (anomenat un període) on $\zeta(2k)/\Omega_{2k}$ és un nombre racional!! conjecturalment aquesta propietat passarà per $\zeta(2k+1)$ amb $k \geq 1$.

Euler als 30 anys va demostrar que la funció zeta té un producte d'Euler, és a dir:

$$\zeta(s) = \prod_{p\ primer} (1 - p^{-s})^{-1},\ Re(s) > 1$$

Euler als 32 anys va avaluar els valors $\zeta(1-d)$ amb $d \geq 1$ natural, però us preguntaríeu: com? Fins ara $\zeta(s)$ sol està definida per a $Re(s) > 1$!!! Us recomano llegir la primera referència.

Riemann uns anys més tard, va formalitzar $\zeta(s)$ per a $Re(s) \leq 1$, on tan sols per $Re(s) > 1$ és de la forma anterior (1). Per exemple Euler afirmava:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},\ \zeta(-1)\frac{-1}{12},\ \zeta(-11) = \frac{691}{2^3 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13},$$

Amb la definició formal de Riemann per a $\zeta(s)$ amb $Re(s) \leq 1$, els valors que va donar Euler són els correctes !!!!!

Igualment Euler comparant els valors entre d i $1-d$ va obtenir una equació que relacionava la funció zeta de Riemann avaluada en s amb la funció zeta de Riemann avaluada en $1-s$ amb s enter. Amb el anys, va ser Riemann qui demostra formalment aquesta equació: escrivim $Z(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ on la funció Γ és relacionada amb la funció apareguda a probabilitat, tenim una equació que relaciona $\zeta(s)$ amb $\zeta(1-s)$, mitjançant (segon fet sorprenent)

$$Z(s) = Z(1-s).$$

Quan $Z(s) = 0$? Riemann va conjecturar (i també ja ho havia afirmat Euler abans!!!) que això succeirà tan sols quan $Re(s) = 1/2$, aquest és un altre dels problemes que l'Institut Clay premia amb un mil.lió de dòlars.

Bé fixem-nos en els següents fets sorprenents de la funció zeta de Riemann: té un producte d'Euler, s'estén a una funció analítica a tots els nombres complexos, admet una equació funcional i misteriosament avaluada als enters apareixen certs valors racionals. Anem a aprofundir en aquesta última propietat.

Té algún significat aritmètic $\zeta(0) = -1/2$? Sí! El resultat $1/2$ per $\zeta(0)$ és el cas concret de la famosa fórmula de nombre de classes aplicada al cos $\mathbb{Q}$, per exemple el 2 apareix perquè és el nombre d'arrels de l'unitat que té el cos $\mathbb{Q}$, que són $\{1, -1\}$.

Anem tot seguit a buscar resultats aritmètics als altres valors de la funció zeta avaluada als enters.

De l'equació funcional podem relacionar $\zeta(r)$ amb $\zeta(1-r)$ per tant centrem-nos amb r estrictament negatius per a buscar el significat aritmètic del valor racional que surt. Es demostra que $\zeta(r) \in \mathbb{Q}$ per un enter r negatiu i tan sols ens interessa el significat per r senars ja que en els parells $\zeta(r)$ s'anul.la (recordeu la dificultat per $\zeta(1+r)$ si r és parell!!). Kummer va donar quins denominadors han de sortir i congruències modul primer p per a diversos d'aquests r. Anem però a preguntar-nos sobre el significat que aporta que un nombre que surt al numerador de $\zeta(-2\ell - 1)$ amb $\ell \in \mathbb{N}$. Recordeu per exemple que $\zeta(-11) = \frac{691}{2^3 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$, hi ha un significat aritmètic en el fet que surti 691, i que aquest surti en avaluant-ho al número -11?

Doncs la resposta és SI!!!! Per a justificar que surt el 691 és gràcies al que s'anomena el criteri de Kummer, que afirma p divideix el numerador de $\zeta(r)$ per algun r negatiu senar si i només si aquest primer apareix en l'ordre d'un grup associat al cos $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ (aquest grup s'escriu $Cl(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}))$, màgic no? Però l'anterior criteri de Kummer no ens explica quin paper hi juga el 11. Perquè el 691 surt en avaluar al -11? Bé per això s'usa la teoria Iwasawa, teoria molt tècnica però molt interessant, i resulta que -11 apareix en un factor de fer la descomposició del grup $Cl(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})$ via l'acció del grup $Gal(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})/\mathbb{Q})$, aquests resultats en teoria Iwasawa corresponen ja a l'any 1976!!

El treball consisteix en l'estudi aritmètic dels valor enters de la funció zeta, les congruències de Kummer (congruències entre nombres de Bernouilli) el teorema de van Staudt i si hi ha molta energia el criteri de Kummer.

