Una visión conjunta de la noción de nervio para distintas estructuras categóricas

ARIADNA AZOZ

Trabajo Fin de Máster del Máster en Matemáticas

Tutor: Antonio Rodríguez Garzón

Universidad de Granada

Septiembre 2009

Índice

1. Introducción

La Topología Algebraica puede ser mirada como el estudio de espacios topológicos y aplicaciones contínuas por medio de objetos algebraicos (grupos, ...), y la conexión entre el Álgebra y la Topología se consigue por medio de funtores. Esta conexión convierte un problema topológico (i.e., de espacios topológicos y aplicaciones contínuas) en uno algebraico que, eventualmente, es de más fácil solución y, en su caso, computable. Muchos de los funtores computables son invariantes bajo deformación contínua de los espacios o aplicaciones entre ellos (homotopías), lo que conduce a la consideración de la categoría fundamental para la Topología Algebraica, la categoría de homotopía de los espacios. Se trata por tanto de estudiar y clasificar el tipo de homotopía de los espacios, es decir, de clasificar espacios salvo equivalencia homotópica (isomorfismos en la categoría de homotopía).

En un sentido más amplio, tal problema, aludido usualmente como la búsqueda de "modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios ", consiste, para cada categoría de espacios considerada $\mathcal{T}$, en la búsqueda de una categoría algebraica conveniente $\mathcal{A}$ y una noción de homotopía definida en ella junto con funtores "clasificador de espacios "

$$B : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$$

y "modelo algebraico "

$$F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$$

que induzcan una equivalencia entre las correspondientes categorías de homotopía

$$H_0(\mathcal{T}) \simeq H_0(\mathcal{A})$$

y que permita en definitiva el transvase de información entre los dos escenarios, el topológico y el algebraico.

Esta visión revela la existencia de una llamada "Teoría de Homotopía Algebraica " en cuyo desarrollo ha jugado un papel especialmente significativo la introducción de la noción de conjunto simplicial ("complete semi-simplicial complex" en su nomenclatura original) por Eilenberg-Zilber en 1950, [10], lo que quedó puesto de manifiesto en los inmediatos trabajos de los años 50 por D.M.Kan [15, 16], y posteriormente en los 60 con los de E. Curtis, P. May, y D. Quillen (véase [9, 20, 23]). La consecuencia fue que, aun manteniendo una profunda conexión con la teoría de homotopía de los espacios topológicos, pero teniendo en cuenta que los métodos e ideas en la teoría de conjuntos simpliciales eran algebraicos y combinatorios, la teoría de homotopía existe, y puede formularse, completamente al margen de cualquier contexto topológico.

Éste fue efectivamente el espíritu y punto de vista introducido por Kan y posteriormente codificado por Quillen (con su noción de categoría de modelos [23]) que en todo caso concluyó con la equivalencia de la categoría de homotopía asociada a la de conjuntos simpliciales, y más aún, de toda la teoría de homotopía asociada, con la teoría de homotopía ordinaria de los espacios topológicos.

Esta equivalencia es conseguida por medio de la existencia de un par de funtores adjuntos (véase [20, 23]), la realización geométrica de Milnor

$$|\ |: Simp(Sets) \to Top$$

y el complejo singular total

$$S(-) : Top \to Simp(Sets)$$

con $|\ |$ adjunto por la izquierda a $S(-)$.

La consideración de esta equivalencia permite entonces, a la hora de buscar el llamado ya anteriormente funtor clasificador de espacios B:$\mathcal{A} \to \mathcal{T}$, hacerlo como composición con el funtor realización geométrica de un correspondiente funtor

$$N : \mathcal{A} \to Simp(Sets)$$

genéricamente denominado, para estructuras categóricas, "nervio de la estructura".

Esta construcción de nervios, y entonces de espacios clasificadores, pretende asociar por tanto objetos geométricos a estructuras categóricas de forma que dichos objetos retengan toda la información de la estructura (a nivel de conjuntos simpliciales, por tanto, que dicha información se registre en sus operadores cara y degeneración).

Esta teoría de nervios, y consecuentemente de espacios clasificadores de estructuras categóricas diversas (como categorías, categorías monoidales, grupos categóricos, 2-categorías, bicategorías, ...) se ha convertido en los últimos 25 años en una parte esencial de la maquinaria usada en la Topología Algebraica (y también en otros campos como la K-teoría algebraica, la Geometría Algebraica,

...) y una de las razones fundamentales para ésto es que cualquiera de estos procesos pone al descubierto la forma en que la coherencia categórica (es decir, las reglas que han de seguir los isomorfismos naturales en que derivan las igualdades en casos estrictos) se convierte en coherencia homotópica (a nivel de conjuntos simpliciales y espacios topológicos).

Los orígenes de toda la teoría están en Grothendieck [14] quien por primera vez asoció un conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ a una categoría pequeña $\mathcal{C}$ al que llamó el "nervio de $\mathcal{C}$". A partir de ahí, y en especial en los últimos años, se ha desarrollado una intensa actividad investigadora en la línea de describir nervios y espacios clasificadores de estructuras categóricas superiores. Algunas referencias al respecto son [3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 18, 24, 25].

El objetivo de este trabajo es mostrar de forma conjunta, y en casos en que la complejidad de la estructura categórica no es demasiado elevada, algunas de estas construcciones que conducen a nervios conjuntos simpliciales dando de forma explícita, en dimensiones bajas, las definiciones de operadores cara y degeneración en cada caso, así como su interpretación geométrica. Ésto ha supuesto un proceso de recopilación de bibliografía conducente al estudio previo de las estructuras categóricas implicadas (en concreto, las de categoría monoidal, grupo categórico y 2-categoría) y al posterior análisis de diferentes definiciones de nervio aparecidas para ellas en la literatura. Todo ha ello ha sido realizado con el soporte de los conocimientos adquiridos en el curso "modelos algebraicos en Teoría de Homotopía" del Máster en Matemáticas de la Universidad de Granada y bajo la dirección del Dr. Antonio R. Garzón.

2. Preliminares

La bibliografía básica utilizada para esta sección preliminar es [9, 19, 20].

2.1. Categorías y funtores

Definición 1 Una *categoría* $\mathcal{C}$ puede ser definida como una cuaterna

$$\mathcal{C} = (obj(\mathcal{C}), Hom_{\mathcal{C}}, 1, \circ)$$

donde:

- $Obj(\mathcal{C})$ es la clase de objetos.
- $\forall A, B \in Obj(\mathcal{C}), Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es el conjunto de morfismos de A en B.
- $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$ existe un morfismo distinguido $1_A : A \longrightarrow A$, llamado la identidad en A.
- $\forall A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$ hay una ley de composición

$$\begin{array}{rccc} \circ : & Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, C) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ & (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

que verifica:

i) es asociativa, esto es, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ para cualesquiera $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, con $A, B, C, D \in Obj(\mathcal{C})$
ii) tiene identidades, esto es, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ para cualquier $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$

Denotaremos $Morf(\mathcal{C}) := \displaystyle\bigcup_{A,B \in Obj(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Una categoría se dice que es *pequeña* si la clase $Obj(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Dada cualquier categoría $\mathcal{C}$, podemos construir la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{op}$, que es aquella en la que $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$ y $\forall A, B \in Obj(\mathcal{C})$ $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Definición 2 Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías, un *funtor (covariante)* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, consiste en un par de funciones, la función sobre objetos:

$$\begin{array}{rccc} F : & Obj(\mathcal{A}) & \longrightarrow & Obj(\mathcal{B}) \\ & A & \mapsto & F(A) \end{array}$$

y la función sobre morfismos:

$$\begin{array}{rccc} F: & Hom_{\mathcal{A}}(A,B) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{A}}(F(A),F(B)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

verificando :

1) $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$ para cualesquiera morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$
2) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para cualquier objeto A de $\mathcal{A}$.

Un *funtor contravariante* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías, es un funtor covariante de $\mathcal{A}^{op}$ en $\mathcal{B}$. Por tanto, para cualesquiera morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ F verifica que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Funtores covariantes $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ se componen por la regla $(GF)(A) = G(F(A))$ y $(GF)(f) = G(F(f))$ con $A \in Obj(\mathcal{A})$ y $f \in Morf(\mathcal{A})$.

Definición 3 Dados dos funtores $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, una *transformación natural* τ de F en G representada por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

consiste de una función

$$\begin{array}{rccc} \tau: & Obj(\mathcal{A}) & \longrightarrow & Morf(\mathcal{B}) \\ & A & \mapsto & \tau_A : F(A) \to G(A) \end{array}$$

tal que para cualquier $f : A \to A' \in Morf(A)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd}$$

Si F, G y H son funtores entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y $\tau : F \Rightarrow G$ y $\tau' : G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\tau"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow\tau'"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

la composición vertical de τ y τ' es la transformación natural $\tau' \circ \tau : F \Rightarrow H$ definida, $\forall A \in Obj(\mathcal{A})$, por $(\tau' \circ \tau)_A = \tau'_A \circ \tau_A : F(A) \to H(A)$.

Si $\tau : F \Rightarrow G$ y $\tau' : F' \Rightarrow G'$ son transformaciones naturales, siendo F y G funtores entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y F' y G' funtores entre las categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau'"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

la composición horizontal de τ y τ' es la transformación natural $\tau' * \tau : F'F \Rightarrow G'G$ definida por $(\tau' * \tau)_A = G'\tau_A \tau'_{F(A)} = \tau'_{GA} F'\tau_A : (F'F)(A) \to (G'G)(A)$.

