

MARÍA PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA

**NÚMERO DE RAMIFICACIÓN  
DE UN PSEUDOGRUPO**



MARÍA PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA

**NÚMERO DE RAMIFICACIÓN  
DE UN PSEUDOGRUPO**

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del profesor Fernando Alcalde Cuesta, para obtener el Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas por la Universidade de Santiago de Compostela.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Número de ramificación de un grafo</b>	<b>5</b>
2.1. Preliminares . . . . .	5
2.1.1. Grafos orientados y no orientados . . . . .	5
2.1.2. Grafo de Cayley de un grupo . . . . .	6
2.1.3. Grafos enraizados . . . . .	7
2.2. Número de ramificación de un grafo . . . . .	8
2.2.1. Definición de número de ramificación . . . . .	8
2.2.2. Número de ramificación y tasa de crecimiento . . . . .	12
2.2.3. Percolación . . . . .	18
2.2.4. Recorridos aleatorios . . . . .	18
<b>3. Número de ramificación y casi-isometría</b>	<b>19</b>
3.1. Grafos casi-isométricos . . . . .	19
3.1.1. Definiciones . . . . .	19
3.1.2. Estructuras de grafo inducidas . . . . .	21
3.1.3. Casi-isometría y número de ramificación . . . . .	24
3.2. Dimensión de Hausdorff . . . . .	28
3.2.1. Espacio de finales de un espacio topológico. . . . .	29
3.2.2. Borde de un árbol . . . . .	30
3.2.3. Casi-isometría y dimensión de Hausdorff . . . . .	30
3.2.4. Relación con el número de ramificación . . . . .	32
<b>4. Número de ramificación de un pseudogrupo</b>	<b>35</b>
4.1. Definiciones básicas . . . . .	35
4.1.1. Pseudogrupos topológicos y medibles . . . . .	35
4.1.2. Ejemplos . . . . .	36
4.1.3. Medidas . . . . .	37

4.1.4.	Estructuras métricas de las órbitas . . . . .	37
4.2.	Equivalencia de pseudogrupos . . . . .	38
4.2.1.	Equivalencia de pseudogrupos topológicos . . . . .	38
4.2.2.	Proceso de reducción de Gaboriau . . . . .	39
4.2.3.	Equivalencia de Kakutani . . . . .	40
4.3.	Número de ramificación . . . . .	41
4.3.1.	Número de ramificación de un pseudogrupo . . . . .	41
4.3.2.	Crecimiento exponencial . . . . .	44
4.3.3.	Caso ergódico . . . . .	46
4.3.4.	Equivalencia de Kakutani . . . . .	46
<b>5.</b>	<b>Pseudogrupos promediables</b>	<b>49</b>
5.1.	Preliminares . . . . .	49
5.1.1.	Recorridos aleatorios . . . . .	49
5.1.2.	Entropía . . . . .	52
5.1.3.	Velocidad . . . . .	53
5.1.4.	Operador de difusión regular . . . . .	54
5.2.	Pseudogrupos promediables . . . . .	55
5.3.	Un ejemplo interesante . . . . .	56
5.3.1.	Grupo del sereno . . . . .	56
5.3.2.	Grafo de Cayley del grupo del sereno . . . . .	58
5.3.3.	Número de ramificación del grupo del sereno . . . . .	58
5.3.4.	Acción de $G_1$ sobre el conjunto de Cantor . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introducción

La noción de número de ramificación  $br(T)$  de un árbol enraizado  $T$ , dada por R. Lyons en [24], representa el número medio de hijos por vértice, entendiendo por hijos aquellos vértices vecinos que se encuentran más alejados de la raíz. El número de ramificación admite otras interpretaciones relacionadas con la percolación o la dicotomía recurrente/transeúnte en recorridos aleatorios sesgados. Entre muchas de sus propiedades, cabe destacar su relación con la dimensión de Hausdorff del espacio de finales del árbol considerado. De hecho, dado un árbol  $T$  y su espacio de finales  $\partial T$  se tiene que:

$$br(T) = e^{HD(\partial T)}.$$

Por otra parte, como resulta natural, el número de ramificación de un árbol  $T$  se relaciona con la tasa de crecimiento exponencial

$$\underline{Gr}(T) = \liminf_{n \rightarrow \infty} v(n)^{\frac{1}{n}}$$

(donde  $v(n)$  denota el número de elementos de la bola cerrada centrada en la raíz y de radio  $n$ ) de la siguiente manera:

$$br(T) \leq \underline{Gr}(T).$$

Aunque en muchos casos ambas cantidades coinciden, R. Lyons presenta un ejemplo donde esto no sucede.

El concepto de número de ramificación puede extenderse a un grafo arbitrario. En este caso, muchas de sus propiedades se conservan, como por ejemplo la relación con la tasa de crecimiento exponencial. Sin embargo, en nuestro trabajo presentamos un ejemplo en el que se muestra que la relación anterior entre el número de ramificación y la dimensión de Hausdorff no es válida para grafos en general.

Puesto que la definición del número de ramificación depende de la métrica, tiene sentido preguntarse si sucede lo mismo a gran escala. En otros términos, se trata de saber si es invariante o no por casi-isometría (en el sentido de Gromov). La respuesta es negativa, ya que el árbol binario y el árbol de Fibonacci son casi-isométricos, pero sus números de ramificación difieren. No obstante, tenemos cierto control sobre los números de ramificación de dos grafos casi-isométricos  $G$  y  $G'$ ; de hecho, sabemos que existe una cierta constante tal que:

$$br(G)^{\frac{1}{c}} \leq br(G') \leq br(G)^c.$$

Nótese que, de igual manera que la propiedad *tener crecimiento subexponencial*, la propiedad *tener número de ramificación igual a 1* sí es invariante por casi-isometría.

El objetivo principal de nuestro trabajo es definir un número de ramificación asociado a cualquier pseudogrupo  $\Gamma$  de transformaciones no singulares de un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$ , dotado de un sistema finito de generadores  $\Sigma$ , que supondremos siempre simétrico. En primer lugar, dotamos a cada órbita de  $\Gamma$  de una estructura de grafo localmente finito definida por  $\Sigma$ . Esto significa que cada órbita  $\Gamma(x)$  es el conjunto de vértices de un grafo  $\Gamma_\Sigma(x)$  donde dos vértices  $y, z \in \Gamma(x)$  están unidos por una arista si y sólo si existe un  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $\sigma(y) = z$ . De este modo, podemos definir la *aplicación de ramificación*  $br_\Sigma : X \rightarrow [1, \infty)$  como  $br_\Sigma(x) = br(\Gamma_\Sigma(x))$ , que resulta ser una aplicación boreliana constante sobre las órbitas.

Definimos finalmente el *número de ramificación* de un pseudogrupo de tipo finito  $(\Gamma, \Sigma)$  actuando sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  como:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int br_\Sigma(x) d\mu(x).$$

Cuando la medida es ergódica, el número de ramificación del pseudogrupo coincide con el número de ramificación de  $\mu$ -casi toda órbita. También podemos extender la noción de crecimiento exponencial a los pseudogrupos de tipo finito, obteniendo de nuevo la relación:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu).$$

Una vez más, la definición del número de ramificación del pseudogrupo  $\Gamma$  depende del sistema finito de generadores que tomemos y resulta natural preguntarse qué sucede cuando cambiamos  $\Sigma$  por otro sistema finito  $\Sigma'$ . Puesto que los pseudogrupos  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma, \Sigma')$  son equivalentes en el sentido de Kakutani, estudiamos de



qué modo afecta dicha equivalencia al número de ramificación. El resultado es muy similar al obtenido para grafos casi-isométricos: si  $(\Gamma, \Sigma, X, \mu)$  y  $(\Gamma', \Sigma', X', \mu')$  son equivalentes en el sentido de Kakutani, entonces:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu)^{\frac{1}{C}} \leq br(\Gamma', \Sigma', \mu') \leq br(\Gamma, \Sigma, \mu)^C$$

siendo  $C$  una constante que depende de la equivalencia. En particular, la propiedad *tener número de ramificación igual a 1* no depende del sistema de generadores elegido.