Referencies:
K.Kato-N.Kurokawa-T.Saito: "Number theory 1: Fermat's dream". Iwasawa series, AMS. Chapter 3.
J. Neukirch: "Algebraische Zahlentheroie", Springer. També traduït a l'anglès. Kapitel VII-§1.

La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. II Tutor: Francesc Bars

És intentar plantejar la hipòtesi de Riemann i els diversos punts de vista per tal que els zeros es trobin tots a 1/2.

El teorema de les unitats de Dirichlet. Tutor: Francesc Bars

En el treball anterior "atacant l'equació de Fermat $x^p + y^p = z^p$" apareix l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ dins el cos $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$. Una propietat d'aquest anell és que tot $\alpha \in \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ compleix que el polinomi irreductible de α sobre $\mathbb{Q}$ té coeficients enters (amb la notació del curs de Teoria de Galois escriurem $Irr(\alpha, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]$ (usualment tan sols ha de tenir coeficients a Q!!). Realment és comprova que $\{\beta \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) | Irr(\beta, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]\} = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. Sigui K un cos amb $[K : \mathbb{Q}] < \infty$, el conjunt $\mathcal{O}_K := \{\beta \in K | Irr(\beta, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]\}$ és un anell del cos K que s'anomena l'anell d'enters del cos K. Aquests anells $\mathcal{O}_K$ tenen molt bones propietats (són dominis de Dedekind!, veieu el primer treball) i tenen molta importància en aritmètica.

El treball consisteix en estudiar el grup d'unitats de $\mathcal{O}_K - \{0\}$ amb el producte. Fixeu-vos que si $K = \mathbb{Q}$ tenim que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$ i les unitats amb el producte de $\mathbb{Z} - \{0\}$ és el grup finit $\{1, -1\}$ que és el grup de les arrels de la unitat en $\mathbb{Q}$.

El treball consisteix a demostrar el següent teorema de Dirichlet: el grup de les unitats de $\mathcal{O}_K - 0$ és un grup abelià que és el producte del grup de les arrels de la unitat en el cos K (grup finit) per un grup abelià lliure de rang $r := r_1 + r_2 - 1$ on r_1, r_2 són el nombre dels diferents morfismes no equivalents que podem inmersionar el cos K dins els nombres reals i complexos, respectivament.

Referencies:
Z.I.Borevich-I.R.Shafarevich: "Number Theory", Academic Press. Chapter II.
J. Neukirch: "Algebraische Zahlentheroie", Springer. També traduït a l'anglès. Kapitel I-§4-§7.

El problema invers de la teoria de Galois finita. Tutor: Francesc Bars

Donat G un grup finit, existeix una extensió de Galois $L/\mathbb{Q}$ amb grup de Galois isomorf a G?

Veieu la pàgina
`http://mathoverflow.net/questions/80359/which-small-finite-simple-groups-are-not-yet-known-to-be-galois-groups-over-q`
El treball consisteix en explicar les tècniques actuals per atacar el problema i intentar si podem dir alguna cosa o les tècniques pel cas PSU(3,9) que es el més petit que encara no es coneix la resposta a la pregunta.

L'equació del trànsit: l'obstacle temporal. Tutor: Àngel Calsina

L'anomenada equació del flux de trànsit ("traffic flow equation") és una equació en derivades parcials de primer ordre no lineal que modelitza l'evolució temporal de la densitat de vehicles en una carretera amb trànsit (relativament) dens.

Un dels problemes més importants a resoldre és l'estudi de la pertorbació causada per un obstacle temporal (un semàfor, un accident) que talla la via durant un cert període de temps. La no linealitat de l'equació fa que apareguin discontinuïtats en la solució (que es diuen "xocs"o "ones de xoc").

Es tractaria d'estudiar la solució analítica que s'obté utilitzant la condició de Rankine-Hugoniot per a la "velocitat"del xoc i de comparar-la amb una solució numèrica obtinguda usant el que s'anomena mètode de la viscositat artificial. En els dos casos els resultats faran referència a la densitat de vehicles i a les trajectòries d'aquests.

Funció de període i equacions de Liénard. Tutor: Magdalena Caubergh

Per un sistema d'equacions diferencials al pla amb un centre envoltat d'òrbites, estudiem el comportament del període d'aquestes òrbites. Considerem aquest centre com l'origen del sistema de coordenades, i parametritzem les òrbites γ que envolten el centre fent servir la distància r del tall $\gamma \cap \{\theta = 0\}$ al centre, on (r, θ) fa referència a les coordenades polars. Aleshores es pot definir l'anomenada 'funció de període', que assigna a una òrbita, amb distància r del centre, el temps $T(r)$ que requereix per passar de $(r, 0)$ a $(r, 2\pi)$.

Primerament ens preguntarem on està ben definida aquesta funció T, i quines propietats presenta; entre altres, la classe de diferenciabilitat, la monotonicitat, el comportament oscil·latori, la dependència de paràmetres i les bifurcacions. També veurem les propietats bàsiques d'un centre isòcron, que succeeix quan el període T és constant per a tot $r > 0$.