Definición 4 Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, con $\mathcal{A}$ pequeña, la categoría $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ es la categoría con $Obj(\mathcal{B}^{\mathcal{A}})$=$\{$funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}\}$, y $Morf(\mathcal{B}^{\mathcal{A}})$=$\{$transformaciones naturales entre funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}\}$, con la composición dada por la composicón vertical de transformaciones naturales .

Definición 5 Un *grupoide* $\mathcal{G}$ es una categoría pequeña en la que todo morfismo es un isomorfismo (es decir, $\forall f : A \to B$, $\exists g : B \to A$ tal que $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$).

Si $\mathcal{G}$ es un grupoide y consideramos en $Obj(\mathcal{G})$ la relación $A \sim B$ si $Hom_{\mathcal{G}}(A, B) \neq \emptyset$, ésta es una relación de equivalencia. Denotamos $\Pi_0(\mathcal{G}) = Obj(\mathcal{G})/\sim$ al conjunto cociente que llamaremos el *conjunto de componentes (conexas) de* $\mathcal{G}$. Si $\Pi_0(\mathcal{G}) = \{*\}$ se dice que $\mathcal{G}$ es *conexo* y si $\Pi_0(\mathcal{G}) = Obj(\mathcal{G})$ el grupoide se dice *totalmente disconexo.*

Si $A \in Obj(\mathcal{G})$ entonces es fácil ver que $Hom_{\mathcal{G}}(A, A)$ es un grupo, que denotaremos $\Pi_1(\mathcal{G}, A)$ y que llamaremos *grupo de automorfismos de* $\mathcal{G}$ *en* A.
Si $A, B \in Obj(\mathcal{G})$ están en la misma componente de $\mathcal{G}$ entonces $\Pi_1(\mathcal{G}, A) \cong \Pi_1(\mathcal{G}, B)$ estando dado el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{G}, A) & \to & \Pi_1(\mathcal{G}, B) \\ y & \mapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

donde $x : A \to B$ es un morfismo cualquiera de A a B en $\mathcal{G}$.

Se tiene entonces, para cada grupoide $\mathcal{G}$, un funtor

$$\Pi_1(\mathcal{G}, -) : \mathcal{G} \to Grupos$$

que aplica $A \mapsto \Pi_1(\mathcal{G}, A)$ y, a cada $x : A \to B$ morfismo en $\mathcal{G}$, el homomorfismo de grupos $\Pi_1(\mathcal{G}, x) : \Pi_1(\mathcal{G}, A) \to \Pi_1(\mathcal{G}, B)$ dado por $x \mapsto xyx^{-1}$, que es un isomorfismo.

Si denotamos *Gpd* a la categoría cuyos objetos son los grupoides y cuyos morfismos son los funtores entre ellos se tiene un funtor

$$\Pi_0 : Gpd \to Sets$$

que aplica $\mathcal{G} \mapsto \Pi_0(\mathcal{G})$, y cada funtor $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ en la aplicación $\Pi_0(F) : \Pi_0(\mathcal{G}) \to \Pi_0(\mathcal{H})$ (definida por el hecho de que si A y B están en la misma componente de $\mathcal{G}$ entonces F(A) y F(B) están en la misma componente de $\mathcal{H}$). Se tiene además una transformación natural $\Pi_1(F) : \Pi_1(\mathcal{G}, -) \Rightarrow \Pi_1(\mathcal{H}, F(-))$ definida, para cada $A \in Obj(\mathcal{G})$, como el morfismo de grupos $\Pi_1(F, A) : \Pi_1(\mathcal{G}, A) \to \Pi_1(\mathcal{H}, F(A))$ dado por $\Pi_1(F, A)(x) = F(x)$

2.2. Conjuntos simpliciales

Definición 6 La *categoría simplicial de los símplices estándard*, Δ, es aquella en la que $Obj(\Delta) = \{[n] = \{0, 1, \ldots, n\}, n \geq 0\}$ y en la que $Hom_\Delta([n], [m]) = \{f : [n] \to [m]$ tal que f es monótona$\}$.

Cualquier conjunto ordenado $[n]$ puede ser considerado como una categoría con los elementos de $[n]$ como objetos y sólo un morfismo $i \to j$ si $i \leq j$. Con esta identificación, la categoría Δ puede considerarse como una subcategoría plena de la categoría *Cat* de las categorías pequeñas y funtores entre ellas.

Definición 7 Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría, la *categoría de los objetos simpliciales* en $\mathcal{C}$, denotada $Simp(\mathcal{C})$, es la categoría de funtores contravariantes de Δ en $\mathcal{C}$, esto es, $Simp(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\Delta^{op}}$.

En el caso particular de que $\mathcal{C} = Sets$ tenemos entonces $Simp(Sets) = Sets^{\Delta^{op}}$, que es la llamada *categoría de conjuntos simpliciales.*

En la categoría Δ hay una serie de morfismos distinguidos, a saber los morfismos $\delta_i : [n-1] \to [n]$ inyectivos y los sobreyectivos $\sigma_i : [n+1] \to [n]$ para $0 \leq i \leq n$.

De los primeros hay n+1, que están determinados por el único i que no está en la imagen y que estan definidos por:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & si\ i > j \\ j+1 & si\ i \leq j \end{cases}$$

De los segundos hay n+1, que están determinados por el único i tal que i e *i+1* tienen la misma imagen y que están definidos por:

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & si\ i \geq j \\ j-1 & si\ i < j \end{cases}$$

Estos morfismos δ_i y σ_i tienen la propiedad de que generan todos los morfismos en la categoría Δ en el sentido de que todo morfismo de Δ se expresa de forma única como $f = \delta_{j_p} \cdots \delta_{j_1} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m}$ siempre que $i_k < i_{k+1}$ y $j_k < j_{k+1}$.

Ejemplo: Si $f : [5] \to [4]$ es la aplicación $f(0) = 0, f(1) = f(2) = f(3) = 1, f(4) = f(5) = 4$ entonces puede comprobarse que $f = \delta_3 \delta_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4$.

Los morfismos δ_i y σ_i verifican las siguientes identidades:

$$\begin{cases} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \text{ si } i < j \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} \text{ si } i \leq j \\ \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j\ o\ i = j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{si } i > j+1 \end{cases} \end{cases}$$

que se conocen como *identidades cosimpliciales*.

El hecho fundamental a destacar es que las aplicaciones δ_i y σ_i junto con las identidades cosimpliciales constituyen un sistema de generadores y relaciones para Δ y consecuentemente que la categoría simplicial Δ está determinada por ellas.

Entonces si $K \in Obj(Simp(Sets))$ lo que se tiene es un funtor

$$\begin{array}{lcl} K: & \Delta^{op} \longrightarrow Sets & \\ \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & K([n]) = K_n \\ {[m]} \arrow[r, mapsto] & K([m]) = K_m \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En particular tenemos, para $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{tikzcd} {[n-1]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\delta_i"'] & K_{n-1} \\ {[n]} \arrow[r, mapsto] & K_n \arrow[u, "K(\delta_i)"'] \end{tikzcd}$$

donde $K(\delta_i) := d_i$ son llamados los *operadores cara*, y para $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, mapsto] & K_n \arrow[d, "K(\sigma_j)"] \\ {[n+1]} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "\sigma_j"] & K_{n+1} \end{tikzcd}$$

donde $K(\sigma_j) := s_j$ son llamados los *operadores degeneración* .

Los operadores cara y degeneración satisfacen las siguientes identidades que se deducen de las identidades cosimpliciales:

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i \text{ si } i < j \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i \text{ si } i \leq j \\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ } o \text{ } i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases} \end{cases}$$

y que son conocidas con el nombre de *identidades simpliciales* para el conjunto simplicial K.

Así, $K \in Obj(Simp(Sets))$ queda totalmente determinado por el objeto graduado indizado en los enteros no negativos $K_\bullet = \{K_n\}_{n \geq 0}$ junto con los operadores cara d_i y degeneración s_j satisfaciendo las identidades simpliciales.

Un conjunto simplicial se suele representar como un diagrama como el siguiente:

$$K_\bullet : \quad K_{n+1} \;\underset{\substack{s_0\\ \vdots \\ s_n}}{\overset{\substack{d_0\\ \vdots\\ d_{n+1}}}{\rightleftarrows}}\; K_n \;\underset{\substack{s_0\\ \vdots\\ s_{n-1}}}{\overset{\substack{d_0\\ \vdots\\ d_n}}{\rightleftarrows}}\; \cdots \qquad K_2 \;\underset{\substack{s_1\\ s_0}}{\overset{\substack{d_0\\ d_1\\ d_2}}{\rightleftarrows}}\; K_1 \;\underset{s_0}{\overset{\substack{d_0\\ d_1}}{\rightleftarrows}}\; K_0$$

Si $x \in K_n$, se dice que x es un *n-símplice*. En particular a los 0-símplices se les llama *vértices*.

Los morfismos en $Simp(Sets)$ de $K : \Delta^{op} \to Sets$ a $L : \Delta^{op} \to Sets$ son las transformaciones naturales $f : K \Rightarrow L$ lo que, de forma análoga a como se ha procedido antes, puede verse que equivale a dar un conjunto graduado de aplicaciones $f_\bullet = \{f_n : K_n \to L_n\}_{n \geq 0}$ que conmutan con los operadores cara y degeneración, esto es, $f_n d_i = d_i f_{n+1}$ $\forall i = 0, \ldots, n+1$ y $f_{n+1} s_j = s_j f_n$ $\forall j = 0, \ldots, n$

Definición 8 Sea $K_\bullet = \{K_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial. Para cualquier k, $0 \leq k \leq n+1$, definimos $\Lambda_k^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) \in (K_n)^{n+1} \;/\; d_i x_j = d_{j-1} x_i \;\;$ si $i < j,\, i, j \neq k\}$; que se conoce como el conjunto de las "open k-horns" en dimensión n.

