Universidad de La Laguna

Facultad de Matemáticas

Homotopía Generalizada en Categorías de Cofibraciones

Pedro Ruymán García Díaz

Universidad de La Laguna
Facultad de Matemáticas

Tesina

Homotopía Generalizada en Categorías de Cofibraciones

Pedro Ruymán García Díaz
Licenciado en Matemáticas

La Laguna, Enero 2004

Esta memoria ha sido dirigida por el Dr. Sergio Rodruíguez Machín, a quien deseo hacer constar mi agradecimiento por sus orientaciones, aportaciones y ayuda sin las cuales no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Hago extensivo el agradecimiento a los miembros del Área de Geometría y Topología del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna por su apoyo y ayuda desinteresada, en especial al profesor José Manuel García Calcines por las valiosas horas de trabajo pasadas junto a él.

Indice

Introducción

En teoría de homotopía algebraica la homotopía relativa a cofibraciones fue estudiada desde un punto de vista general por F.J. Díaz, J. Remedios y S. Rodríguez Machín en [10] introduciendo grupos de homotopía, sucesiones exactas de éstos y verificando que los grupos de homotopía punteadas sólo eran un caso particular de esta teoría general. Este tipo de homotopía fue denominada, por dar una visión general de toda la homotopía en la categoría, por homotopía generalizada.

El estudio anterior fue hecho sobre homotopías funtoriales que hacían uso de funtores cono o co-conos. Un desarrollo similar de homotopía generalizada para funtores cilindro o co-cilindro fue hecho por los mismos autores en [9] y [35] pero, hasta la fecha, la homotopía generalizada no ha sido desarrollada en ninguna categoría de homotopía no funtorial.

Entre las teorías de homotopía algebraica no funtorial caben destacar la dada por Quillen en su categoría de modelos y posteriormente la descrita por Baues con su categoría de cofibraciones. Esta última resulta más interesante por el hecho de no ser autodual como la primera y, por tanto, sus axiomas ser menos exigentes.

En esta memoria de licenciatura se desarrolla una teoría de homotopía generalizada en una categoría de cofibraciones. Partiendo de los axiomas dados por Baues y de la teoría de homotopía generalizada descrita en una categoría con cilindro natural se prueba que los cilindros obtenidos en esta categoría definen un concepto diferente al de funtor, pero que sin embargo conserva ciertas similitudes con éste y, por ello, es denominado casi-funtor.

Usando estos casi-funtores se pueden crear iteraciones de cofibraciones y a semejanza con lo que ocurre con un funtor cilindro, crear los grupos de homotopía generalizada, también llamados grupos de homotopía relativos a una cofibración, a partir de los cuales se obtienen los grupos de homotopía relativos a cofibraciones y basados en un morfismo.

Estos grupos de homotopía generalizada verifican propiedades análogas a los grupos de homotopía existentes. Tienen carácter funtorial y son totalmente independientes de la multiplicidad de cilindros y construcciones homotópicas que en este caso aparecen por trabajar con casi-funtores.

Como también sucede en otras teorías de homotopía, los grupos de homotopía referidos a un objeto dados por Baues en esta categoría de cofibraciones aparecen como un caso particular de la teoría desarrollada. Por último, las restricciones impuestas a los objetos de la categoría de cofibraciones de ser cofibrantes o fibrantes pueden ser eliminadas, generalizando el concepto de grupo obtenido, debido a los isomorfismos que inducen las equivalencias débiles entre estos grupos.

La memoria está divida en tres capítulos más uno previo de notación y preliminares:

- En el capítulo cero se introducen nociones básicas de la teoría de categorías como son la de categoría, funtor y transformación natural, así como la notación que se usará a lo largo del trabajo. Se hace un estudio más profundo de la teoría de push outs puesto que esta herramienta será fundamental en todo el documento.

- En el capítulo primero se introduce el lenguaje relativo a las categorías de cofibraciones así como las nociones y resultados conocidos que se usarán posteriormente. Se definen los cilindros de homotopía y se estudian sus propiedades. En este sentido, se destacan las relativas a su comportamiento funtorial. El capítulo se divide en tres secciones:

  En la primera sección se recuerdan los axiomas de una categoría de cofibraciones y se enuncian resultados referentes a cofibraciones y equivalencias débiles entre push outs. Asimismo, se dan ejemplos de categorías de cofibraciones desde dos puntos de vista diferentes: las que son categorías con un cilindro natural y las que no. Se finaliza esta sección dando resultados referentes a extensiones de morfismos relativas a cofibraciones triviales.

  En la sección segunda se crean los cilindros de objetos cofibrantes y se introduce la descomposición de un cuadrado conmutativo relacionando cofibraciones y equivalencias débiles. Esta descomposición, será la herramienta básica que servirá para probar la independencia de la homotopía de los diferentes cilindros y construcciones homotópicas que aparecen partiendo de los mismo elementos. Así, se comprueba que dados dos cilindros cualesquiera de un mismo objeto, existe un tercer cilindro relacionando estos dos mediante una descomposición como la anteriormente mencionada. Se concluye esta sección definiendo el cilindro de un morfismo para morfismos entre objetos cofibrantes.

En la tercera sección, al existir diversidad de cilindros partiendo de los mismos elementos, no se puede hablar de funtores, pero sí se comprueba que estos cilindros tienen propiedades funtoriales como una cierta conservación de las identidades y de la composición de morfismos. También poseen una cierta naturalidad respecto a las transformaciones inclusiones y proyecciones. Por todo esto, se denomina a este concepto de cilindro por casi-funtor. Se finaliza esta sección observando que el casi-funtor cilindro conserva la conmutatividad de cuadrados así como también puede transformar push outs en push outs.

- El segundo capítulo de la memoria está dedicado a la noción de homotopía. Partiendo del concepto de homotopía relativa dada por Baues en una categoría de cofibraciones, se introduce el de homotopía cilíndrica relativa, denominado así por ser este el usado en una categoría con cilindro natural. Se comprueba que, a pesar de no tener construcciones funtoriales, esta nueva concepción de homotopía es independiente de la primera iteración utilizada para la cofibración considerada. Posteriormente, se comprueba que ambos enfoques son equivalentes y se dan los resultados básicos que emanan de este concepto de homotopía. El capítulo se divide en tres secciones:

  En la primera sección se recuerda la noción de homotopía relativa dada por Baues en una categoría de cofibraciones y se introduce el de homotopía cilíndrica relativa procedente de la noción respectiva existente en una categoría con cilindro natural. Se comprueba que esta noción de homotopía cilíndrica relativa es independiente de la primera iteración elegida para una cofibración, de forma que si dos morfismos son homótopos respecto a una iteración, lo son respecto a cualquier otra primera iteración.

En la segunda sección, a partir de una definición equivalente para el dominio de una primera iteración, se compara el concepto de homotopía dado por Baues y el de homotopía cilíndrica relativa, comprobándose que son equivalentes.

En la tercera sección se crea una propiedad de extensión de homotopía que efectivamente las cofibraciones verifican. Dado que la técnica utilizada en la demostración es básica para probar posteriores resultados, se comprueba que la homotopía cilíndrica relativa es una relación de equivalencia. Asimismo, se estudia su compatibilidad con la composición de morfismos y, en particular, si éstos son equivalencias débiles o forman parte de un push out relacionando cofibraciones, se observa que inducen biyecciones entre los corchetes de homotopía relativa.

- En el tercer y último capítulo se crean los grupoides de homotopía relativa y a partir de ellos se definen los grupos de homotopía relativa a una cofibración y basados en un morfismo, comprobando que los grupos de homotopía obtenidos por Baues mediante suspensiones son un caso particular de los anteriores. Para ello, es necesario demostrar que los nuevos grupoides de homotopía relativa son isomorfos a los definidos por Baues. Se finaliza el capítulo definiendo los grupos de homotopía cuando se consideran objetos no fibrantes. Este capítulo se divide en cinco secciones:

  En la primera sección, usando la primera iteración de una cofibración se crea el grupoide de homotopía relativo, observando que para distintas iteraciones surgen grupoides isomorfos y que la compatibilidad de la composición de morfismos con la homotopía induce funtores relacionando los distintos grupoides de homotopía.

  En la segunda sección se recuerdan los grupoides de homotopía definidos por Baues y se demuestra que los anteriores son isomorfos a éstos. Para ello se utiliza el funtor inducido por el push out que engendra el cilindro relativo, viendo que induce un isomorfismo entre ambos grupoides.

En la tercera sección, a partir de los grupoides de homotopía relativa de la primera sección y de las iteraciones sucesivas de una cofibración, se definen los grupos de homotopía superiores relativos a una cofibración y basados en un morfismo. Se estudian sus propiedades y se destaca que aunque no se usen funtores sino casi-funtores, los grupos de homotopía relativa sí son funtoriales.

En la cuarta sección se da la noción de categoría basada de una de cofibraciones para llegar así a los grupos de homotopía obtenidos por Baues mediante suspensiones. Mediante los funtores que aparecen al relacionar cofibraciones mediante push outs, se comprueba que estos grupos de homotopía son exactamente grupos de homotopía relativos a la cofibración inicial y basados en un morfismo 0.

En la quinta y última sección de esta memoria, observando que las equivalencias débiles entre objetos fibrantes inducen isomorfismos entre los respectivos grupos de homotopía, mediante el modelo fibrante que posee todo objeto, se extiende la noción de grupo de homotopía para objetos no necesariamente fibrantes, comprobándose que todas las propiedades homotópicas pueden ser trasladadas a este caso.

Capítulo 0

Notación y preliminares

En matemática abstracta y en particular, en homotopía algebraica, es fundamental el conocimiento de la teoría de categorías. En esta memoria se trabajará de forma sistemática con conceptos categóricos tales como push outs, coproductos y transformaciones naturales. Por ello, se ha añadido este capítulo preliminar que recoge las principales nociones y herramientas de esta naturaleza, así como la notación usada. Para profundizar más en este tema, pueden ser de gran ayuda las referencias [4] y [29].

Las categorías y funtores surgen de la necesidad de unificar y simplificar sistemas matemáticos. Estos conceptos fueron introducidos entre los años 1943 y 1945 por Eilenberg y Mac Lane. Dicho de manera informal, una categoría consiste en una clase de *objetos* y una clase de *morfismos* (o *flechas*) verificando ciertas propiedades. Rigurosamente hablando, una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

1. Una clase de *objetos* A, B, C, ...

2. Para cada par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, un conjunto $Hom(A, B)$ cuyos elementos se llaman *morfismos de* A *en* B. Un elemento cualquiera de este conjunto lo denotaremos por $f : A \longrightarrow B$.

3. Para cada terna ordenada de objetos A, B, C de $\mathcal{C}$, una ley de composición $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \longrightarrow Hom(A, C)$, $(f, g) \mapsto gf$.

Esta estructura satisface los siguientes axiomas:

- Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$, entonces $h(gf) = (hg)f = hgf$.

- Para todo objeto X de $\mathcal{C}$, existe un morfismo, $1_X : X \longrightarrow X$, tal que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$, se tiene que $f1_A = f = 1_B f$.

Las categorías se denotarán por letras mayúsculas caligráficas del tipo $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...$, los objetos por letras mayúsculas en itálica tipo *A,B,C,...*. Para un morfismo en $Hom(A, B)$, se dirá que A es su *dominio* y B su *codominio*.

Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ se llamará *retracción* si tiene un inverso a derecha, es decir, existe $s : B \longrightarrow A$ tal que $fs = 1_B$. Análogamente, f es *sección* si tiene un inverso a izquierda. Del mismo modo, f es *isomorfismo* si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. En este caso, los objetos A y B son *isomorfos*, y se denotará por $A \cong B$.

Dados los morfismos $i : B \longrightarrow A$ y $u : B \longrightarrow X$, $Hom(A, X)^{u\{i\}}$ representará el conjunto de morfismos $\{f : A \longrightarrow X / fi = u\}$ y se denominará *conjunto de extensiones del morfismo u relativas al morfismo i*.

Dos categorías se pueden relacionar por medio de un funtor. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son categorías, un *funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es una regla que asocia a cada objeto A de $\mathcal{C}$, un objeto A' de $\mathcal{C}'$ y a cada morfismo $f \in Hom(A, B)$, un morfismo $F(f) \in Hom(F(A), F(B))$ y que satisface las siguientes condiciones:

$$F(gf) = F(g)F(f)$$

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Los funtores serán designados por letras mayúsculas en itálica.

A su vez, los funtores se pueden relacionar mediante transformaciones naturales. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías y $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores, una *transformación natural* t de F a G, $t : F \longrightarrow G$, es una colección de morfismos $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\mathcal{D}$, uno para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, tal que, para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$, $(G(f))t_A = t_B(F(f))$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "t_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Si t_A es isomorfismo, para todo A, se dirá que t es un *isomorfismo natural*.

Un concepto que se empleará frecuentemente en este trabajo es el de push out. Por ello, se presenta a continuación un estudio detallado del mismo, así como algunos resultados básicos. Cabe destacar que la notación aquí usada difiere sensiblemente de la tradicional, ofreciendo mayor información sin añadir complejidad a la misma y facilitando la comprensión del documento.

Dados $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Z$ en una categoría $\mathcal{C}$, el *push out* de f y g consiste en un objeto, $P\{f, g\}$, junto con dos morfismos $\overline{f} : Z \longrightarrow P\{f, g\}$ y $\overline{g} : Y \longrightarrow P\{f, g\}$, tales que $\overline{g}f = \overline{f}g$, con la siguiente propiedad universal: si $u : Y \longrightarrow A$ y $v : Z \longrightarrow A$ verifican $uf = vg$, entonces existe un único morfismo $P\{f, g\} \longrightarrow A$, que se denotará por $\{u, v\}$, tal que $\{u, v\}\overline{g} = u$ y $\{u, v\}\overline{f} = v$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
Y \arrow[r, "\overline{g}"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & P\{f,g\} \arrow[dr, dotted, "\{u,v\}"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

De la definición se deduce fácilmente que si existe el push out de f y g, éste es único salvo isomorfismo. A los morfismos $\overline{f}$ y $\overline{g}$ se les llamará *morfismos inducidos* y en diversas ocasiones, para evitar confusión, se denotará a algunos de éstos mediante símbolos similares tales como $\overline{\overline{f}}$, $\widetilde{f}$, $\widehat{f}$, etcétera. Dado un morfismo $u = \{u_0, u_1\} : P\{f, g\} \longrightarrow X$, puede ocurrir que exista un morfismo de la forma $\{u, w\} = \{\{u_0, u_1\}, w\}$. En caso de que no haya posibilidad de confusión con los push outs usados, se empleará la notación $\{u_0, u_1, w\}$ y así podrán aparecer morfismos del tipo $\{h_0, h_1, ..., h_n\}$.

Dados dos objetos A y B de una categoría $\mathcal{C}$, el *coproducto de A y B* consiste en un objeto, $A \sqcup B$, junto con dos morfismos $j_0 : A \longrightarrow A \sqcup B$ y $j_1 : B \longrightarrow A \sqcup B$, tales que, para cualquier otro objeto X y morfismos $f : A \longrightarrow X$ y $g : B \longrightarrow X$, existe un único morfismo, $\{f, g\} : A \sqcup B \longrightarrow X$, tal que $\{f, g\}j_0 = f$ y $\{f, g\}j_1 = g$. Obsérvese, que al igual que en el push out, de la definición se deduce que si existe el coproducto, éste es único salvo isomorfismo. Los coproductos pueden verse como push outs cuando la categoría tiene objeto inicial. Un *objeto inicial* en una categoría es un objeto, denotado por $\emptyset$, tal que para cualquier objeto X existe un único morfismo $\emptyset_X : \emptyset \longrightarrow X$, llamado *morfismo inicial*. Cuando la categoría $\mathcal{C}$ posee objeto inicial, es obvio que existe el coproducto de A y B si, y sólo si, existe el push out de los morfismos iniciales $\emptyset_A$ y $\emptyset_B$:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, "\emptyset_B"] \arrow[d, "\emptyset_A"'] & B \arrow[d, "\overline{\emptyset_A}=j_1"] \\
A \arrow[r, "\overline{\emptyset_B}=j_0"'] & A \sqcup B
\end{tikzcd}$$

También existe la noción de *objeto final*, que no es más que un objeto, $*$, tal que para cualquier objeto X, existe un único morfismo, $X \longrightarrow *$. Un *objeto cero*, 0, es un objeto que es inicial y final.

Se introduce ahora la notación que se usará para un tipo especial de morfismos entre push outs. Dado un diagrama conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\gamma"] & & Z \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[dd, "\beta"] \\
Y \arrow[rr, "\overline{g}"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & P\{f,g\} & \\
& X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, "f'"] & & Z' \arrow[dl, "\overline{f'}"] \\
Y' \arrow[rr, "\overline{g'}"] & & P\{f',g'\} &
\end{tikzcd}$$

donde las caras superior e inferior son push outs, se tiene que $\overline{g'}\alpha f = \overline{f'}\beta g$, por lo que, por la propiedad universal de push out, existe el morfismo $\{\overline{g'}\alpha, \overline{f'}\beta\} : P\{f,g\} \longrightarrow P\{f',g'\}$, haciendo el prisma totalmente conmutativo. Este morfismo se denotará por $\alpha \cup_\gamma \beta$ y si no hay posibilidad de error, simplemente por $\alpha \cup \beta$. De modo similar a lo ya comentado, se empleará la notación $\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup ... \cup \alpha_n$ suponiendo conocidos los push outs y por ello sin hacer uso de los paréntesis correspondientes. En el caso particular de que los push outs que intervengan en la construcción anterior sean coproductos, se usará la notación $\sqcup$ en lugar de $\cup$.

A continuación se dan algunas propiedades relativas a push outs que serán útiles a lo largo de esta memoria. Se presentan sus enunciados sin demostración pues éstas se deducen directamente de la propiedad de push out.

- Si $\alpha \cup \beta : P\{f,g\} \longrightarrow P\{f',g'\}$ y $\alpha' \cup \beta' : P\{f',g'\} \longrightarrow P\{f'',g''\}$, entonces $(\alpha' \cup \beta')(\alpha \cup \beta) = (\alpha'\alpha \cup \beta'\beta) : P\{f,g\} \longrightarrow P\{f'',g''\}$.

- Dados los morfismos $w : Q \longrightarrow R$ y $\{u,v\} : P\{f,g\} \longrightarrow Q$, entonces $w\{u,v\} = \{wu, wv\} : P\{f,g\} \longrightarrow R$

- $\{u,v\}(\alpha \cup \beta) = \{u\alpha, v\beta\} : P\{f,g\} \longrightarrow Q$, para morfismos $\alpha \cup \beta : P\{f,g\} \longrightarrow P\{f',g'\}$ y $\{u,v\} : P\{f',g'\} \longrightarrow Q$.

- Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & U \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "\overline{g}"] & P\{f,g\} \arrow[r, "v"] & V \end{tikzcd}$$

  entonces $V = P\{\overline{f}, u\}$ si, y sólo si, $V = P\{f, ug\}$.

Con esto concluyen los preliminares categóricos. Conforme vaya avanzando el trabajo, se irá incorporando nueva terminología y notación acorde con el contenido de cada tema.

Capítulo 1

Categorías de Cofibraciones

En este primer capítulo se describe el marco de referencia básico sobre el cual se trabajará y se introducen nuevos conceptos matemáticos que permitirán el desarrollo de este documento. Se darán unas primeras definiciones elementales y se mostrarán algunas herramientas y propiedades que serán de gran utilidad en demostraciones posteriores.

En primera instancia, se recuerda la noción de categoría de cofibraciones, definida por H. J. Baues para, a continuación, introducir las definiciones de cilindro de un objeto cofibrante y de cilindro de un morfismo, conceptos cruciales en esta memoria. A partir de ellas, se presentará la idea intuitiva de *casi-funtor*, noción más general a la de funtor clásico aunque con ciertas similitudes. Se finaliza el capítulo demostrando algunas propiedades que posee este casi-funtor, estudiando su parecido con las que verifica un funtor propiamente dicho.

1.1 Categorías de cofibraciones. Ejemplos.

A continuación se introduce el concepto de categoría de cofibraciones dado por H.J. Baues el cual supone la base sobre la cual se hará todo el desarrollo posterior. La categoría **Top** es un ejemplo típico de categoría de cofibraciones. De hecho, la axiomatización que aquí se presenta tiene como base el estudio de esta categoría.

Definición 1.1.1. Una *categoría de cofibraciones* $(\mathcal{C}, cof, we)$ consiste en una categoría $\mathcal{C}$ junto con dos clases distinguidas de morfismos, denominadas cofibraciones (*cof*) y equivalencias débiles (*we*) que verifican los axiomas CF1, CF2, CF3 y CF4:

Antes de establecer estos axiomas se deben hacer una serie de aclaraciones. Las cofibraciones se denotarán por "$\rightarrowtail$" y las equivalencias débiles mediante "$\xrightarrow{\sim}$". Un morfismo en $\mathcal{C}$ que sea a la vez cofibración y equivalencia débil se dirá que es *cofibración trivial*, y se representará por "$\overset{\sim}{\rightarrowtail}$". Además, un objeto X de $\mathcal{C}$ se dirá que es *fibrante* si cada cofibración trivial admite una retracción, esto es, dada $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Y$ cofibración trivial, existe $r : Y \longrightarrow X$ tal que $ri = 1$.