En segon lloc investigarem la funció de període per equacions diferencials de segon ordre, les anomenades equacions de Liénard,

$$x'' - P(x) = 0 \text{ i } x'' - P(x)\,x' + x = 0,$$

on $P(x) = a_2x^3 + a_3x^5 + \ldots + a_lx^{2l-1}, a_i \in \mathbb{R}, 2 \leq i \leq l$.

Algunes referències

C.J. Christopher i J. Devlin, Isochronous centers in planar polynomial systems, SIAM J. Math. Anal., Vol. 28, 162-177, 1997.

E. Freire, A. Gasull i A. Guillamon, First derivative of the period function with applications, J. Differential Equations 204, 139-162, 2004.

F. Dumortier, J. Llibre and J.C. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems (Universitext), Springer, 2006.

Teoria de formes normals i aplicacions. Tutor: Armengol Gasull

La Teoria de les Formes Normals és una eines clau als sistemes dinàmics. Aquesta permet detectar quins son els paràmetres essencials quan s'intenta fer un retart de fase local, vegeu per exemple el llibre de Guckenheimer, John; Holmes, Philip "Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields". Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1990.

En aquest treball es proposa estudiar aquesta teoria tant per equacions diferencials ordinàries (EDO) com per a sistemes dinàmics discrets (SDD) i aplicar-la a dos problemes concrets:

1) Càlcul de les constants de Liapunov per a EDO al pla,

2) Detecció d'aplicacions F globalment periòdiques, es a dir tals que F^n =Id.

Equacions diferencials holomorfes. Tutor: Armengol Gasull

Les equacions diferencials de la forma z'=f(z), on z és un nombre complex i f és una funció holomorfa tenen moltes propietats interessants quan es pensen com equacions diferencials al pla (x,y), on z=x+iy. Per exemple: els punts crítics no tenen sectors parabòlics ni el·líptics, tots el centres son isòcrons, no tenen cicles límit,...

En aquest treball es demostraran totes aquestes propietats i moltes d'altres, posant un especial èmfasi en els casos en que f és o be un polinomi o una funció racional. En particular es demostraran resultats de conjugació holomorfa entre z'=f(z) en un entorn del punt crític amb altres equacions diferencials molts més senzilles. Aquest resultats es poden interpretar com un Teorema de Hartman millorat en aquest context. L'eina principal serà el conegut com mètode homotòpic.

Diferenciabilitat de funcions de Takagi i Weierstrass. Tutor: José González Llorente

Cap al final del segle XIX els matemàtics de l'època donaven per fet que tota funció contínua havia de ser derivable en molts punts. L'existència de funcions contínues no derivables en cap punt va suposar un veritable punt d'inflexió no només en el desenvolupament de l'anàlisi, sinó també en els fonaments de la Teoria de Probabilitat i la Física Teòrica (les trajectòries del moviment brownià són contínues i "típicament"diferenciables enlloc). Aquest treball proposa estudiar amb detall dues de les construccions primerenques i més importants de funcions contínues no derivables en cap punt: la funció de Takagi(redescoberta més tard per Van der Waerden) i la funció de Weierstrass. La introducció de coeficients més generals en les construccions proporciona una família d'exemples amb connexions interessants des del punt de vista probabilístic i de l'Anàlisi Harmònica.

REFERÈNCIES

1. P. C. Allaart. *On a flexible class of continous functions with uniform local structure.* J. Math. Soc. Japan, Vol. 61, N. 1 (2009), 237-262.

2. P. C. Allaart, K. Kawamura. *The Takagi function: a survey.* arXiv:1110.169[v] [math.CA] 2011.
3. P. Billingsley. *Van der Waerden's continous nowhere differentiable function.* The Amer. Math. Monthly. Vol 89, N. 9(1982), P. 691.
4. F.S. Cater. *Van der Waerden's nowhere differentiable function.* The Amer. Math. Monthly. Vol. 91. N. 5 (1984), 307-308.
5. J. Dixmier, J. P. Kahane, J.L. Nicolas. *An exemple de non-dérivabilité en geometrie du triangle.* Enseign. Math. (2), 53 (2007)3-4. 369-428.
6. K. R. Stromberg. *An introduction to classical Real Analysis.* Wadsworth. 1981.

La propietat de la mitjana, derivades simètriques i sèries de Fourier. Tutor: José González Llorente

La derivada simètrica de segon ordre

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}$$

també anomenada *derivada de Riemann* o *derivada de Schwarz* va ser introduïda per Riemann en connexió amb el problema d'unicitat per una sèrie de Fourier, proposat per Heine: si una sèrie de Fourier convergeix cap a zero han de ser tots els seus coeficients zero? El fet que la derivada de Riemann-Schwarz d'una funció sigui 0 suggereix que la funció hauria de ser lineal. Si f és contínua, això és veritat (Schwarz) i aquest és un ingredient clau en la demostració del Teorema de Schwarz sobre la unicitat dels coeficients d'una sèrie de Fourier.