Un conjunto simplicial $K_\bullet$ se dice que satisface la *condición de extensión de Kan* (o que es de Kan) si $\forall k$, $0 \leq k \leq n+1$, el morfismo canónico

$$dl : (d_0, \ldots, d_{k-1}, d_{k+1}, \ldots, d_{n+1}) : K_{n+1} \to \Lambda_k^{n+1}(K_\bullet)$$

es sobreyectivo.

Denotaremos $KanSimp(Sets)$ a la categoría de los conjuntos simpliciales que satisfacen la condición de extensión de Kan.

Todas las siguientes secciones del trabajo ofrecen diferentes ejemplos de conjuntos simpliciales construidos como nervios de distintas estructuras categóricas. Antes de pasar a ellas ofrecemos un ejemplo fundamental que determina además, junto con el funtor realización geométrica, la equivalencia de las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales.

Ejemplo: El conjunto simplicial singular de un espacio topológico.
Sea $\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1\}$ el n-símplice eucídeo estándar.

Para cada aplicación $\theta : [n] \to [m]$ se tiene la aplicación $\theta_* : \Delta_n \to \Delta_m$ definida como $\Delta_*(t_0, \ldots, t_n) = (s_0, \ldots, s_m)$ donde $s_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta^{-1}(i) = \emptyset \\ \sum_{j \in \theta^{-1}(i)} t_j & \text{si } \theta^{-1}(i) \neq \emptyset \end{cases}$

Se tiene así un funtor:

$$\Delta \xrightarrow{T} Top$$

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\theta"'] & \Delta_n \arrow[d, "\theta_*"'] \\ {[m]} \arrow[r, mapsto] & \Delta_m \end{tikzcd}$$

Para cada espacio topológico X, consideramos también el funtor:

$$Top \xrightarrow{Hom_{Top}(-,X)} Sets$$

$$\begin{tikzcd} \Delta_n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\theta_*"'] & Hom_{Top}(\Delta_n, X) \\ \Delta_m \arrow[r, mapsto] & Hom_{Top}(\Delta_m, X) \arrow[u, "(\theta_*)^*"'] \end{tikzcd}$$

donde $(\theta_*)^*(f : \Delta_m \to X) = f \circ \theta_*$.

Entonces se define el conjunto simplicial singular de X como el conjunto simplicial dado por la composición de T y $Hom_{Top}(-, X)$, esto es,

$$S(X) = Hom_{Top}(-, X) \circ T : \Delta^{op} \to Sets$$

así que el conjunto de n-símplices es $S(X)_n = Hom_{Top}(\Delta_n, X)$ y si $f : \Delta_n \to X$ es un n-símplice, tenemos que los operadores cara están dados por:

$$\begin{array}{lrcl} d_i f : & \Delta_{n-1} & \longrightarrow & X \\ & (t_0, \ldots, t_{n-1}) & \mapsto & f(t_0, \ldots, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \end{array}$$

y los operadores degeneración por

$$\begin{array}{lrcl} s_j f : & \Delta_{n+1} & \longrightarrow & X \\ & (t_0, \ldots, t_{n+1}) & \mapsto & f(t_0, \ldots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2} \ldots, t_{n+1}) \end{array}$$

Esta construcción determina un funtor

$$\begin{array}{rcl} S(-) : Top & \longrightarrow & SimpSets \\ X & \longmapsto & S(X) \end{array}$$

al que se le llama funtor conjunto simplicial singular.

Destaquemos que el conjunto simplicial singular $S(X)$ es un conjunto simplicial de Kan puesto que, al ser la unión de cualesquiera $n+1$ caras de Δ_{n+1} un retracto de Δ_{n+1}, entonces cualquier aplicación contínua definida sobre tal unión puede extenderse a Δ_{n+1}.

3. Nervio (de Grothendieck) de una categoría pequeña. El caso de un grupoide

En esta sección ofrecemos dos construcciones isomorfas de la noción de nervio de una categoría pequeña $\mathcal{C}$. Esta construcción es debida a Grothendieck [14] y proporciona un encaje pleno y fiel (esto es, inyectivo en objetos) de Cat en $Simp(Sets)$. El hecho interesante a destacar es que, en este conjunto simplicial, la estructura de la categoría $\mathcal{C}$ (composición, identidades) queda cifrada en términos de sus caras y degeneraciones.

El Nervio (de Grothendieck) de $\mathcal{C}$ es el conjunto simplicial

$$N\mathcal{C} : \Delta^{op} \to Sets$$

definido como sigue:
$N\mathcal{C}_0 = Obj\mathcal{C}$ (esto es, los vértices son los objetos)
y, para $p \geq 1$

$$N\mathcal{C}_p = \coprod_{(x_0,\ldots,x_p)\in Obj\mathcal{C}^{p+1}} \mathcal{C}(x_0,x_1) \times \mathcal{C}(x_1,x_2) \times \ldots \mathcal{C}(x_{p-1},x_p)$$

donde $\mathcal{C}(x_i, x_{i+1})$ es $Hom_{\mathcal{C}}(x_i, x_{i+1})$, esto es, un p-símplice para $p \geq 1$ es una sucesión $(u_1, \ldots, u_p)$ de p morfismos componibles en $\mathcal{C}$

$$x_0 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_2} x_2 \xrightarrow{u_3} \cdots \qquad x_{p-1} \xrightarrow{u_p} x_p$$

Así, los 1-símplices son los morfismos de $\mathcal{C}$, los 2-símplices son pares de morfismos componibles, etc.

Los morfismos cara $d_i : N\mathcal{C}_p \to N\mathcal{C}_{p-1}$ están dados, para $p = 1$, por $\begin{cases} d_0(u_1) = x_1 \\ d_1(u_1) = x_0 \end{cases}$

y, para $p \geq 2$,

$$d_i(u_1, \ldots, u_p) = \begin{cases} (u_2, \ldots, u_p) & i = 0 \\ (u_1, \ldots, u_{i+1}u_i, \ldots, u_p) & 0 < i < p \\ (u_1, \ldots, u_{p-1}) & i = p \end{cases}$$

Así la cara i-ésima de un p-símplex $(u_1, \ldots, u_p)$ se obtiene eliminando el objeto x_i, poniendo x_j en la posición $j-1$ para $j > i$ y usando composición.

Y los morfismos degeneración $s_j : N\mathcal{C}_p \to N\mathcal{C}_{p+1}$ estan dados, para $p = 0$, por $s_0(x) = id_x$ y, para $p \geq 1$, por $s_j(u_1, \ldots, u_p) = (u_1, \ldots, u_j, id_{x_j}, u_{j+1}, \ldots, u_p)$, $0 \leq j \leq p$, esto es, sustituyendo el objeto x_j por el morfismo identidad $1_{x_j} : x_j \to x_j$.

Comprobemos a título de ejemplo algunas identidades simpliciales:
Sea (u_1, u_2) un 2-símplice, esto es, $x_0 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_2} x_2 \in N\mathcal{C}_2$

- $d_0d_1(u_1, u_2) = d_0d_0(u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_0d_1(u_1, u_2) = d_0(u_1u_2) = x_2$
  $d_0d_0(u_1, u_2) = d_0(u_2) = x_2$.

- $d_0d_2(u_1, u_2) = d_1d_0(u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_0d_2(u_1, u_2) = d_0(u_1) = x_1$
  $d_1d_0(u_1, u_2) = d_1(u_2) = x_1$.

- $d_1d_2(u_1, u_2) = d_1d_1(u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_1d_2(u_1, u_2) = d_1(u_1) = x_0$
  $d_1d_1(u_1, u_2) = d_1(u_1u_2) = x_0$.

- $d_0s_0(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_0s_0(u_1, u_2) = d_0(id_{x_0}, u_1, u_2) = (u_1, u_2)$.

- $d_0s_1(u_1, u_2) = s_0d_0(u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_0s_1(u_1, u_2) = d_0(u_1, id_{x_1}, u_2) = (id_{x_1}, u_2)$
  $s_0d_0(u_1, u_2) = s_0(u_2) = (id_{x_1}, u_2)$.

- $d_0 s_2(u_1, u_2) = s_1 d_0(u_1, u_2)$. En efecto:
  $d_0 s_2(u_1, u_2) = d_0(u_1, u_2, id_{x_2}) = (u_2, id_{x_2})$
  $s_1 d_0(u_1, u_2) = s_1(u_2) = (u_2, id_{x_2})$.

Si se considera el conjunto simplicial

$$\Delta\mathcal{C} : \Delta^{op} \to Sets$$

definido por $\Delta\mathcal{C}_p = Funt([p], \mathcal{C})$, entonces, si $F : [p] \to \mathcal{C}$ es un p-símplice se tiene que, si $p = 0$, F se identifica con el objeto $F0$ de $\mathcal{C}$; si $p = 1$, F se identifica con el morfismo $F_{0,1} : F0 \to F1$; si $p = 2$, F se identifica con la terna $(F_{0,1}, F_{1,2}, F_{0,2})$ con $F_{0,1} : F0 \to F1$, $F_{0,2} : F0 \to F2$ y $F_{1,2} : F1 \to F2$ tales que $F_{0,2} = F_{0,1}F_{1,2}$ y $F_{i,i} = id_{F_i}$ para $i = 0, 1, 2$. En general, para $p \geq 1$, un p-símplice $F : [p] \to \mathcal{C}$ se identifica con uplas de morfismos $(F_{i,j} : Fi \to Fj)_{0 \leq i \leq j \leq p}$ tales que $F_{i,k} = F_{j,k}F_{i,j}$ para $0 \leq i \leq j \leq k \leq p$ y $F_{i,i} = id_{F_i}$ $\forall i$.