- **CF1:** *Axioma de composición*
  - La composición de cofibraciones es cofibración.
  - Los isomorfismos son cofibraciones triviales.
  - Dados $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, morfismos en $\mathcal{C}$, si dos cualesquiera de f, g y gf son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero.
- **CF2:** *Axioma de push-out*

  Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y todo morfismo $f : B \longrightarrow X$, existe el push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & P\{i, f\} \end{tikzcd}$$

  donde $\bar{i}$ es una cofibración. Además, si f es equivalencia débil, también lo es $\bar{f}$. A este tipo de push out se le denominará *push out cofibrado.*
- **CF3:** *Axioma de factorización*

  Todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ admite una factorización mediante una cofibración $j : X \rightarrowtail Z$ y una equivalencia débil $q : Z \xrightarrow{\sim} Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, bend right, "j"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, bend right, "q"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

Una factorización de este tipo se representará por (j, Z, q).

- **CF4:** *Axioma de modelo fibrante*

  Para todo objeto X de $\mathcal{C}$ existe una cofibración trivial $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$, donde RX es un objeto fibrante en $\mathcal{C}$. A $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ se le denominará *modelo fibrante* de X.

Ejemplos de categorías de cofibraciones:

En este apartado se dan algunos ejemplos topológicos y algebraicos de categorías de cofibraciones. La principal fuente de ejemplos la suponen las categorías con cilindro natural:

1. Una *categoría con cilindro natural (I-categoría)* es una categoría dotada de un objeto inicial, $\emptyset$, un funtor $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, llamado funtor cilindro, transformaciones naturales $\imath_0, \imath_1 : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow I$ y $\rho : I \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, junto con una clase distinguida de morfismos, denominados cofibraciones, verificando los siguientes axiomas:

   (I1) Axioma de cilindro: $\rho\imath_\varepsilon = 1$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

   (I2) Axioma de push out: Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $f : B \longrightarrow X$, existe su push out, $P\{i, f\}$, donde la inducida de i, $\bar{i}$, es también cofibración. Además, el funtor cilindro conserva este tipo de push out ($I(P\{i, f\}) = P\{Ii, If\}$) y el objeto inicial ($I\emptyset = \emptyset$).

   (I3) Axioma de cofibración:

   - Para todo objeto X, su morfismo inicial, $\emptyset \longrightarrow X$, es cofibración.
   - La composición de cofibraciones es cofibración.
   - Toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ verifica la propiedad de extensión de homotopía (P.E.H.):

Dado $\varepsilon \in \{0,1\}$, y un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\imath_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "i"'] & IB \arrow[d, "H"] \arrow[ddr, bend left, "Ii"] & \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\imath_\varepsilon"'] & X & \\
& & IA \arrow[ul, dotted, "E_\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $E_\varepsilon : IA \longrightarrow X$ tal que $E_\varepsilon(Ii) = H$ y $E_\varepsilon \imath_\varepsilon = f$.

(I4) Axioma de cilindro relativo: Dado una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo $i^1 = \{Ii, \{\imath_0, \imath_1\}\} : P\{\{\imath_0, \imath_1\}, i \sqcup i\} \longrightarrow IA$ es cofibración.

(I5) Axioma de intercambio: Existe una transformación $T : II \longrightarrow II$, verificando $T(\imath_\varepsilon I) = I\imath_\varepsilon$ y $T(I\imath_\varepsilon) = \imath_\varepsilon I$, para $\varepsilon \in \{0,1\}$. A T se le denomina *transformación de intercambio.*

Toda categoría con cilindro natural es una categoría de cofibraciones donde las cofibraciones son las ya existentes en esta categoría y las equivalencias débiles son las equivalencias de homotopía. Todos los objetos son fibrantes y cofibrantes. Un estudio más detallado de esta categoría puede verse en [2].

2. La categoría **Top** de espacios topológicos y aplicaciones continuas es una categoría con cilindro natural. El funtor cilindro se define como $IX = X \times [0,1]$ y $If = f \times 1_{[0,1]}$; las transformaciones naturales como $\imath_\varepsilon(x) = (x, \varepsilon)$ para $\varepsilon \in \{0,1\}$ y $\rho(x,t) = x$; además la transformación de intercambio viene dada por $T(x,t,s) = (x,s,t)$. Finalmente, las cofibraciones son aquellas que verifican la propiedad de extensión de homotopía.

3. La categoría **Top**(u). Se trata de una generalización del caso anterior. Fijada una aplicación continua $u : C \longrightarrow D$, se define la categoría de objetos bajo C y sobre D, **Top**(u), como aquella cuyos objetos son

ternas $(X, \check{x}, \hat{x})$ que forman un triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\check{x}"'] & & D \\ & X \arrow[ur, "\hat{x}"'] & \end{tikzcd}$$

Un morfismo $f : (X, \check{x}, \hat{x}) \longrightarrow (Y, \check{y}, \hat{y})$ es una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f\check{x} = \check{y}$ e $\hat{y}f = \hat{x}$. Esta categoría tiene como objeto inicial a $(C, 1_C, u)$. Por otro lado, los push outs se toman como los inducidos en **Top**. Se define el cilindro de un objeto $(X, \check{x}, \hat{x})$ mediante el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} C \times I \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\check{x}\times 1"'] & C \arrow[d, "\check{z}"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\ X \times I \arrow[r, "\overline{\rho}"'] \arrow[drr, bend right, "\hat{x}\rho"'] & Z \arrow[dr, dotted, "\hat{z}"] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

Las transformaciones naturales $\imath_\varepsilon$ y ρ son las que se inducen de manera evidente a partir de las de **Top**. Entonces, esta categoría es de cilindro natural, donde las cofibraciones son aquellos morfismos que verifican la P.E.H.. Como casos particulares, si $u = \{*\} \longrightarrow \{*\}$, se obtiene la categoría de espacios topológicos punteados; si $u = C \longrightarrow \{*\}$, la de espacios topológicos bajo C y si $u = \emptyset \longrightarrow D$ la de espacios topológicos sobre D.

Existen muchas más categorías con cilindro natural como las de R-módulos, grupos topológicos abelianos y Hausdorff, espacios vectoriales topológicos, complejos de cadenas sobre una categoría abeliana, etc (veáse [2] y [6]). Los siguientes ejemplos no son categorías con cilindro natural:

5. Existe otra estructura de categoría de cofibraciones para **Top**. Consideremos ahora como cofibraciones las inclusiones $A \hookrightarrow X$ donde el par (X, A) es un CW-complejo relativo, esto es, existe una sucesión de inclusiones:

$$A = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset ... \subset X^n \subset ... \subset X = \cup_{n \geq -1} X^n$$

donde X tiene la topología débil respecto de $\{X_n\}_{n\geq -1}$. Además, X^n se obtiene de X^{n-1} a partir de un push out de la forma:

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\alpha\in A_n} S_\alpha^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod\limits_{\alpha\in A_n} D_\alpha^n \arrow[r] & X^n \end{tikzcd}$$

Por convención, se establece $S^{-1} = \emptyset$. Las equivalencias débiles son las equivalencias de homotopía débiles, esto es, las aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ que inducen isomorfismos, $f_* : \pi_k(X,x) \xrightarrow{\cong} \pi_k(Y, f(x))$ en los grupos de homotopía, para todo $k \geq 0$ y $x \in X$. Con esta estructura, los objetos cofibrantes son los CW-espacios, es decir, los espacios que son homotópicamente equivalentes a algún CW-complejo.

6. Se considera la categoría $\mathbf{Top}^*$ de espacios topológicos punteados con las aplicaciones continuas que conservan los puntos base. Esta categoría es de cofibraciones, donde las cofibraciones y las equivalencias débiles son aquellos morfismos que son cofibraciones y equivalencias de homotopía en **Top**, respectivamente. Todos los objetos son fibrantes, pero los objetos cofibrantes son los espacios bien punteados, es decir, aquellos en los que $(\{*\},*) \longrightarrow (X, x_0)$ es una cofibración en **Top**.

1. Sea R un anillo, se considera $\mathbf{Chain}_R^+$ la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas (de R-módulos) acotados inferiormente. Estos son complejos de cadenas V, tales que existe un $N \in \mathbb{Z}$ con $V_n = 0$, para todo $n < N$. Los morfismos son los homomorfismos usuales entre estos objetos. Esta categoría es de cofibraciones considerando como cofibraciones los monomorfismos cuyo conúcleo es proyectivo (es decir, en cada dimensión se tiene un R-módulo proyectivo) y las equivalencias de débiles son aquellos morfismos que inducen isomorfismos en homología. En esta categoría, todos los objetos son fibrantes y los objetos cofibrantes son los complejos de cadenas V, con V_n proyectivo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota 1.1.2. En el desarrollo de esta memoria se asumirá que la categoría de cofibraciones tiene objeto inicial. En este caso, se dirá que un objeto A es *cofibrante* si el morfismo inicial $\emptyset_A : \emptyset \longrightarrow A$ es una cofibración.

Los axiomas de una categoría de cofibraciones establecen las condiciones mínimas a partir de las cuales se desarrollará toda nuestra teoría. Los siguientes resultados serán de gran importancia a la hora de obtener extensiones de ciertos morfismos.

Proposición 1.1.3. *La inducida de una cofibración trivial en un push out es cofibración trivial.*

Demostración. Dados $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ una cofibración trivial y $f : B \longrightarrow X$ un morfismo, el push out de ambas flechas existe por CF2. Por el axioma CF3, sea (j, Z, q) una factorización del morfismo f. Dado que j es cofibración, se puede formar el push out de j con i en el que la inducida de i es cofibración trivial por CF2. De este modo, se obtiene el siguiente diagrama totalmente conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrrr, "f"] \arrow[drr, tail, "j"'] \arrow[dd, tail, "i"', "\wr"] & & & & X \arrow[dd, tail, "\wr"', "\overline{i}"] \\
& & Z \arrow[urr, "\sim", "q"'] \arrow[dd, tail, "\wr"', "\widetilde{i}"] & & \\
A \arrow[rrrr, "\overline{f}"] \arrow[drr, tail, "\overline{j}"'] & & & & P\{i,f\} \\
& & P\{i,j\} \arrow[urr, "\sim", "\{\overline{f},\overline{i}q\}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Aplicando los resultados expuestos en el capítulo preliminar se obtiene que la cara lateral derecha del diagrama anterior es un push out, luego $\{\overline{f}, \overline{i}q\}$ es equivalencia débil por CF2. Así, como $\{\overline{i}q, \overline{f}\}\widetilde{i} = \overline{i}q$, por CF1, $\overline{i}$ es equivalencia débil y consecuentemente, cofibración trivial. $\square$

Proposición 1.1.4. *Dada una cofibración trivial, todo morfismo con el mismo dominio que ésta y codominio fibrante tiene una extensión relativa a dicha cofibración trivial.*

Demostración. Sea $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ una cofibración trivial y $f : B \longrightarrow X$ un morfismo, con X fibrante. Por el axioma CF2, existe el push out de i con f.

Por ser X fibrante, $\bar{i}$ tiene una retracción, $r : P\{i, f\} \longrightarrow X$ tal que $r\bar{i} = 1$. Tenemos entonces:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \\ A \arrow[ur, bend right, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

siendo $\widetilde{f} = r\overline{f}$. □

En una categoría de cofibraciones es importante saber cuando un morfismo es una cofibración o una equivalencia débil. La siguiente proposición presenta unas condiciones suficientes que aseguran cuándo un morfismo entre push outs es cofibración.

Proposición 1.1.5. *Sea el diagrama conmutativo:*

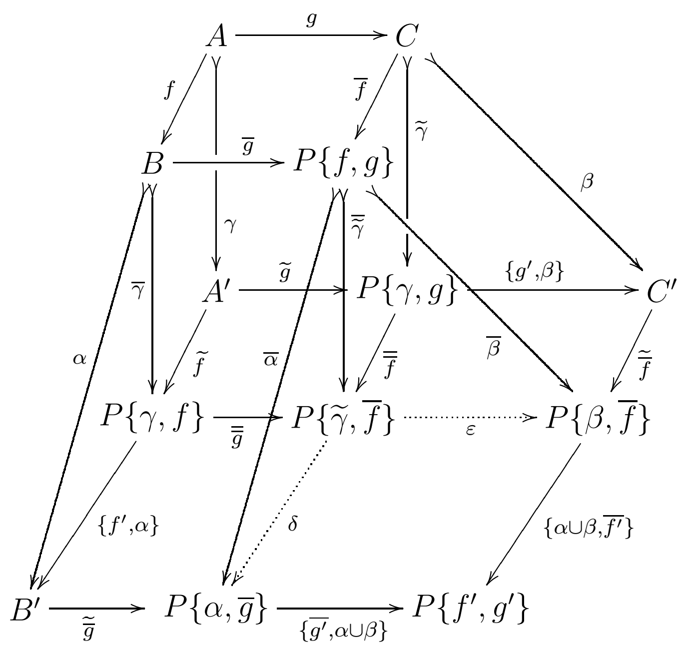
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, tail, "\alpha"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "\gamma"'] & C \arrow[d, tail, "\beta"] \\ B' & A' \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

donde existe el push out de f y g y el de f' con g'. Además, α, γ y β son cofibraciones y $\{f', \alpha\} : P\{\gamma, f\} \longrightarrow B'$ es cofibración o $\{g', \beta\} : P\{\gamma, g\} \longrightarrow C'$ es cofibración. Entonces $\alpha \cup \beta : P\{f, g\} \longrightarrow P\{f', g'\}$ es cofibración.

Demostración. Dado que γ es cofibración y que existe el push out de f y g, se puede formar el cubo conmutativo en el que todas las caras son push outs:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, tail, "\gamma"] & & C \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[dd, tail, "\widetilde{\gamma}"] \\ B \arrow[rr, "\overline{g}"] \arrow[dd, tail, "\overline{\gamma}"'] & & P\{f,g\} \arrow[dd, tail, "\overline{\overline{\gamma}}"] & \\ & A' \arrow[rr, "\widetilde{g}"] \arrow[dl, "\widetilde{f}"] & & P\{\gamma, g\} \arrow[dl, "\overline{\overline{f}}"] \\ P\{\gamma, f\} \arrow[rr, "\overline{\overline{g}}"] & & P\{\widetilde{\gamma}, \overline{f}\} & \end{tikzcd}$$

Ahora se construyen los push outs de α con $\overline{g}$ y de β con $\overline{f}$ que serán mostrados en forma de rampa. Debajo de cada rampa se formará un cuadrado conmutativo que es push out por serlo el lateral del cubo y la rampa correspondiente.



El cuadrado exterior de la parte inferior es push out por hipótesis y está compuesto por cuatro subcuadrados que son push outs. En el caso de que $\{f', \alpha\}$ sea cofibración, δ y $\{\alpha \cup \beta, \overline{f'}\}$ también lo son por ser inducidas de una cofibración en un push out. Por tanto, $\alpha \cup \beta = \{\alpha \cup \beta, \overline{f'}\}\overline{\beta}$ es cofibración. El razonamiento es análogo si $\{g', \beta\}$ es cofibración. $\square$

Nota 1.1.6. Como consecuencia de la proposición anterior se deduce que si γ es la identidad y tenemos push out cofibrados en las filas, también se tiene que $\alpha \cup \beta : P\{f, g\} \longrightarrow P\{f', g'\}$ es cofibración.

A continuación se verá un resultado análogo para equivalencias débiles. Para ello, se probará un lema previo.

Lema 1.1.7. *Dado el diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & A \arrow[l, tail, "f"'] \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & C \arrow[d, "\beta", "\wr"'] \\
B' & A' \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

donde f' o g' es cofibración, entonces $\alpha \cup \beta : P\{f, g\} \longrightarrow P\{f', g'\}$ es equivalencia débil.

Demostración. La prueba sigue los mismos pasos que la demostración de la proposición anterior, aunque éstos se justifican de manera diferente. Se puede construir el siguiente diagrama conmutativo en el que todos los cuadrados son push outs:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[rr, tail, "g"] \arrow[dl, tail, "f"'] \arrow[dd, "\gamma", "\wr"'] & & C \arrow[dl, tail, "\overline{f}"'] \arrow[dd, "\widetilde{\gamma}", "\wr"'] \arrow[ddrr, "\beta", "\wr"'] & & \\
 & B \arrow[rr, tail, "\overline{g}"] \arrow[dd, "\overline{\gamma}"', "\wr"] \arrow[dddl, "\alpha"', "\wr"] & & P\{f,g\} \arrow[dd, "\overline{\overline{\gamma}}", "\wr"'] \arrow[dddl, "\overline{\alpha}"', "\wr"] \arrow[ddrr, "\overline{\beta}"', "\wr"] & & & \\
 & & A' \arrow[rr, tail, "\widetilde{g}"] \arrow[dl, tail, "\widetilde{f}"] & & P\{\gamma,g\} \arrow[rr, "\{g',\beta\}"] \arrow[dl, tail, "\overline{\overline{f}}"] & & C' \arrow[dl, tail, "\widetilde{\overline{f}}"] \\
 & P\{\gamma,f\} \arrow[rr, tail, "\overline{\overline{g}}"'] \arrow[dl, "\{f',\alpha\}"] & & P\{\widetilde{\gamma},\overline{f}\} \arrow[rr, dotted, "\varepsilon"'] \arrow[dl, dotted, "\delta"] & & P\{\beta,\overline{f}\} \arrow[dl, "\mu"] & \\
B' \arrow[rr, tail, "\overline{\widetilde{g}}"'] & & P\{\alpha,\overline{g}\} \arrow[rr, "\lambda"'] & & P\{f',g'\} & &
\end{tikzcd}$$

El cuadrado exterior de la parte inferior del diagrama es el push out de f' con g' y por eso se ha denotado así al objeto push out. Tanto δ como ε son equivalencias débiles por el axioma de composición . Por ser las inducidas de equivalencias débiles en un push out cofibrado, μ y λ también son equivalencias débiles. Por tanto, $\alpha \cup \beta$ es equivalencia débil. □

Proposición 1.1.8. *Dado el diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & C \arrow[d, "\beta", "\wr"'] \\
B' & A' \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

verificando que al menos en cada fila uno de los morfismos es cofibración. Entonces, $\alpha \cup \beta : P\{f,g\} \longrightarrow P\{f',g'\}$ *es equivalencia débil.*

Demostración. Se supondrá sin pérdida de generalidad que f es cofibración. Tomando (j, Z, q) una factorización de g, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & A \arrow[l, tail, "f"'] \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & Z \arrow[d, "\wr"', "\beta q"] \\
B' & A' \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, tail, "1"', "\wr"] & A \arrow[l, tail, "f"'] \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, tail, "1"', "\wr"] & Z \arrow[d, "\wr"', "q"] \\
B & A \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Aplicando el lema anterior a cada uno de los diagramas, se obtiene que, $\alpha \cup (\beta q) : P\{f, j\} \xrightarrow{\sim} P\{f', g'\}$ y $1 \cup q : P\{f, j\} \xrightarrow{\sim} P\{f, g\}$ son equivalencias débiles. Dado que $(\alpha \cup \beta)(1 \cup q) = \alpha \cup (\beta q)$ se concluye directamente que $\alpha \cup \beta$ es equivalencia débil, en virtud del axioma de composición. $\square$

Nota 1.1.9. La hipótesis de que haya al menos una cofibración en cada fila no se puede suprimir. Para ilustrar esto, considérese la categoría de cofibraciones **Top** con la estructura inducida por la de cilindro natural y el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[d, tail, "1"', "\wr"] & S^1 \arrow[l, tail] \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "1"', "\wr"] & D^2 \arrow[d, "\wr"', "\psi"] \\
* & S^1 \arrow[l] \arrow[r] & *
\end{tikzcd}
$$

Obsérvese que en la fila inferior del diagrama no hay ninguna cofibración. Dado que el push out de la fila superior es S^2 y que el de la fila inferior es un espacio unipuntual, suponer que la proposición anterior es aplicable aquí conllevaría a decir que la esfera es contráctil, lo cual es imposible.

1.2 Cilindros en categorías de cofibraciones.

En esta sección se darán las nociones de cilindro de un objeto cofibrante y de cilindro de un morfismo entre objetos cofibrantes. Dichas definiciones se obtienen tras un proceso constructivo y serán conceptos fundamentales en la obtención de la homotopía.

Definición 1.2.1 (Cilindro de un objeto cofibrante). Sea A un objeto cofibrante de una categoría de cofibraciones $\mathcal{C}$. Un *cilindro de A* es una factorización del tipo:

$$
\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[rr, "\{1{,}1\}"] \arrow[dr, tail, bend right, "\{\imath_0{,}\imath_1\}"'] & & A \\
& ZA \arrow[ur, bend right, "\rho"', "\sim"] &
\end{tikzcd}
$$

del morfismo $\{1,1\} : A \sqcup A \longrightarrow A$. Un cilindro de A de este tipo se representará por la terna $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$.