D'altra banda, que la derivada de Riemann-Schwarz d'una funció en un punt x sigui 0 indica que la funció verifica, asimptòticament, una mena de "propietat de la mitjana", en el sentit que $f(x+t)+f(x-t)\approx 2f(x)$, observació que ens porta al problema següent, especialment interessant en dimensió superior: sota quines condicions una funció que verifica la propietat del valor mitjà és harmònica?

El treball proposa: i) estudiar el paper de la derivada de Riemann-Schwarz en el teorema d'unicitat e Schwarz i ii) explorar el problema de la caracterització de les funcions que verifiquen la propietat del valor mitjà en boles o en esferes, amb especial èmfasi en el cas bidimensional.

REFERÈNCIES

1. R. B. Burckel. *A strong converse to Gauus' mean value theorem.* The Amer. Math. Monthly. Vol. 87. N. 10(1980), 819-820.
2. W. Hansen. *A strong version of Liouville theorem.* Amer. Math. Monthly. 115 (7)(2008), 583-595.

3. M. Pinsky. *Mean values and the maximum principle: a proof in search of more theorem10s.* The Amer. Math. Monthly. Vol. 112. N. 6 (2005), 515-521.
4. B. Thomson. *Symmetric properties of real functions.* Marcel Dekker. 1994.
5. L. Zalcman. *Modern perspectives on Classical Function Theory.* Rocky Mountain J. Math. 12(1982), N. 1. 75-92.

Grafs i àlgebra: un teorema de Gabriel Tutora: Dolors Herbera.

Un teorema d'Àlgebra Lineal ens diu

Teorema. *Sigui k un cos i sigui $f\colon V_1 \to V_2$ una aplicació lineal entre dos espais vectorials de dimensió finita. Llavors existeixen bases de V_1 i V_2 tals que la matriu associada a f en aquestes bases és de la forma*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on r és la dimensió de la imatge de f i I_r denota una matriu identitat $r \times r$.

Aquest Teorema es pot pensar de la manera següent.

Considerem el graf

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

Assignem al vèrtex 1 l'espai vectorial V_1, al vèrtex 2 l'espai vectorial V_2 i a l'aresta α l'aplicació lineal f. El Teorema ens dona una forma canònica per aquest tipus de "representacions".

En general, s'estudia com obtenir "fomes canòniques"per assignacions d'espais vectorials i aplicacions lineals amb grafs finits qualssevol.

P. Gabriel [2] l'any 1972 va demostrar un Teorema essencial dins de la teoria en que es determina els grafs que donen lloc només a un "nombre finit"de formes canòniques. Sorprenentment es demostra que aquests grafs corresponen als anomenats Diagrames de Dynkin (que tenen un estrany costum de apareixer en llocs molt diversos).

Una demostració elemental d'aquest resultat deguda a H. Krause i que es troba en uns apunts que ell ha escrit pels seus estudiants de segon de Matemàtiques a [3]. Aquesta demostració està basada en l'article de I. Bernstein, I. Gelfand i V. Ponomarev [1].

L'objectiu principal del treball es estudiar aquesta demostració de [3] i desenvolupar amb detall alguns dels exemples que surten.

El prerequisit fonamental per estudiar els apunts és un bon coneixement de l'Àlgebra Lineal.

Tant el Teorema de Gabriel com les idees al voltant d'aquesta demostració han tingut i tenen una repercussió molt important dins de les matemàtiques actuals. Si es vol, aquest tema permet fer una aproximació a través d'exemples interessants a conceptes avançats d'Àlgebra (no necessàriament commutativa): categories petites, functors, mòduls/representacions injectives i projectives, diagrames de Dynkin i reflexions, grups de Coxeter.....

Referències

[1] Bernstein, I. N.; Gelfand, I. M.; Ponomarev, V. A. *Coxeter functors, and Gabriel's theorem.* Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 2(170), 19–33.

[2] Gabriel, Peter *Unzerlegbare Darstellungen. I.* Manuscripta Math. 6 (1972), 71–103; correcció, ibid. 6 (1972), 309.

[3] Krause, Henning *Representations of quivers via reflection functors*, Apunts de classe. Podeu clicar aquí per baixar-los.

El Problema dels quatre subespais. Tutora: Dolors Herbera

Sigui V un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos k, i siguin V_1, V_2 i V_3 subespais de V. El sistema $(V; V_1; V_2; V_3)$ es diu descomponible si existeixen U i W subespais no trivials de V tals que $V = U \oplus W$, i $V_i = (Vi \cap U) \oplus (Vi \cap W)$ per $i = 1; 2; 3$. No és difícil de demostrar que si el sistema $(V; V_1; V_2; V_3)$ és indescomponible llavors $\dim_k(V) = 2$ i que hi ha essencialment 9 sistemes indescomponibles. El problema dels 4 subespai és un problema molt conegut on es vol classificar els sistemes indescomponibles quan el nombre de subespais s'augmenta a 4.