En este contexto, podemos extender el concepto de *recorrido aleatorio* a un pseudogrupo  $\Gamma$  como la media respecto de  $\mu$  de los recorridos aleatorios en sus órbitas  $\Gamma(x)$ . De ese modo podemos definir un *operador de difusión del calor*  $D$  sobre las órbitas del pseudogrupo. En caso de que el operador  $D$  sea *regular*, disponemos de nociones de *entropía*  $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$  y *velocidad*  $\mathfrak{l}(\Gamma(x))$  en las órbitas, bien definidas y relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)) \leq \underline{Gr}(\Gamma(x)) \mathfrak{l}(\Gamma(x))$$

para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ . Por ejemplo, esto ocurre si la medida  $\mu$  es armónica. En las condiciones anteriores, podemos demostrar que la condición  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$  implica que  $\mathfrak{l}(\Gamma(x)) = 0$ , y por tanto  $\mathfrak{h}(\Gamma(x)) = 0$ , para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ . Este resultado nos permite relacionar el número de ramificación de un pseudogrupo con su promediabilidad. Recordemos que un pseudogrupo  $\Gamma$  de transformaciones no singulares de un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  es *promediable* si existe un sistema medible  $m = \{m_x\}_{x \in X}$  de medias sobre las órbitas  $m_x \in l^\infty(\Gamma(x))_1^{*+}$  (i.e. funcionales lineales positivos y unitarios definidos sobre  $l^\infty(\Gamma(X))$ ) que es invariante en el siguiente sentido: para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$  y para todo  $y \in \Gamma(x)$  se tiene  $m_x = m_y$ . De manera precisa, obtenemos un nuevo criterio de existencia de medias invariantes:

**Teorema 1.1** *Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformaciones no singulares de un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida armónica  $\mu$ . Si  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ , entonces el pseudogrupo  $\Gamma$  es promediable.*

Este resultado proporciona un criterio efectivo para saber cuándo tienen la propiedad de Liouville las órbitas genéricas de un pseudogrupo medible y por consiguiente, extiende los resultados de C. Series y V. A. Kaimanovich sobre relaciones de equivalencia con crecimiento polinomial [27] y subexponencial [18].

Por último, ilustramos nuestra definición con una acción esencialmente libre del *grupo del sereno* sobre el conjunto de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Este ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior no es cierto, ya que el grupo del sereno es promediable, pero su número de ramificación (respecto de un sistema de generadores concreto) es el *número de oro*  $\Phi > 1$ .



# Capítulo 2

## Número de ramificación de un grafo

### 2.1. Preliminares

El objetivo de esta sección es recordar la definición de grafo y sus modalidades, así como fijar notaciones básicas para el desarrollo del trabajo.

#### 2.1.1. Grafos orientados y no orientados

Un *grafo* es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto de vértices y  $E$  es un subconjunto de  $V \times V$  llamado conjunto de aristas. Si  $(v_1, v_2) \in E$  entonces los vértices  $v_1$  y  $v_2$  se dicen vecinos, y se denota  $v_1 \sim v_2$ . La *valencia*  $val(v)$  de un vértice  $v$  es el número de aristas que unen dicho vértice con sus vecinos. Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita en cada vértice y se dice de *geometría acotada* si la valencia está uniformemente acotada.

Un *camino* en un grafo es una sucesión de vértices tal que cada par de elementos consecutivos forman una arista en el grafo y no hay ningún par que se repita. Si dicha sucesión es infinita se trata de un *camino infinito*. La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Se llama *ciclo* a todo camino finito  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $v_1 = v_n$ . Si una arista es de la forma  $e = (v, v)$  entonces diremos que  $e$  es un *lazo* o *bucle*. Un *árbol* es un grafo sin lazos, sin ciclos y sin aristas múltiples (aristas diferentes formadas por el mismo par de vértices). Diremos que un grafo es *conexo* si dados dos vértices arbitrarios existe un camino que los une.

Un grafo es *no orientado* si el conjunto  $E$  es simétrico y la arista  $(v_1, v_2)$  se confunde con  $(v_2, v_1)$ . Si un grafo está *orientado*, dada una arista  $e = (v_1, v_2)$  se

define su *origen* como  $e^- = v_1$  y su *extremo* como  $e^+ = v_2$ . Nótese que según nuestra definición de grafo, el concepto de arista múltiple no tiene sentido en un grafo no orientado y en el caso de grafos orientados, las únicas aristas múltiples que unen dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  son las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_1)$ .

Un grafo  $G$  está dotado de una *métrica* natural  $d$  de manera que la *distancia* entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. Un camino *geodésico* es aquel que minimiza las distancias entre sus extremos.

### 2.1.2. Grafo de Cayley de un grupo

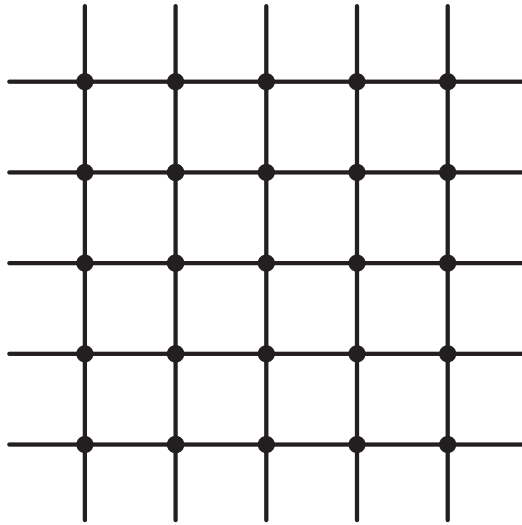
Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un sistema finito de generadores. Supondremos que  $S$  es simétrico (i.e.  $S^{-1} = \{g^{-1}/g \in S\} = S$ ) y no contiene al elemento neutro. El *grafo de Cayley*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  es un grafo cuyos vértices son los elementos de  $G$  y dos vértices  $g_1$  y  $g_2$  están unidos por una arista si y sólo si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . Según esta definición, el grafo de Cayley  $\mathcal{G}$  es un grafo localmente finito, no orientado, sin bucles y sin aristas múltiples, que depende tanto del grupo como del sistema de generadores  $S$ .

Se llama *longitud* de un elemento  $g$  de  $G$  al número mínimo de generadores de  $S$  necesarios para escribir  $g$  y se define la *distancia de las  $S$ -palabras* entre dos elementos  $g_1$  y  $g_2$  de  $G$  como  $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$ . Si dotamos a cada arista de una métrica que la haga isométrica al intervalo  $[0, 1]$ , la métrica  $d_S$  sobre el grupo  $G$  se extiende a una métrica  $d_S$  sobre  $\mathcal{G}$  que hace de éste un espacio métrico conexo por caminos. La distancia  $d_S(x_1, x_2)$  es la longitud mínima de los caminos que unen  $x_1$  y  $x_2$ . Diremos que  $d_S$  es la *métrica de las  $S$ -palabras* sobre  $\mathcal{G}$ .

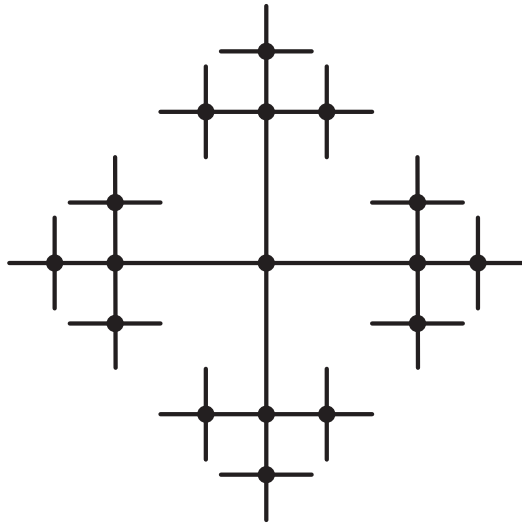
Presentamos a continuación algunos ejemplos de grafos de Cayley.



$$G = \mathbb{Z}, S = \{\pm 1\}.$$



$$G = \mathbb{Z}^2, S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}.$$



$$G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

### 2.1.3. Grafos enraizados

Un *grafo enraizado* es un grafo con un vértice fijado que se denota por 0 y se llama *origen*. En este contexto, dados dos vértices vecinos  $v$  y  $v'$ , se dice que  $v'$  es *hijo*

de  $v$  y que  $v$  es *padre* de  $v'$  si  $d(v', 0) > d(v, 0)$ . Nótese que puede ocurrir que entre dos vértices vecinos no haya relación de parentesco o que dos vértices compartan un hijo. Se dice que una arista de un grafo enraizado es *terminal* si alguno de sus extremos no tiene descendencia. Si  $T$  es un árbol enraizado entonces, dado  $v \in T$  denotamos por  $T^v$  al subárbol formado por  $v$  y sus descendientes.