Obsérvese que todo objeto cofibrante tiene al menos un cilindro y que además éste no tiene por qué ser único, pues para cada factorización, se obtiene un nuevo cilindro. Además, $\imath_\varepsilon = \{\imath_0, \imath_1\} j_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, luego $\imath_\varepsilon$ es cofibración por ser composición de cofibraciones. También es equivalencia débil pues $\rho\imath_\varepsilon = 1$, luego $\imath_\varepsilon$ es cofibración trivial para $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Cabe notar también que ZA vuelve a ser un objeto cofibrante, por lo que se puede hablar nuevamente de su cilindro. En este caso, para simplificar notación, se escribirá Z^2A para referirse a un cilindro de ZA. De forma inductiva, Z^nA designará un cilindro de $Z^{n-1}A$, $n \geq 1$ (por convención, $Z^0A = A$). Por otro lado, en ocasiones se usará la notación $(\imath_\varepsilon)_A$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ y ρ_A para indicar que dichos morfismos están asociados al objeto A.

La siguiente propiedad es la herramienta fundamental que permitirá justificar la creación de homotopías y su independencia con respecto a los cilindros considerados.

Proposición 1.2.2. *Dado el cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j"] \arrow[d, tail, "i"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

existe un objeto E y morfismos α, α' y β de tal forma que el siguiente diagrama es totalmente conmutativo, con α cofibración y β equivalencia débil.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "j"] \arrow[dd, tail, "i"'] & & C \arrow[dl, tail, "\alpha"] \arrow[dd, "f"] \\ & E \arrow[dr, "\beta"', "\sim"] & \\ A \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[rr, "g"'] & & D \end{tikzcd}$$

Además:

- *Si f es equivalencia débil, α es cofibración trivial.*

- *Si g es equivalencia débil, α' es equivalencia débil.*

- *Si j es cofibración, α' es cofibración.*

Demostración. Se considera el push out de i con j y una factorización de $\{g, f\}$ mediante un objeto E, resultando un diagrama conmutativo como el que sigue:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr, tail, "j"] \arrow[dddd, tail, "i"'] & & & C \arrow[dll, tail, "\bar{\imath}"] \arrow[dddd, "f"] \\
& P\{i,j\} \arrow[drr, tail, "k"] & & \\
& & & \\
& & & E \arrow[d, "\beta", "\sim"'] \\
A \arrow[uuur, "\bar{\jmath}"] \arrow[rrr, "g"] & & & D
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha = k\bar{\imath}$ que es cofibración y $\alpha' := k\bar{\jmath}$. El resto de comprobaciones son inmediatas. $\square$

Como una primera consecuencia de esta proposición y que posteriormente servirá para demostrar la unicidad de la homotopía se tiene:

Proposición 1.2.3. *La clase de todos los cilindros de A tiene estructura de conjunto dirigido con la siguiente relación de orden: $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho) \leq (\{\imath'_0, \imath'_1\}, Z'A, \rho')$ si, y sólo si, existe una cofibración $\alpha : ZA \rightarrowtail Z'A$ que hace los siguientes diagramas conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
& A \sqcup A \arrow[dl, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] \arrow[dr, tail, "\{\imath'_0,\imath'_1\}"] & \\
ZA \arrow[rr, tail, "\alpha"] & & Z'A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
ZA \arrow[rr, tail, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho"', "\sim"] & & Z'A \arrow[dl, "\rho'", "\sim"'] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Demostración. La propiedad reflexiva se demuestra de directamente tomando $\alpha = 1_{ZA}$. La propiedad transitiva es inmediata. Para la existencia de una cota superior se consideran dos cilindros cualesquiera de A, $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$ y $(\{\imath'_0, \imath'_1\}, Z'A, \rho')$. Aplicando el lema anterior, resulta un nuevo cilindro de A:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[rr, tail, "\{\imath'_0 \imath'_1\}"] \arrow[dr, dotted, "\{\imath''_0,\imath''_1\}"] \arrow[dd, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & & Z'A \arrow[dl, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "\rho'", "\wr"'] \\
& Z''A \arrow[dr, "\rho''"', "\sim"] & \\
ZA \arrow[ur, "\alpha'"', "\sim"] \arrow[rr, "\rho"', "\sim"] & & A
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta los cuatro triángulos que componen el cuadrado, se deduce directamente que $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho) \leq (\{\imath''_0, \imath''_1\}, Z''A, \rho'')$ y $(\{\imath'_0, \imath'_1\}, Z'A, \rho') \leq (\{\imath''_0, \imath''_1\}, Z''A, \rho'')$. $\square$

Para acabar esta sección, se introduce un nuevo concepto relacionado con ciertos morfismos en una categoría de cofibraciones. Dado un morfismo entre objetos cofibrantes, se definirá un morfismo entre los cilindros de estos dos objetos. El razonamiento es el siguiente:

Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo entre objetos cofibrantes y $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$ un cilindro de A. Se puede formar el push out de $\{\imath_0, \imath_1\}$ con $f \sqcup f$ (el objeto push out se denotará por Z^1_f) y considerar una factorización del morfismo push out $\{f\rho, 1, 1\}$ mediante una cofibración y una equivalencia débil. Dicha factorización permite definir un cilindro de B de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, "f \sqcup f"] \arrow[d, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & B \sqcup B \arrow[d, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] \arrow[ddr, bend left, "\{1,1\}"] & \\
ZA \arrow[r, "\overline{f \sqcup f}"'] \arrow[drr, bend right, "f\rho"'] & Z^1_f \arrow[d, tail, "f^1"'] \arrow[dr, dotted, "\{f\rho,1,1\}"] & \\
& ZB \arrow[r, "\rho'", "\sim"'] & B
\end{tikzcd}$$

Estableciendo $\{\imath'_0, \imath'_1\} := f^1\overline{\{\imath_0, \imath_1\}}$, se prueba directamente que $(\{\imath'_0, \imath'_1\}, ZB, \rho')$ es un cilindro de B.

Definición 1.2.4. Considerando el razonamiento anterior, se define *cilindro de f* y se denota por Zf a $Zf := f^1\overline{(f \sqcup f)}$

Como se ha visto en el desarrollo anterior, siempre existe un cilindro para un morfismo entre objetos cofibrantes, aunque éste no tiene por qué ser único. Obsérvese que el axioma de factorización se emplea en dos situaciones: en primer lugar, en la elección del cilindro de A considerado y en segunda instancia, en la obtención del cilindro de B. Como consecuencia de esta multiplicidad de cilindros, la construcción anterior no es funtorial.

En este punto es importante aclarar que, de ahora en adelante, cuando se considere un cilindro determinado de un morfismo f, entre objetos cofibrantes A y B, se supondrá que se ha fijado un cilindro de A y que se ha construido un cilindro de B de la forma anteriormente descrita.

Por otro lado, puesto que $Zf : ZA \longrightarrow ZB$ es de nuevo un morfismo entre objetos cofibrantes, se puede hablar de su cilindro. En este caso, para simplificar notación, se escribirá Z^2f para referirse a un cilindro de Zf. De forma inductiva, Z^nf designará un cilindro de $Z^{n-1}f$, $n \geq 1$, (por convención $Z^0f = f$). Del mismo modo, se denotará por $Z^2_f := Z^1_{f^1} = P\{\{\imath_0, \imath_1\}, f^1 \sqcup f^1\}$ y de manera genérica $Z^n_f := Z^1_{f^{n-1}}$, $n \geq 1$, (se acuerda tomar $f^0 = f$).

Nota 1.2.5. Las condiciones expuestas en la proposición 1.2.3 para que $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho) \leq (\{\imath'_0, \imath'_1\}, Z'A, \rho')$ son equivalentes a que exista un $Z1 : ZA \longrightarrow Z'A$.

1.3 El casi - funtor cilindro. Propiedades.

Como ya se ha dicho, la construcción cilindro no es funtorial. Sin embargo, los cilindros de un morfismo dado poseen propiedades que recuerdan, en gran medida, a las que verifica un funtor. Un concepto generalizado en teoría de categorías de esta noción de cilindro es la que denominaremos *casi-funtor*.

Un rasgo característico de todo funtor es su buen comportamiento respecto al morfismo identidad y a la composición de morfismos. En los siguientes resultados se expone que es lo que sucede al respecto con la definición de cilindro que se ha dado.

Proposición 1.3.1. *Dado A un objeto cofibrante y $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$, un cilindro de A, se tiene que $1_{ZA} : ZA \longrightarrow ZA$ es un cilindro de 1_A.*

Demostración. Se prueba de manera inmediata que $1_A \sqcup 1_A = 1_{A \sqcup A}$. Teniendo en cuenta que la inducida de la identidad en un push out es la identidad (salvo isomorfismo) y tomando como factorización de ρ a $(1_{ZA}, ZA, \rho)$, se concluye la tesis. □

Proposición 1.3.2. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ morfismos entre objetos cofibrantes. Dados Zf y Zg, cilindros de f y g componibles, se tiene que $(Zg)(Zf)$ es un cilindro de gf.*

Demostración. Se considera el siguiente diagrama cuya construcción se explica a continuación:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, "f \sqcup f"] \arrow[d, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & B \sqcup B \arrow[r, "g \sqcup g"] \arrow[d, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] & C \sqcup C \arrow[d, tail, "\overline{\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}}"] & \\
ZA \arrow[r, "\overline{f \sqcup f}"'] & Z^1_f \arrow[r, "\overline{g \sqcup g}"'] \arrow[d, tail, "f^1"'] & Z^1_{gf} \arrow[d, tail, "\overline{f^1}"] & \\
& ZB \arrow[r, "\overline{\overline{g \sqcup g}}"'] & Z^1_g \arrow[d, tail, "g^1"'] \arrow[dr, "\{g\rho',1,1\}"] & \\
& & ZC \arrow[r, "\sim", "\rho''"'] & C
\end{tikzcd}$$

En primer lugar se forma el push out de $\{\imath_0, \imath_1\}$ con $f \sqcup f$ y luego el de $\overline{\{\imath_0, \imath_1\}}$ con $g \sqcup g$. Nótese que el objeto push out obtenido es precisamente Z_{gf} (ver preliminares). Seguidamente se forma el push de f^1 con $\overline{g \sqcup g}$ y se obtiene el objeto Z^1_g. Se considera ahora una factorización de $\{g\rho', 1, 1\}$ de la forma (g^1, ZC, ρ''), resultando que la composición $g^1\overline{\overline{g \sqcup g}}$ es un cilindro de g. Se define $(gf)^1 = g^1\overline{f^1}$, que es válida pues $\rho'' g^1 \overline{f^1} = \{gf\rho, 1, 1\}$. Además: $ZgZf = g^1\overline{\overline{(g \sqcup g)}}f^1\overline{(f \sqcup f)} = g^1\overline{f^1}\,\overline{(g \sqcup g)}\,\overline{(f \sqcup f)} = (gf)^1\overline{(gf \sqcup gf)} = Z(gf)$. □

Las transformaciones naturales clásicas existentes entre funtores ahora hay que reinterpretarlas desde este nuevo punto de vista. El resultado que se presenta ahora será utilizado muy frecuentemente a lo largo de esta memoria.

Proposición 1.3.3. *Dado f un morfismo entre objetos cofibrantes A y B, todo cilindro de f es natural respecto a ρ y $\imath_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Esto es, los si-*

guientes cuadrados son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
ZA \arrow[r, "Zf"] \arrow[d, "\rho"', "\wr"] & ZB \arrow[d, "\rho'", "\wr"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\imath_\varepsilon"', "\wr"] & B \arrow[d, tail, "\imath'_\varepsilon", "\wr"'] \\
ZA \arrow[r, "Zf"'] & ZB
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Considerando un cilindro de f cualquiera, se ve directamente que $\rho'(Zf) = f\rho$. Además $(Zf)\{\imath_0, \imath_1\} = f^1\overline{(f \sqcup f)}\{\imath_0, \imath_1\} = f^1\overline{\{\imath_0, \imath_1\}}(f \sqcup f) = \{\imath'_0, \imath'_1\}(f \sqcup f)$. Por tanto, $\{(Zf)\imath_0, (Zf)\imath_1\} = \{\imath'_0 f, \imath'_1 f\}$ y en consecuencia $Zf\imath_\varepsilon = \imath'_\varepsilon f$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ $\square$

Además, el casi-funtor cilindro creado verifica, bajo ciertas restricciones, la conservación de algunas construcciones categóricas como son los cuadrados conmutativos y los diagramas push outs.

Teorema 1.3.4. *Sea el siguiente cuadrado conmutativo de objetos cofibrantes:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "s"] & C
\end{tikzcd}
$$

Dados Zf y Zr, cilindros de f y r construidos a partir de un mismo cilindro de A, existen Zs y Zg, cilindros de s y de g, de forma que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
ZA \arrow[r, "Zf"] \arrow[d, "Zr"'] & ZB \arrow[d, "Zg"] \\
ZD \arrow[r, "Zs"] & ZC
\end{tikzcd}
$$

Demostración. A partir del diagrama que se tiene por hipótesis, se puede formar el correspondiente diagrama de los coproductos que sigue siendo conmutativo. Sea $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$ el cilindro de A considerado como dominio de Zf y Zr. Se considera el push out de $\{\imath_0, \imath_1\}$ con $f \sqcup f$ y el de sus inducidas con $g \sqcup g$ y $r \sqcup r$ resultando un diagrama en forma de cubo cuyas caras laterales son push outs. La base de este cubo se prolonga haciendo push out con r^1 y f^1, que ya han sido definidos, pues los cilindros de r y f están fijos. De este modo, siguiendo razonamientos análogos a los realizados en demostraciones anteriores se llega a un diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & A\sqcup A \arrow[rr, "f\sqcup f"] \arrow[dl, "r\sqcup r"'] \arrow[dd, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"] & & B\sqcup B \arrow[dl, "g\sqcup g"'] \arrow[dd, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] & & \\
 & D\sqcup D \arrow[rr, "s\sqcup s"] \arrow[dd, tail, "\widetilde{\{\imath_0,\imath_1\}}"'] & & C\sqcup C \arrow[dd, tail, "\overline{\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}}"] & & & \\
 & & ZA \arrow[rr, "\overline{f\sqcup f}"'] \arrow[dl, "\overline{r\sqcup r}"] & & Z_f^1 \arrow[rr, tail, "f^1"] \arrow[dl, "\overline{g\sqcup g}"] & & ZB \arrow[dl, "\overline{\overline{g\sqcup g}}"] \\
 & Z_r^1 \arrow[rr, "\overline{s\sqcup s}"] \arrow[dddl, tail, "r^1"'] & & Q \arrow[rr, tail, "\overline{f^1}"] \arrow[dddll, tail, "\overline{r^1}"'] & & Z_g^1 \arrow[dl, "g^1"] \arrow[dddl, "\{g\rho,1,1\}"] & \\
 & & & & ZC \arrow[dd, "\rho", "\wr"'] & & \\
 & & Z'C \arrow[drr, "\rho'", "\sim"'] & & & & \\
ZD \arrow[r, "\overline{\overline{\overline{s\sqcup s}}}"] & Z_s^1 \arrow[ur, tail, "s^1"] \arrow[rrr, "\{s\rho,1,1\}"'] & & & C & &
\end{tikzcd}
$$

donde (g^1, ZC, ρ) y $(s^1, Z'C, \rho')$ son factorizaciones de $\{g\rho, 1, 1\}$ y $\{s\rho, 1, 1\}$, respectivamente. El objeto push out Q, es un Z^1_{gf} y un Z^1_{sr}. Aplicando el lema 1.2.2 se obtiene un cilindro de C del modo siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr, tail, "g^1\overline{f^1}"] \arrow[dd, tail, "s^1\overline{r^1}"'] & & ZC \arrow[dl, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "\rho", "\wr"'] \\
 & Z''C \arrow[dr, "\rho''"', "\sim"] & \\
Z'C \arrow[ur, tail, "\alpha'"', "\sim"] \arrow[rr, "\rho'"', "\sim"] & & C
\end{tikzcd}
$$

Se define $Z's := \alpha' s^1\overline{(s\sqcup s)}$ y $Z'g = \alpha g^1\overline{(g\sqcup g)}$. Para ver que $Z's$ y $Z'g$ son cilindros de s y g válidos, basta demostrar que $\alpha' s^1$ y una αg^1 son una s^1 y g^1, respectivamente, lo cual es directo sin más que verificar que $\rho''\alpha' s^1 = \{s\rho, 1, 1\}$ y $\rho''\alpha g^1 = \{g\rho, 1, 1\}$. Con estos cilindros de s y g, el diagrama de los cilindros es conmutativo:

$$
\begin{aligned}
Z'gZf = \alpha g^1\overline{\overline{g\sqcup g}} f^1\overline{f\sqcup f} &= \alpha g^1\overline{f^1}\,\overline{(g\sqcup g)}\,\overline{f\sqcup f} \\
&= \alpha' s^1\overline{r^1}\,\overline{(g\sqcup g)}\,\overline{f\sqcup f} \\
&= \alpha' s^1\overline{\overline{(s\sqcup s)}} r^1\overline{r\sqcup r} = Z'sZr
\end{aligned}
$$

□

Nota 1.3.5. Del teorema anterior se observa que para dos cilindros de un morfismo con el mismo dominio, existen cilindros de las correspondientes identidades de forma que los igualan.

A continuación se verá que el teorema 1.3.4, puede extenderse a dos cuadrados conmutativos enfrentados. Una consecuencia importante de este nuevo resultado será la de asegurar que ciertos morfismos push outs que involucran cilindros en sus componentes responden, a su vez, a una construcción cilindro.

Proposición 1.3.6. *Dado el diagrama conmutativo de objetos cofibrantes:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\beta"] \\ D' \arrow[r, "f'"'] & C' & B' \arrow[l, "g'"] \end{tikzcd}$$

y cilindros de f, g, α y β, existen cilindros de f',g' y γ de forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} ZD \arrow[r, "Zf"] \arrow[d, "Z\alpha"'] & ZC \arrow[d, "Z\gamma"'] & ZB \arrow[l, "Zg"'] \arrow[d, "Z\beta"] \\ ZD' \arrow[r, "Zf'"'] & ZC' & ZB' \arrow[l, "Zg'"] \end{tikzcd}$$

Demostración. A partir del diagrama que se tiene por hipótesis, se considera el diagrama de los coproductos que sigue siendo conmutativo. Tomando $\{\imath_0, \imath_1\}$ de los cilindros de D, C ,B, D' y B' y haciendo los correspondientes push outs, se obtienen los objetos Z^1_α, Z^1_γ, Z^1_β, $Z^1_{f'}$ y $Z^1_{g'}$. De este modo, se generan tres cofibraciones con dominio $C' \sqcup C'$ con las que se forman dos nuevos push outs. Con las inducidas de éstos, se establece un nuevo push out que permite definir el morfismo $\{\{\{f'\rho, 1, 1\}, \{\gamma\rho, 1, 1\}\}, \{\{\gamma\rho, 1, 1\}, \{g'\rho, 1, 1\}\}\}$ el cual se factoriza mediante una cofibración y una equivalencia débil. Este último razonamiento queda reflejado en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & C'\sqcup C' \arrow[dll, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"'] \arrow[d, tail, "\widetilde{\{\imath_0,\imath_1\}}"] \arrow[drr, tail, "\widehat{\{\imath_0,\imath_1\}}"] & & \\
Z^1_{f'} \arrow[d, tail, "a"'] & & Z^1_{\gamma} \arrow[dll, tail, "c"'] \arrow[drr, tail, "d"] & & Z^1_{g'} \arrow[d, tail, "b"] \\
P \arrow[drr, tail, "\overline{d}"] \arrow[dddrr, bend right, "\{\{f'\rho,1,1\},\{\gamma\rho,1,1\}\}"'] & & & & Q \arrow[dll, tail, "\overline{c}"'] \arrow[dddll, bend left, "\{\{\gamma\rho,1,1\},\{g'\rho,1,1\}\}"] \\
 & & R \arrow[dl, tail, "\lambda"] \arrow[dd] & & \\
 & ZC' \arrow[dr, "\sim", "\rho_{C'}"'] & & & \\
 & & C' & &
\end{tikzcd}$$

Definiendo $\{(\imath_0)_{C'},(\imath_1)_{C'}\} := \lambda\overline{d}c\widetilde{\{\imath_0,\imath_1\}} = \lambda\overline{c}d\widetilde{\{\imath_0,\imath_1\}}$, se prueba directamente que $(\{(\imath_0)_{C'},(\imath_1)_{C'}\}, ZC', \rho_{C'})$ es un cilindro de C'. Tomando $\gamma^1 := \lambda\overline{d}c = \lambda\overline{c}d$, $(f')^1 = \lambda\overline{d}a$ y $(g')^1 = \lambda\overline{c}b$ se concluye el resultado. $\square$

Obsérvese que la demostración realizada puede ser generalizada a n cuadrados enfrentados en una misma arista, $n \geqslant 1$.

Teorema 1.3.7. *Sea el push out cofibrado de objetos cofibrantes siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "s"'] & C
\end{tikzcd}$$

Fijados Zf y Zr, cilindros de f y r construidos a partir de un mismo cilindro de A, existen Zs y Zg, cilindros de s y g, de forma que el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
ZA \arrow[r, "Zf"] \arrow[d, "Zr"'] & ZB \arrow[d, "Zg"] \\
ZD \arrow[r, "Zs"'] & ZC
\end{tikzcd}$$

es un push out cofibrado.