El problema dels 4 subespais va ser resolt, sobre un cos algebraicament tancat, per Gelfand i Ponomarev en un article publicat l'any 1969. Nazarova en una serie d'articles publicats el mateix any ho resol en general. L'any 2004, Gonzalo Medina i Alexander Zavadski publiquen una solució elemental.

El problema surt a l'estudiar la classificació simultània de dos endormorfismes, d'un espai vectorial de dimensió finita, que commuten.

L'objectiu del treball seria estudiar (part d') alguna d'aquestes solucions. Com en el treball anterior es classifiquen representacions d'un graf que s'associa a aquest problema, però que no és del tipus Dynkin. També és interessant mirar els aspectes geomètrics del problema en dimensions petites.

Moviment Brownià i introducció al càlcul estocàstic. Tutor: Maria Jolis

El moviment Brownià o procés de Wiener és un procés estocàstic (és a dir una família de variables aleatòries que evolucionen amb el temps) que apareix com a model matemàtic en nombroses situacions (a la física, l' enginyeria, les finances...) entre les que s'inclouen equacions diferencials pertorbades per un soroll aleatori, anomenades equacions diferencials esòcàstiques (EDE). En aquest treball es tractaria d'estudiar les propietats matemàtiques més importants del procés de Wiener i assolir les idees principals en què estan basades les EDE.

Point-free topology Tutor: Joachim Kock

A topological space can be characterised completely in terms of its lattice of open sets. A lattice with the properties of open sets is called a locale. Parts of Topology can be developed in terms of locales instead of using topological spaces (point-sets). This abstract approach reveals many deep links between topology and algebra as well as algebraic geometry. It is also of importance in constructive mathematics, which could be one point of focus of this project. For example, for locales one can prove Tychonov's theorem without using the axiom of choice. (In contrast, for topological spaces, Tychonovs theorem is in fact equivalent to the axiom of choice.) Other directions could be the representation theorems of Stone, or Hochster's duality for spectral spaces.

References:
- P. Johnstone: ”The point of pointless topology”, Bull. Amer. Math. Soc. 1983.
- P. Johnstone: ”Stone spaces”. Cambridge, 1982.

Prerequisites: basic point-set topology and a taste for abstract mathematics.

Formal proofs in Coq Tutor: Joachim Kock

Coq is a computer system for formal verification of mathematical proofs and correctness of programs. Most famously, the proof of Appel and Haken of the 4-colour conjecture has been certified in Coq. Presently, field medallist Voevodsky is developing a new foundation for mathematics based on homotopy theory and type theory, and he implements everything in Coq. The future of mathematics might well involve writing formal proofs in some programming language like Coq! While it is probably too ambitious to go in the directions of Voevodsky's programme, more realistically the project could consist in implementing some chapter of an algebra book.

(To see what Coq code looks like, here is an implementation of the Eckmann-Hilton argument (the fact that if two monoid structures on a set are compatible, then they agree and are abelian): http://mat.uab.cat/ kock/alphatcl/Coq-Example.v8.)

Implementing proofs in Coq is very cool, but the main aim of the project is actually to learn some proof theory.

References:
- Coq Website: http://coq.inria.fr/
- D. van Dalen: L·Logic and Structure”(chapter 5). Springer, 1994.
- B. Nordstrom, K. Petersson, J. Smith: ”Programming in Martin-Löf type theory”. Oxford 1990.
(Available at http://www.cse.chalmers.se/research/group/logic/book/)
- Y. Bertot, P. Castéran: Ïnteractive Theorem Proving and Program Development. Coq'Art: The Calculus of Inductive Constructions”. Springer, 2004.

Prerequisites: facility with logic, experience with programming, a taste for formalism and rigour, patience.

Tutte polynomial, Jones polynomial, and the Potts model in statistical mechanics. Tutor: Joachim Kock

The Tutte polynomial is a polynomial associated to each finite graph, which can be computed recursively in terms of edge contractions and deletions. It has many interesting specialisations and relations with other polynomials, such as the chromatic polynomial. The Jones polynomial is an polynomial invariant of knots and links. There are many variations, such as the Kauffman bracket. The first goal is to explain the connection between the Tutte polynomial and the Jones polynomial, via the correspondence between signed graphs and planar knot projections. Jones actually discovered the Jones polynomial while working in statistical mechanics, and the relationship he discovered won him a Fields medal. Nowadays a more elementary relationship has been established via the Tutte polynomial. The second goal is to explain the relationship between the Tutte polynomial and the partition function of the q-state Potts model in statistical mechanics. For q=2 this is a model for ferromagnetism.