Esta construcción da una alternativa para la consideración del nervio de Grothendieck, pues se tiene un isomorfismo simplicial

$$\Delta\mathcal{C} \cong N\mathcal{C}$$

dado para cada símplice $F \in \Delta\mathcal{C}_p$ por

$$F \mapsto \ (F0 \xrightarrow{F_{0,1}} F1 \xrightarrow{F_{1,2}} \cdots \qquad F(p-1) \xrightarrow{F_{p-1,p}} Fp)\ .$$

Ambos conjuntos simpliciales son entonces usualmente identificados.

Destaquemos que $\Delta\mathcal{C}$ tiene una interpretación geométrica más sugerente que $N\mathcal{C}$ puesto que un p-símplice de $\Delta\mathcal{C}$ puede mirarse como el 1-esqueleto de un p-símplice estándar orientado con objetos Fi de $\mathcal{C}$ situados en los vértices y morfismos $F_{i,j} : Fi \to Fj$ situados en las aristas para $0 \leq i \leq j \leq p$ con la condición de que cada triángulo, para $0 \leq i < j < k \leq p$

$$\begin{tikzcd} & Fj \arrow[dr, "F_{j,k}"] & \\ Fi \arrow[ur, "F_{i,j}"] \arrow[rr, "F_{i,k}"'] & & Fk \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Así, por ejemplo, un 3-símplice de $\Delta\mathcal{C}$ puede mirarse como un diagrama de objetos y morfismos en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & F1 \arrow[dr, "F_{1,2}"] \arrow[dd, "F_{1,3}"] & \\
F0 \arrow[ur, "F_{0,1}"] \arrow[rr, "F_{0,2}"] \arrow[dr, "F_{0,3}"'] & & F2 \arrow[dl, "F_{2,3}"] \\
 & F3 &
\end{tikzcd}$$

donde cada triángulo
$$\begin{tikzcd}
 & F1 \arrow[dr, "F_{1,2}"] & \\
F0 \arrow[ur, "F_{0,1}"] \arrow[rr, "F_{0,2}"'] & & F2
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
 & F1 \arrow[dr, "F_{1,3}"] & \\
F0 \arrow[ur, "F_{0,1}"] \arrow[rr, "F_{0,3}"'] & & F3
\end{tikzcd},$$
$$\begin{tikzcd}
 & F2 \arrow[dr, "F_{2,3}"] & \\
F0 \arrow[ur, "F_{0,2}"] \arrow[rr, "F_{0,3}"'] & & F3
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
 & F2 \arrow[dr, "F_{2,3}"] & \\
F1 \arrow[ur, "F_{1,2}"] \arrow[rr, "F_{1,3}"'] & & F3
\end{tikzcd},$$
es conmutativo y es cada una de sus cuatro caras.

Notemos que la construcción anterior del nervio de una categoría pequeña determina un funtor entre la categoría de las categorías pequeñas, Cat, y $Simp(Sets)$:

$$\begin{array}{rccl} N(\_): & Cat & \longrightarrow & Simp(Sets) \\ & \mathcal{C} & \mapsto & N(\mathcal{C}). \end{array}$$

Recordemos que un grupoide es una categoría en la que todo morfismo es un isomorfismo. En tal caso se tiene que la construcción de nervio define un funtor

$$N(\_): Gpd \to KanSimp(Sets)$$

desde la categoría de grupoides a la categoría de conjuntos simplicales de Kan; es decir, que el nervio (de Grothendieck) de un grupoide satisface la condición de extensión de Kan (recordada en los preliminares).

A continuación hacemos algunas comprobaciones particulares de tal hecho que son ilustrativas de la demostración general.

Por ejemplo, si $(x_0, x_2) \in \Lambda_1^2$, veamos que existe $z \in N(\mathcal{G})_2$ tal que $d_i(z) = x_i$ para $i = 0, 2$.
Como $x_0, x_2 \in N(\mathcal{G})_1$, entonces son isomorfismos $x_0 : G_{01} \to G_{02}$ y $x_2 : G_{21} \to G_{22}$, y como $(x_0, x_2) \in \Lambda_1^2$, $d_0 x_2 = d_1 x_0$; esto es $G_{22} = G_{01}$. Ahora, tomando $z = (x_2, x_0)$, claramente $z \in N(\mathcal{G})_2$, $d_0(z) = x_0$ y $d_2(z) = x_2$

Supongamos ahora que $(x_0, x_1, x_3) \in \Lambda_2^3$ y veamos que existe $z \in N(\mathcal{G})_3$ tal que $d_i(z) = x_i$ para $i = 0, 1, 3$.
En efecto, como $(x_0, x_1, x_3) \in N(\mathcal{G})_2$, entonces $d_0 x_0 = d_0 x_1$; $d_0 x_3 = d_2 x_0$; $d_1 x_3 = d_2 x_1$. Si ponemos $x_0 = (g_{01}, g_{02}), x_1 = (g_{11}, g_{12}), x_3 = (g_{31}, g_{32})$, tenemos que $g_{02} = g_{12}$; $g_{01} = g_{32}$ y $g_{31} g_{32} = g_{11}$. Ahora, tomando $z = (g_{31}, g_{01}, g_{02}) \in N(\mathcal{G})_2$ ya hemos acabado, pues en efecto $d_0 z = (g_{01}, g_{02}) = x_0$, $d_1 z = (g_{31} g_{01}, g_{02}) = (g_{31} g_{32}, g_{02}) = (g_{11}, g_{12}) = x_1$ y $d_3 z = (g_{31}, g_{01}) = (g_{31}, g_{32}) = x_3$.

4. El nervio geométrico de una categoría monoidal

Abstrayendo la noción conjuntista de monoide se tiene:

Definición 9 Una *categoría monoidal* $\mathcal{M}^{\otimes} = (\mathcal{M}, \otimes, \alpha, e, \lambda, \rho)$ es, [19], una categoría $\mathcal{M}$, un bifuntor

$$\begin{array}{llll} \otimes : & M \times M & \to & M \\ & (a, b) & \mapsto & a \otimes b \\ & (f, g) & \mapsto & f \otimes g \end{array}$$

un objeto unidad $e \in \mathcal{M}$ y tres isomorfismos naturales:

(asociatividad) $\alpha = \alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \cong (a \otimes b) \otimes c$, natural en a, b, c;
(unidad izquierda) $\lambda = \lambda_a : e \otimes a \cong a$, natural en a;
(unidad derecha) $\rho = \rho_a : a \otimes e \cong e$, natural en a;

tales que $\forall a, b, c, d \in \mathcal{M}$ los siguientes diagramas (pentágono y triángulo) conmutan:

$$\begin{tikzcd} a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1 \otimes \alpha"] & (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[r, "\alpha"] & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \arrow[d, "\alpha \otimes 1"] \\ a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha"] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \otimes (e \otimes c) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1 \otimes \lambda"] & (a \otimes e) \otimes c \arrow[d, "\rho \otimes 1"] \\ a \otimes c \arrow[r, equal] & a \otimes c \end{tikzcd}$$

y tal que $\lambda_e = \rho_e : e \otimes e \to e$.

Cuando los isomorfismos de asociatividad y unidad son identidades se dice que la categoría monoidal es *estricta*.

Por ejemplo, un monoide (i.e. un conjunto con una ley de composición asociativa para la que existe elemento neutro) visto como una categoría discreta (i.e. con solo identidades) es una categoría monoidal estricta en la que $\otimes$ está dado por la multiplicación en el monoide. La categoría de grupos abelianos con el producto tensor usual y con objeto unidad $\mathbb{Z}$ es también una categoría monoidal.

Junto a otras conocidas y equivalentes posibilidades de definir el espacio clasificador de una categoría monoidal(véase [4]) hay una posibilidad de hacerlo via la construcción del llamado nervio geométrico $\Delta\mathcal{M}^{\otimes}$ introducido por Street y Duskin [11, 26] y estudiado por Cegarra [4]. Este nervio geométrico es un conjunto simplicial que aglutina la estructura categórica y monoidal de $\mathcal{M}^{\otimes}$ y que vamos a describir a continuación.