## 2.2. Número de ramificación de un grafo

Cuando trabajamos con árboles enraizados, la noción de número de ramificación resulta muy intuitiva, puesto que mide el promedio de hijos de un vértice, entendiendo como hijos aquellos vértices vecinos que se encuentran más alejados del origen. Veamos la interpretación geométrica de la definición.

Sea  $T$  un árbol infinito, es decir, que posee caminos geodésicos infinitos. Pensemos las aristas como tubos, a través de los cuales fluye el agua desde la raíz del árbol hasta el infinito, repartiéndose por las distintas ramas que nacen de cada vértice. Fijado  $\lambda \geq 1$ , añadimos la siguiente restricción: la cantidad de agua máxima que puede fluir a través de una arista a distancia  $n$  del origen, es  $\lambda^{-n}$ . Es decir, la capacidad de los tubos disminuye a medida que nos alejamos del origen.

Observemos que si  $\lambda$  es muy grande, la capacidad de las aristas es muy pequeña, de manera que es fácil que en algún momento el agua se estanque y no fluya. Es importante entender que si el árbol está muy ramificado, podemos tomar  $\lambda$  más grande que si está poco ramificado. Se define, por tanto, el *número de ramificación* del árbol  $T$  como el supremo de aquellos  $\lambda$  que permiten fluir el agua a través de  $T$ , o equivalentemente, el ínfimo de los  $\lambda$  que no permiten fluir el agua.

### 2.2.1. Definición de número de ramificación

Sea  $G = (V, E)$  un grafo no orientado localmente finito y  $0$  un vértice fijo.

**Definición 2.1** Una *separatriz* es un subconjunto de aristas  $\Pi$  de  $E$  que separa el origen del infinito, es decir, si eliminamos el conjunto  $\Pi$ , entonces  $0$  e  $\infty$  permanecen en componentes conexas distintas, o equivalentemente, la componente conexa del origen es un subgrafo finito.

Nótese que un conjunto de aristas  $\Pi$  es separatriz si y sólo si todo camino infinito partiendo del origen corta a  $\Pi$  en al menos una arista.

**Definición 2.2** ([25]) El *número de ramificación* de  $G$  se define por:

$$br(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

donde  $d(0, e) = \max\{d(0, x), d(0, y)\}$  con  $e = (x, y)$ .

El número de ramificación no depende de la elección del origen. En efecto, si se sustituye 0 por  $0'$ , la distancia  $d(0, 0')$  es constante y no afecta a la definición, ya que

$$\inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0 \iff \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0',e)} = 0$$

debido a que  $d(0', e) \leq d(0', 0) + d(0, e) \leq 2d(0, 0') + d(0, e)$ .

El sumatorio  $\|\Pi\|_{\lambda} = \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)}$  es la capacidad de las aristas (pensadas como tubos) de una separatriz  $\Pi$ . El hecho de poder encontrar para un  $\lambda \geq 1$  una separatriz con capacidad tan pequeña como queramos, significa que el agua no puede fluir para dicho  $\lambda$ . Obsérvese que la definición coincide con la idea intuitiva de identificar el número de ramificación con el ínfimo de los  $\lambda \geq 1$  que no permiten fluir el agua.

Las aristas terminales de un grafo no influyen en el número de ramificación, de manera que podemos prescindir de ellas mediante un proceso de inducción para proceder a su cálculo. A lo largo de este apartado para simplificar, supondremos que nuestros grafos carecen de aristas terminales.

A continuación introduciremos una definición equivalente del número de ramificación que en muchas ocasiones nos resultará más cómoda de manejar. Sea  $G$  un grafo localmente finito y sea  $\mathfrak{B}_0$  el conjunto de los subgrafos finitos de  $G$  que contienen el origen. Si  $B \in \mathfrak{B}_0$  entonces su *borde*  $\partial B = \{e = (x, y) \in E \mid x \in B, y \notin B\}$  es una separatriz. En efecto, ningún camino infinito  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  partiendo del origen puede estar completamente contenido en  $B$  por ser éste finito, de manera que ha de existir una arista en el camino  $(x_j, x_{j+1})$  tal que  $x_j \in B$  y  $x_{j+1} \notin B$ , es decir, una arista perteneciente al conjunto  $\partial B$ . El siguiente ejemplo nos demuestra que el recíproco no es cierto, no toda separatriz es borde de un elemento de  $\mathfrak{B}_0$ .



**Proposición 2.3** *El número de ramificación*

$$br(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \partial B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

**Demostración.** Como comentamos anteriormente,  $\{\widehat{\partial}B \mid B \in \mathfrak{B}_0\}$  está contenido en el conjunto de las separatrices de  $G$ , luego

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} \geq \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)},$$

de donde se sigue que

$$\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\} \subseteq \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

y en consecuencia  $br(G) \leq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$ . Luego sólo queda comprobar que se da la otra desigualdad. Dada una separatriz  $\Pi$  arbitraria, consideramos la componente conexa del origen  $C_{\Pi}$  que resulta cuando eliminamos  $\Pi$ . Puesto que  $\widehat{\partial}C_{\Pi} \subset \Pi$  tenemos:

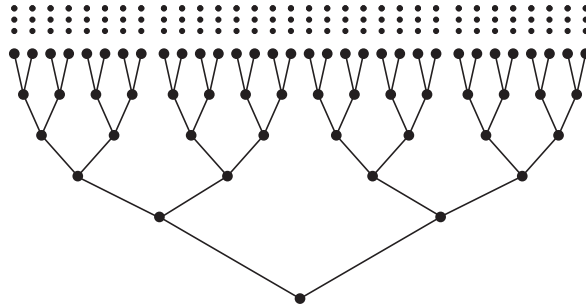
$$\sum_{e \in \widehat{\partial}C_{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} \leq \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)},$$

por ser  $\Pi$  separatriz,  $C_{\Pi}$  es finita y por tanto pertenece al conjunto  $\mathfrak{B}_0$ , luego

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\Pi} \sum_{e \in \widehat{\partial}C_{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)}$$

de donde se deduce que  $br(G) \geq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{e \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$  siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior.  $\square$

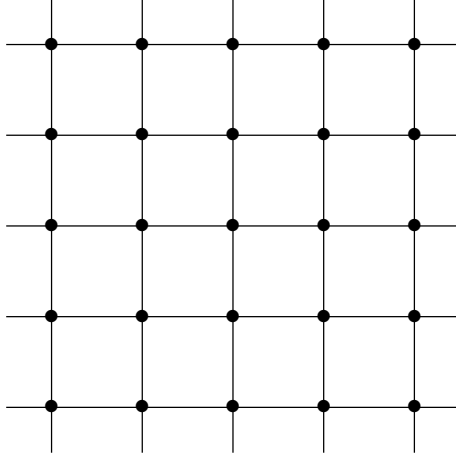
Un ejemplo en el que el número de ramificación coincide claramente con la intuición son los árboles homogéneos, es decir, los árboles cuyos vértices tienen siempre el mismo número de descendientes. Representamos abajo el conocido árbol binario.



$$br(T) = 2.$$

Sin embargo, no sucede lo mismo con algunos grafos, como por ejemplo el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con sistema de generadores  $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ . Aunque los vértices tienen 2, 3 o 4 hijos, el número de ramificación es 1.





$$br(G) = 1.$$

De ahora en adelante trabajaremos con grafos localmente finitos y de geometría acotada (i.e.  $\exists K \in \mathbb{N} \mid val(x) \leq K, \forall x \in G$ ). Esto nos permite introducir una nueva definición de número de ramificación en función de los vértices en vez de las aristas, algo usual en teoría de foliaciones. En estos términos, dado  $B \in \mathfrak{B}_0$ , definimos el  $v$ -borde de  $B$  por  $\partial B = \{x \in B \mid \exists(x, y) \in E \text{ con } y \notin B\}$ .