Reference to start with:
- C. Adams: "The Knot Book", New York 1994.

More advanced references:
- L Kauffman: "State models and the Jones polynomial", Topology, 26 (1987).
- J. Ellis-Monaghan and C. Merino: "Graph polynomials and their applications I and II"(ArXiv).

Prerequisites: a taste for abstraction. Some background in physics could be helpful, but is not required.

Combinatorial species. Tutor: Joachim Kock

If you are fascinated by the fact that manipulations with formal power series yield solutions to enumerative problems in combinatorics, you will enjoy to learn that all those operations have an interpretation in terms of finite sets! The theory of species, invented by Joyal in the 1980s is the categorical foundation for enumerative combinatorics. Species can be added and multiplied and substituted and differentiated. Everything is defined in terms of finite sets, but mimics the operations with formal series. It is possible quickly to come to some nice results, such as the combinatorial interpretation of plethystic substitution of power series in infinitely many variables.

(The first part of this project could involve collaboration with the project on Çombinatorics of the quantum harmonic oscilator".)

References:
- F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux: Çombinatorial species and tree-like structures". Cambridge, 1998.
- A. Joyal: Üne théorie combinatoire des séries formelles", Adv. Math. 42 (1981).

Prerequisites: some familiarity with basic notions of combinatorics, and a taste for abstract mathematics.

Combinatorics of the quantum harmonic oscilator Tutor: Joachim Kock

Baez and Dolan have given an interpretation of the quantised harmonic oscillator in terms of the combinatorics of finite sets, using a slight generalisation of the theory of combinatorial species. The approach is based on groupoids, and is a wonderful blend of category theory, combinatorics, and physics, involving intuition from homotopy theory. The project consists in understanding the basics of this theory, and to fill in the details missing in the Baez-Dolan paper.

(The first part of this project could involve collaboration with the project on Çombinatorial species".)

Reference:
- J. Baez, J. Dolan: "From finite sets to Feynman diagrams"(2000) ArXiv:math/0004133. (This paper is very easy to read!)

Prerequisites: Some prior basic knowledge of categories would be helpful. Linear algebra, curiosity towards physics, and a taste for abstract mathematics.

Graphical calculus – from low-dimensional topology to quantum algebra. Tutor: Joachim Kock

It was discovered by physicists in the 1960s that complicated manipulations with tensors can be performed by drawing string diagrams. It was established by mathematicians in the 1980s that string diagrams constitute a formal mathematical language, just as reliable as algebraic symbols. The diagrams form categories of topological nature, such as braids and tangles or cobordisms, and there are theorems saying that these categories are free categories-with-a-certain-structure. For example, Shum's theorem states that the category of framed tangles is the tortile tensor category freely generated by one object. Freeness means that the drawings (in this case framed tangles) can be interpreted soundly in any instance of the algebraic structure (in this case tortile tensor categories). These theorems are at the heart of the connections between low-dimensional topology and quantum algebra. One goal could be to understand the proof of Shum's theorem. There are also many uses of graphical calculus in computer science which could be explored in this project, for example the use of dagger categories in quantum information theory.

References:
- J. Baez and M. Stay: "Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone". ArXiv:0903.0340.
- D. Yetter: "Functorial knot theory". World Scientific, 2001. - P. Selinger: "A survey of graphical languages for monoidal categories", ArXiv:0908.3347.
- A. Joyal, R. Street: "The geometry of tensor calculus I", Adv. Math. 88 (1991).
- J. Kock: "Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories". Cambridge, 2003.

Prerequisites: This project is probably quite demanding. In particular some prior basic knowledge of categories is required. Linear algebra, notions from topology, curiosity towards physics and computer science, and a taste for abstract mathematics.

Teoría de l'index i Teorema de Poincaré-Hopf per camps continus sobre superficies compactes sense vora. Tutor: Jaume Llibre

A cada punt d'equilibri d'un camp continu X sobre una superficie compacte sense vora S se li associa de manera única un número enter, anomenat el seu index topològic. Aquest és un concepte local. Per altre costat la característica d'Euler de la superficie S és un concepte global que no depend de cap camp continu definit sobre S. El Teorema de Poincaré-Hopf ens diu que si un camp continu X definit a S té un nombre finit de punts d'equilibri la suma dels seus índexs és igual a la la característica d'Euler de S. Provar aquest resultat i fer-ne algunes aplicacions és un tema per un treball de grau.

Cicles limits d'equacions diferencials al pla. Tutor: Jaume Llibre

Un cicle limit és una òrbita periòdica isolada en el conjunt de totes las òrbites periòdiques d'una equació diferencial al pla. Van començar a ser estudiats per Henri Poincaré ara fa uns 120 anys, des d'aleshores que son uns dels objectes més estudiats en la teoria qualitativa de les equacions diferencials al pla. S'estudiaran resultats sobre la seva existencia i no existencia, i sobre el nombre de cicles limits que certes classes d'equacions diferencials al pla poden tenir.