Demostración. A partir del push out que se tiene por hipótesis, se forma el correspondiente cuadrado de coproductos, que es un push out cofibrado. Siguiendo un razonamiento paralelo al realizado en proposiciones anteriores, se construye el siguiente diagrama conmutativo haciendo push outs:

$$\begin{tikzcd}
 & & A\sqcup A \arrow[rr, "f\sqcup f"] \arrow[dl, "r\sqcup r"'] \arrow[dd, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"] & & B\sqcup B \arrow[dl, "g\sqcup g"'] \arrow[dd, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] & & \\
 & D\sqcup D \arrow[rr, "s\sqcup s"] \arrow[dd, tail, "\widetilde{\{\imath_0,\imath_1\}}"'] & & C\sqcup C \arrow[dd, tail, "\overline{\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}}"] & & & \\
 & & ZA \arrow[rr, "\overline{f\sqcup f}"'] \arrow[dl, "\overline{r\sqcup r}"] & & Z_f^1 \arrow[rr, tail, "f^1"'] \arrow[dl, "\overline{g\sqcup g}"] & & ZB \arrow[dl, "\overline{\overline{g\sqcup g}}"] \\
 & Z_r^1 \arrow[rr, "\overline{s\sqcup s}"'] \arrow[dl, tail, "r^1"] & & Z_{gf}^1 \arrow[rr, tail, "\overline{f^1}"'] \arrow[dl, tail, "\overline{r^1}"] & & Z_g^1 \arrow[dl, tail, "\overline{\overline{r^1}}"] & \\
ZD \arrow[rr, "\overline{\overline{s\sqcup s}}"'] & & Z_s^1 \arrow[rr, tail, "\overline{\overline{f^1}}"'] & & ZC & &
\end{tikzcd}$$

El cuadrado inferior exterior es push out cofibrado ya que $f\sqcup f$ ó $r\sqcup r$ es cofibración y f^1, r^1 son siempre cofibraciones. Por otro lado, si se define:

- $\{(\imath_0)_C,(\imath_1)_C\} := \overline{\overline{r^1}}\,\overline{f^1}\,\overline{\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}}$ es cofibración al ser composición de cofibraciones.

- $\rho_C := \rho_D \cup \rho_B$ es equivalencia débil teniendo en cuenta el lema 1.1.8 aplicado al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
ZD \arrow[d, "\rho_D"', "\wr"] & ZA \arrow[l, "Zr"'] \arrow[r, "Zf"] \arrow[d, "\rho_A"', "\wr"] & ZB \arrow[d, "\wr"', "\rho_B"] \\
D & A \arrow[l, "r"] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

la terna $(\{(\imath_0)_C,(\imath_1)_C\}, ZC, \rho_C)$ es un cilindro de C.

Para acabar la prueba, basta con demostrar que $\overline{\overline{r^1}}$ es una g^1 (y $\overline{\overline{f^1}}$ una s^1). En efecto, como $(\rho_D\cup\rho_B)\,\overline{\overline{r^1}}\,\overline{\{\imath_0,\imath_1\}} = (\rho_D\cup\rho_B)\,\overline{\overline{r^1}}\,\overline{f^1}\,\overline{\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}} = \{1,1\}$ y $(\rho_D\cup\rho_B)\,\overline{\overline{r^1}}\,\overline{\overline{g\sqcup g}} = g\rho_B$, se verifica que $(\rho_D\cup\rho_B, ZC, \overline{\overline{r^1}})$ es una factorización de $\{g\rho_B,1,1\}$ y, por tanto, $\overline{\overline{r^1}}$ es una g^1. De manera análoga se comprueba que $\overline{\overline{f^1}}$ es una s^1. $\square$

Como consecuencia de este último teorema y anteriores proposiciones se deducen los siguientes corolarios:

Corolario 1.3.8. *Dado un push out cofibrado de objetos cofibrantes en el que está definido el morfismo* $\{uv, wz\}$*, existen cilindros de* u*,* v*,* w *y* z *de forma que* $\{ZuZv, ZwZz\}$ *es un cilindro de* $\{uv, wz\}$*.* □

Corolario 1.3.9. *Dado el morfismo* $\alpha \cup \beta$ *construido a partir de dos push outs con todos sus objetos cofibrantes, existen cilindros de* α *y* β*,* $Z\alpha$ *y* $Z\beta$*, de forma que* $Z\alpha \cup Z\beta$ *es un cilindro de* $\alpha \cup \beta$*.* □

Capítulo 2

Homotopía

La construcción cilindro dada anteriormente permite introducir una noción de homotopía generalizada, esto es, homotopía relativa a cofibraciones, que permitirá obtener resultados y propiedades de homotopía relativa en categorías de cofibraciones comparables a los obtenidos en otras axiomáticas de homotopía abstracta generalizada.

Siguiendo las intuiciones dadas por Baues respecto a la homotopía relativa en categorías de cofibraciones, se obtiene un concepto equivalente de homotopía relativa más manejable.

En una primera parte, se desarrollará la noción de homotopía relativa dada por Baues, para posteriormente, obtener la definición precisa de homotopía generalizada que se usará a lo largo de toda esta memoria y que finalmente se verá que es equivalente a la primera.

2.1 Homotopía relativa a cofibraciones.

La noción de cilindro para objetos cofibrantes dada para una categoría de cofibraciones puede ser generalizada sustituyendo la cofibración inicial por una arbitraria. De este modo, surge la definición de cilindro relativo a una cofibración como una extensión de un cilindro de un objeto cofibrante, o lo que es lo mismo, del cilindro relativo a la cofibración inicial de dicho objeto.

Definición 2.1.1. Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, *un cilindro relativo a* i en el sentido de Baues es cualquier terna $(\{\jmath_0, \jmath_1\}, Z^i, \sigma)$ procedente de la factorización del morfismo $\{1, 1\} : P\{i, i\} \longrightarrow A$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i"'] & A \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "1"] & \\
A \arrow[r, tail, "\widetilde{i}"] \arrow[drr, bend right, "1"'] & P\{i,i\} \arrow[d, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"'] \arrow[dr, dotted, "\{1,1\}"] & \\
& Z^i \arrow[r, "\sigma", "\sim"'] & A
\end{tikzcd}$$

En este caso, también $\sigma\jmath_\varepsilon = 1$, luego $\jmath_\varepsilon$ es cofibración trivial para $\varepsilon \in \{0,1\}$. La noción de homotopía en categorías de cofibraciones ya fue establecida por Baues:

Definición 2.1.2 (Homotopía relativa). Dadas $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u\{i\}}$, X fibrante, se dirá que f_0 *es homótopo a* f_1 *relativamente a* i si existe un cilindro relativo $(\{\jmath_0,\jmath_1\}, Z^i, \sigma)$ y un morfismo $H : Z^i \longrightarrow X$ que hace el diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[rr, "\{f_0,f_1\}"] \arrow[dr, tail, bend right, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"'] & & A \\
& Z^i \arrow[ur, bend right, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

H se dirá una homotopía entre f_0 y f_1 rel. i.

Baues prueba que la definición dada anteriormente es independiente del cilindro tomado y que es de equivalencia. La técnica utilizada para la demostración de estos hechos, es una combinación de las proposiciones 1.2.2 y 1.1.4. Como ejemplo ilustrativo, la demostración de la primera afirmación se deduce del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"] \arrow[dd, tail, "\{\jmath'_0,\jmath'_1\}"'] & & Z^i \arrow[r, "H"] \arrow[dl, tail, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "\sigma", "\wr"'] & X \\
& E \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"'] \arrow[dr, "\beta"', "\sim"] & & \\
Z'^i \arrow[ur, tail, "\alpha'"', "\sim"] \arrow[rr, "\sim", "\sigma'"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

donde $(\{\jmath_0, \jmath_1\}, Z^i, \sigma)$, $(\{\jmath'_0, \jmath'_1\}, Z'^i, \sigma')$ son cilindros relativos a la cofibración i, H es una homotopía respecto al primer cilindro y $\widetilde{H}$ es la correspondiente extensión de H. La homotopía buscada respecto al segundo cilindro es $H' = \widetilde{H}\alpha'$.

Considerando la definición de homotopía generalizada dada en una categoría con cilindro natural, surge una nueva noción de homotopía relativa en categoría de cofibraciones. Para diferenciarla de la anterior y debido a su origen se denominará *homotopía cilíndrica relativa*.

Definición 2.1.3 (Homotopía cilíndrica relativa). Sea $i : B \rightarrowtail A$ una cofibración con B cofibrante y $f_0, f_1 \in Hom(A, X)^{u\{i\}}$. Fijado un cilindro de i, se dirá que f_0 *es homótopo a* f_1 *relativamente a* i, $f_0 \simeq f_1$ rel. i, si existe un morfismo $H : ZA \longrightarrow X$ tal que $Hi^1 = \{u\rho_B, f_0, f_1\}$. Gráficamente:

$$\begin{tikzcd}
B \sqcup B \arrow[r, tail, "i \sqcup i"] \arrow[d, tail, "\{\imath_0, \imath_1\}"'] \arrow[ddd, bend right=40, "u\rho_B"'] & A \sqcup A \arrow[d, tail, "\overline{\{\imath_0, \imath_1\}}"] \arrow[ddr, bend left=50, "\{f_0, f_1\}"] & \\
ZB \arrow[r, tail, "\overline{i \sqcup i}"] \arrow[dr, dotted, tail, "Zi"'] & Z_i^1 \arrow[d, tail, "i^1"] \arrow[dr, dotted, "\{i\rho_B, 1, 1\}"] & \\
 & ZA \arrow[r, "\rho_A", "\sim"'] \arrow[dr, "H"'] & A \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Nota 2.1.4. Se deduce de esta definición que H verifica las siguientes condiciones: $H(Zi) = u\rho_B$, $H(\imath_0)_A = f_0$ y $H(\imath_1)_A = f_1$.

Proposición 2.1.5. *La definición de homotopía cilíndrica relativa es consistente, es decir, no depende del cilindro de i tomado.*

Demostración. En la construcción cilindro de un morfismo se emplea dos veces el axioma de factorización. Por ello, se hará la demostración en dos pasos:

En primer lugar se comprueba que fijado un cilindro de B, la homotopía es independiente de la factorización de $\{i\rho_B, 1, 1\}$ elegida. En efecto, sea $((i^1)', Z'A, \rho'_A)$ otra descomposición de este morfismo. Teniendo en cuenta la proposición 1.2.2 se obtiene un diagrama conmutativo como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[rr, tail, "i^1"] \arrow[dd, tail, "(i^1)'"'] & & ZA \arrow[r, "H"] \arrow[dl, tail, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "\rho_A", "\wr"'] & X \\
& Z''A \arrow[dr, "\rho''_A"', "\sim"] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"'] & & \\
Z'A \arrow[ur, tail, "\alpha'", "\sim"'] \arrow[rr, "\sim", "\rho'_A"'] & & A &
\end{tikzcd}
$$

donde $\widetilde{H}$ es una extensión de H relativa a α. Su existencia está garantizada por la proposición 1.1.4. Considerando $H' := \widetilde{H}\alpha'$, se prueba que $H'(i^1)' = \widetilde{H}\alpha i^1 = Hi^1 = \{u\rho_B, f_0, f_1\}$, luego f_0 es homótopo a f_1 relativamente a i mediante la homotopía H'.

Veamos ahora el caso general. Sea $(\{(\imath_0)_B, (\imath_1)_B\}, ZB, \rho_B)$ el dominio del cilindro de i con el que se verifica $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i. Se considera otro cilindro de B, $(\{(\imath'_0)_B, (\imath'_1)_B\}, Z'B, \rho'_B)$ y un cilindro cota superior, que se denotará por $(\{(\imath''_0)_B, (\imath''_1)_B\}, Z''B, \rho''_B)$. Se tiene un diagrama conmutativo de la forma:

$$
\begin{tikzcd}
& B \sqcup B \arrow[rr, tail, "i \sqcup i"] \arrow[dl, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] \arrow[dd, tail, "\{\imath'_0,\imath'_1\}"] & & A \sqcup A \arrow[dl, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"'] \arrow[dd, tail, "\overline{\{\imath'_0,\imath'_1\}}"] & \\
ZB \arrow[rr, tail, "\overline{i \sqcup i}"] \arrow[dd, tail, "\alpha"', "\wr"] & & Z_i^1 \arrow[rr, tail, "i^1"] \arrow[dd, tail, "\overline{\alpha}", "\wr"'] & & ZA \arrow[dd, tail, "\overline{\overline{\alpha}}", "\wr"'] \\
& Z'B \arrow[rr, tail, "\widetilde{i \sqcup i}"] \arrow[dl, tail, "\alpha'", "\wr"'] & & Z'^1_i \arrow[dl, tail, "\overline{\alpha'}", "\wr"'] & \\
Z''B \arrow[rr, tail, "\overline{\overline{\overline{i \sqcup i}}}"] & & Z''^1_i \arrow[rr, tail, "(i^1)''"] & & Z''A
\end{tikzcd}
$$

En el prisma, todas las caras son push outs excepto las caras izquierda y derecha. También, el cuadrado aledaño de la derecha es push out. A la inducida de i^1 la denotamos por $(i^1)''$ y al objeto push out como $Z''A$ puesto que, en realidad, se obtiene un nuevo cilindro de A. Este hecho se prueba directamente tomando $\{(\imath''_0)_A, (\imath''_1)_A\} := (i^1)''\overline{\alpha}\overline{\{\imath_0, \imath_1\}}$ y $\rho''_A = \{\{i\rho''_B, 1, 1\}, \rho_A\}$.

Se define el morfismo H'' por la propiedad universal de push out:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "i^1"] \arrow[d, tail, "\overline{\alpha}"', "\wr"] & ZA \arrow[d, tail, "\wr"', "\overline{\overline{\alpha}}"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
Z_i''^1 \arrow[r, tail, "i''^1"'] \arrow[drr, bend right, "\{u\rho''_B, f_0, f_1\}"'] & Z''A \arrow[dr, dotted, "H''"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

Nótese que el morfismo $\{u\rho''_B, f_0, f_1\}$ procede del push out composición de la cara superior con la cara frontal del prisma. Considerando la conmutatividad del diagrama inferior, se obtiene $H'' : f_0 \simeq f_1$ rel. i. Como se ha probado en la primera parte de esta demostración la independencia con respecto al cilindro de A tomado, la propiedad queda demostrada. $\square$

2.2 Equivalencia entre la homotopía relativa y la cilíndrica relativa.

Antes de concluir la equivalencia entre las dos homotopías relativas de la sección anterior hay que tener en cuenta que el objeto push out de $\{\imath_0, \imath_1\}$ con $i \sqcup i$ también se puede obtener combinando estos dos push outs:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "\imath_0"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "\wr"', "\overline{\imath_0}"] \\
ZB \arrow[r, tail, "\overline{i}"] & P\{\imath_0, i\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "\bar{i}\imath_1"'] & A \arrow[d, tail, "\overline{\bar{i}\imath_1}"] \\
P\{\imath_0, i\} \arrow[r, tail, "\overline{i}"] & Z_i^1
\end{tikzcd}$$

La importancia de esta nueva construcción para la obtención del objeto Z_i^1 radica en el hecho de que va a facilitar la aplicación de los resultados del capítulo primero para determinar ciertas cofibraciones y equivalencias débiles. Con la notación anterior y recordando que j_0 y j_1 son las inyecciones canónicas en el coproducto $A \sqcup A$, la demostración de lo expuesto anteriormente es una simple comprobación:

Proposición 2.2.1. *El siguiente cuadrado:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "\bar{i}\imath_1"'] & A \arrow[d, tail, "\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}\jmath_1"] \\
P\{\imath_0, i\} \arrow[r, tail, "\{\overline{i\sqcup i}, \overline{\{\imath_0,\imath_1\}}\jmath_0\}"'] & Z_i^1
\end{tikzcd}$$

es un push out

□

Nota 2.2.2. Conviene hacer notar que la cofibración i^1 puede ser expresada según se considere una construcción u otra como $i^1 = \{Zi, \{\imath_0, \imath_1\}\} = \{\{Zi, \imath_0\}, \imath_1\}$.

Teorema 2.2.3. *La homotopía relativa y la cilíndrica relativa son equivalentes.*

Demostración. En primer lugar se hará una serie de consideraciones previas. Sea Z_i^1 el objeto obtenido según el lema anterior y el diagrama push out:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, "\{i\rho_B,1\}\cup 1"] \arrow[d, tail, "i^1"'] & P\{i, i\} \arrow[d, tail, "\overline{i^1}"] \\
ZA \arrow[r, "w"] & Z^i
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta el lema 1.1.8 aplicado al diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P\{\imath_0, i\} \arrow[d, "\{i\rho_B,1\}"', "\wr"] & B \arrow[l, tail, "\bar{i}\imath_1"'] \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "1"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "\wr"', "1"] \\
A & B \arrow[l, tail, "i"] \arrow[r, tail, "i"'] & A
\end{tikzcd}$$

se tiene que el morfismo $\{i\rho_B, 1\}\cup 1$ es equivalencia débil. Como consecuencia de esto, w es equivalencia débil por el axioma CF2.

Definiendo $\{\jmath_0, \jmath_1\} := \overline{i^1}$ y $\sigma := \{\rho_A, 1, 1\}$, una simple comprobación demuestra que $(\{\jmath_0, \jmath_1\}, Z^i, \sigma)$ es un cilindro relativo a i en el sentido de Baues. Sin pérdida de generalidad, los correspondientes cilindros que se considerará serán los obtenidos según la construcción anterior.

Sean f_0, $f_1 \in Hom(A, X)^{u\{i\}}$ homótopos en el sentido de Baues mediante una homotopía $F : Z^i \longrightarrow X$. Tomando $H := Fw$ se tiene:

$$\begin{aligned} Hi^1 = Fwi^1 = F\{\imath_0,\imath_1\}(\{i\rho_B,1\}\cup 1) &= \{f_0,f_1\}(\{i\rho_B,1\}\cup 1) \\ &= \{f_0\{i\rho_B,1\},f_1\} \\ &= \{\{f_0 i\rho_B,f_0\},f_1\} \\ &= \{f_0 i\rho_B,\{f_0,f_1\}\} = \{u\rho_B,f_0,f_1\} \end{aligned}$$

Luego $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i con la definición de homotopía cilíndrica relativa.

Recíprocamente, si $H : ZA \longrightarrow X$ verifica $Hi^1 = \{u\rho_B, f_0, f_1\}$, se induce el morfismo push out $F := \{H, f_0, f_1\}$. De este modo, $F\{\jmath_0,\jmath_1\} = \{f_0, f_1\}$ y por lo tanto $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i en el sentido de Baues. □

Por el teorema anterior, a partir de ahora y salvo que se indique lo contrario, no se hará diferencia entre la homotopía relativa y la cilíndrica relativa y sólo se hablará de *homotopía relativa*, pues se trabajará en todo momento con objetos cofibrantes y se considerará la segunda definición.

Nota 2.2.4. El push out de la proposición 2.2.1 existe aunque i no sea cofibración, pues $\bar{i}\imath_1$ lo es, al menos cuando B y A son cofibrantes. En el siguiente diagrama, el cuadrado superior y el exterior son push outs:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, tail, "\jmath_0"'] & A \arrow[d, tail, "\jmath_0"] \\ B \sqcup B \arrow[r, "i\sqcup 1"] \arrow[d, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & A \sqcup B \arrow[d, tail, "\{\overline{\imath_0},\bar{i}\imath_1\}"] \\ ZB \arrow[r, "\bar{i}"] & P\{\imath_0, i\} \end{tikzcd}$$

Por tanto, el cuadrado inferior también es push out y $\{\overline{\imath_0}, \bar{i}\imath_1\}$ es cofibración al ser la inducida de una cofibración en un push out. Además, se tiene que $\bar{i}\imath_1 = \{\overline{\imath_0}, \bar{i}\imath_1\}\jmath_1$, que es composición de cofibraciones, luego es cofibración.

2.3 Propiedades de la homotopía relativa.

La homotopía relativa en categorías de cofibraciones verifica las principales propiedades de una homotopía, esto es, se trata de una relación de equivalencia compatible con la composición de morfismos. Para probar esto, se verá que en una categoría de cofibraciones existe una propiedad de extensión de homotopía similar a la de las categorías con cilindro natural, aunque más general, y se demostrarán algunos resultados relativos a la preservación de homotopía por equivalencias débiles.

Definición 2.3.1 (P.E.H.). Un morfismo $i : B \longrightarrow A$ se dice que verifica la *propiedad de extensión de homotopía* (P.E.H.) si existe un cilindro de i, $Zi : ZB \longrightarrow ZA$, tal que para cualquier par de morfismos $h : A \longrightarrow X$ y $H : ZB \longrightarrow X$, con X fibrante, verificando $H\imath_\varepsilon = hi$, existe un morfismo $F : ZA \longrightarrow X$ con $F\imath_\varepsilon = h$ y $FZi = H$ ($\varepsilon \in \{0, 1\}$):

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\imath_\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "i"'] & ZB \arrow[d, "H"] \arrow[ddr, bend left, "Zi"] & \\
A \arrow[r, "h"'] \arrow[drr, bend right, "\imath_\varepsilon"', "\sim"] & X & \\
 & & ZA \arrow[ul, dotted, "F"']
\end{tikzcd}$$

Nota 2.3.2. Siguiendo un razonamiento análogo al realizado en la proposición 2.2.3, se prueba que la definición anterior no depende del cilindro de i tomado.