**Proposición 2.4** *Si  $G$  es un grafo de geometría acotada, entonces el número de ramificación*

$$br(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}.$$

**Demostración.** Dado  $B \in \mathfrak{B}_0$ , nótese que  $\sharp\partial B \leq \sharp\hat{\partial}B \leq K\sharp\partial B$ . La primera desigualdad es inmediata, puesto que por cada  $x \in \partial B$  existe al menos una arista  $(x, y)$  con  $y \notin B$  y por tanto perteneciente a  $\hat{\partial}B$ . La segunda desigualdad se debe a que, dada una arista  $(x, y) \in \hat{\partial}B$ , el vértice  $x$  pertenece a  $\partial B$ . Sin embargo no podemos asegurar que  $\sharp\hat{\partial}B \leq \sharp\partial B$  porque puede suceder que el vértice  $x$  sea común a distintas aristas de  $\hat{\partial}B$ . Lo que sí podemos asegurar es que el número de aristas de  $\hat{\partial}B$  que parten de  $x$  es siempre menor o igual que  $K$ , de manera que se obtiene así la segunda desigualdad.

Teniendo presente que  $d(x, 0) \leq d((x, y), 0) \leq d(x, 0) + 1$  obtenemos lo siguiente

$$\sum_{(x,y) \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,(x,y))} \leq \sum_{(x,y) \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,x)} \leq K \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)}$$

$$\sum_{(x,y) \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,(x,y))} \geq \sum_{(x,y) \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-(d(0,x)+1)} \geq \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-(d(0,x)+1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)}$$

de donde deducimos que

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0 \iff \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{(x,y) \in \widehat{\partial}B} \lambda^{-d(0,(x,y))} = 0$$

□

Obsérvese que, mediante un razonamiento análogo al anterior, podemos escribir  $br(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\widehat{\Pi}} \sum_{x \in \widehat{\Pi}} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$  donde  $\widehat{\Pi}$  es una  $v$ -separatriz, es decir, un conjunto de vértices del grafo  $G$  tal que, si los eliminamos, la componente conexa del origen es finita.

**Proposición 2.5** *Sea  $G'$  un subgrafo de  $G$ , entonces  $br(G') \leq br(G)$*

**Demostración.** Si  $\Pi$  es separatriz de  $G$ , entonces  $\Pi' = \Pi \cap G'$  es separatriz en  $G'$ . Además, para  $e \in \Pi'$ ,  $d(0,e) \leq d'(0,e)$  siendo  $d'$  la métrica natural en  $G'$ , que en general no coincide con la inducida. Luego tenemos

$$\sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} \geq \sum_{e \in \Pi'} \lambda^{-d'(0,e)},$$

y siguiendo el procedimiento habitual, obtenemos que  $br(G') \leq br(G)$ . □

### 2.2.2. Número de ramificación y tasa de crecimiento

Resulta natural comparar el número de ramificación con el crecimiento exponencial de un grafo. Entre las distintas definiciones de tasa de crecimiento nos quedamos con la que presentamos a continuación. Definimos la *tasa de crecimiento exponencial inferior* de un grafo  $G$  como

$$\underline{gr}(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$$

donde  $s(n)$  es el cardinal de la esfera  $S_n = \{x \in G \mid d(0,x) = n\}$ . De igual modo, se define la *tasa de crecimiento exponencial superior* como

$$\overline{gr}(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}.$$

Cuando ambas tasas existen y coinciden, entonces se define la *tasa de crecimiento exponencial* como

$$gr(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}.$$

En teoría de foliaciones la definición que suele usarse es la siguiente

$$\underline{Gr}(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} v(n)^{\frac{1}{n}}$$

donde  $v(n)$  es el cardinal de la bola  $B_n = \{x \in G \mid d(0, x) \leq n\}$ . La relación entre ambas tasas resulta obvia,  $\underline{gr}(G) \leq \underline{Gr}(G)$ .

**Definición 2.6** Un grafo  $G$  tiene *crecimiento exponencial* si  $\underline{Gr}(G) > 1$ .

El interés de  $\underline{gr}(G)$  se debe a que admite una formulación similar a la del número de ramificación que va a permitir comparaciones entre ambas cantidades.

**Proposición 2.7** *La tasa de crecimiento exponencial*

$$\underline{gr}(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$$

**Demostración.** Si vemos

$$1) \lambda > \underline{gr}(G) \implies \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = \inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n = 0$$

$$2) \lambda < \underline{gr}(G) \implies \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = \inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n \neq 0$$

entonces tenemos que

$$\underline{gr}(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \lambda > \underline{gr}(G)\} = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}.$$

Recordemos que  $\underline{gr}(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$  si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0$

$$- s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(G) + \varepsilon \text{ para una cantidad infinita de naturales,}$$

$$- s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(G) - \varepsilon \text{ para una cantidad finita de naturales.}$$

1) Supongamos  $\lambda > \underline{gr}(G)$  y fijemos  $\varepsilon < \lambda - \underline{gr}(G)$ . Por la definición de límite inferior, tenemos que  $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(G) + \varepsilon$  para una cantidad infinita de naturales, o lo que es lo mismo, para una subsucesión  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Por tanto:

$$0 < \left(\frac{s(n_k)^{\frac{1}{n_k}}}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\underline{gr}(G) + \varepsilon}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^{n_k} = 1$$

Luego la sucesión de términos estrictamente positivos  $\{(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda})^n\}$  tiene una subse-  
 ción que converge a 0, y por consiguiente  $\inf_n(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda})^n = 0$ .

2) Supongamos ahora  $\lambda < \underline{gr}(G)$  y fijemos  $\varepsilon < \underline{gr}(G) - \lambda$ . Por la definición de  
 límite inferior, tenemos que  $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(G) - \varepsilon$  para una cantidad finita de naturales,  
 o equivalentemente,  $s(n)^{\frac{1}{n}} \geq \underline{gr}(G) - \varepsilon$  para todo  $n$  suficientemente grande. Por  
 tanto:

$$(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda})^n \geq (\frac{\underline{gr}(G) - \varepsilon}{\lambda})^n > (\frac{\lambda}{\lambda})^n = 1$$

Luego la sucesión de términos estrictamente positivos  $\{(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda})^n\}$  tiende a  $+\infty$ . En  
 este caso, tenemos que  $\inf_n(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda})^n \neq 0$ . □

**Proposición 2.8** *El número de ramificación y la tasa de crecimiento inferior están  
 relacionados por:*

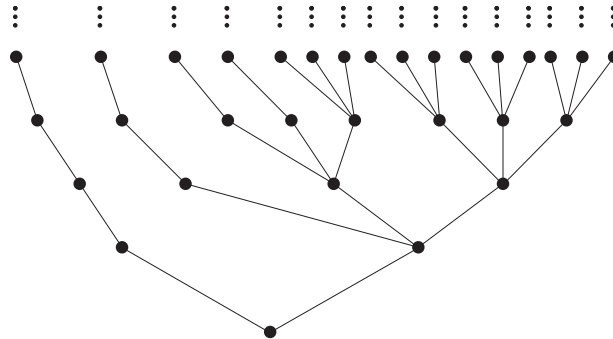
$$br(G) \leq \underline{gr}(G)$$

**Demostración.** Nótese que cada esfera  $S_n = \{x \in G \mid d(0, x) = n\}$  es una v-  
 separatriz de  $G$  de manera que

$$\inf_{S_n} \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} \geq \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{x \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,x)}$$

y siguiendo el procedimiento habitual obtenemos el resultado. □

Resulta natural estudiar en qué casos coinciden el número de ramificación y  
 la tasa de crecimiento. El árbol que presentamos a continuación muestra que no  
 siempre se da la igualdad:



$$br(T) = 1 \qquad gr(T) = 2.$$

No obstante, podemos escribir condiciones suficientes para la igualdad. Para simplificar la notación representaremos por  $|x|$  la distancia  $d(0, x)$  y denotaremos  $e(x)$  a la arista  $e$  cuyo extremo más alejado del origen es  $x$ .