Estudi de les solucions periòdiques d'un sistema diferencial via la teoria de la mitjana. Tutor: Jaume Llibre

Les òrbites d'un sistema diferencial topològicament només són de tres tipus: un punt, un circle o una recta. Quan són homeomorfas a un punt s'anomenen punts d'equilibri. L'estudi dels punts d'equilibri és redueix a trobar els zeros de un sistema no lineal d'equacions. Quan són homeomorfas a un circle diem que són òrbites periòdiques. Les òrbites periòdiques són objectes globals, mentre que els punts d'equilibri són objectes locals i més fàcils d'estudiar. Una de les millors eines per estudiar les òrbites periòdiques és la teoría de la mitjana. L'estudi d'aquesta teoria i algunes aplicacions de la mateixa és un bon tema per un treball de grau.

Formes diferencials discretes per modelització computacional. Tutor: David Marín

Lectura i exposició de les línies generals de l'article "Discrete Differential Forms for Computational Modeling"de Mathieu Desbrun, Eva Kanso i Yiying Tong publicat en la monografia "Discrete Differential Geometry", Oberwolfach Seminars, Vol 38, 287-323.

Geodèsiques i altres trajectòries físiques sobre superfícies Tutor: David Marín

Plantejament de les equacions diferencials i representació gràfica mitjançant resolució numèrica amb maple en exemples concrets de:

1. les geodèsiques sobre superfícies de l'espai euclidià tridimensional (per superfícies de revolució, veure per exemple `http://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/lab/curvesnsurfaces.shtml#GeodesicsOnSpheresOfRevolution`;
2. les trajectòries físiques d'una partícula que es mou sota l'acció de la gravetat i el fregament sobre una superfície que és el graf d'una funció del pla:
3. les geodèsiques sobre una superfície tipus espai de l'espai de Minkowski tridimensional.

Modelització de corbes i superfícies tancades mitjançant sèries de Fourier. Tutor: David Marín

Tota corba tancada pot parametritzar-se utilitzant les funcions sinus i cosinus mitjançant anàlisi de Fourier. De manera anàloga, tota superfície tancada homeomorfa a una esfera pot parametritzar-se mitjançant les funcions esfèriques harmòniques. Càlcul efectiu dels coeficients de Fourier i control de l'error en exemples concrets de les dues situacions.

Geometria i Dinàmica: el flux geodèsic en superfícies de curvatura negativa. Tutor: Marcel Nicolau

Les propietats geomètriques de les superfícies de $\mathbb{R}^3$, o de manera més general de les varietats de Riemann, estan determinades pel comportament de les seves corbes geodèsiques i per la seva curvatura. Aquestes dues nocions, geodèsiques i curvatura, estan íntimament relacionades entre elles i el seu comportament condiciona de manera molt forta la topologia de la superfície o varietat. Així per exemple, una curvatura positiva (en tots els seus punts) força la varietat a ser compacta i tenir un grup fonamental finit (teorema de Bonnet-Myers) mentre que, en l'extrem oposat, una curvatura no negativa (en tots els punts) implica una topologia de la varietat especialment senzilla, en el sentit que la varietat és un quocient de $\mathbb{R}^n$ (teorema de Hadamard).

Paral·lelament, la curvatura de la varietat també condiciona el comportament dinàmic del flux geodèsic, és a dir del sistema dinàmic continu determinat per les geodèsiques i definit a l'espai tangent de la varietat. Especialment notable és el cas de varietats amb curvatura negativa. En aquestes varietats el flux geodèsic té un comportament de tipus caòtic. En particular és ergòdic y té la propietat d'Anosov: el flux és exponencialment contractant en certes dimensions i, al mateix temps, exponencialment contractant en unes altres.

L'objectiu del treball és estudiar les propietats dinàmiques del flux geodèsic de les superfícies de curvatura negativa.

Bibliografia:

Manning, Anthony, *Dynamics of geodesic and horocycle flows on surfaces of constant negative curvature.* Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989), 71–91, Oxford Univ. Press, New York, 1991

C*-àlgebres: punt de trobada de l'àlgebra, l'anàlisi i la topologia no commutatives. Tutor: Francesc Perera

reu resum dels objectius: Les àlgebres d'operadors són objectes d'un gran interès en la matemàtica actual. Una de les claus de volta de la teoria es troba en l'anomenat programa d'Elliott, que pretén una classificació d'aquests objectes mitjançant grups abelians. L'objectiu principal del treball és explorar els teoremes clàssics per arribar a formular la conjectura de classificació i entendre'n l'estat actual.