La propiedad de extensión de homotopía se empleará muy frecuentemente en esta memoria, sobre todo a la hora de encontrar ciertas homotopías y en la definición de nuevas construcciones. Como era de esperar, toda cofibración verifica la P.E.H.. Para probar este hecho, damos un lema previo:

Lema 2.3.3. *Sea $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$, B cofibrante y Zi un cilindro de i cualquiera. Entonces $\{Zi, \imath_\varepsilon\} : P\{\imath_0, i\} \longrightarrow ZA$ es cofibración trivial, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Veámoslo para $\varepsilon = 0$, para $\varepsilon = 1$ es análogo. Se considera el morfismo $\{\{Zi, \imath_0\}, \imath_1\} : Z_i^1 \longrightarrow ZA$ tomando el push out dado en la proposición 2.2.1. Aplicando la nota 2.2.2, $\{\{Zi, \imath_0\}, \imath_1\} = \{Zi, \{\imath_0, \imath_1\}\} = i^1$, que es cofibración. Por tanto, $\{Zi, \imath_0\} = \{\{Zi, \imath_0\}, \imath_1\}\{\overline{i \sqcup i}, \overline{\{\imath_0, \imath_1\}}j_0\}$ es cofibración, por ser composición de cofibraciones. Además, es inmediato comprobar que $\{Zi, \imath_0\}$ es equivalencia débil, teniendo en cuenta su diagrama de definición y el axioma de composición. □

Proposición 2.3.4. *Toda cofibración verifica la P.E.H..*

Demostración. Se considera $Zi : ZA \longrightarrow ZB$ un cilindro de i y un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\imath_\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & ZB \arrow[d, "H"] \\
A \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}$$

El morfismo $E : ZA \longrightarrow X$ buscado no es más que una extensión de $\{h, H\} : P\{i, \imath_\varepsilon\} \longrightarrow X$ relativa a la cofibración trivial $\{\imath_\varepsilon, Zi\}$, cuya existencia está garantizada por el lema 1.1.4.

$$\begin{tikzcd} P\{i,\imath_\varepsilon\} \arrow[r, "\{h,H\}"] \arrow[d, tail, "\{\imath_\varepsilon, Zi\}"', "\wr"] & X \\ ZA \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd}$$

□

Aunque ya se ha dicho que la homotopía relativa (de Baues) es una relación de equivalencia, se probará este hecho para la homotopía cilíndrica relativa, pues las técnicas que se usan en dicha demostración son básicas en el desarrollo posterior de este trabajo. Antes de probar este hecho se hace notar el siguiente lema, cuya demostración es inmediata y se omite:

Lema 2.3.5.

i) Sea C cofibrante y $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZC, \rho)$ un cilindro de C. Entonces $(\{\imath_0 \sqcup \imath_0, \imath_1 \sqcup \imath_1\}, ZC \sqcup ZC, \rho \sqcup \rho)$ es un cilindro de $C \sqcup C$.

ii) Si $f : C \longrightarrow D$ es un morfismo entre objetos cofibrantes y $Zf : ZC \longrightarrow ZD$ es un cilindro de f, entonces $Zf \sqcup Zf : ZC \sqcup ZC \longrightarrow ZD \sqcup ZD$ es un cilindro de $f \sqcup f$.

□

Proposición 2.3.6. *La relación de homotopía cilíndrica relativa es de equivalencia en $Hom(A, X)^{u\{i\}}$, con X fibrante.*

Demostración.

- Reflexiva: Si $f \in Hom(A, X)^{u\{i\}}$, entonces $F := f\rho_A$ es la homotopía buscada, donde ρ_A es la equivalencia débil del cilindro de A tomado.
- Simétrica: Sean $f_0, f_1 \in Hom(A, X)^{u\{i\}}$ y $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i. Aplicando el teorema 1.3.7 al push out de $\{\imath_0, \imath_1\}$ con $i \sqcup i$ y teniendo en cuenta el lema anterior, se puede considerar un push out de la forma:

$$\begin{tikzcd} ZB \sqcup ZB \arrow[r, "Zi \sqcup Zi"] \arrow[d, tail, "Z\{\imath_0,\imath_1\}"'] & ZA \sqcup ZA \arrow[d, tail, "Z\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] \\ Z^2B \arrow[r, "Z(\overline{i \sqcup i})"'] & Z(Z_i^1) \end{tikzcd}$$

Puesto que i^1 cofibración, por la P.E.H. existe un morfismo E_F haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z_i^1) \arrow[d, "{\{u\rho^2, F, f_0\rho\}}"] \arrow[ddr, bend left, "Zi^1"] & \\
ZA \arrow[r, "f_0\rho"] \arrow[drr, tail, bend right, "\sim", "\imath_0"'] & X & \\
 & & Z^2A \arrow[ul, dotted, "E_F"']
\end{tikzcd}$$

Aquí, ρ^2 denota la composición $\rho_B\rho_{ZB} : Z^2B \longrightarrow B$. Tomando $\widetilde{F} := E_F\imath_1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}i^1 = E_F\imath_1 i^1 = E_F Z i^1 \imath_1 &= \{u\rho^2, F, f_0\rho\}\imath_1 \\
&= \{u\rho^2\imath_1, \{F, f_0\rho\}(\imath_1 \sqcup \imath_1)\} \\
&= \{u\rho, F\imath_1, f_0\rho\imath_1\} \\
&= \{u\rho, f_1, f_0\}
\end{aligned}$$

- Transitiva: Si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i y $G : f_1 \simeq f_2$ rel. i. se considera, en primer lugar, la homotopía $\widetilde{F} : f_1 \simeq f_0$ rel. i construida como en la propiedad simétrica. Haciendo un razonamiento análogo al realizado anteriormente, se obtiene por la P.E.H. una extensión, $E_{(F,G)}$, según el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z_i^1) \arrow[d, "{\{u\rho^2, \widetilde{F}, G\}}"] \arrow[ddr, bend left, "Zi^1"] & \\
ZA \arrow[r, "f_1\rho"] \arrow[drr, tail, bend right, "\sim", "\imath_0"'] & X & \\
 & & Z^2A \arrow[ul, dotted, "E_{(F,G)}"']
\end{tikzcd}$$

Se define $F * G := E_{(F,G)}\imath_1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(F * G)i^1 = E_{(F,G)}\imath_1 i^1 = E_{(F,G)} Z i^1 \imath_1 &= \{u\rho^2, \widetilde{F}, G\}\imath_1 \\
&= \{u\rho^2\imath_1, \{\widetilde{F}, G\}(\imath_1 \sqcup \imath_1)\} \\
&= \{u\rho, f_0, f_2\}
\end{aligned}$$

$\square$

Dado que, si X es fibrante, la relación de homotopía relativa a una cofibración i es de equivalencia, se define el corchete de homotopía como el conjunto cociente:

$$[A,X]^{u\{i\}} := Hom(A,X)^{u\{i\}} \big/ \sim$$

Se comprobará, con diversos resultados, la compatibilidad de la homotopía respecto a la composición de morfismos.

Proposición 2.3.7. *Sean $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u\{i\}}$ tales que $f_0 \simeq f_1$ rel. i. Si $g : X \longrightarrow Y$ es un morfismo, entonces $gf_0 \simeq gf_1$ rel. i.*

Demostración. Es inmediato comprobar que si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i, entonces $gH : gf_0 \simeq gf_1$ rel. i. □

Nota 2.3.8. En el caso de que $g : X \longrightarrow Y$ sea un morfismo entre objetos fibrantes, este resultado es equivalente a que $g_* : [A,X]^{u\{i\}} \longrightarrow [A,Y]^{gu\{i\}}$ dada por $g_*([\alpha]) = [g\alpha]$, sea una aplicación.

Proposición 2.3.9. *Dado el cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "q", "\wr"'] \\
A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] & Y
\end{tikzcd}$$

i) Si X es fibrante, existe $\widetilde{f}$ extensión de f rel. i.

ii) Si X e Y son fibrantes, entonces $q\widetilde{f} \simeq g$ rel. i. Además, $\widetilde{f}$ es única salvo homotopía relativa a i y se dirá que $\widetilde{f}$ es la extensión del cuadrado.

Demostración. i) Se considera por la proposición 1.2.2 el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, tail, "i"'] & & X \arrow[dl, tail, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "q", "\wr"'] \\
& Z \arrow[dr, "\beta"', "\sim"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha'"'] \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Dado que X es fibrante, existe un morfismo $r : Z \longrightarrow X$, tal que $r\alpha = 1_X$. Definiendo $\widetilde{f} := r\alpha'$, claramente $\widetilde{f}i = f$.

ii) Se considera el diagrama conmutativo en el que se han aplicado las proposiciones 1.2.2 y 1.1.4:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[rr, "\{\alpha r\alpha',\alpha'\}"] \arrow[dd, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & & Z \arrow[r, "\beta", "\sim"'] \arrow[dl, tail, "\lambda", "\sim"'] \arrow[dd, "r", "\wr"'] & Y \\
 & W \arrow[urr, dotted, "\widetilde{\beta}"'] \arrow[dr, "\mu"', "\sim"] & & \\
ZA \arrow[ur, "\lambda'"'] \arrow[rr, "r\alpha'\rho"'] & & X &
\end{tikzcd}$$

Se define $F := \widetilde{\beta}\lambda'(= q\widetilde{f}\rho)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
Fi^1 = \widetilde{\beta}\lambda'\{Zi, \imath_0, \imath_1\} &= \{\widetilde{\beta}\lambda' Zi, \widetilde{\beta}\lambda'\imath_0, \widetilde{\beta}\lambda'\imath_1\} \\
&= \{\widetilde{\beta}\lambda' Zi, \beta\alpha r\alpha', \beta\alpha'\} \\
&= \{\widetilde{\beta}\lambda' Zi, q\widetilde{f}, g\} \\
&= \{q\widetilde{f}i\rho, q\widetilde{f}, g\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $F : q\widetilde{f} \simeq g$ rel. i.

Para comprobar la unicidad, salvo homotopía relativa a i, de la extensión del diagrama, sean $\widetilde{f_0}$ y $\widetilde{f_1}$ dos extensiones de f relativas a i. Como $q\widetilde{f_0} \simeq g$ rel. i y $q\widetilde{f_1} \simeq g$ rel. i, por las propiedades simétrica y transitiva, se puede considerar una homotopía $H : q\widetilde{f_0} \simeq q\widetilde{f_1}$ rel. i. Aplicando el apartado anterior al cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, "\{\widetilde{f_0}i\rho, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}\}"] \arrow[d, "i^1"'] & X \arrow[d, "q", "\wr"'] \\
ZA \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & Y
\end{tikzcd}$$

se obtiene la homotopía $F : ZA \longrightarrow X$ buscada. $\square$

Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.10. *Si $g : X \xrightarrow{\sim} Y$ es una equivalencia débil entre objetos fibrantes, entonces $g_* : [A, X]^{u\{i\}} \longrightarrow [A, Y]^{gu\{i\}}$ es una biyección.*

Demostración. La existencia y buena definición de la aplicación g_* ya se vió en la nota 2.3.8. Para la inyectividad, sean $f_0, f_1 \in Hom(A, X)^{u\{i\}}$ tales que

$gf_0 \simeq gf_1$ rel. i. Se observa que f_0 y f_1 son extensiones del diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "g", "\wr"'] \\ A \arrow[r, "gf_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

Consecuentemente $f_0 \simeq f_1$ rel. i. Finalmente, si $h \in Hom(A,Y)^{gu\{i\}}$, para probar la sobreyectividad, no hay más que considerar una extensión de un diagrama análogo al anterior, obtenido al sustituir gf_0 por h. □

Nota 2.3.11. Como consecuencia de este teorema se tiene que la homotopía relativa a cofibraciones se puede extender a codominios no fibrantes definiendo $[A,X]^{u\{i\}} \cong [A,RX]^{u\{i\}}$ donde $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ es un modelo fibrante de X.

Para la compatibilidad de la homotopía respecto a la composición de morfismos por la derecha, por tratarse de homotopía relativa a cofibraciones, es necesario relacionar las cofibraciones mediante cuadrados conmutativos. En este sentido, es necesario conocer lo que sucede con la iteración de cofibraciones relacionadas por cuadrados conmutativos o push outs.

Lema 2.3.12. *Dado el cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

existe otro cuadrado conmutativo de la forma:

$$\begin{tikzcd} Z^1_j \arrow[r, "Zg \cup f \sqcup f"] \arrow[d, tail, "j^1"'] & Z^1_i \arrow[d, tail, "i^1"] \\ ZC \arrow[r, "Zf"] & ZA \end{tikzcd}$$

Además, si el primer cuadrado es un push out, entonces también lo es el segundo.

Demostración. Dadas Zg y Zj construcciones cilindro arbitrarias y Zi y Zf adecuadas, de forma que

$$\begin{tikzcd} ZD \arrow[r, "Zg"] \arrow[d, tail, "Zj"'] & ZB \arrow[d, tail, "Zi"] \\ ZC \arrow[r, "Zf"'] & ZA \end{tikzcd}$$

conmuta, (véase el teorema 1.3.4), se verifica sin problemas la conmutatividad requerida del diagrama.

En el caso de que el cuadrado original sea un push out, también lo es el creado al considerar construcciones cilindro. Siguiendo un razonamiento categórico sencillo, se tiene el resultado. □

Proposición 2.3.13. *Si el cuadrado:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

es conmutativo y $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u\{i\}}$ *son tales que* $f_0 \simeq f_1$ *rel.* i*, entonces* $f_0 f \simeq f_1 f$ *rel.* j*.*

Además, si el cuadrado anterior es un push out, entonces $f_0 \simeq f_1$ *rel.* i *si y sólo si* $f_0 f \simeq f_1 f$ *rel.* j

Demostración. Por la proposición anterior, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z_j^1 \arrow[r, "Zg \cup f \sqcup f"] \arrow[d, tail, "j^1"'] & Z_i^1 \arrow[d, tail, "i^1"] \\ ZC \arrow[r, "Zf"] & ZA \end{tikzcd}$$

Si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i, entonces $FZf : f_0 f \simeq f_1 f$ rel. j. Recíprocamente, si el cuadrado original es push out y $F : f_0 f \simeq f_1 f$ rel. j, entonces se induce el morfismo $\{F, u\rho, f_0, f_1\} : ZA \longrightarrow X$ que, por construcción, verifica $\{F, f_0 i\rho, f_0, f_1\} i^1 = \{f_0 i\rho, f_0, f_1\}$. □

Nota 2.3.14. Si X es fibrante, la primera parte de esta proposición es equivalente a que $f^* : [A,X]^{u\{i\}} \longrightarrow [C,X]^{ug\{j\}}$, dada por $f([\alpha]) = [\alpha f]$, sea una aplicación. Además, si se cumple la segunda parte, f^* es una biyección.

A partir de los resultados anteriores se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.3.15. *Sean* $i : B \rightarrowtail A$*,* $j : Z \rightarrowtail Y$ *cofibraciones y* $k : Z \longrightarrow B$ *un morfismo; sean también* $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u\{i\}}$ *y* $g_0, g_1 \in Hom(Y,A)^{ik\{j\}}$*. Si* $f_0 \simeq f_1$ *rel.* i *y* $g_0 \simeq g_1$ *rel.* j*, entonces* $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$ *rel.* j*.*

□

Existen otro tipo de biyecciones entre los corchetes de homotopía:

Proposición 2.3.16. *Dados* $C \overset{j}{\rightarrowtail} B \overset{i}{\underset{\sim}{\rightarrowtail}} A$ *y* X *un objeto fibrante, entonces* $i^* : [A,X]^{u\{ij\}} \longrightarrow [B,X]^{u\{j\}}$ *es una biyección.*

Demostración. La buena definición de i^* se obtiene considerando el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "1", "\sim"'] \arrow[d, tail, "j"'] & C \arrow[d, tail, "ij"] \\
B \arrow[r, tail, "i", "\sim"'] & A
\end{tikzcd}$$

La suprayectividad es directa a partir de la proposición 1.1.4. Tomando una construcción cilindro para j, se puede considerar una construcción cilindro para ij, obtenida por el siguiente push out (nótese que $1 \cup i \cup i$ es cofibración trivial aplicando las proposiciones 1.1.5 y 1.1.8):

$$\begin{tikzcd}
Z_j^1 \arrow[r, tail, "1\cup i\sqcup i", "\sim"'] \arrow[d, tail, "j^1"'] & Z_{ij}^1 \arrow[d, tail, "\overline{j^1}"] \arrow[ddr, bend left, "{\{ij\rho,1,1\}}"] & \\
ZB \arrow[r, tail, "\overline{1\cup i\sqcup i}", "\sim"'] \arrow[drr, bend right, "i\rho"', "\sim"] & ZA \arrow[dr, dotted, "{\{i\rho,ij\rho,1,1\}}"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

Como $\{i\rho, ij\rho, 1, 1\}$ es equivalencia débil, $\overline{j^1}$ es una $(ij)^1$, por lo que queda justificada la notación dada al objeto push out anterior. Estas consideraciones permiten probar la inyectividad de la siguiente forma:

Si $f_0, f_1 \in Hom(A,X)^{u\{ij\}}$ son tales que $f_0 i \simeq f_1 i$ rel. j, es decir, existe $H : ZB \longrightarrow X$ con $Hj^1 = \{u\rho, f_0 i, f_1 i\}$,entonces, la homotopía buscada es el morfismo push out $H' = \{H, u\rho, f_0, f_1\} : ZA \longrightarrow X$. $\square$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, tomando $j = 1$.

Corolario 2.3.17. *Sean* $i : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} A$ *una cofibración trivial y* $f : B \longrightarrow X$ *un morfismo con* X *fibrante. Si* $\widetilde{f_0}$, $\widetilde{f_1}$ *son dos extensiones de* f *relativas a* i*, entonces* $\widetilde{f_0} \simeq \widetilde{f_1}$ *rel.* i*.* $\square$

Se finaliza este capítulo, dando algunas consecuencias de estos últimos resultados, importantes para el desarrollo posterior de este trabajo.

Proposición 2.3.18. *Dado un diagrama del tipo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i'"'] & A \arrow[d, "\rho", "\wr"'] \\
A' \arrow[r, "\rho'", "\sim"'] & D
\end{tikzcd}$$

entonces, si X *es fibrante, existe una biyección* $[A,X]^{u\{i\}} \cong [A',X]^{u\{i'\}}$.

Demostración. Por la proposición 1.2.2, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[dd, tail, "i'"'] & & A \arrow[dl, tail, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dd, "\rho", "\wr"'] \\
& C \arrow[dr, "\beta"', "\sim"] & \\
A' \arrow[ur, tail, "\alpha'"', "\sim"] \arrow[rr, "\sim", "\rho'"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Aplicando la proposición 2.3.16 a las cofibraciones triviales α y α', se tiene el resultado. $\square$

Proposición 2.3.19. *Dado el diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & ZB \arrow[d, "H"] \\
A \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}$$

si $E, E' : ZA \longrightarrow X$ *son extensiones del cuadrado, definidas por la P.E.H., entonces* $E\imath_1 \simeq E'\imath_1$ *rel.* i.

Demostración. Es inmediato comprobar que E y E' son extensiones del morfismo $\{h,H\}$ relativas a la cofibración trivial $\{\imath_0, Zi\} : P\{i,\imath_0\} \overset{\sim}{\rightarrowtail} ZA$, por lo que, teniendo en cuenta el corolario 2.3.17, $E \simeq E'$ rel. $\{\imath_0, Zi\}$. Como $\imath_1 i = \{\imath_0, Zi\}(\bar{i}\imath_1)$, $(\imath_1)^* : [ZA,X]^{\{h,H\}\{\imath_0,Zi\}} \longrightarrow [A,X]^{H\imath_1\{i\}}$ es aplicación por la nota 2.3.14, de donde se deduce el resultado. $\square$

Nota 2.3.20. Cabe destacar que una extensión del diagrama de la proposición anterior, también es una extensión de un diagrama similar considerando un $Z1 : Z'B \longrightarrow ZB$ y tomando $HZ1$ y $ZiZ1$ en lugar de H y Zi, respectivamente.

Proposición 2.3.21. *Sea $G : ZB \longrightarrow X$ tal que $G\imath_0 = u$, $G\imath_1 = v$ y X fibrante . Entonces $J : [A,X]^{u\{i\}} \longrightarrow [A,X]^{v\{i\}}$, definida por $J([\alpha]) = [E_\alpha \imath_1]$, donde E_α es una extensión del cuadrado*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & ZB \arrow[d, "G"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

es una biyección.

Demostración. Sea $G' := \widetilde{G\rho}\lambda$, definido a partir de:

$$\begin{tikzcd} Z^1_{\{\imath_0,\imath_1\}} \arrow[rr, tail, "\{\imath_0,\imath_1,Z\imath_0,Z\imath_1\}"] \arrow[dd, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}^1"'] & & Z^2B \arrow[r, "G\rho"] \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd, "\rho^2", "\wr"'] & X \\ & \bullet \arrow[urr, dotted, "\widetilde{G\rho}"'] \arrow[dr, "\sim"] & & \\ Z^2B \arrow[ur, tail, "\sim", "\lambda"'] \arrow[rr, "\sim", "\rho^2"'] & & B & \end{tikzcd}$$

Si $H : \alpha \simeq \beta$ rel. i, entonces $E\imath_1 : E_\alpha \imath_1 \simeq E_\beta \imath_1$ rel. i donde E es la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} Z^1_i \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z^1_i) \arrow[d, "\{G',E_\alpha,E_\beta\}"] \\ ZA \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

El razonamiento anterior prueba que J es una aplicación. La biyectividad se demuestra considerando $J' : [A,X]^{v\{i\}} \longrightarrow [A,X]^{u\{i\}}$ definida de forma análoga a J pero considerando $\imath_1$ en lugar de $\imath_0$ en su cuadrado de definición. $\square$

Para el próximo resultado se considerarán morfismos $G_\varepsilon : ZB \longrightarrow X$ que darán lugar a distintas biyecciones, que se denotarán por J_ε.