**Definición 2.9** ([25]) Un árbol  $T$  es *esféricamente simétrico* si el número de hijos de un vértice  $x \in T$  sólo depende de la distancia de  $x$  al origen 0. Es decir, los elementos de cada esfera tienen el mismo número de hijos.

**Proposición 2.10** Si  $T$  es un árbol esféricamente simétrico entonces  $br(T) = \underline{gr}(T)$ .

**Demostración.** Sea  $\Pi$  una  $v$ -separatriz minimal. Sean  $d = \min_{x \in \Pi} |x|$  y  $d' = \max_{x \in \Pi} |x|$ . Puesto que  $T$  es esféricamente simétrico, los subárboles  $\{T^x \mid x \in S_d\}$  son todos idénticos y por tanto  $\Pi(x) = \Pi \cap T^x$  son distintas separatrices del mismo subárbol. Dado  $\lambda \geq 1$ , tomamos  $y \in S_d$  tal que  $\|\Pi(y)\|_\lambda = \min_{x \in S_d} \{\|\Pi(x)\|_\lambda\}$ . Si reemplazamos la separatriz  $\Pi(x)$  de cada subárbol  $T^x$  por  $\Pi(y)$ , se obtiene una separatriz  $\Pi^* = \bigcup_{x \in S_d} \Pi(y)$  tal que

$$\|\Pi^*\|_\lambda = s(d)\|\Pi(y)\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda.$$

Queremos ver que existe un entero  $n \in [d, d']$  tal que  $\|S_n\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda$ . Nótese que  $d^* = \min_{x \in \Pi^*} |x| \geq d$  y  $\max_{x \in \Pi^*} |x| \leq d'$ . Si  $d^* = d$  entonces significa que  $\Pi^* = S_d$  y tenemos lo que buscábamos. Si  $d^* > d$  repetimos el proceso anterior sobre la separatriz  $\Pi^*$  y  $d^*$ . Puesto que el proceso no puede ser infinito ya que  $d^*$  está acotado por  $d'$ , ha de existir un entero  $n \in [d, d']$  tal que  $\|S_n\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda$ . Luego hemos probado que, para cada  $\lambda \geq 1$ ,

$$\inf_{\Pi} \|\Pi\|_\lambda \geq \inf_n \|S_n\|_\lambda,$$

de donde se sigue que  $br(T) = \underline{gr}(T)$ . □

**Definición 2.11** ([25]) Un árbol  $T$  es *N-subperiódico* (resp. *N-periódico*) si para todo  $x \in T$  existe una aplicación inyectiva (resp. biyectiva) que conserva la adyacencia  $f : T^x \rightarrow T^{f(x)}$  con  $|f(x)| \leq N$ . Un árbol se dice *subperiódico* (resp. *periódico*) si es N-subperiódico (resp. N-periódico) para algún  $N \in \mathbb{N}$ .

Si  $T$  es 0-subperiódico, entonces existe la tasa de crecimiento  $gr(T)$ . En efecto, la sucesión  $\{\log(s(n))\}$  es subaditiva puesto que  $s(n+m) \leq s(n)s(m)$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Aplicando el lema de Fekete a la sucesión de logaritmos, nos garantizamos la existencia del límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n))}{n}$ .

**Proposición 2.12** ([25]) *Si  $T$  es un árbol subperiódico entonces  $br(T) = gr(T)$ .*

**Demostración.** Primero supondremos que  $T$  no tiene aristas terminales y es 0-subperiódico. Sea  $\Pi$  una separatriz (que podemos suponer minimal y por tanto finita) y  $\lambda > 0$  tales que  $\|\Pi\|_\lambda < 1$ . Sea  $d = \max_{e(x) \in \Pi} |x|$ , es decir, el máximo nivel de  $\Pi$ . Por 0-subperiodicidad, para cada  $e(x) \in \Pi$ , existe una separatriz  $\Pi(x)$  del subárbol  $T^x$  tal que  $\sum_{e(y) \in \Pi(x)} \lambda^{-(|y|-|x|)} \leq \|\Pi\|_\lambda < 1$  y  $\max_{e(y) \in \Pi(x)} (|y| - |x|) \leq d$ . Entonces  $\|\Pi(x)\|_\lambda = \sum_{e(y) \in \Pi(x)} \lambda^{-|y|} < \lambda^{-|x|}$ . Si reemplazamos las aristas  $e(x) \in \Pi$  por las aristas de la correspondiente  $\Pi(x)$ , obtenemos una separatriz  $\tilde{\Pi} = \bigcup_{e(x) \in \Pi} \Pi(x)$  que satisface  $\|\tilde{\Pi}\|_\lambda = \sum_{e(x) \in \Pi} \|\Pi(x)\|_\lambda \leq \|\Pi\|_\lambda < 1$ .

Dado  $n > d$ , podemos repetir el proceso para todas las aristas  $e(x)$  con  $|x| < n$  hasta obtener una separatriz  $\Pi^*$  entre los niveles  $n$  y  $n + d$  con  $\|\Pi^*\|_\lambda < 1$ . Luego,  $s(n)\lambda^{-(n+d)} \leq \|\Pi^*\|_\lambda < 1$ , de manera que  $\overline{gr}(T) = \limsup s(n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \lambda^{1+\frac{d}{n}} = \lambda$ . Por tanto, hemos visto que, dado  $\lambda$  tal que existe una separatriz  $\Pi$  con  $\|\Pi\|_\lambda < 1$ , entonces  $gr(T) = \overline{gr}(T) \leq \lambda$ . Puesto que  $\inf_{\Pi} \|\Pi\|_\lambda = 0$  para todo  $\lambda > br(T)$ , obtenemos que  $br(T) = gr(T)$ .

Ahora supongamos que  $T$  es  $N$ -subperiódico. Sea  $\Gamma$  la unión de copias disjuntas de los subárboles  $\{T^x : |x| \leq N\}$  con sus raíces identificadas. Obviamente  $\Gamma$  es 0-subperiódico y  $br(\Gamma) = gr(\Gamma) \geq \overline{gr}(T)$ . Además, si  $\Pi$  es una separatriz de  $T$  con  $\min_{e(x) \in \Pi} |x| \geq N$ , existe una separatriz  $\Pi'$  de  $\Gamma$  tal que para  $\lambda > 0$

$$\|\Pi'\|_\lambda \leq (1 + \lambda + \dots + \lambda^N) \|\Pi\|_\lambda$$

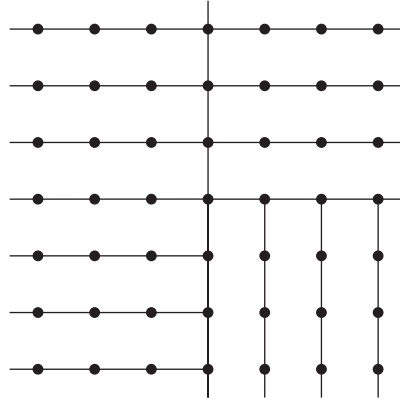
de donde se deduce que  $br(T) \geq br(\Gamma)$ . Puesto que  $br(\Gamma) \geq \overline{gr}(T) \geq br(T) \geq br(\Gamma)$ , obtenemos  $br(T) = gr(T)$ .

Finalmente, si suponemos que  $T$  tiene aristas terminales, consideramos el árbol  $T'$  que se obtiene a partir de  $T$  añadiendo a cada arista terminal un camino infinito. Evidentemente,  $T'$  es subperiódico, luego

$$\overline{gr}(T) \geq br(T) = br(T') = gr(T') \geq \overline{gr}(T).$$

□

El árbol que presentamos a continuación es subperiódico pero no es esféricamente simétrico:



Árbol maximal del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Proposición 2.13** Si  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  es un grafo de Cayley entonces  $br(\mathcal{G}) = gr(\mathcal{G})$ .

**Demostración.** La prueba se basa en la construcción de un subárbol maximal  $T$  de  $\mathcal{G}$  tal que  $gr(T) = gr(\mathcal{G})$ , cf. [25]. Si probamos que dicho subárbol es subperiódico, entonces  $br(T) = gr(T)$  y en consecuencia  $br(\mathcal{G}) = gr(\mathcal{G})$ .