Definición 10 El *nervio geométrico* de una categoría monoidal $\mathcal{M}^{\otimes}$ es el conjunto simplicial

$$\Delta\mathcal{M}^{\otimes} : \Delta^{op} \to Sets$$

definido por

$$[n] \mapsto (\Delta\mathcal{M}^{\otimes})_n = \{x_{i,j}, x_{i,j,k}\}_{0\leq i\leq j\leq k\leq n}$$

donde $x_{i,j}$ son objetos de $\mathcal{M}$ y $x_{i,j,k} : x_{i,k} \to x_{j,k} \otimes x_{i,j}$ son morfismos de $\mathcal{M}$ tales que:

- $x_{i,i} = e$ (el objeto unidad de $\mathcal{M}^{\otimes}$) ;
- $x_{i,j,j} = l : x_{i,j} \to e \otimes x_{i,j}$; $x_{i,i,j} = r : x_{i,j} \to x_{i,j} \otimes e$;
- $(x_{j,k,l} \otimes 1_{x_{i,j}})x_{i,j,l} = a_{x_{k,l},x_{j,k},x_{i,j}}(1_{x_{k,l}} \otimes x_{i,j,k})x_{i,k,l}$

$\forall\ 0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$

Esta definición admite la siguiente (más sugerente) interpretación geométrica:

$(\Delta\mathcal{M}^{\otimes})_0 = \{e\}$

$(\Delta\mathcal{M}^{\otimes})_1 = \{\ 0 \xrightarrow{x_{0,1}} 1\ \}$ donde $x_{0,1} \in Obj(\mathcal{M})$

$(\Delta\mathcal{M}^{\otimes})_2 = \{x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}\}$ donde $x_{0,1,2} \in Morf(\mathcal{M})$ y es situado en un triángulo como el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "x_{1,2}"] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"'] & {} \arrow[u, "x_{0,1,2}"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Para $n = 3$, un 3-símplice es un tetraedro:

$$\begin{tikzcd}
 & 3 & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,3}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] & & 2 \arrow[ul, "x_{2,3}"'] \\
 & 1 \arrow[uu, "x_{1,3}"] \arrow[ur, "x_{1,2}"'] &
\end{tikzcd}$$

con $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "x_{1,2}"] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"'] & {} \arrow[u, "x_{0,1,2}"'] & 2
\end{tikzcd}$$

$x_{0,1,3} : x_{0,3} \to x_{1,3} \otimes x_{0,1}$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "x_{1,3}"] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,3}"'] & {} \arrow[u, "x_{0,1,3}"'] & 3
\end{tikzcd}$$

$x_{0,2,3} : x_{0,3} \to x_{2,3} \otimes x_{0,2}$

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "x_{2,3}"] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,3}"'] & {} \arrow[u, "x_{0,2,3}"'] & 3
\end{tikzcd}$$

y $x_{1,2,3} : x_{1,3} \to x_{2,3} \otimes x_{1,2}$

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "x_{2,3}"] & \\
1 \arrow[ur, "x_{1,2}"] \arrow[rr, "x_{1,3}"'] & {} \arrow[u, "x_{1,2,3}"'] & 3
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo, en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
x_{0,3} \arrow[r, "x_{0,1,3}"] \arrow[d, "x_{0,2,3}"'] & x_{1,3} \otimes x_{0,1} \arrow[r, "x_{1,2,3} \otimes id"] & (x_{2,3} \otimes x_{1,2}) \otimes x_{0,1} \\
x_{2,3} \otimes x_{0,2} \arrow[rr, "id \otimes x_{0,1,2}"] & & x_{2,3} \otimes (x_{1,2} \otimes x_{0,1}) \arrow[u, "\sim"', "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

En general, para $n \geq 3$, un n-símplice puede mirarse como el 2-esqueleto de un n-símplice estándar orientado

$$\begin{tikzcd}
 & n & n-1 \arrow[l, "x_{n-1,n}"'] \arrow[dr, dotted, no head] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,n}"] \arrow[urr] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] \arrow[drr] & & & {} \\
 & 1 \arrow[uu, "x_{1,n}"] \arrow[uur] \arrow[r, "x_{1,2}"'] & 2 \arrow[uul] \arrow[uu, "x_{2,n-1}"'] \arrow[ur, dotted, no head] &
\end{tikzcd}$$

con objetos $x_{i,j}$ situados en las aristas $i \to j$ para $0 \leq i < j \leq n$
y morfismos $x_{i,j,k} : x_{i,k} \to x_{j,k} \otimes x_{i,j}$ situados en el interior de triángulos

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "x_{j,k}"] & \\ i \arrow[ur, "x_{i,j}"] \arrow[rr, "x_{i,k}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow x_{i,j,k}", shift left=3ex] & & k \end{tikzcd}$$

para $0 \leq i < j < k \leq n$.

Estos datos deben verificar que cada tetraedro

$$\begin{tikzcd} & l & \\ i \arrow[ur, "x_{i,l}"] \arrow[rr, "x_{i,k}"] \arrow[dr, "x_{i,j}"'] & & k \arrow[ul, "x_{k,l}"'] \\ & j \arrow[uu, "x_{j,l}"] \arrow[ur, "x_{j,k}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $x_{i,j,k} : x \to x \otimes x_{i,j}$

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "x_{j,k}"] & \\ i \arrow[ur, "x_{i,j}"] \arrow[rr, "x_{i,k}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow x_{i,j,k}", shift left=3ex] & & k \end{tikzcd}$$

$x_{i,j,l} : x_{i,l} \to x_{j,l} \otimes x_{i,j}$

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "x_{j,l}"] & \\ i \arrow[ur, "x_{i,j}"] \arrow[rr, "x_{i,l}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow x_{i,j,l}", shift left=3ex] & & l \end{tikzcd}$$

$x_{i,k,l} : x_{i,l} \to x_{k,l} \otimes x_{i,k}$

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "x_{k,l}"] & \\ i \arrow[ur, "x_{i,k}"] \arrow[rr, "x_{i,l}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow x_{i,k,l}", shift left=3ex] & & l \end{tikzcd}$$

$x_{j,k,l} : x_{j,l} \to x_{k,l} \otimes x_{j,k}$

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "x_{k,l}"] & \\ j \arrow[ur, "x_{j,k}"] \arrow[rr, "x_{j,l}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow x_{j,k,l}", shift left=3ex] & & l \end{tikzcd}$$

ha de ser conmutativo, en el sentido de que el diagrama

$$\begin{tikzcd} x_{i,l} \arrow[r, "x_{i,j,l}"] \arrow[d, "x_{i,k,l}"'] & x_{j,l} \otimes x_{i,j} \arrow[r, "x_{i,j,l} \otimes id"] & (x_{k,l} \otimes x_{j,k}) \otimes x_{i,j} \\ x_{k,l} \otimes x_{i,k} \arrow[rr, "id \otimes x_{i,j,k}"] & & x_{k,l} \otimes (x_{j,k} \otimes x_{i,j}) \arrow[u, "\alpha"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

sea conmutativo para $0 \leq i < j < k < l \leq n$.

Los operadores cara están definidos como sigue:

Si $\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{0,1,2}, x_{0,1,3}x_{0,2,3}, x_{1,2,3}\}$ es un 3-símplice,

$$\begin{tikzcd} & 3 & \\ 0 \arrow[ur, "x_{0,3}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] & & 2 \arrow[ul, "x_{2,3}"'] \\ & 1 \arrow[uu, "x_{1,3}"] \arrow[ur, "x_{1,2}"'] & \end{tikzcd}$$

con $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$,$x_{0,1,3} : x_{0,3} \to x_{1,3} \otimes x_{0,1}$, $x_{0,2,3} : x_{0,3} \to x_{2,3} \otimes x_{0,2}$ y $x_{1,2,3} : x_{1,3} \to x_{2,3} \otimes x_{1,2}$;
$d_0(\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{0,1,2}, x_{0,1,3}x_{0,2,3}, x_{1,2,3}\}) = x_{1,2,3}$,
$d_1(\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{0,1,2}, x_{0,1,3}x_{0,2,3}, x_{1,2,3}\}) = x_{0,2,3}$,
$d_2(\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{0,1,2}, x_{0,1,3}x_{0,2,3}, x_{1,2,3}\}) = x_{0,1,3}$ y
$d_3(\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{0,1,2}, x_{0,1,3}x_{0,2,3}, x_{1,2,3}\}) = x_{0,1,2}$.

Si $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$ es un 2-símplice, $d_0(x_{0,1,2}) = x_{1,2}$, $d_1(x_{0,1,2}) = x_{0,2}$ y $d_2(x_{0,1,2}) = x_{0,1}$.

En general, la cara d_i de un n-símplice, para $0 \leq i \leq n$, consiste en el 2-esqueleto del $(n-1)$-símplice estándard orientado que resulta de eliminar el vértice i, y en consecuencia los objetos $x_{i,j}$, para $0 \leq i \leq j \leq n$, y $x_{k,i}$ para $0 \leq k \leq i \leq n$ y los morfismos (triángulos) correspondientes del n-símplice estándar orientado.

Y los operadores degeneración:

Sea $(\ 0 \xrightarrow{x_{0,1}} 1\ ) \in (\Delta\mathcal{M}^{\otimes})_1$
$s_0(\ 0 \xrightarrow{x_{0,1}} 1\ ) = x_{0,0,1} = r : x_{0,1} \to x_{0,1} \otimes e$;

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "x_{0,1}"] & \\ 0 \arrow[ur, "x_{0,0}=e"] \arrow[rr, "x_{0,1}"'] & & 1 \end{tikzcd}$$

$$s_1(\ 0 \xrightarrow{x_{0,1}} 1\ ) = x_{0,1,1} = l : x_{0,1} \to e \otimes x_{0,1};$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "x_{1,1}=e"] & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "\uparrow l"] & & 1
\end{tikzcd}$$

Si $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$ es un 2-símplice,

$$s_0(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & 2 & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"] \arrow[dr, "e"'] & & 1 \arrow[ul, "x_{1,2}"'] \\
 & 0 \arrow[uu, "x_{0,2}"'] \arrow[ur, "x_{0,1}"'] &
\end{tikzcd}$$

con $x_{0,0,2} = r : x_{0,2} \to x_{0,2} \otimes e$, $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$ y $x_{0,0,1} = l : x_{0,1} \to x_{0,1} \otimes e$

$$s_1(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & 2 & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] & & 1 \arrow[ul, "x_{1,2}"'] \\
 & 1 \arrow[uu, "x_{1,2}"'] \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

con $x_{0,1,1} = l : x_{0,1} \to e \otimes x_{0,1}$, $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$ y $x_{1,1,2} = r : x_{1,2} \to x_{1,2} \otimes e$

$$s_2(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & 2 & \\
0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] & & 2 \arrow[ul, "e"'] \\
 & 1 \arrow[uu, "x_{1,2}"'] \arrow[ur, "x_{1,2}"'] &
\end{tikzcd}$$

con $x_{0,2,2} = l : x_{0,2} \to e \otimes x_{0,2}$, $x_{0,1,2} : x_{0,2} \to x_{1,2} \otimes x_{0,1}$ y $x_{1,1,2} = r : x_{1,2} \to x_{1,2} \otimes e$

En general, la degeneración s_j de un n-símplice, para $0 \leq j \leq n$, consiste en el 2-esqueleto del $(n+1)$-símplice estándard orientado que resulta de repetir el vértice j, y en consecuencia los objetos $x_{i,j}$, para $0 \leq i \leq j \leq n$, $x_{j,k}$ para $0 \leq j \leq k \leq n$ y e, junto con sus morfismos (triángulos) correspondientes, al n-símplice estándar orientado.