Proposición 2.3.22. *Si $H : G_0 \simeq G_1$ rel. $\{\imath_0, \imath_1\}$, entonces $J_0 = J_1$. Es decir, $E^0_\alpha \imath_1 \simeq E^1_\alpha \imath_1$ rel. i, donde E^ε_α es una extensión del cuadrado:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i"'] & ZB \arrow[d, "G_\varepsilon"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

con X fibrante y $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Demostración. Sea $H' := \widetilde{H}\lambda$, obtenido a partir de:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_{\{\imath_0,\imath_1\}} \arrow[rr, tail, "{\{\imath_0,\imath_1,Z\imath_0,Z\imath_1\}}"] \arrow[dd, tail, "{\{\imath_0,\imath_1\}^1}"'] & & Z^2B \arrow[r, "H"] \arrow[dl, tail, "\sim"'] \arrow[dd, "\rho^2", "\wr"'] & X \\
& \bullet \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"] \arrow[dr, "\sim"] & & \\
Z^2B \arrow[ur, tail, "\sim", "\lambda"'] \arrow[rr, "\sim", "\rho^2"'] & & B &
\end{tikzcd}$$

Se prueba directamente que $E\imath_1$ es la homotopía buscada, siendo E la extensión del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_i \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z^1_i) \arrow[d, "{\{H',E^0_\alpha,E^1_\alpha\}}"] \\
ZA \arrow[r, "\alpha\rho"] & X
\end{tikzcd}$$

$\square$

Capítulo 3

Grupoides de Homotopía

Este capítulo está dedicado básicamente a la construcción de los grupos de homotopía relativos a cofibraciones y al estudio de algunas sus propiedades más importantes. Se seguirán pasos análogos a los existentes en la mayoría de teorías de homotopía algebraicas, construyendo los denominados *grupoides de homotopía*. Para la obtención de estos grupoides se usarán las técnicas ya descritas en los capítulos precedentes, sobre todo las basadas en la propiedad de extensión de homotopía de cofibraciones.

Los grupos de homotopía definidos por Baues en una categoría de cofibraciones también proceden de grupoides de homotopía relativos a cofibraciones. En este sentido, se verá que ambos grupoides de homotopía relativa tienen definidas operaciones equivalentes que permitirán posteriormente expresar los grupos de homotopía de Baues como un caso particular de los grupos de homotopía relativos a cofibraciones que se han creado. Se finaliza este capítulo definiendo grupos de homotopía para objetos no necesariamente fibrantes, usando para ello los morfismos inducidos por las equivalencias débiles.

3.1 Grupoides de homotopía relativa.

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ entre objetos cofibrantes, un objeto fibrante X y una construcción cilindro de i, $Zi : ZB \longrightarrow ZA$, se considera la categoría, $H_i(X)$, formada por:

- ***Objetos:*** Los elementos de $Hom(A, X)$.

- ***Morfismos:*** Dados dos objetos f_0 y f_1, los morfismos entre ellos son las clases homotopías relativas a i^1 de las homotopías relativas a i entre f_0 y f_1, es decir, el conjunto $H_i(f_0, f_1) := [ZA, X]^{\{u\rho_B, f_0, f_1\}\{i^1\}}$.

Por analogía con el caso clásico y para dar una visión más geométrica, se llamarán *puntos* a los objetos, *caminos* a las homotopías relativas a i entre dos de estos puntos y *clases de homotopía de caminos* a los morfismos.

Se observa que esta construcción no depende del cilindro de i tomado. Para comprobar este hecho, se razonará en dos pasos:

En primer lugar, si se consideran dos construcciones cilindro de i a partir de un mismo cilindro de B, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z_i^1 \arrow[r, tail, "i^1"] \arrow[d, tail, "(i^1)'"'] & ZA \arrow[d, "\rho", "\wr"'] \\ Z'A \arrow[r, "\rho'", "\sim"'] & A \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.3.18 existe una biyección:

$$[ZA, X]^{\{u\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}} \cong [Z'A, X]^{\{u\rho, f_0, f_1\}\{(i^1)'\}}$$

En el caso general, para dos cilindros de B, $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZB, \rho)$ y $(\{\imath'_0, \imath'_1\}, Z'B, \rho')$, se considera un cilindro cota superior de estos, $(\{\imath''_0, \imath''_1\}, Z''B, \rho'')$. Entonces, según el razonamiento hecho en la segunda parte de la proposición 2.1.5, se obtienen nuevos cilindros de A mediante push outs de la forma:

$$\begin{tikzcd} Z_i^1 \arrow[r, tail, "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z''^1_i \arrow[d, tail, "(i^1)''_0"] \\ ZA \arrow[r, tail, "\sim"'] & Z''_0A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z'^1_i \arrow[r, tail, "\sim"'] \arrow[d, tail, "(i^1)'"'] & Z''^1_i \arrow[d, tail, "(i^1)''_1"] \\ Z'A \arrow[r, tail, "\sim"'] & Z''_1A \end{tikzcd}$$

Por tanto, por la nota 2.3.14 se inducen biyecciones:

$$[Z''_0A, X]^{\{u\rho'', f_0, f_1\}\{(i^1)''_0\}} \cong [ZA, X]^{\{u\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}}$$

$$[Z''_1A, X]^{\{u\rho'', f_0, f_1\}\{(i^1)''_1\}} \cong [Z'A, X]^{\{u\rho', f_0, f_1\}\{(i^1)'\}}$$

Nótese que por la primera parte de este razonamiento, $[Z''_0A, X]^{\{u\rho'', f_0, f_1\}\{(i^1)''_0\}}$ y $[Z''_1A, X]^{\{u\rho'', f_0, f_1\}\{(i^1)''_1\}}$ son biyectivos, pues proceden de un mismo cilindro de B.

Demostrada la independencia del cilindro de i, se fijará uno cualquiera. Nuestro objetivo a lo largo de esta sección será probar que $H_i(X)$ es un grupoide, esto es, que se trata efectivamente de una categoría y que todos los morfismos son inversibles.

Se introducen las siguientes operaciones:

Si $f_0, f_1, f_2 \in Hom(A, X)$:

$$(\_)^{-1} : H_i(f_0, f_1) \longrightarrow H_i(f_1, f_0)\,; \qquad [F] \mapsto [F]^{-1} = [\widetilde{F}]$$

$$* : H_i(f_0, f_1) \times H_i(f_1, f_2) \longrightarrow H_i(f_0, f_2)\,; \qquad ([F], [G]) \mapsto [F] * [G] = [F * G]$$

donde $\widetilde{F}$ y $F * G$ son las inducidas en las propiedades simétrica y transitiva de la proposición 2.3.6. Las operaciones $^{-1}$ y $*$, una vez que se compruebe su buena definición, establecerán el inverso y la composición de morfismos. También se comprobará que la identidad en un objeto f se corresponderá con $[f\rho]$.

Antes de probar que toda la construcción anterior es un grupoide se introducirán algunos resultados previos en los que se hará uso de una nueva notación. Obsérvese que como el morfismo $i^1 : Z_i^1 \rightarrowtail ZA$ es una cofibración entre objetos cofibrantes, se puede considerar una construcción cilindro para i^1, obteniéndose una nueva cofibración entre objetos cofibrantes, $(i^1)^1 : Z_{i^1}^1 \rightarrowtail Z^2A$. Se denotará a $Z_{i^1}^1$ como Z_i^2 y a $(i^1)^1$ como i^2. Este paso se puede iterar de forma obvia, dando lugar a cofibraciones de la forma $i^n : Z_i^n \rightarrowtail Z^nA$ siendo $Z_i^n := Z_{i^{n-1}}^1$ e $i^n := (i^{n-1})^1$, con $n \geqslant 1$ (por convención $i^0 = i$).

Lema 3.1.1. *Sean los morfismos $f_5, g_5 : Z^2B \longrightarrow X$ y $f_k, g_k : ZA \longrightarrow X$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, tales que:*

$$f_5 \simeq g_5 \quad rel.\, \{\imath_0, \imath_1\}^1$$

$$f_k \simeq g_k \quad rel.\, i^1,\ 1 \leqslant k \leqslant 4$$

Entonces:

i) El morfismo $\{f_5, f_4, f_3, f_2, f_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$ existe si, y sólo si, existe el morfismo $\{g_5, g_4, g_3, g_2, g_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$.

ii) $\{f_5, f_4, f_3, f_2, f_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$ *tiene una extensión relativa a* i^2 *si, y sólo si,* $\{g_5, g_4, g_3, g_2, g_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$ *tiene una extensión relativa a* i^2*.*

Demostración. i) Una simple comprobación prueba que las condiciones para la existencia de una llave implican la existencia de la otra. Se dejan los detalles al lector.

ii) Sean $F_5 : f_5 \simeq g_5$ rel. $\{\imath_0, \imath_1\}^1$ y $F_k : f_k \simeq g_k$ rel. i^1, $1 \leqslant k \leqslant 4$, las correspondientes homotopías. Si $F : Z^2A \longrightarrow X$ es una extensión de $\{f_5, f_4, f_3, f_2, f_1\}$ relativa a i^2, se puede considerar el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^2"'] & Z(Z_i^2) \arrow[d, "\{F_5,F_4,F_3,F_2,F_1\}"] \\
Z^2A \arrow[r, "F"] & X
\end{tikzcd}$$

donde el cilindro de Z_i^2 y el morfismo $\{F_5, F_4, F_3, F_2, F_1\}$ se obtienen de la construcción push out siguiente, teniendo en cuenta el teorema 1.3.7:

$$\begin{tikzcd}
Z(Z_i^1) \sqcup Z(Z_i^1) \arrow[r, "Zi^1 \sqcup Zi^1"] \arrow[d, "Z\{\imath_0,\imath_1\}"'] & Z^2A \sqcup Z^2A \arrow[d, "Z\overline{\{\imath_0,\imath_1\}}"] \arrow[ddr, bend left, "\{F_2,F_1\}"] & \\
Z^2(Z_i^1) \arrow[r, "Z\overline{(i^1 \sqcup i^1)}"'] \arrow[drr, bend right, "\{F_5,F_4,F_3\}"'] & Z(Z_i^2) \arrow[dr, dotted, "\{F_5,F_4,F_3,F_2,F_1\}"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

La verificación de la existencia del morfismo $\{F_5, F_4, F_3, F_2, F_1\}$, aunque larga, es rutinaria, por lo que se omite su comprobación.

Como i^2 es cofibración, aplicando la P.E.H., se obtiene una extensión $E : Z^3A \longrightarrow X$. La extensión relativa a i^2 buscada de $\{g_5, g_4, g_3, g_2, g_1\}$ es el morfismo $E\imath_1$. □

Este resultado técnico se puede generalizar para cualquier morfismo en forma de llave con un número impar de componentes. Se presenta el enunciado general cuya demostración es análoga.

Lema 3.1.2. *Sean los morfismos* $f_{2n+1}, g_{2n+1} : Z^nB \longrightarrow X$ *y* $f_k, g_k : Z^{n-1}A \longrightarrow X$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ $(n \geqslant 1)$, *tales que:*

$$f_{2n+1} \simeq g_{2n+1} \quad rel.\ \{\imath_0, \imath_1\}^{n-1}$$

$$f_k \simeq g_k \quad rel.\, i^{n-1},\ 1 \leqslant k \leqslant 2n$$

Entonces:

i) *El morfismo* $\{f_{2n+1}, f_{2n}, ..., f_2, f_1\} : Z_i^n \longrightarrow X$ *existe si, y sólo si, existe el morfismo* $\{g_{2n+1}, g_{2n}, ..., g_2, g_1\} : Z_i^n \longrightarrow X$.

ii) $\{f_{2n+1}, f_{2n}, ..., f_2, f_1\} : Z_i^n \longrightarrow X$ *tiene una extensión relativa a* i^n *si, y sólo si,* $\{g_{2n+1}, g_{2n}, ..., g_2, g_1\} : Z_i^n \longrightarrow X$ *tiene una extensión relativa a* i^n.

□

El siguiente lema también será de gran utilidad.

Lema 3.1.3. *Sean* $g : A \longrightarrow X$ *y* $f_k : ZA \longrightarrow X$, $k = 1, ..., 4$. *Entonces:*

i) *El morfismo* $\{gi\rho^2, f_4, f_3, f_2, f_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$ *existe si, y sólo si, existe el morfismo* $\{gi\rho^2, f_2, f_1, f_4, f_3\} : Z_i^2 \longrightarrow X$

ii) $\{gi\rho^2, f_4, f_3, f_2, f_1\} : Z_i^2 \longrightarrow X$ *tiene una extensión relativa a* i^2 *si, y sólo si,* $\{gi\rho^2, f_2, f_1, f_4, f_3\}$ *tiene una extensión relativa a* i^2.

Demostración. i) Se demuestra de manera similar a los lemas anteriores. Se recuerda que ρ^2 denota la composición $Z^2B \xrightarrow{\rho} ZB \xrightarrow{\rho} B$.

ii) Según se vio en la proposición 2.2.1, el objeto push out Z_i^1 se puede obtener mediante los dos push outs. Del mismo modo, considerando como cofibración a i^1, se obtiene el objeto push out Z_i^2.

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "i^1"] \arrow[d, tail, "\imath_0"', "\wr"] & ZA \arrow[d, tail, "\overline{\imath_0}", "\wr"'] \\
Z(Z_i^1) \arrow[r, tail, "\overline{i^1}"] & P\{\imath_0, i^1\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "i^1"] \arrow[d, tail, "\overline{i^1}\imath_1"'] & ZA \arrow[d, tail, "\overline{\overline{i^1}\imath_1}"] \\
P\{\imath_0, i^1\} \arrow[r, tail, "\widetilde{i^1}"] & Z_i^2
\end{tikzcd}$$

Entonces, el siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_{\{(\imath_0)_B, (\imath_1)_B\}} \arrow[r, "(Zi \sqcup Zi)\cup(Zi \sqcup Zi)"] \arrow[d, "\{(\imath_0)_B, (\imath_1)_B\}^1"'] & Z^1_{\{(\imath_0)_A, (\imath_1)_A\}} \arrow[d, "\{\widetilde{i}\,\overline{i^1} Z\widetilde{i} Z\overline{\imath_0}, \widetilde{i}\,\overline{i^1} Z(\overline{\overline{i}\imath_1}), \widetilde{i^1}\overline{\imath_0}, \overline{\overline{i^1}\imath_1}\}"] \\
Z^2B \arrow[r, "\widetilde{i}\,\overline{i^1} Z\widetilde{i} Z\overline{i}"'] & Z_i^2
\end{tikzcd}$$

Sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[r, "\rho^2\cup\{\imath_0,\imath_1,Z\imath_0,Z\imath_1\}"] \arrow[d, tail, "i^2"'] & P\{\rho^2, Z_i^2\} \arrow[d, "\{i,\rho^2\}", "\wr"'] \\
Z^2A \arrow[r, "\sim", "\rho^2"'] & A
\end{tikzcd}$$

donde $\rho^2 \cup \{\imath_0, \imath_1, Z\imath_0, Z\imath_1\}$ denota el morfismo $\rho^2 \cup_\gamma \{\imath_0, \imath_1, Z\imath_0, Z\imath_1\}$, siendo $\gamma = \{\imath_0, \imath_1, Z\imath_0, Z\imath_1\} : Z^1_{\{(\imath_0)_B,(\imath_1)_B\}} \longrightarrow Z^2B$. Por otro lado, se deduce de la aplicación del lema 1.1.8 que $\{i, \rho^2\}$ $(= 1 \cup \rho^2)$ es equivalencia débil.

Por las proposiciones 1.1.4 y 1.2.2 se obtiene el siguiente diagrama conmutativo, siendo F una extensión de $\{gi\rho^2, f_4, f_3, f_2, f_1\}$ relativa a i^2:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[rr, "\rho^2\cup\{\imath_0,\imath_1,Z\imath_0,Z\imath_1\}"] \arrow[dd, tail, "i^2"'] & & P\{\rho^2, Z^2 i\} \arrow[r, "\{gi,F\}"] \arrow[dl, "\sim"', "\alpha"] \arrow[dd, "\{i,\rho^2\}", "\wr"'] & X \\
 & E \arrow[urr, dotted, "T"] \arrow[dr, "\sim", "\beta"'] & & \\
Z^2A \arrow[ur, "\sim", "\alpha'"'] \arrow[rr, "\sim", "\rho^2"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

Una simple comprobación demuestra que $T\alpha'$ es una extensión de $\{gi\rho^2, f_2, f_1, f_4, f_3\}$ relativa a i^2. $\square$

Los resultados vistos son suficientes para justificar que las operaciones $*$ y $^{-1}$ están bien definidas.

Proposición 3.1.4. *Sean $F : f_0 \simeq f_1$ rel. i y $F' : f_1 \simeq f_0$ rel. i. Entonces, $[F'] = [\widetilde{F}]$ si, y sólo si $\{u\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, F'\}$ tiene una extensión relativa a i^2.*

Demostración. En primer lugar, se recuerda que $\widetilde{F} = E_F\imath_1$ donde E_F es una extensión cualquiera del siguiente cuadrado de homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z_i^1) \arrow[d, "\{u\rho^2,F,f_0\rho\}"] \arrow[ddr, bend left, "Zi^1"] & \\
ZA \arrow[r, "f_0\rho"] \arrow[drr, bend right, "\sim", "\imath_0"'] & X & \\
 & & Z^2A \arrow[ul, dotted, "E_F"']
\end{tikzcd}$$

usado en la demostración de la propiedad simétrica. Se deduce, en particular que $E_F i^2 = \{u\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{F}\}$.

Si $[F'] = [\widetilde{F}]$, por el lema 3.1.1, $\{u\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, F'\}$ tiene una extensión relativa a i^2. Recíprocamente, si G es una extensión de $\{u\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, F'\}$ relativa a i^2, entonces es una extensión válida del cuadrado de homotopía anterior. Luego, $[F'] = [G\imath_1] = [E_F\imath_1] = [\widetilde{F}]$. $\square$

Corolario 3.1.5. $^{-1}$ *está bien definida.*

Demostración. Sean $[F_0] = [F_1] \in H_i(f_0, f_1)$. De forma obvia, $\{u\rho^2, F_0, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{F_0}\}$ tiene una extensión relativa a i^2. Por el lema 3.1.1, $\{u\rho^2, F_1, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{F_0}\}$ también tiene una extensión relativa a i^2. Por tanto, $[\widetilde{F_0}] = [\widetilde{F_1}]$. $\square$

Proposición 3.1.6. *Sean $F : f_0 \simeq f_2$ rel. i, $F_0 : f_0 \simeq f_1$ rel. i y $F_1 : f_1 \simeq f_2$ rel. i. Entonces, $[F] = [F_0 * F_1]$ si, y solo si, $\{u\rho^2, \widetilde{F_0}, F_1, f_1\rho, F\}$ tiene una extensión relativa a i^2.*

Demostración. En primer lugar, se recuerda que $F_0 * F_1 = E_{(F_0,F_1)}\imath_1$ donde $E_{(F_0,F_1)}$ es una extensión cualquiera del cuadrado de homotopía:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z_i^1) \arrow[d, "\{u\rho^2, \widetilde{F_0}, F_1\}"] \arrow[rdd, bend left, "Zi^1"] & \\
ZA \arrow[r, "f_1\rho"] \arrow[rrd, bend right, "\sim", "\imath_0"'] & X & \\
 & & Z^2A \arrow[lu, dotted, "E_{(F_0,F_1)}"']
\end{tikzcd}$$

usado en la demostración de la propiedad transitiva. Se deduce, en particular, que $E_{(F_0,F_1)}i^2 = \{u\rho^2, \widetilde{F_0}, F_1, f_1\rho, F_0 * F_1\}$.

Si $[F] = [F_0 * F_1]$ por el lema 3.1.1 se tiene la suficiencia. Recíprocamente, si H es una extensión de $\{u\rho^2, \widetilde{F_0}, F_1, f_1\rho, F\}$ relativa a i^2, entonces H es una extensión válida del cuadrado de homotopía anterior, luego $[F] = [H\imath_1] = [E_{(F_0,F_1)}\imath_1] = [F_0 * F_1]$. $\square$

Corolario 3.1.7. * *está bien definida.*

Demostración. Sean $([F_0], [G_0]) = ([F_1], [G_1]) \in H_i(f_0, f_1) \times H_i(f_1, f_2)$. Claramente, el morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F_0}, G_0, f_1\rho, F_0 * G_0\}$ tiene una extensión relativa a

i^2. Por otro lado, como la operación $^{-1}$ está bien definida, $[F_0]^{-1} = [F_1]^{-1}$, es decir, $\widetilde{F_0} \simeq \widetilde{F_1}$ rel. i^1. Por tanto, por el lema 3.1.1, $\{u\rho^2, \widetilde{F_1}, G_1, f_1\rho, F_0 * G_0\}$ también tiene una extensión relativa a i^2. Por la proposición anterior $[F_0 * G_0] = [F_1 * G_1]$. $\square$

En lo sucesivo, se denotará a $1_f := [f\rho]$, para cada $f \in Hom(A, X)$.