Empezamos dotando al conjunto de generadores  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  de un orden total. Para cada elemento  $x \in G$  existe una  $S$ -palabra  $\omega_x = (s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$  tal que  $x = s_{i_1} \dots s_{i_n}$  con  $n = |x|$ . Además, la escritura es única si se supone lexicográficamente minimal, i.e. para cualquier otra palabra  $(s_{i'_1}, \dots, s_{i'_n})$  con las mismas propiedades, se tiene que si  $m$  es el primer  $j$  tal que  $i_j \neq i'_j$ , entonces  $i_m < i'_m$ .

Llamaremos  $T$  al subárbol de  $\mathcal{G}$  cuyos vértices son los de  $\mathcal{G}$  y verifica lo siguiente: si  $|y| = |x| + 1$ , entonces  $y$  es un hijo de  $x$  si y sólo si  $\omega_x$  es una subpalabra de  $\omega_y$ . Obsérvese que la distancia de cada vértice al origen en  $T$  coincide con la distancia en  $\mathcal{G}$  y en consecuencia el cardinal de las esferas no varía. Si vemos que  $T$  es un árbol subperiódico, tendremos que el límite  $gr(T)$  existe y además coincide con  $gr(\mathcal{G})$ .

Para ver la subperiodicidad de  $T$ , para cada  $x \in T$  descomponemos la palabra  $\omega_x$  como concatenación de dos subpalabras  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Para cada  $i = 1, 2$ , denotamos  $x_i$  al elemento de  $G$  que resulta de multiplicar los generadores de la palabra  $\omega_i$ , de manera que  $x = x_1 x_2$ . Necesariamente  $\omega_{x_2} = \omega_2$ , puesto que en caso contrario  $x$  admitiría dos escrituras distintas. Luego,  $T$  es subperiódico.  $\square$

### 2.2.3. Percolación

En el caso de los árboles podemos interpretar el número de ramificación en términos de percolación. La percolación consiste en la poda de un árbol  $T$  de forma aleatoria, es decir, cada arista tiene una probabilidad  $p$  de mantenerse o  $1 - p$  de ser eliminada. Por la ley 0 – 1 de Kolmogorov, la probabilidad de que persista un subárbol infinito tras la poda es 0 o 1. Como esta probabilidad es monótona con respecto a  $p$ , existe un valor crítico  $p_c(T)$ . Obviamente, a mayor ramificación, más probabilidad de permanencia. Luego el valor  $p_c(T)$  está inversamente relacionado con el número de ramificación  $br(T)$ . De hecho, se tiene

$$p_c(T) = 1/br(T).$$

### 2.2.4. Recorridos aleatorios

Dado un árbol localmente finito  $T$  y un  $\lambda \geq 1$  fijado, consideramos el recorrido aleatorio sesgado  $RW_\lambda$  sobre  $T$  con probabilidad de paso:

$$\pi(x, y) = \frac{\lambda}{\lambda(val(x) - 1) + 1}$$

si  $y$  es un hijo de  $x$ , o

$$\pi(x, y) = \frac{1}{\lambda(val(x) - 1) + 1}$$

si  $y$  es el padre de  $x$ . En este contexto podemos recordar el siguiente resultado de *R. Lyons* (véase [25]):

**Teorema 2.14** *Si  $\lambda < br(T)$ , entonces el recorrido aleatorio  $RW_\lambda$  es transitivo, mientras que, si  $\lambda > br(T)$ , entonces  $RW_\lambda$  es recurrente.  $\square$*



# Capítulo 3

## Número de ramificación y casi-isometría

### 3.1. Grafos casi-isométricos

#### 3.1.1. Definiciones

Sean  $(X, d)$  y  $(X', d')$  dos espacios métricos. En la literatura, suele encontrarse la siguiente definición ([10]):

**Definición 3.1** Una función (no necesariamente continua)  $f : X \rightarrow X'$  es una *casi-isometría* si existen constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 \geq 0$  tales que para todo  $x, y \in X$

$$\frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2$$

y para todo  $x' \in X'$  se verifica  $d'(x', f(X)) \leq C_2$ . Cuando tal función existe se dice que  $X$  y  $X'$  son *casi-isométricos*.

También es habitual encontrarse con la siguiente definición:

**Definición 3.2** ([11]) Dos espacio métricos  $(X, d), (X', d')$  son *casi-isométricos* si existen  $f : X \rightarrow X'$  y  $g : X' \rightarrow X$  lipschitzianas a gran distancia, es decir, existen constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 \geq 0$  tales que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2, \quad \forall x, y \in X$$

$$d(g(x'), g(y')) \leq C_1d'(x', y') + C_2, \quad \forall x', y' \in X'$$

y además verifican

$$\begin{aligned} d(gf(x), x) &\leq C_2, \quad \forall x \in X \\ d'(fg(x'), x') &\leq C_2, \quad \forall x' \in X'. \end{aligned}$$

Por último presentamos otra manera de definir espacios casi-isométricos basándonos en la definición original de M. Gromov [12, 13, 14] y que utilizaremos con frecuencia a lo largo de nuestro trabajo.

**Definición 3.3** Dado un número real  $C \geq 0$ , una  $C$ -red de un espacio métrico  $(X, d)$  es un subconjunto  $A$  tal que  $d(x, A) \leq C$  para todo  $x \in X$ . Se dice que una red  $A$  es  $\delta$ -separada si existe  $\delta > 0$  tal que  $d(a, b) \geq \delta$  para cada par  $a, b \in A$ .

Recordemos que dos espacios métricos  $(X, d), (X', d')$  son *lipschitzianamente equivalentes* si existe una aplicación biyectiva  $l : X \rightarrow X'$  bilipschitziana, es decir, tal que existe  $c \geq 0$  llamada constante de Lipschitz, tal que

$$\frac{1}{c}d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq cd(x, y) \quad \forall x, y \in B.$$

**Definición 3.4** Dos espacios métricos  $(X, d), (X', d')$  son *casi-isométricos* si existen  $C$ -redes  $A$  y  $A'$  lipschitzianamente equivalentes. Si  $A$  y  $A'$  son isométricos, entonces se dice que  $X$  y  $X'$  son *isométricos a gran distancia*.

Es relativamente sencillo demostrar la equivalencia entre las tres definiciones. Para ver que la definición 3.4 implica la definición 3.2, basta definir  $f : X \rightarrow X'$  de la siguiente manera: para cada  $x \in X$ ,  $f(x) = l(a)$  siendo  $a$  un elemento de  $A$  tal que  $d(x, a) \leq C$ . La función  $g : X' \rightarrow X$  se define de igual manera sustituyendo  $l$  por  $l^{-1}$ . Resulta fácil ver que  $f$  y  $g$  cumplen las condiciones de la segunda definición donde  $C_1 = c$  y  $C_2 = 2cC$ . Para comprobar que la definición 3.2 implica la definición 3.4, debemos reducir las aplicaciones bilipschitzianas a gran distancia  $f$  y  $g$  a la composición de los dos tipos básicos:

- Inclusión de una red en un espacio métrico
- Biyección bilipschitziana entre redes

Para ello, debemos observar que:

1. Cualquier sección de  $f$  es una red de  $X$ , ya que las fibras de  $f$  tienen diámetro uniformemente acotado.
2. La imagen de  $f$  es una red de  $X'$ .
3. Cualquier aplicación bilipschitziana a gran distancia  $f$  se restringe en una aplicación bilipschitziana sobre cualquier red separada.

En este caso,  $c = C_1 + C_2$  y  $C = C_1C_2$ .

### 3.1.2. Estructuras de grafo inducidas

En [9], D. Gaboriau describe un proceso de inducción (o reducción) de estructuras de grafo definidas sobre relaciones de equivalencia medibles en restricción a borelianos que cortan a casi todas las clases. Ahora, describiremos un proceso que simplifica a éste en el caso particular de un grafo (dotado de la relación trivial).