5. El nervio de un grupo categórico

Grupos categóricos son grupoides monoidales en los que todo objeto es invertible, salvo isomorfismo, respecto al producto tensor.

Antes de precisar más esta definición y fijar notación destaquemos que la (2)-categoría de los grupos categóricos viene a ser el análogo 2-dimensional de la categoría de grupos y que tales estructuras categóricas surgen de forma natural en la consideración de numerosos problemas tanto algebraicos como topológicos (véase [2, 8, 5, 22]). Más en concreto, la utilidad e importancia de los grupos categóricos en teoría de Homotopía procede de que ellos proporcionan nuevos modelos algebraicos para los 2-tipos conexos, hecho probado por la alumna de A. Grothendieck, H. Shin, en su tesis doctoral [22]. Alternativamente este hecho puede ser deducido (véase [5]) haciendo uso de la construcción de nervio de un grupo categórico que a continuación describiremos.

Definición 11 Un *grupo categórico* es un grupoide monoidal (es decir una categoría monoidal pequeña en la que todo morfismo es un isomorfismo)

$$\mathbb{G} = (\,\mathbb{G},\, \otimes,\, a,\, I,\, l,\, r)$$

con:

$a = a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C);$
$l = l_A : I \otimes A \to A; \quad r = r_A : A \otimes I \to A;$

en el que todo objeto es invertible, esto es, los funtores $B \mapsto A \otimes B$ y $B \mapsto B \otimes A$ son equivalencias para cualquier $A \in Obj(\mathbb{G})$. En este caso es posible elegir, para cada $A \in Obj(\mathbb{G})$, un objeto A^* (llamado un inverso para A) e isomorfismos $\gamma_A : A \otimes A^* \to I$ y $\theta_A : A^* \otimes A \to I$ tales que $l_A(\gamma_A \otimes 1) = r_A(1 \otimes \theta_A)a_{A,A^*,A}$.

Grupos categóricos y funtores monoidales entre ellos forman una categoría que denotaremos $\mathcal{CG}$

Definición 12 Si $\mathbb{G} = (\,\mathbb{G},\, \otimes,\, a,\, I,\, l,\, r)$ es un un grupo categórico, su *nervio geométrico* $N\mathbb{G}$ es el conjunto simplicial $N\mathbb{G} : \Delta^{op} \to Sets$ definido como sigue:

$N(\mathbb{G})_0 = \{I\}$
$N(\mathbb{G})_1 = Obj(\mathbb{G})$

$N(\mathbb{G})_2 = \{(x; A_0, A_1, A_2) \in Morf(\mathbb{G}) \times Obj(\mathbb{G})^3)$ donde $x : A_0 \otimes A_2 \to A_1\}$

$N(\mathbb{G})_3 = \{\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3, A, B, C, D, E, F) \in Morf(\mathbb{G})^4 \times Obj(\mathbb{G})^6$ donde $x_0 : A \otimes B \to D$; $x_1 : A \otimes E \to F$; $x_2 : D \otimes C \to E$ y $x_3 : B \otimes C \to E\}$ y tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & (A\otimes B)\otimes C \arrow[rr, "a"] \arrow[dl, "x_0\otimes 1"'] & & A\otimes(B\otimes C) \arrow[dr, "1\otimes x_3"] & \\
D\otimes C \arrow[drr, "x_2"] & & & & A\otimes E \arrow[dll, "x_1"'] \\
 & & F & &
\end{tikzcd}$$

Omitiendo el isomorfismo de asociatividad escribiremos

$$\alpha \quad = \quad \begin{tikzcd}
A\otimes B\otimes C \arrow[r, "1\otimes x_3"] \arrow[d, "x_0\otimes 1"] & A\otimes E \arrow[d, "x_1"] \\
D\otimes C \arrow[r, "x_2"] & F
\end{tikzcd}$$

Los operadores cara y degeneración hasta esta dimensión están dados como sigue:

Si $A \in Ner(\mathbb{G})_2 = Obj(\mathbb{G})$, entonces $d_i(A) = 1$ para $i = 0, 1$; si $x : A_0 \otimes A_2 \to A_1$ es un 2-símplice, entonces $d_i(x) = A_i$ para $i = 0, 1, 2$; y si $\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3, A, B, C, D, E, F)$ es un 3-símplice entonces $d_i(\alpha) = x_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

Si $A \in Ner(\mathbb{G})_1 = Obj(\mathbb{G})$ entonces

$s_0(A) = (r_A; A, A, I) \quad r_A : A \otimes I \to A$

$s_1(A) = (l_A; I, A, A) \quad l_A : I \otimes A \to A$

Si $(x : A_0 \otimes A_2 \to A_1) \in Ner(\mathbb{G})_2$ entonces

$s_0(x) = (x, x, r, r) =$

$$\begin{tikzcd}
A_0\otimes A_2\otimes I \arrow[r, "1\otimes r"] \arrow[d, "x\otimes 1"] & A_0\otimes A_2 \arrow[d, "x"] \\
A_1\otimes I \arrow[r, "r"] & A_1
\end{tikzcd}$$

$s_1(x) = (r, x, x, l) =$

$$s_2(x) = (l, l, x, x) = \begin{array}{c} \begin{tikzcd} A_0 \otimes I \otimes A_2 \arrow[r, "1\otimes l"] \arrow[d, "r\otimes 1"] & A_0 \otimes A_2 \arrow[d, "x"] \\ A_0 \otimes A_2 \arrow[r, "x"] & A_1 \end{tikzcd} \\ \\ \begin{tikzcd} I \otimes A_0 \otimes A_2 \arrow[r, "1\otimes x"] \arrow[d, "l\otimes 1"] & I \otimes A_1 \arrow[d, "l"] \\ A_0 \otimes A_2 \arrow[r, "x"] & A_1 \end{tikzcd} \end{array}$$

Hasta aquí se tiene definido un conjunto simplicial truncado a nivel 3. Algunas identidades simpliciales son comprobadas a continuación:

Si $\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3, A, B, C, D, E, F)$ un 3-símplice, entonces $d_0d_1 = d_0d_0$, pues $d_0d_1(\alpha) = d_0(x_1) = A$; $d_0d_0(\alpha) = d_0(x_0) = A$

Si $x : A_0 \otimes A_2 \to A_1$ es un 2-símplice, entonces $d_0s_0 = d_1s_0$, pues
$d_0s_0(x) = d_0(x, x, r, r, A_0, A_2, I, A_1, A_2, A_1) = x$
$d_1s_0(x) = d_1(x, x, r, r, A_0, A_2, I, A_1, A_2, A_1) = x$
$d_2s_0 = s_0d_1$, pues
$d_2s_0(x) = d_2(x, x, r, r, A_0, A_2, I, A_1, A_2, A_1) = r$; $s_0d_1(x) = s_0(A_1) = r$
y $d_3s_0 = s_0d_2$, pues
$d_3s_0(x) = d_3(x, x, r, r, A_0, A_2, I, A_1, A_2, A_1) = r$; $s_0d_2(x) = s_0(A_2) = r$

En general, $N\mathbb{G} : \Delta^{op} \to Sets$ es definido entonces como el 3-coesqueleto de este conjunto simplicial truncado a nivel 3. Esto significa que en dimensiones $p \geq 4$, $N\mathbb{G}_p$ consiste de núcleos simpliciales (recuérdese que el $n+1$ núcleo simplicial de un conjunto simplicial truncado a nivel n está formado por las $(n+2)$-uplas $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in X_n^{n+2}$ tales que $d_ix_j = d_{j-1}x_i$ para $0 \leq i < j \leq n+1$) donde los operadores cara son las restricciones de las proyecciones.

Así, por ejemplo, omitiendo los ismorfismos de asociatividad, un 4-símplice de $N\mathbb{G}$ $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4,)$ puede ser representado por un cubo de caras conmutativas:

$$
\begin{tikzcd}
 & & A\otimes B\otimes C\otimes D \arrow[dll, "f\otimes 1\otimes 1"'] \arrow[dd, "1\otimes 1\otimes k"] \arrow[rr, "1\otimes u\otimes 1"] & & A\otimes G\otimes D \arrow[dl, "x\otimes 1"'] \arrow[dd, "1\otimes v"] \\
E\otimes C\otimes D \arrow[rrr, "g\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes k"'] & & & M\otimes D \arrow[dd, "h"] & \\
 & & A\otimes B\otimes F \arrow[dll, "f\otimes 1"'] \arrow[rr, "1\otimes s"] & & A\otimes K \arrow[dl, "m"] \\
E\otimes F \arrow[rrr, "j"'] & & & J &
\end{tikzcd}
$$

donde $\alpha_0 \otimes 1$ es la cara superior, α_1 la inferior, α_3 la frontal, $1 \otimes \alpha_4$ la de atrás y α_2 la lateral derecha.