Lema 3.1.8. $(1_f)^{-1} = 1_f$

Demostración. Inmediata, teniendo en cuenta que $f\rho^2$ es una extensión relativa a i^2 del morfismo $\{u\rho^2, f\rho, f\rho, f\rho, f\rho\}$. $\square$

1_f se comporta como la identidad en f respecto de $*$:

Proposición 3.1.9. *Dado* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $1_{f_0} * [F] = [F] = [F] * 1_{f_1}$

Demostración. Haciendo un razonamiento similar al realizado en en el lema 3.1.2, se obtiene un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[rr, "\rho^2 \cup \{Z\imath_0, \imath_1, Z\imath_0, \imath_1\}"] \arrow[dd, tail, "i^2"'] & & P\{\rho^2, Z^2 i\} \arrow[r, "\{u, F\rho\}"] \arrow[dl, "\sim"', "\alpha"] \arrow[dd, "\wr"', "\{i, \rho^2\}"] & X \\
& E \arrow[urr, dotted, bend right, "T"'] \arrow[dr, "\sim", "\beta"'] & & \\
Z^2 A \arrow[ur, "\sim", "\alpha'"'] \arrow[rr, "\sim", "\rho^2"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

Se deduce que $T\alpha'$ es una extensión relativa a i^2 de $\{u\rho^2, f_0\rho, F, f_0\rho, F\}$.

Como por el lema anterior, $f_0\rho \simeq \widetilde{f_0\rho}$ rel. i^1, el morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{f_0\rho}, F, f_0\rho, F\}$ tiene una extensión relativa a i^2. Por tanto, $[F] = [(f_0\rho) * F] = 1_{f_0} * [F]$.

Por otro lado, se prueba que $\{u\rho^2, F, f_1\rho, F, f_1\rho\}$ tiene una extensión relativa a i^2, que denotará por H. Para ello, se hace uso de un argumento análogo al de la primera parte de esta demostración considerando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[r, "\rho^2 \cup \{\imath_0, Z\imath_1, \imath_0, Z\imath_1\}"] \arrow[d, tail, "i^2"'] & P\{\rho^2, Z^2 i\} \arrow[d, "\wr"', "\{i, \rho^2\}"] \\
Z^2 A \arrow[r, "\sim", "\rho^2"'] & A
\end{tikzcd}$$

Sea el cuadrado de homotopía siguiente:

$$\begin{tikzcd} Z_i^2 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^2"'] & Z(Z_i^2) \arrow[d, "\{u\rho^3, E_F, f_1\rho^2, H, F\rho\}"] \\ Z^2A \arrow[r, "F\rho"] & X \end{tikzcd}$$

Una comprobación elemental demuestra que el morfismo $\{u\rho^3, E_F, f_1\rho^2, H, F\rho\}$ existe. Tomando E como una extensión del cuadrado de homotopía anterior, se prueba directamente que $E\imath_1$ es una extensión relativa a i^2 del morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F}, f_1\rho, f_1\rho, F\}$, y por lo visto anteriormente, $[F] = [F * f_1\rho] = [F] * 1_{f_1}$. □

Nota 3.1.10. En la última parte de esta demostración se comprueba la existencia de una extensión relativa a i^2 de $\{u\rho^2, \widetilde{F}, f_1\rho, f_1\rho, F\}$. De este hecho se deduce que $[F] = ([F]^{-1})^{-1}$.

Proposición 3.1.11. *Sea $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, entonces $[F] * [F]^{-1} = 1_{f_0}$ y $[F]^{-1} * [F] = 1_{f_1}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\widetilde{F}Z\rho$ es una extensión relativa a i^2 del morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F}, \widetilde{F}, f_1\rho, f_0\rho\}$, se prueba directamente que $[f_0\rho] = [F * \widetilde{F}]$.

Por otro lado, como $F\rho$ es una extensión relativa a i^2 de $\{u\rho^2, f_0\rho, f_1\rho, F, F\}$, en virtud del lema 3.1.2 y la nota 3.1.10 también existirá una extensión de $\{u\rho^2, \widetilde{(\widetilde{F})}, F, f_0\rho, f_1\rho\}$, de donde se concluye que $[f_1\rho] = [\widetilde{F} * F]$. □

Lema 3.1.12. *Sean $F \in H_i(f_0, f_1)$ y $G \in H_i(f_1, f_2)$. Entonces, $[F * G]^{-1} = [G]^{-1} * [F]^{-1}$.*

Demostración. El morfismo $\widetilde{F}\rho$ es una extensión relativa a i^2 del morfismo $\{u\rho^2, f_1\rho, f_0\rho, \widetilde{F}, \widetilde{F}\}$. Por tanto, aplicando el lema 3.1.2, existe una extensión, H, del morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F}, \widetilde{F}, f_1\rho, f_0\rho\}$. Por la P.E.H., se considera E una extensión del siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z_i^2 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^2"'] & Z(Z_i^2) \arrow[d, "\{u\rho^3, E_{(F,G)}, H, H, E_{(\tilde{G},\tilde{F})}\}"] \\ Z^2A \arrow[r, "f_1\rho^2"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces $E\imath_1$ es una extensión relativa a i^2 de $\{u\rho^2, F * G, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{G} * \widetilde{F}\}$, concluyéndose la demostración. □

Nota 3.1.13. Cabe resaltar que en la construcción de la extensión $E_{(\widetilde{G},\widetilde{F})}$ considerada en la demostración, se ha hecho una pequeña modificación, sustituyendo $\widetilde{\widetilde{G}}$ por G, como se muestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z_i^1) \arrow[d, "\{u\rho^2, G, \widetilde{F}\}"] \arrow[rdd, bend left, "Zi^1"] & \\
ZA \arrow[r, "f_1\rho"] \arrow[rrd, bend right, tail, "\sim", "\imath_0"'] & X & \\
 & & Z^2A \arrow[lu, dotted, "E_{(\widetilde{G},\widetilde{F})}"']
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que si H es una homotopía entre G y $\widetilde{\widetilde{G}}$ relativa a i^1, ya que:

$$\{u\rho^2, H, \widetilde{F}\rho\} : \{u\rho^2, G, \widetilde{F}\} \simeq \{u\rho^2, \widetilde{\widetilde{G}}, \widetilde{F}\} \text{ rel. } \{\imath_0, \imath_1\}$$

por la proposición 2.3.22, cualquier extensión del cuadrado anterior seguida de $\imath_1$ es un representante de $[\widetilde{G} * \widetilde{F}]$.

Lema 3.1.14. *Sean* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $[G] \in H_i(f_1, f_3)$ *y* $[H] \in H_i(f_1, f_2)$. *Entonces,* $[F] * [H] = ([F] * [G]) * ([G]^{-1} * [H])$.

Demostración. El morfismo $G\rho$ es una extensión relativa a i^2 del morfismo $\{u\rho^2, f_1\rho, f_3\rho, G, G\}$ y, por el lema 3.1.2, existe una extensión, K, del morfismo $\{u\rho^2, G, G, f_1\rho, f_3\rho\}$. Por la P.E.H., se considera E una extensión del siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^2 \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^2"'] & Z(Z_i^2) \arrow[d, "\{u\rho^3, E_{(\widetilde{G},\widetilde{F})}, E_{(\widetilde{G},H)}, K, E_{(F*H)}\}"] \\
Z^2A \arrow[r, "f_1\rho^2"] & X
\end{tikzcd}$$

Entonces $E\imath_1$ es una extensión relativa a i^2 de $\{u\rho^2, \widetilde{G} * \widetilde{F}, \widetilde{G} * H, f_3\rho, F * H\}$, concluyéndose el resultado. $\square$

Este último lema permite probar de manera inmediata la asociatividad de $*$:

Proposición 3.1.15. *Sean* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $[G] \in H_i(f_1, f_2)$ *y* $[H] \in H_i(f_2, f_3)$. *Entonces,* $([F] * [G]) * [H] = [F] * ([G] * [H])$.

Demostración.

$$\begin{aligned}([F]*[G])*[H] &= (([F]*[G])*[G]^{-1})*([G]*[H])\\ &= (([F]*[G])*([G]^{-1}*1_{f_1}))*([G]*[H])\\ &= ([F]*1_{f_1})*([G]*[H])\\ &= [F]*([G]*[H]).\end{aligned}$$

□

Todos los resultados anteriores permiten concluir el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.1.16. *$H_i(X)$ es un grupoide.*

Nota 3.1.17. Obsérvese que la notación empleada para la composición de morfismos, $[F]*[G]$, no es la usual en categorías. Normalmente, se suele denotar como $[G]\circ[F]$. No obstante, por la analogía con la multiplicación de caminos, se hará uso de la primera.

Se verá ahora la relación entre $H_i(X)$ y $H_i(Y)$ cuando existe un morfismo entre X e Y. Dado $g : X \longrightarrow Y$ un morfismo entre objetos fibrantes, se considera la construcción

$$H_i(g) : H_i(X) \longrightarrow H_i(Y)$$

dada por $H_i(g)(f) := gf$, para cada $f \in Hom(A, X)$ y $H_i(g)([F]) := [gF]$, para cada $[F] \in H_i(f_0, f_1)$. Obsérvese que esta asignación está bien definida pues no depende del representante de la clase de homotopía considerado.

Proposición 3.1.18. *$H_i(g) : H_i(X) \longrightarrow H_i(Y)$ es un funtor.*

Demostración. Claramente, $H_i(g)$ conserva las identidades. Por otro lado, sean $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ y $[G] \in H_i(f_1, f_2)$. En primer lugar, se observa que $g\widetilde{F} \simeq \widetilde{gF}$ rel. i^1. En efecto, si E es la extensión de $\{u\rho^2, H, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{H}\}$ relativa a i^2, es inmediato comprobar que gE lo es de $\{gu\rho^2, gH, gf_0\rho, gf_0\rho, g\widetilde{H}\}$.

Por tanto, $[g(F * G)] = [gF * gG]$, sin más que tener en cuenta que el morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F}, G, f_1\rho, F * G\}$ tiene una extensión relativa a i^2, por lo que componiendo con g y haciendo uso del comentario anterior,

$\{gu\rho^2, \widetilde{gF}, gG, gf_1\rho, g(F*G)\}$ también tiene una extensión relativa a i^2. Así:

$$\begin{aligned} H_i(g)([F]*[G]) &= H_i(g)([F*G]) \\ &= [g(F*G)] \\ &= [gF*gG] \\ &= [gF]*[gG] \\ &= H_i(g)([F])*H_i(g)([G]) \end{aligned}$$

□

Para acabar esta sección, se estudia la relación entre los grupoides de homotopía inducidos cuando se consideran diferentes cofibraciones relacionadas por un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Obsérvese que por el lema 2.3.12, siguiendo un proceso iterativo, existen cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} Z_j^n \arrow[r, "Z^n g \cup Z^{n-1} f \cup \overset{(2n)}{\cdots} \cup Z^{n-1} f"] \arrow[d, tail, "j^n"'] & Z_i^n \arrow[d, tail, "i^n"] \\ Z^n C \arrow[r, "Z^n f"'] & Z^n A \end{tikzcd}$$

Además, si el cuadrado original es un push out, también lo es éste, para cada $n \geqslant 1$.

En lo sucesivo, se tomará $Z^n f$ de la forma anteriormente descrita. Se considera la construcción

$$f^\sharp : H_i(X) \longrightarrow H_j(X)$$

dada por $f^\sharp(f_0) := f_0 f$, para cada $f \in Hom(A, X)$ y $f^\sharp([F]) := (Zf)^*([F]) = [FZf]$, para cada $[F] \in H_i(f_0, f_1)$.

Proposición 3.1.19. *$f^\sharp : H_i(X) \longrightarrow H_j(X)$ es un funtor.*

Demostración. Obviamente, $f^\sharp$ conserva las identidades puesto que $\rho Z f = f\rho$. Por otro lado, sean $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ y $[G] \in H_i(f_1, f_2)$. En primer lugar se observa que $\widetilde{F}(Zf) \simeq \widetilde{F(Zf)}$ rel. j^1. En efecto, si $H : Z^2A \longrightarrow X$ es una extensión de $\{u\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, \widetilde{F}\}$ relativa a i^2, es sencillo comprobar que $HZ^2f : Z^2C \longrightarrow X$ es una extensión de $\{gu\rho^2, FZf, f_0f\rho, f_0f\rho, \widetilde{F}Zf\}$ relativa a j^2.

Por otro lado, existe una extensión K del morfismo $\{u\rho^2, \widetilde{F}, G, f_1\rho, F * G\}$ relativa a i^2. Se prueba que KZ^2f es una extensión de $\{gu\rho, \widetilde{F}Zf, GZf, f_1f\rho, (F * G)Zf\}$ relativa a j^2. Por la observación anterior y la proposición 3.1.6, se concluye el resultado. □

3.2 Relación con el grupoide de Baues.

La construcción de los grupoides de homotopía que se ha establecido difiere, a priori, con los de Baues pues en estos últimos se utilizan cilindros relativos y las operaciones se definen de forma distinta. Cabe plantearse si existe alguna relación entre estos grupoides. El objetivo de esta sección es demostrar que, en realidad, se tratan de grupoides isomorfos.

En primer lugar, se hace un breve repaso de cómo construye Baues el grupoide de homotopía. Dado un objeto fibrante X y una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, si $(\{\jmath_0, \jmath_1\}, Z^i, \sigma)$ es un cilindro relativo a i, el grupoide $H'_i(X)$ construido por Baues es la categoría formada por:

- ***Objetos:*** Los elementos de $Hom(A, X)$.

- ***Morfismos:*** Dados dos objetos f_0 y f_1, los morfismos entre ellos son los elementos del corchete de homotopía (de Baues):

$$H'_i(f_0, f_1) = [Z^i, X]^{\{f_0,f_1\}\{\jmath_0,\jmath_1\}}$$

Las operaciones en este grupoide vienen dadas por:

$$(\_)^{-1} : H'_i(f_0, f_1) \longrightarrow H'_i(f_1, f_0)\,; \quad [F] \mapsto [F]^{-1} = [\widehat{F}]$$

$$\triangle\colon H'_i(f_0, f_1) \times H'_i(f_1, f_2) \longrightarrow H'_i(f_0, f_2)\,; \quad ([F], [G]) \mapsto [F] \triangle [G] = [F \triangle G]$$

donde $\widehat{F} = F'\alpha$ y $F \triangle G = \{F, G\}'\alpha'$ se construyen mediante los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\{\jmath_1,\jmath_0\}"] \arrow[dd, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"'] & & Z^i \arrow[r, "F"] \arrow[dl, tail, "\sim"', "\beta"] \arrow[dd, "\wr"', "\sigma"] & X \\
& E \arrow[urr, dotted, "F'"'] \arrow[dr, "\sim", "\gamma"'] & & \\
Z^i \arrow[ur, tail, "\sim", "\alpha"'] \arrow[rr, "\sim", "\sigma"'] & & A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\jmath_0\cup\jmath_1"] \arrow[dd, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"'] & & P\{\jmath_1,\jmath_0\} \arrow[r, "\{F,G\}"] \arrow[dl, tail, "\sim"', "\beta'"] \arrow[dd, "\wr"', "\{\sigma,\sigma\}"] & X \\
& E' \arrow[urr, dotted, "\{F,G\}'"'] \arrow[dr, "\sim", "\gamma'"'] & & \\
Z^i \arrow[ur, tail, "\sim", "\alpha'"'] \arrow[rr, "\sim", "\sigma"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

Además, el elemento identidad es $[f\sigma]$.

Para demostrar que las operaciones definidas en ambos grupoides son equivalentes, se necesitan probar algunos resultados previos.

Lema 3.2.1. *Dado el morfismo* $\{i\rho,1\}\cup 1 : Z_i^1 \longrightarrow P\{i,i\}$*, existen cilindros de* i*,* ρ *y de* $1_{Z_i^1}$ *de modo que* $(\{ZiZ\rho,1\}\cup 1)Z1$ *es un cilindro de* $\{i\rho,1\}\cup 1$*.*

Demostración. Aplicando las proposiciones 1.3.9 y 1.3.6, se tiene que $\{ZiZ\rho, Z1\}\cup 1$ es un cilindro de $\{i\rho,1\}\cup 1$. Como $\{ZiZ\rho, Z1\}\cup 1 = (\{ZiZ\rho,1\}\cup 1)((1\cup Z1)\cup 1)$ y $((1\cup Z1)\cup 1)$ es un cilindro de $1_{Z_i^1}$, se tiene el resultado. $\square$

Teniendo en cuenta el push out:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^1 \arrow[r, "\{i\rho,1\}\cup 1", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & P\{i,i\} \arrow[d, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"] \\
ZA \arrow[r, "w", "\sim"'] & Z^i
\end{tikzcd}$$

se considera la construcción:

$$w^* : H_i'(X) \longrightarrow H_i(X)$$

dada por $w^*(f) = f$, para cada $f \in Hom(A,X)$ y $w^*([F]) = [Fw]$, para cada $[F] \in H_i'(f_0,f_1)$. Nótese que esta asignación está bien definida en virtud de la proposición 2.3.13.

Proposición 3.2.2. *Sean* $[F] \in H_i'(f_0,f_1)$ *y* $[G] \in H_i'(f_1,f_2)$*. Entonces:*

i) $w^*([\widehat{F}]) = \widetilde{w^*([F])}$

ii) $w^*([F \vartriangle G]) = w^*([F]) * w^*([G])$

Demostración. En primer lugar, se considera el inverso de $[F]$ en el grupoide de Baues, dado por $[F]^{-1} = [\widehat{F}] = [F'\alpha]$ de la forma anteriormente descrita. Dado que el objeto central es cofibrante, se puede tomar un cilindro cualquiera $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZE, \rho)$ para así obtener otra factorización mediante el objeto ZE y morfismos $\imath_1\alpha$, $\gamma\rho$ y $\imath_1\beta$. La extensión de F relativa a $\imath_1\beta$ se denotará por F''. Por otro lado, sea el morfismo $F''' : Z(Z^i) \longrightarrow X$ obtenido tras aplicar las proposiciones 1.2.2 y 1.1.4 al siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_{\{\jmath_0,\jmath_1\}} \arrow[r, "\{w,\jmath_0\rho,\jmath_0\sigma,1\}"] \arrow[d, tail, "\{\jmath_1,\jmath_0\}^1"'] & Z^i \arrow[d, "\sigma", "\wr"'] \\
Z(Z^i) \arrow[r, "\sim", "\sigma\rho"'] & A
\end{tikzcd}$$

Se prueba que una extensión del morfismo $\{F''', f_0\gamma, F'\}$ relativa a la cofibración trivial β^1, también lo es de F relativa a $\imath_1\beta$, luego puede tomarse F'' como dicha extensión. De este modo, $w^*([\widehat{F}]) = [F''\imath_1\alpha w] = [F''Z\alpha Zw\imath_1]$. Una simple comprobación demuestra que $F''Z\alpha Zw$ es una extensión del cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_i \arrow[r, tail, "\imath_0", "\sim"'] \arrow[d, tail, "i^1"'] & Z(Z^1_i) \arrow[d, "\{u\rho^2,Fw,f_0\rho\}Z1"] \\
ZA \arrow[r, "f_0\rho"] & X
\end{tikzcd}$$

donde $Z1 : Z(Z^1_i) \longrightarrow Z'(Z^1_i)$ es el dado en el lema 3.2.1. Teniendo en cuenta la nota 2.3.20, se demuestra el primer apartado.