Sea  $G = (V, E)$  un grafo infinito de geometría acotada y sea  $A$  una  $C$ -red de  $G$  formada por vértices. Puesto que la elección del origen no influye en el número de ramificación, supondremos que  $0 \in A$ . El conjunto de vértices  $A \subset V$  puede realizarse como conjunto de vértices de un subgrafo, cuyas aristas son el conjunto  $E \cap (A \times A)$ , pero no tiene por qué ser conexo. Para evitar esta situación podríamos sustituir cada camino de aristas de  $G$  con extremos en  $A$  por una arista, pero en tal caso el grafo no sería localmente finito.

El propósito de la sección es describir una estructura de grafo conexo localmente finito  $G_A = (A, E_A)$  y a continuación estudiar la relación entre su número de ramificación y el de  $G$ .

Para describir el proceso anunciado, fijamos una enumeración de  $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y definimos la *rama de  $G$  sobre  $a_j$*  por

$$\rho(a_j) = \{x \in V \mid d(x, a_i) > d(x, a_j) \ \forall i < j \ \text{y} \ d(x, a_i) \geq d(x, a_j) \ \forall i > j\}.$$

Evidentemente  $a_j$  pertenece a  $\rho(a_j)$  y diremos que  $\rho(a_j)$  se injerta sobre  $A$  en  $a_j$ . Por otra parte las ramas son disjuntas dos a dos y por tanto la rama de  $G$  que contiene a  $x$  se injerta en un único punto de  $A$ , que denotaremos  $a_x$ . Puesto que  $A$  es una  $C$ -red, el diámetro de las ramas, así como el cardinal, están uniformemente acotados por las constantes  $2[C]$  y  $[C]K^{[C]}$  respectivamente, siendo  $[C]$  la parte entera del número real  $C$ .

Por otra parte, dividiremos el conjunto de aristas  $E$  de  $G$  en dos subconjuntos  $E_v = \{(x, y) \in E \mid a_x = a_y\}$  y  $E_h = \{(x, y) \in E \mid a_x \neq a_y\}$ , llamados conjuntos de aristas *verticales* y *horizontales* respectivamente. El conjunto  $E_v$  permite dotar a todas y cada una de las ramas de una estructura de grafo conexo.

Dotamos al conjunto de vértices  $A$  de una estructura de grafo  $G_A = (A, E_A)$  de la siguiente manera:  $(a_i, a_j) \in E_A$  si y sólo si existen  $x \in \rho(a_i)$  e  $y \in \rho(a_j)$  tales que  $(x, y) \in E_h$ . Notemos que  $G_A$  es un grafo localmente finito y de geometría acotada, de hecho, para todo  $a_j$ , tenemos:

$$\text{val}_{G_A}(a_j) \leq \sum_{x \in \rho(a_j)} \text{val}_G(x) \leq \#\rho(a_j)K \leq [C]K^{[C]+1}$$

Obsérvese además que, si  $d_A$  es la métrica natural asociada al grafo  $G_A$ , entonces

$$d_A(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_j) \leq (2[C] + 1)d_A(a_i, a_j)$$

para todo  $a_i, a_j \in A$ . Es decir,  $G$  y  $G_A$  son casi-isométricos, ya que  $A$  es una red para ambos grafos y la identidad de  $A$  es una aplicación bilipschitziana.

**Proposición 3.5** *Si  $G$  es un grafo de geometría acotada y  $A \subset V$  es una  $C$ -red de  $G$ , entonces se verifica:*

$$br(G) \leq br(G_A) \leq br(G)^{2[C]+1}.$$

**Demostración.** Definimos en primer lugar una aplicación sobreyectiva  $p : G \rightarrow G_A$ , que en cierto modo actúa como una proyección, de la siguiente manera:

$$p(x) = a_x$$

si  $x \in V$  y

$$p(x, y) = \begin{cases} a_x & \text{si } (x, y) \in E_v, \\ (a_x, a_y) & \text{si } (x, y) \in E_h. \end{cases}$$

Obsérvese que  $p^{-1}(a) = \rho(a)$  para  $a \in A$  y  $p^{-1}(a, b)$  es el subconjunto de aristas de  $E_h$  que unen elementos de  $\rho(a)$  y  $\rho(b)$  para cada  $(a, b) \in E_A$ .

Veamos primero la desigualdad  $br(G_A) \leq br(G)^{2[C]+1}$ . Si  $B \in \mathfrak{B}_0^G$  es un subgrafo finito de  $G$  que contiene al origen, obviamente  $p(B)$  será un subgrafo finito de  $G_A$  que contiene al origen, es decir,  $p(B) \in \mathfrak{B}_0^{G_A}$ . Veamos que  $\partial p(B) \subset p(\partial B)$ .

En efecto, si  $a \in \partial p(B)$  significa que  $a \in p(B)$  y existe una arista  $(a, b) \in E_A$  tal que  $b \notin p(B)$ . Luego para  $(x, y) \in p^{-1}(a, b)$ , se tiene que  $y \notin B$  porque  $y \in p^{-1}(b)$  y  $b \notin p(B)$ . Puede suceder que  $x \in B$  y por tanto  $x \in \partial B$ , de manera que  $a = p(x) \in p(\partial B)$ . En el caso de que  $x \notin B$ , tendríamos en la rama  $p^{-1}(a)$  elementos en  $B$  (porque  $a \in p(B)$ ) y fuera de  $B$  (porque  $x \notin B$ ). Entonces podemos asegurar que existe una arista vertical  $(y, z) \in E_v$  tal que  $y \in B$  y  $z \notin B$ , o equivalentemente que existe un  $y \in p^{-1}(a)$  perteneciente a  $\partial B$  y en consecuencia  $a = p(y) \in p(\partial B)$ .

Teniendo en cuenta que  $p$  es sobreyectiva y  $\partial p(B) \subset p(\partial B)$ , tenemos que

$$\#\partial p(B) \leq \#p(\partial B) \leq \#\partial B.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in \partial p(B)} \lambda^{-d_A(0,a)} &\leq \sum_{a \in p(\partial B)} \lambda^{-d_A(0,a)} \leq \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d_A(0,p(x))} \\
&\leq \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-\frac{d(0,p(x))}{2[C]+1}} \\
&\leq \sum_{x \in \partial B} (\lambda^{\frac{1}{2[C]+1}})^{-d(0,x)+[C]},
\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0^G} \sum_{x \in \partial B} (\lambda^{\frac{1}{2[C]+1}})^{-d(0,x)+[C]} = 0\} \subset \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B' \in \mathfrak{B}_0^{G_A}} \sum_{a \in \partial B'} \lambda^{-d_A(0,a)} = 0\}.$$

La función  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  definida por  $f(\lambda) = \lambda^{2[C]+1}$  es una aplicación continua. De manera que si llamamos  $S = \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0^G} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)+[C]} = 0\}$  y  $S' = \{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B' \in \mathfrak{B}_0^{G_A}} \sum_{a \in \partial B'} \lambda^{-d_A(0,a)} = 0\}$ , entonces  $f(S) \subset S'$  y

$$br(G_A) = \inf S' \leq \inf f(S) = f(\inf S) = f(br(G)) = br(G)^{2[C]+1}.$$

Veamos ahora la desigualdad  $br(G) \leq br(G_A)$ . Si  $B \in \mathfrak{B}_0^{G_A}$ , entonces  $p^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_0^G$  y  $\partial p^{-1}(B) \subset p^{-1}(\partial B)$ . En efecto, la condición  $x \in \partial p^{-1}(B)$  significa que  $x \in p^{-1}(B)$  y existe  $(x, y) \in E$  tal que  $y \notin p^{-1}(B)$ . Esto implica que la arista  $(x, y) \in E_h$  y por tanto la arista  $p(x, y) = (p(x), p(y))$  verifica que  $p(x) \in B$  y  $p(y) \notin B$ , es decir,  $p(x) \in \partial B$  y por tanto  $x \in p^{-1}(\partial B)$ .