Con esta construcción se tiene ([5, Proposition 2.3]) que $N\mathbb{G}$ es un conjunto simplicial de Kan con solo dos grupos de homotopía no nulos, a saber,

$$\Pi_1 N\mathbb{G} \cong \Pi_0\mathbb{G}, \quad \Pi_2 N\mathbb{G} \cong Aut_{\mathbb{G}}(I), \quad \text{y } \Pi_i N\mathbb{G} = 0, \ \forall i \neq 1, 2.$$

Este hecho sugiere, como ya se comentó anteriormente, el resultado de que grupos categóricos son modelos algebraicos para los 2-tipos conexos.

6. El nervio geométrico de una 2-categoría

Las nociones de categoría, funtor y transformación natural junto con las dos formas de componer éstas, la composición vertical y la composición horizontal, sugieren la definición general de 2-categoría como una estructura consistente en objetos ($0 - celdas$), morfismos entre los objetos ($1 - celdas$) y deformaciones ($2 - celdas$) entre los morfismos, donde las $2 - celdas$ pueden componerse de dos formas, la vertical y la horizontal. De esta forma se concibe a Cat como un ejemplo fundamental de la noción de 2-categoría que precisamos a continuación:

Definición 13 Una *2-categoría* $\mathcal{C}$ es una estructura consistiendo de:

i) Una clase de objetos $Obj(\mathcal{C})$ (llamados también *0-celdas*).

ii) Una categoría $\mathcal{C}(x, y)$, $\forall\ x, y \in Obj(\mathcal{C})$. Los objetos de $\mathcal{C}(x, y)$ se llaman morfismos (o $1 - celdas$) y son denotados $u : x \to y$; y los morfismos de $\mathcal{C}(x, y)$

son llamados deformaciones (o $2-celdas$) y son denotados $f : u \Rightarrow v$.

La composición en cada categoría $\mathcal{C}(x,y)$ se llama composición vertical y se denota por yuxtaposición.

iii) Un bifuntor

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(y,z) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{C}(x,z) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z \arrow[r] & x \arrow[r, bend left, "v\circ u"] \arrow[r, bend right, "v'\circ u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g \circ f"] & z \end{tikzcd}$$

$\forall x, y, z \in Obj(\mathcal{C})$, llamado composición horizontal, que es asociativo y tiene identidades, esto es, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ y, $\forall u : x \to y$, existen morfismos identidad $1_x : x \to x$ y $1_y : y \to y$ tales que $1_x \circ u = u = u \circ 1_y$.

Si $\mathcal{C}$ es una 2-categoría y se considera la misma construcción del nervio de Grothendieck $N\mathcal{C}$ realizada en el caso de una categoría, se tiene una categoría simplicial (objeto simplicial en Cat) $N\mathcal{C} : \Delta^{op} \to Cat$ y usando la definición de Segal [21] de realización geométrica de un espacio topológico simplicial (objeto simplicial en Top) se tiene una definición de espacio clasificador de una 2-categoría por $B\mathcal{C} = B([p] \to BN\mathcal{C}_p)$ (donde $BN\mathcal{C}_p$ es el espacio clasificador de la categoría $N\mathcal{C}_p$).

Sin embargo hay otra forma convincente y equivalente (véase [3, Theorem 1.1]) de asociar un espacio a una 2-categoría que pasa por la consideración del llamado nervio geométrico $\Delta\mathcal{C}$ de la 2-categoría, que fue desarrollado entre otros por Street [25] y Duskin [11]. Este nervio geométrico de $\mathcal{C}$ es un conjunto simplicial que tiene de nuevo, como ocurría en otras estructuras ya comentadas, la virtud de tener cifrada en su estructura (caras y degeneraciones) toda la estructura en este caso de 2-categoría de $\mathcal{C}$.

Antes de pasar a dar la definición explícita de $\Delta\mathcal{C}$ recordemos que dada una categoría I y una 2-categoría $\mathcal{C}$ un *funtor laxo normalizado* $x : I \to \mathcal{C}$ consiste de tres funciones que asocian:

a) A cada $i \in Obj(I)$ un objeto $x_i \in Obj(\mathcal{C})$

b) A cada morfismo τ en I, $\tau : i \to j$, una 1-celda en $\mathcal{C}$, $x_\tau : x_i \to x_j$

c) A cada par de morfismos componibles $i \xrightarrow{\tau} j \xrightarrow{\sigma} k$ en I, una 2-celda en $\mathcal{C}$, $x_{\tau,\sigma} : x_{\sigma\tau} \Rightarrow x_\sigma x_\tau$

y estos datos deben satisfacer las siguientes condiciones de normalización y coherencia:

• Para cualquier $i \in Obj(I)$, $x_{1_i} = 1_{x_i}$

• Para cualquier morfismo $\tau : i \to j$ en I, $x_{\tau,1_i} = 1_{x_\tau} = x_{1_j,\tau}$

• Para cada terna de morfismos componibles en I $i \xrightarrow{\gamma} j \xrightarrow{\tau} k \xrightarrow{\sigma} l$, el siguiente cuadrado de 2-celdas de $\mathcal{C}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} x_{\sigma\tau\gamma} \arrow[r, Rightarrow, "x_{\sigma\tau,\gamma}"] \arrow[d, Rightarrow, "x_{\sigma,\tau\gamma}"'] & x_{\sigma\tau}x_\gamma \arrow[d, Rightarrow, "x_{\sigma,\tau}x_\gamma"] \\ x_\sigma x_{\tau\gamma} \arrow[r, Rightarrow, "x_\sigma x_{\tau,\gamma}"] & x_\sigma x_\tau x_\gamma \end{tikzcd}$$

Denotamos $LaxFunt(I, \mathcal{C})$ al conjunto de funtores laxos de I en $\mathcal{C}$.

Definición 14 [3, 11, 26] Si $\mathcal{C}$ es una 2-categoría, el *nervio geométrico* de $\mathcal{C}$ es el conjunto simplicial definido por:

$$\begin{aligned} \Delta : \qquad \Delta^{op} &\longrightarrow Sets \qquad . \\ [p] &\longmapsto \Delta\mathcal{C}_p = LaxFunt([p], \mathcal{C}) \end{aligned}$$

Entonces si $x \in LaxFunt([p], \mathcal{C})$ se tiene que x consiste de una familia

$$x = \{x_i, x_{i,j}, x_{i,j,k}\}_{0 \le i \le j \le k \le p}$$

donde $x_i \in Obj(\mathcal{C})$, $x_{i,j} : x_i \to x_j$ son 1-celdas y $x_{i,j,k} : x_{i,k} \Rightarrow x_{j,k} \circ x_{i,j}$ son 2-celdas en $\mathcal{C}$ tales que:

• $x_{i,i} = 1_{x_i}$ $\quad 0 \le i \le p$

• $x_{i,j,j} = 1_{x_{i,j}} = x_{i,i,j}$ $\quad 0 \le i \le j \le p$

• $x_{k,l} \circ x_{i,j,k} x_{i,k,l} = x_{j,k,l} \circ x_{i,j} x_{i,j,l}$ $\quad 0 \le i \le j \le k \le l \le p$

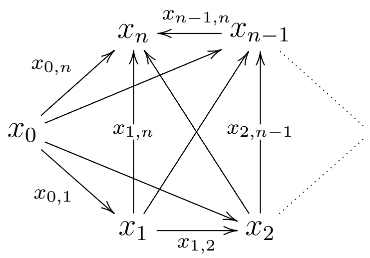
Es claro entonces que los vértices de $\Delta\mathcal{C}$ son los objetos de $\mathcal{C}$, los 1-símplices son los morfismos de $\mathcal{C}$, los 2-símplices pueden interpretarse como triángulos

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "x_{1,2}"] & \\ x_0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Uparrow x_{0,1,2}"] & & x_2 \end{tikzcd}$$

donde $x_{0,1,2} : x_{0,2} \Rightarrow x_{1,2} \circ x_{0,1}$ es una 2-celda en $\mathcal{C}$

y, para $n \ge 3$, un n-símplice puede verse como un diagrama en $\mathcal{C}$ con la forma de

2-esqueleto de un n-símplice estándar orientado



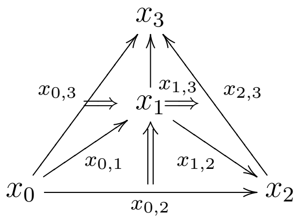
cuyos vértices $x_0, \dots, x_n$ son objetos de $\mathcal{C}$, cuyas aristas $x_{i,j} : x_i \to x_j \quad , 0 \leq i < j \leq n$, son morfismos en $\mathcal{C}$ y cuyas caras son triángulos

$$\begin{tikzcd} & x_j \arrow[dr, "x_{j,k}"] & \\ x_i \arrow[ur, "x_{i,j}"] \arrow[rr, "x_{i,k}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Uparrow x_{i,j,k}"] & & x_k \end{tikzcd}$$

con $x_{i,j,k} : x_{i,k} \Rightarrow x_{j,k}x \circ x_{i,j} \quad 0 \leq i < j < k \leq n$ es una 2-celda en $\mathcal{C}$ satisfaciendo que cada tetraedro con vértices x_i, x_j, x_k y x_l es conmutativo, en el sentido de que el siguiente cuadrado de 2-celdas sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} x_{i,l} \arrow[r, Rightarrow, "x_{i,j,l}"] \arrow[d, Rightarrow, "x_{i,k,l}"'] & x_{j,l} \circ x_{i,j} \arrow[d, Rightarrow, "x_{j,k,l} \circ x_{i,j}"] \\ x_{k,l} \circ x_{i,k} \arrow[r, Rightarrow, "x_{k,l} \circ x_{i,j,l}"] & x_{k,l} \circ x_{j,k} \circ x_{i,j} \end{tikzcd}$$