Se considera ahora el producto de $[F]$ y $[G]$ en el grupoide de Baues, obtenido a partir del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[rr, tail, "\beta\jmath_0\cup\jmath_1"] \arrow[dd, tail, "\{\jmath_0,\jmath_1\}"'] & & P\{\beta\jmath_1,\jmath_0\} \arrow[r, "\{F',G\}"] \arrow[dl, tail, "\lambda", "\sim"'] \arrow[dd, "\{\gamma,\sigma\}", "\wr"'] & X \\
& E' \arrow[urr, dotted, "H'"] \arrow[dr, "\mu", "\sim"'] & & \\
Z^i \arrow[ur, tail, "\nu", "\sim"'] \arrow[rr, "\sim", "\sigma"'] & & A &
\end{tikzcd}$$

Nótese que este no es el diagrama habitual de definición del producto, pero es equivalente a él y, de este modo, $[F \vartriangle G] = [H'\nu]$. De igual manera a como se hizo antes, este cuadrado admite una factorización mediante un cilindro de E'. Llamemos H'' a la extensión de $\{F', G\}$ correspondiente y sea $H''' : ZP\{\beta\jmath_1, \jmath_0\} \longrightarrow X$, en morfismo obtenido tras aplicar las proposiciones 1.2.2 y 1.1.4 al cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_{(\beta\jmath_0\cup\jmath_1)} \arrow[r, "\{\alpha w\cup w, \alpha\jmath_0\gamma\cup\jmath_0\sigma, 1\cup 1\}"] \arrow[d, tail, "(\beta\jmath_0\cup\jmath_1)^1"'] & P\{\beta\jmath_1, \jmath_0\} \arrow[d, "\{\gamma,\sigma\}", "\wr"'] \\
ZP\{\beta\jmath_1, \jmath_0\} \arrow[r, "\sim", "\{\gamma,\sigma\}\rho"'] & A
\end{tikzcd}$$

Tomando como H'' a una extensión del morfismo $\{H''', f_1\mu, H'\}$ relativa a la cofibración trivial λ^1 y considerando un razonamiento similar al expuesto anteriormente, se llega a que $w^*([F \vartriangle G]) = [H''Z\nu Zw\imath_1] = [E_{(Fw,Gw)}\imath_1] = [Fw * Gw] = w^*([F]) * w^*([G])$. $\square$

La proposición anterior, junto con el hecho de que $f\sigma w = f\rho$, para cualquier $f \in Hom(A, X)$, muestran la funtorialidad de w^*. Además, este funtor es una biyección entre los conjuntos de los morfismos de ambas categorías, lo que permite concluir el siguiente teorema:

Teorema 3.2.3. $w^* : H'_i(X) \longrightarrow H_i(X)$ *es un isomorfismo de grupoides*

$\square$

3.3 Grupos de homotopía relativa.

La construcción del grupoide de homotopía dada en la sección primera da origen a una definición de 1-grupo de homotopía relativo a i basado en un punto sin más que fijar un objeto del grupoide (que se llamará *punto base*) y considerar todos los morfismos del objeto en sí mismo. Tomando la n-ésima iteración de esta cofibración, i^n, se obtendrá el n-grupo de homotopía relativo a i. Se verá una descripción explícita de estos grupos así como algunas de sus propiedades más importantes.

Como ya se ha dicho, $i^n : Z^n_i \rightarrowtail Z^n A$ representa la n-ésima iteración de la cofibración i. Esto no hay que confundirlo con la composición sucesiva de transformaciones naturales como sucede con:

$$Z^n A \xrightarrow{\rho} Z^{n-1}A \xrightarrow{\rho} \dots \xrightarrow{\rho} ZA \xrightarrow{\rho} A$$

que se ha denotado por ρ^n. Por convenio, $\rho^0 := 1_A$ e $i^0 := i$. En general, si no hay posibilidad de error se usará la misma notación sin especificar si es iteración o composición.

Definición 3.3.1. Dado $f_0 \in Hom(A,X)$, se define el *n-grupo de homotopía de X relativo a i con punto base f_0* a:

$$\pi_n^i(X,f_0) := H_{i^{n-1}}(f_0\rho^{n-1}, f_0\rho^{n-1}) = [Z^nA, X]^{\{f_0\rho^{n-1}i^{n-1}\rho, f_0\rho^{n-1}, f_0\rho^{n-1}\}\{i^n\}} \quad , n \geq 1$$

Nota 3.3.2. De esta definición se deduce que:

$$\pi_n^i(X,f_0) = \pi_{n-k}^{i^k}(X, f_0\rho^k) \quad , 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Si $g : X \longrightarrow Y$ es un morfismo entre objetos fibrantes, para cada $n \geqslant 1$, surge de forma natural la aplicación:

$$\pi_n^i(g) : \pi_n^i(X,f_0) \longrightarrow \pi_n^i(Y, gf_0)\,; \quad [F] \mapsto [gF]$$

esto es, $\pi_n^i(g) := H_{i^{n-1}}(g)$.

Corolario 3.3.3. *Si $n \geqslant 1$, $\pi_n^i(g) : \pi_n^i(X,f_0) \longrightarrow \pi_n^i(Y,gf_0)$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Es directa a partir de la definición y de la proposición 3.1.18. ☐

Nota 3.3.4. Obsérvese que π_n^i tiene carácter funtorial. Una sencilla comprobación demuestra que conserva la composición y la identidad.

Teorema 3.3.5. *Si $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ es una equivalencia débil entre objetos fibrantes, entonces $\pi_n^i(h) : \pi_n^i(X,f_0) \longrightarrow \pi_n^i(Y,hf_0)$ es un isomorfismo de grupos, $n \geq 1$.*

Demostración. Se comprobará en primer lugar la inyectividad. Sean $[F]$ y $[G] \in \pi_n^i(X,f_0)$ tales que $[hF] = [hG] \in \pi_n^i(Y,hf_0)$. Se considera la siguiente diagonal, cuya existencia está garantizada por la proposición 2.3.9:

$$\begin{tikzcd}
Z_i^{n+1} \arrow[r, "\{Fi^n\rho, F, G\}"] \arrow[d, tail, "i^{n+1}"'] & X \arrow[d, "h", "\wr"'] \\
Z^{n+1}A \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "L"] & Y
\end{tikzcd}$$

donde H es una homotopía, $H : hF \simeq hG$ rel. i^n. Claramente, $L : F \simeq G$ rel. i^n.

Para probar la sobreyectividad, sea $[W] \in \pi_n^i(Y, hf_0)$ y F una elevación del cuadrado de homotopía siguiente:

$$\begin{tikzcd} Z_i^n \arrow[r, "\{f_0\rho^{n-1}i^{n-1}\rho, f_0\rho^{n-1}, f_0\rho^{n-1}\}"] \arrow[d, tail, "i^n"'] & X \arrow[d, "h", "\wr"'] \\ Z^nA \arrow[ur, dotted, "F"] \arrow[r, "W"'] & Y \end{tikzcd}$$

Se comprueba directamente que $[F] \in \pi_n^i(X, f_0)$ y que $\pi_n^i(h)([F]) = [hF] = [W]$. $\square$

Los cuadrados conmutativos que relacionan cofibraciones también inducen relaciones entre los grupos de homotopía.

Proposición 3.3.6. *Dado el cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

y $f_0 : A \longrightarrow X$*, entonces* $(Z^n f)^* : \pi_n^i(X, f_0) \longrightarrow \pi_n^j(X, f_0 f)$ *es homomorfismo de grupos. Además, si el cuadrado es un push out, entonces* $(Z^n f)^*$ *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. El hecho de ser homomorfismo de grupos es consecuencia inmediata de la proposición 3.1.19. La segunda parte también es inmediata, teniendo en cuenta la nota 2.3.14 y que

$$\begin{tikzcd} Z_j^n \arrow[r, "Z^n g \cup Z^{n-1} f \cup \overset{(2n)}{\cdots} \cup Z^{n-1} f"] \arrow[d, tail, "j^n"'] & Z_i^n \arrow[d, tail, "i^n"] \\ Z^nC \arrow[r, "Z^n f"'] & Z^nA \end{tikzcd}$$

es un push out. $\square$

3.4 Grupos de homotopía en el sentido de Baues.

En esta sección se ve que los grupos de homotopía de Baues son un caso particular de los grupos de homotopía obtenidos en la sección anterior. Para la correcta comprensión de los grupos de homotopía en el sentido de Baues es necesario conocer el concepto de categoría basada de una categoría de cofibraciones.

Definición 3.4.1. Sea $\mathcal{C}$ es una categoría de cofibraciones con objeto inicial $\emptyset$. Un *objeto basado* es un par (A,a) donde A es un objeto cofibrante y $a : A \longrightarrow \emptyset$ es un morfismo. Un *morfismo basado* $f : (A,a) \longrightarrow (B,b)$ consiste en un morfismo $f : A \longrightarrow B$ con $bf = a$. Se denotará a la categoría de objetos y morfismos basados por $\mathcal{C}(\emptyset)$ y se denominará *categoría basada de* $\mathcal{C}$.

Se observa que $(\emptyset, 1)$ es un objeto cero y, por tanto, para cada par de objetos basados (A,a), (B,b), existe un único morfismo $0 : (A,a) \longrightarrow (B,b)$ dado por $0 = \emptyset_B a$.

Definición 3.4.2. Dado un objeto basado (A,a) se define la *suspensión de* A, como el push out:

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "\{a,a\}"] \arrow[d, tail, "\{\imath_0,\imath_1\}"'] & \emptyset \arrow[d, tail, "\emptyset_{SA}"] \\ ZA \arrow[r, "\overline{\{a,a\}}"'] & SA \end{tikzcd}$$

donde $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZA, \rho)$ es un cilindro relativo de A.

Cabe notar que la suspensión de A vuelve a ser un objeto basado, (SA, a'), donde $a' = \{a\rho, 1\} : SA \longrightarrow \emptyset$. Por consiguiente, se puede reiterar el proceso para obtener suspensiones n-ésimas, $S^n A$ (por convención $S^0 A = A$).

Definición 3.4.3. Si X es un objeto fibrante y (A,a) es un objeto basado, se define el *n-grupo de homotopía de X referido a (A,a)* como

$$\pi_n^{(A,a)}(X) = [S^n A, X]$$

donde $[S^nA, X]$ es el corchete de homotopía no relativa, esto es, $[S^nA, X]^{\emptyset_X\{\emptyset_{S^nA}\}}$.

La estructura de grupo de $[S^nA, X]$ está inducida por la de $[ZS^{n-1}A, X]^{\{0,0\}\{\imath_0,\imath_1\}}$, pues ambos corchetes son biyectivos y este último es grupo, ya que, tomando como cilindro relativo (de Baues) la terna $(\{\imath_0, \imath_1\}, ZS^{n-1}A, \rho)$, se sabe que el conjunto de morfismos de esta categoría, $H'_{\emptyset_{S^{n-1}A}}(0, 0) = [ZS^{n-1}A, X]^{\{0,0\}\{\imath_0,\imath_1\}}$ tiene estructura de grupo. Por otro lado, este corchete de homotopía de Baues es isomorfo al corchete de homotopía relativa $[ZS^{n-1}A, X]^{\{0,0\}\{\emptyset^1_{S^{n-1}A}\}}$, por el teorema 3.2.3. Teniendo en cuenta que $\emptyset^1_{S^{n-1}A} = \{\imath_0, \imath_1\} : S^{n-1}A \sqcup S^{n-1}A \longrightarrow Z(S^{n-1}A)$ y aplicando un proceso reiterativo se llega a que $[ZS^{n-1}A, X]^{\{0,0\}\{\emptyset^1_{S^{n-1}A}\}} \cong \pi_n^{\emptyset_A}(X, 0)$, lo que permite establecer el siguiente teorema:

Teorema 3.4.4. *Los grupos de homotopía de Baues son isomorfos a los grupos de homotopía relativos a la cofibración inicial y basados en el morfismo* 0. *Esto es,*

$$\pi_n^{(A,a)}(X) \cong \pi_n^{\emptyset_A}(X, 0), \qquad \text{para } n \geq 1.$$

□

3.5 Grupos de homotopía para objetos no fibrantes.

El teorema 3.3.5 permite hacer una extensión de los grupos de homotopía para objetos no fibrantes. De este modo, se puede definir el *n-ésimo grupo de homotopía de X relativo a i* como:

$$\pi_n^i(X, f_0) := \pi_n^i(RX, r_X f_0)$$

donde $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ es un modelo fibrante de X. Nótese que esta definición no depende del modelo fibrante tomado. En efecto, si $r'_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} R'X$ es otro modelo fibrante de X, por la proposición 1.1.4, se induce un morfismo que hace el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "r'_X", "\sim"'] \arrow[d, "r_X"', "\wr"] & R'X \\ RX \arrow[ur, dotted, "t_{XX'}"', "\wr"] & \end{tikzcd}$$

Entonces, $\pi_n^i(t_{XX'}) : \pi_n^i(RX, r_X f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n^i(R'X, r'_X f_0)$ es un isomorfismo de grupos.

Del mismo modo que para objetos, se puede extender el funtor π_n^i para morfismos arbitrarios. Así, dado un morfismo cualquiera $f : X \longrightarrow Y$, se considera:

$$\pi_n^i(Rf) : \pi_n^i(RX, r_X f_0) \longrightarrow \pi_n^i(RY, r_Y f_0)$$

donde $Rf : RX \longrightarrow RY$ es el morfismo inducido por la proposición 1.1.4 en el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "r_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, tail, "r_Y", "\wr"'] \\
RX \arrow[r, dotted, "Rf"] & RY
\end{tikzcd}$$

Cabe preguntarse qué ocurre cuando se consideran otros modelos fibrantes.

Proposición 3.5.1. *Dados $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo, $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ y $r'_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} R'X$, modelos fibrantes de X y $r_Y : Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} RY$ y $r'_Y : Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} R'Y$ modelos fibrantes de Y, existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^i(RX, r_X f_0) \arrow[r, "\pi_n^i(Rf)"] \arrow[d, "\pi_n^i(t_{XX'})"', "\cong"] & \pi_n^i(RY, r_Y f_0) \arrow[d, "\pi_n^i(t_{YY'})", "\cong"'] \\
\pi_n^i(R'X, r'_X f_0) \arrow[r, "\pi_n^i(R'f)"] & \pi_n^i(R'Y, r'_Y f_0)
\end{tikzcd}$$

para cada $n \geqslant 1$.

Demostración. Dada $[F] \in \pi_n^i(RX, r_X f_0)$, se debe probar que $t_{YY'}(Rf)F \simeq (R'f)t_{XX'}F$ rel. i^n.

Se considera una factorización de $\{1,1\} : P\{r_X, r_X\} \overset{\sim}{\longrightarrow} RX$, a través de un objeto Z, $\{1,1\} = hj$. Como $j = \{j_0, j_1\}$ es cofibración trivial, existe $H : Z \longrightarrow R'Y$ tal que $Hj = \{t_{YY'}(Rf), (R'f)t_{XX'}\} : P\{r_X, r_X\} \longrightarrow R'Y$. En el siguiente diagrama conmutativo, el cuadrado de la izquierda se obtiene por push out y de la conmutatividad del cuadrado de la derecha, obtenemos

α, α' y β por la proposición 1.2.2.

$$\begin{tikzcd}
Z_i^{n+1} \arrow[r, "\{i^n\rho,1\}\cup 1"] \arrow[dd, tail, "i^{n+1}"'] & P\{i^n,i^n\} \arrow[rr, "\{\jmath_0F,\jmath_1F\}"] \arrow[dd, tail, "\overline{i^{n+1}}"'] & & Z \arrow[r, "H"] \arrow[dl, tail, "\alpha"', "\sim"] \arrow[dd, "h", "\wr"'] & R'Y \\
& & E \arrow[dr, "\beta"', "\sim"] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"'] & & \\
Z^{n+1}A \arrow[r, "\overline{\{i^n\rho,1\}\cup 1}"'] & P \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[rr, "\{F\rho,F,F\}"'] & & RX &
\end{tikzcd}$$

Si $\widetilde{H}$ es una extensión de H relativa a la cofibración trivial α, entonces $L = \widetilde{H}\alpha'(\overline{\{i^n\rho,1\}\cup 1}) : Z^{n+1}A \longrightarrow R'Y$ es la homotopía buscada. □

Así, para cada objeto X se fijará un modelo fibrante $r_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} RX$ de modo que si X es fibrante se tomará $r_X = 1_X$. En este caso, dadas dos extensiones Rf y $R'f$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "r_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, tail, "r_Y", "\wr"'] \\
RX \arrow[r, dotted, "Rf", "R'f"'] & RY
\end{tikzcd}$$

se tiene, por la proposición anterior, que $\pi_n^i(Rf) = \pi_n^i(R'f)$. Obsérvese que se puede tomar $t_{XX} = 1_{RX}$ y $t_{YY} = 1_{RY}$.

De este modo, para cada $f : X \longrightarrow Y$ morfismo, se define:

$$\pi_n^i(f) := \pi_n^i(Rf)$$

Corolario 3.5.2.

1. $\pi_n^i(1_X) = 1_{\pi_n^i(X,f_0)}$
2. $\pi_n^i(gf) = \pi_n^i(g)\,\pi_n^i(f)$

□

Bibliografía

[1] **Anderson, D.W.**,*Axiomatic homotopy theory.* Algebraic Topology Waterloo 1978, Lecture Notes in Maths 741, Springer-Verlag, (1979).

[2] **Baues, H.J.**, *Algebraic homotopy.* Cambridge University Press (1989).

[3] **Baues, H.J. y Quintero, A.**, *On the locally finite chain algebra of a proper homotopy type.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 3 (1996), n° 2, 161-175.

[4] **Borceux, F.**, *Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, 1994.

[5] **Brown, K.S.**, *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology.* Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1974), 419-458.

[6] **Díaz, F.J., García Calcines, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Homotopía algebraica: descripción e interrelación de las principales teorías.* Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza 5 (1994).

[7] **Díaz, F.J., García Calcines, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Grupos en categorías de homotopía.* Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza 6 (1995).

[8] **Díaz, F.J., García Calcines, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Homotopía axiomática.* Secretariado de Publicaciones. Universidad de La Laguna, 1996, Simposium Internacional de la Matemática Actual.

[9] **Díaz, F.J., Remedios, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Equivariant action of the generalized homotopy group*. Mathematik-Arbeitspapiere 54 (2000), 149-153, CatMAT 2000, Proceedings of the Conference Categorical Methods in Algebra and Topology.

[10] **Díaz, F.J., Remedios, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Generalized homotopy in C-Categories*. Extracta Mathematicae 16 (2001), nº 3, 393-403.

[11] **Díaz, F.J. y Rodríguez Machín, S.**, *Una estructura cónica para la homotopía*. Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza 15 (2000).

[12] **Díaz, F.J. y Rodríguez Machín, S.**, *Homotopy theory induced by cones*. Extracta Mathematicae 16 (2001), 287-292.

[13] **Dieck, T., Kamps, K.H. y Puppe, D.**, *Homotopietheorie*. Lecture Notes in Math. 157, Springer-Verlag, (1970).

[14] **Eckmann, B.**, *Homotopie et dualité*. Colloque de Topologie algebraique Louvain, (1956).

[15] **Eckmann, B. y Hilton, P.J.**, *Groupes d'homotopie et dualité*. Bull. Soc. Math. de France, 86 (1958), (271-281).

[16] **Eckmann, B. y Hilton, P.J.**, *Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications*. Math. Ann. 145 (1961/1962), 227-255.

[17] **Golasinski, M. y Gromadzki, G.**, *The homotopy category of chain complex is a homotopy category*. Colloq. Math., 47, 2 (1982), 173-178.

[18] **Heller, A.**, *Abstract homotopy in categories of fibrations and the spectral sequence of Eilenberg and Moore*. Illinois J.Math. 16 (1972), 454-474.

[19] **Hernández Paricio, L.J.**, *An example of homotopy theory in abelian groups (Spanish)*. Collect. Math. 33 (1982), n°2, 161-176.

[20] **Hilton, P.J.**, *Homotopy theory and duality*. Nelson Gordon and Breach, (1965).

[21] **Hilton, P.J.**, *Homotopy theory of modules and duality*. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO (1958), 273-281, Symposium internacional de topología algebraica, Mexico City.

[22] **Hilton, P.J. y Stammbach, U.**, *A Course in Homological Algebra*. Springer GTM 4, New York (1971).

[23] **Hu, S.T.**, *Homotopy Theory*. Academic Press, New York and London, (1959).

[24] **Huber, P.J.**, *Homotopy theory in general categories*. Math. Ann. 144 (1961), 361-385.

[25] **Huber, P.J.**, *Standard constructions in abelian categories*. Math. Ann. 146 (1962), 321-325.

[26] **Kamps, K.H.**, *Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopietheorie*. Math. Zeitschrift, 124 (1972), 215-236.

[27] **Kamps, K.H. y Porter, T.**, *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*. World Scientific, Singapore, 1997.

[28] **Kleisi, H.**, *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 544-546.

[29] **Mac Lane, S.**, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag (1971).

[30] **Miniam, E.G.**, *Generalized cofibration categories and global actions*. K-Theory 20 (2000), n° 1, 37-95, Special issues dedicated to Daniel Quillen on the occasion of his sixtieth birthday, Part I.

[31] **Miniam, E.G.**, *Λ-cofibration categories and the homotopy categories of global actions and simplicial complexes*. Appl. Categ. Structures 10 (2002), n° 1, 1-21.

[32] **Padrón, E. y Rodríguez Machín, S.**, *Model additive categories*.Suppl. Rendiconti Circolo Mat. Palermo. Serie II. n°24 (1990), 465-474 .

[33] **Porter, T.**, *Abstract Homotopy Theory: The Interaction of Category Theory and Homotopy Theory.* Cubo, 2003.

[34] **Quillen, D.G.**, *Homotopical Algebra.* Lecture Notes in Maths. vol 43, Springer-Verlag, (1967).

[35] **Remedios, J. y Rodríguez Machín, S.**, *Generalized homotopy theory.* Extracta Mathematicae 16 (2001), n°2, 279-285.

[36] **Rodríguez Machín, S.**, *Homotopy theories in additive categories are homotopies of* Δ*-groups.* Rendiconti Circolo Mat. Palermo. nº 39.(1990), 47-57.

[37] **Rodríguez Machín, S.**, *Homotopía en categorías aditivas.* Rev. Academia de Ciencias de Zaragoza, 43 (1988), 73-91.

[38] **Seebach, J.A.**, *Injectives and homotopy.* Illinois J. Math. 16 (1972), 446-453.

[39] **Whitehead, J.H.C.**, *Algebraic homotopy theory.* Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard, 2 (1950), 354-357.