Continguts: Definicions i exemples. El radi espectral en àlgebres de Banach. Les C*-àlgebres de dimensió finita i les commutatives. El càlcul funcional continu. Unitats aproximades i C*-àlgebres hereditàries. La construcció de Gelfand-Naimark-Segal. Els grups K_0 i K_1. La conjectura de classificació d'Elliott i el semigrup de Cuntz.

Corbes algebraiques. Tutor: Joaquim Roé

Es fa una introducció a la teoria de les corbes algebraiques planes i les superfícies de Riemann, en què conflueixen mètodes de diverses àrees de les matemàtiques, com l'àlgebra, l'anàlisi i la topologia. L'objectiu últim i més ambiciós és comprendre el teorema de Riemann-Roch i la seva demostració.

Bibliografia:

* Fulton "Algebraic Curves"

* Kirwan "Complex Algebraic Curves"

* Casas-Alvero "Singularities of Plane Curves"

Espai de Fock, productes de Wick i probabilitat. Tutor: Josep Lluís Solé.

Un celebrat teorema de Wiener diu que un funcional de quadrat integrable del moviment brownià pot escriure's com una suma d'elements ortogonals pertanyents a diferents caos. El formalisme que hi ha al darrere és el de l'espai de Fock asssociat a un espai de Hilbert H. Aquesta estructura és molt apropiada en mecànica quantica per incloure el procés de creació i destrucció de particules. Gian Carlo Wick fou un físic italià que introduí l'anomenat producte de Wick en aquest context. L'objectiu del treball seria entendre aquests conceptes, almenys en el cas gaussià. i el lligam amb la teoria de la probabilitat.

Convergence/ equiconvergence of numeric series. Tutor: Sergey Tikhonov

In various well-known tests for convergence/divergence of number series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{2}$$

with positive a_k, *monotonicity* of the sequence of $\{a_k\}$ is the basic assumption. Such series are frequently called monotone series. As examples, we mention tests by Abel, Cauchy, de la Vallee Poussin, Dedekind, Dirichlet, du Bois Reymond, Ermakov, Leibniz, Maclaurin, Olivier, Sapogov, Schlömilch; several such tests were named after Abel and Cauchy.

Typical result: the Maclaurin-Cauchy integral test. *Consider a non-negative monotone decreasing function f defined on* $[1, \infty)$. *Then the series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{3}$$

converges if and only if the integral

$$\int_1^{\infty} f(t)\, dt \tag{4}$$

is finite. In particular, if the integral diverges, then the series diverges as well.

Questions : how to relax monotonicity assumption in the Maclaurin-Cauchy test and similar problems?

Hardy's inequality. Tutor: Sergey Tikhonov

The following results are well known.

a). Let $a_k \geq 0, b_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n \gamma_n.$

If $1 \leq p < \infty$, *then*

(∗)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big(\sum_{n=k}^{\infty} b_n \Big)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \gamma_k)^p.$$

If $0 < p \leq 1$, *then*

(∗∗)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big(\sum_{n=k}^{\infty} b_n \Big)^p \geq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \gamma_k)^p.$$

b). Let $a_k \geq 0, b_k \geq 0,\ \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = a_n\beta_n$.

If $1 \leq p < \infty$, *then*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big(\sum_{n=1}^{k} b_n\Big)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k\beta_k)^p.$$

If $0 < p \leq 1$, *then*

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big(\sum_{n=1}^{k} b_n\Big)^p \geq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k\beta_k)^p.$$

Questions : is it possible to obtain analogues of (*) for $0 < p < 1$ and of (**) for $1 \leq p < \infty$ under some additional conditions on a_k ?

Convergence of the Fourier series. Tutor: Sergey Tikhonov

We first have to discuss integral operators. Integral transforms have their genesis in nineteenth century work of J. Fourier and O. Heaviside, subsequently set into a general framework during the twentieth century. The fundamental idea is to represent a function f in terms of a transform F, using an integral transform pair, $F(p) = \int K(p,x)f(x)dx$ and $f(x) = \int L(x,p)F(p)dp$. The functions K and L are kernels. O. Heaviside invented his operational calculus to solve differential equations, such as those arising in the theory of electrical transmission lines. The formalization of Heaviside's work leads one to the Laplace transforms $K(p,x) = e^{-px}$. One the most important integral transforms is the Fourier transform that represents functions as linear combinations of periodic functions, an idea pioneered by J. Fourier; here $K(p,x) = e^{-ipx}$.

Fourier analysis began with studying the way general functions may be represented by sums of simpler trigonometric functions. It received its name after Joseph Fourier, who showed that representing a function by a trigonometric series greatly simplifies the study of heat propagation. Today, the subject of Fourier analysis encompasses a vast spectrum of mathematics. In the sciences and engineering, the process of decomposing a function into simpler pieces is often called Fourier analysis, while the operation of rebuilding the function from these pieces is known as Fourier synthesis. The decomposition process itself is the Fourier transform.

Questions : we are interested in convergence of Fourier series and integrals with certain restriction on considered functions.