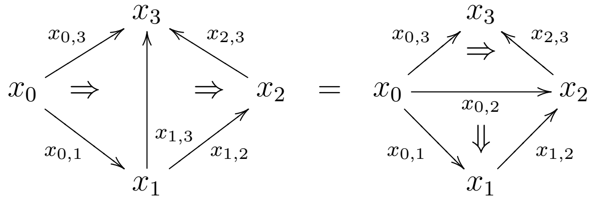
Así, en concreto, un 3-símplice es un diagrama en $\mathcal{C}$



con $x_{0,1,3} : x_{0,3} \Rightarrow x_{1,3} \circ x_{0,1}$, $x_{1,2,3} : x_{1,3} \Rightarrow x_{2,3} \circ x_{1,2}$, $x_{0,2,3} : x_{0,3} \Rightarrow x_{2,3} \circ x_{0,2}$ y $x_{0,1,2} : x_{0,2} \Rightarrow x_{1,2} \circ x_{0,1}$ y tal el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{tikzcd} x_{0,3} \arrow[r, Rightarrow, "x_{0,1,3}"] \arrow[d, Rightarrow, "x_{0,2,3}"'] & x_{1,3} \circ x_{0,1} \arrow[d, Rightarrow, "x_{1,2,3} \circ x_{0,1}"] \\ x_{2,3} \circ x_{0,2} \arrow[r, Rightarrow, "x_{2,3} \circ x_{0,1,2}"] & x_{2,3} \circ x_{1,2} \circ x_{0,1} \end{tikzcd}$$

esto es, que se tenga la siguiente igualdad:



Los operadores cara y degeneración están dados como sigue. Las caras $d_i = \delta_i^* : \Delta\mathcal{C}_n \to \Delta\mathcal{C}_{n-1}$ así que funcionan suprimiendo todos los elementos indizados en i, y renumerando cada índice $l \geq i$ como $l-1$. Análogamente, las degeneraciones $s_j : \Delta\mathcal{C}_n \to \Delta\mathcal{C}_{n+1}$ son definidas como $s_j = \sigma_j^*$.

As; en particular, en dimensiones bajas, las caras y degeneraciones están dadas como sigue:
Si

$$\begin{tikzcd}
 & x_3 & \\
\arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & x_1 \arrow[u, "x_{1,3}"] \arrow[dr, "x_{1,2}"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \\
x_0 \arrow[uur, "x_{0,3}"] \arrow[ur, "x_{0,1}"'] \arrow[rr, "x_{0,2}"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] & x_2 \arrow[uul, "x_{2,3}"']
\end{tikzcd}$$

es un 3-símplice; tenemos que $d_0 = x_{1,2,3}$, $d_1 = x_{0,2,3}$, $d_2 = x_{0,1,3}$ y $d_3 = x_{0,1,2}$.
Si $x_{0,1,2}$ es un 2 símplice, $d_0(x_{0,1,2}) = x_{1,2}$, $d_1(x_{0,1,2}) = x_{0,2}$ y $d_2(x_{0,1,2}) = x_{0,1}$.

$$s_0(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & x_2 & \\
x_0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"] \arrow[dr, "x_{0,0}"'] & & x_1 \arrow[ul, "x_{1,2}"'] \\
 & x_0 \arrow[uu, "x_{0,2}"'] \arrow[ur, "x_{0,1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$s_1(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & x_2 & \\
x_0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"] \arrow[dr, "x_{0,0}"'] & & x_1 \arrow[ul, "x_{1,2}"'] \\
 & x_1 \arrow[uu, "x_{1,2}"'] \arrow[ur, "x_{1,1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$s_2(x_{0,1,2}) = \begin{tikzcd}
 & x_2 & \\
x_0 \arrow[ur, "x_{0,2}"] \arrow[rr, "x_{0,1}"] \arrow[dr, "x_{0,0}"'] & & x_2 \arrow[ul, "x_{2,2}"'] \\
 & x_1 \arrow[uu, "x_{1,2}"'] \arrow[ur, "x_{1,2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $(x_0 \xrightarrow{x_{0,1}} x_1)$ es un 1-símplice
$s_0(x_0 \xrightarrow{x_{0,1}} x_1) = x_{0,0,1} = 1_{x_{0,1}}$ y
$s_1(x_0 \xrightarrow{x_{0,1}} x_1) = x_{0,1,1} = 1_{x_{0,1}}$.

Destaquemos que esta noción del conjunto simplicial “nervio geométrico de una

2-categoría " ha sido mostrada, (véase [3, Theorem 1.1]), vía la consideración de su realización geométrica, como una alternativa más manejable y elegante para la definición del espacio clasificador de una 2-categoría.

Finalmente, es interesante señalar, que una hipotética continuación de este trabajo debería conducir al estudio de otras diferentes nociones de nervio para estructuras categóricas más complicadas como las de bicategoría, tricategoría y, en particular, aquellas que tienen que ver con la consideración de estructuras adicionales como trenzamientos o simetrías (categorías monoidales trenzadas o simétricas, y, en particular, grupos categóricos trenzados o simétricos). Alguna bibliografía sobre estos temas también está incorporada al trabajo ([1, 5, 6, 7, 11, 26]).

Referencias

[1] **J Bénabou,** *Introduction to bicategories* in "Reports of the Midwest Category Seminar"Lecture Notes in Math. 47, Springer-Verlag, Berlin-New York (1967) 1-77 MR0220789

[2] **L Breen,** *Théorie de Schreier supérieure,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série 25 (1992) 465-514 MR1191733

[3] **M Bullejos, A M Cegarra,** *On the geometry of 2-categories and their classifying spaces,* K-Theory (3) 29 (2003) 211-229 MR2028502

[4] **M Bullejos, A M Cegarra,** *Classifying spaces for monoidal categories through Geometric Nerves,* Canad. Math. Bull. (3) 47 (2004) 321-331 MR2072592

[5] **P Carrasco, A M Cegarra,** *(Braided) Tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups,* Comm. in Algebra 24 (1996) 3995-4058 MR1414569

[6] **P Carrasco, A M Cegarra, A R Garzón,** *Nerves and Classifying Spaces for Bicategories*, preprint arXiv:0903.5058v1[math.AT]

[7] **P Carrasco, A M Cegarra, A R Garzón,** *Classifying Spaces for Braided Monoidal categories and lax diagrams of bicategories* arXiv:0907.0930v1 [math.CT]

[8] **A M Cegarra, A R Garzón,** *Homotopy classification of categorical torsors,* Appl. Cat. Structures 9 (2001) 465-496 MR1865612

[9] **E B Curtis,** *Simplicial homotopy theory,* Advances in Math 6 (1971), 107-209

[10] **S Eilenberg, J A Zilber,** *Semi-simplicial complexes and singular homology,* Ann. of Math (51), (1950) 499-513

[11] **J Duskin,** *Simplicial matrices and the nerves of weak n-categories I. Nerves of bicategories,* Theory Appl. Categ. 9 (2001/2002), 198-308

[12] **Z Fiedorowicz,** *Classifying spaces of topological monoids and categories,* Amer. J. Math. (2) 106 (1984) 301-350 MR0737777

[13] **P G Goerss, J F Jardine,** *Simplicial homotopy theory,* Progress in Mathematics 174 Birkhäuser Verlag, Basel (1999) xvi+510 pp. MR1711612

[14] **A Grothendieck,** *Catégories fibrées et déscente,* SGA I exposé VI, Lecture Notes in Math. 224 Springer, Berlin (1971) 145-194

[15] **D M Kan,** *A combinatorial definition of homotopy groups,* Ann. of Math. 67 (2) (1958), 282-312

[16] **D M Kan,** *On homotopy theory and c.s.s. groups,* Ann.of Math. 68(1) (1958), 38-53.

[17] **M Kapranov, V Voevodsky,** *2-Categories and Zamolodchikov tetrahedra equations,* in Proc. Symp. Pure Math. 56 p.2 AMS, Providence, (1994) 177-260 MR1278735

[18] **S Lack, S Paoli,** *2-nerves for bicategories,* K-Theory 38 (2008) 153-175 MR2366560

[19] **S Mac Lane** *Categories for the working mathematician,* GTM 5 2nd Edition, Springer (1998) MR1712872

[20] **J P May,** *Simplicial Objects in Algebraic Topology,* Van Nostrand, Princeton, New York, 1967 MR0222892

[21] **G B Segal,** *Classifying Spaces and Spectral Sequences,* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris 34(1968), 105-112

[22] **H X Sinh,** *Gr-catégories,* Thése de doctorat, Université Paris VII (1975)

[23] **D Quillen,** *Homotopical Algebra,* Springer L.N. in Math 43 (1967)

[24] **R Street,** *Two constructions on lax functors,* Cahiers Top. Géom. Diff. 13 (1972) 217-264 MR0347936

[25] **R Street,** *The algebra of oriented simplexes,* J. Pure Appl. Algebra (3) 49 (1987) 283-335 MR0920944

[26] **R Street,** *Categorical structures,* in Handbook of Algebra, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, (1996) 529-577 MR1421811