Puesto que  $\partial p^{-1}(B) \subset p^{-1}(\partial B)$  y el cardinal de cada órbita es menor o igual que  $R = [C]K^{[C]}$ , tenemos que

$$\sharp \partial p^{-1}(B) \leq \sharp p^{-1}(\partial B) \leq R \sharp \partial B.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \partial p^{-1}(B)} \lambda^{-d(0,x)} &\leq \sum_{x \in p^{-1}(\partial B)} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in p^{-1}(\partial B)} \lambda^{-d(0,p(x))+[C]} \\
&\leq R \sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d(0,a)+[C]} \\
&\leq R \lambda^{[C]} \sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d(0,a)}.
\end{aligned}$$

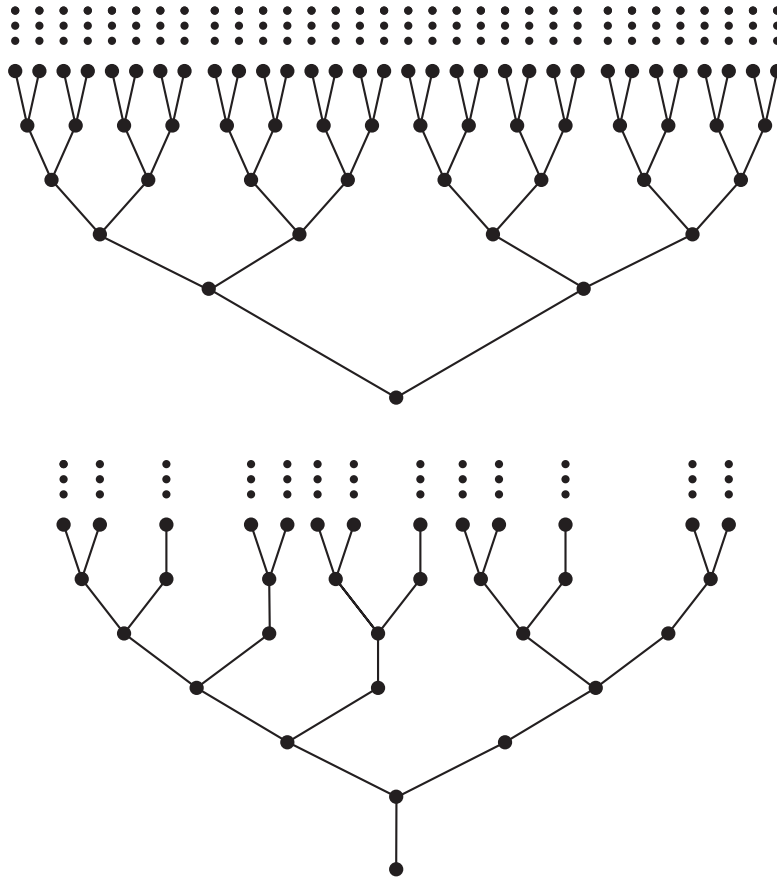
Siguiendo el procedimiento habitual obtenemos  $br(G) \leq br(G_A)$ .  $\square$

El conjunto de vértices  $V$  de un grafo  $G = (V, E)$  es una  $C$ -red para  $C = \frac{1}{2}$ . En ese caso, es obvio que  $G_V = G$ .

### 3.1.3. Casi-isometría y número de ramificación

En primer lugar, presentamos un ejemplo que nos permite afirmar que el número de ramificación no es invariante por casi-isometría.

**Ejemplo 3.6** Presentamos a continuación dos árboles casi-isométricos con el mismo conjunto de vértices, pero cuyos números de ramificación difieren.



El primer árbol  $T$  es el *árbol binario*, es decir, el árbol homogéneo de dos hijos. Aunque es sencillo ver directamente que  $br(T) = 2$ , resulta inmediato si tenemos

en cuenta que  $T$  es esféricamente simétrico y que por tanto  $br(T) = gr(T) = 2$ . El segundo árbol  $T'$  es el *árbol de Fibonacci*, llamado así porque la sucesión  $s(n)$  resulta ser la sucesión de Fibonacci  $F_n$  que verifica

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

con  $F_0 = F_1 = 1$ . La sucesión de Fibonacci tiene su origen en el famoso problema de la reproducción de los conejos. El árbol  $T'$  representa el crecimiento demográfico de una pareja de conejos cuya madurez sexual se alcanza al cabo de un mes. Una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci es que

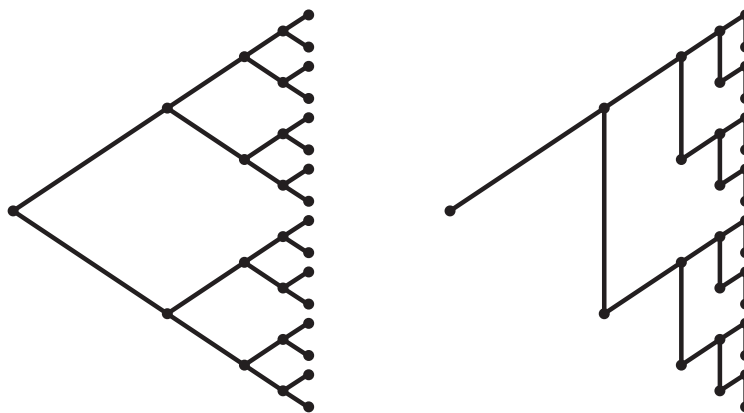
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

siendo  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  el número aureo. De manera que existe el límite

$$gr(T') = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\frac{1}{n}} = \Phi.$$

Puesto que  $T'$  es un árbol subperiódico, tenemos que  $br(T') = gr(T') = \Phi$ . Si realizamos el cálculo del número de ramificación de  $T'$  aplicando la definición directamente, obtenemos que el número medio de descendientes ha de ser raíz de la ecuación  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  que obviamente es  $\Phi$ .

Veamos entonces que  $T$  y  $T'$  son casi-isométricos con constante de Lipschitz  $c = 2$ . En la siguiente figura podemos observar que ambos árboles tienen el mismo conjunto de vértices  $V$ , de manera que podemos tomar como redes  $A = V$  y  $A' = V$ .



La identidad  $id : A \rightarrow A'$  es una biyección que además es bilipschitziana puesto que  $d_{T'}(x, y) \leq 2d_T(x, y)$  y  $d_T(x, y) \leq 2d_{T'}(x, y)$  para todo par  $x, y \in V$ . En resumen,  $T$  y  $T'$  son casi-isométricos, pero poseen números de ramificación distintos.

Sea  $G$  un grafo de geometría acotada. Notemos que el conjunto de vértices con la métrica inducida constituye una 1-red, de modo que podemos afirmar que todo grafo es casi-isométrico a su conjunto de vértices. De hecho, son isométricos a gran distancia. Si  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  son grafos casi-isométricos, sabemos que los conjuntos de vértices  $V$  y  $V'$  con las respectivas métricas inducidas también son casi-isométricos entre sí, ya que dicha propiedad define una relación de equivalencia. Por tanto, dos grafos  $G$  y  $G'$  son casi-isométricos si y sólo si existen  $C$ -redes  $A \subseteq V$  y  $A' \subseteq V'$  lipschitzianamente equivalentes. Puesto que la aplicación bilipschitziana entre  $A$  y  $A'$  es biyectiva, podemos identificar ambos conjuntos de vértices y suponer que dicha aplicación es la identidad.

Cuando, en vez de tomar sobre las redes  $A$  y  $A'$  las métricas inducidas de  $G$  y  $G'$ , consideramos la métrica natural de los grafos  $G_A$  y  $G_{A'}$ , la identidad sigue siendo una aplicación bilipschitziana. En efecto, si tenemos en cuenta

$$d_A(a, b) \leq d(a, b) \leq (2[C] + 1)d_A(a, b)$$

$$d_{A'}(a, b) \leq d'(a, b) \leq (2[C] + 1)d_{A'}(a, b)$$

y por otra parte

$$\frac{1}{c}d(a, b) \leq d'(a, b) \leq cd(a, b)$$

entonces

$$\frac{1}{c(2[C] + 1)}d_{A'}(a, b) \leq d_A(a, b) \leq c(2[C] + 1)d_{A'}(a, b).$$

Luego la identidad es una aplicación bilipschitziana entre  $A$  y  $A'$  con las métricas de los grafos  $G_A$  y  $G_{A'}$  con constante de Lipschitz  $c' = c(2[C] + 1)$ .

Antes de averiguar en qué modo afecta la casi-isometría al número de ramificación, es conveniente reformular la definición de dicho número para simplificar los cálculos. Sea  $G$  un grafo localmente finito de geometría acotada y  $B \in \mathfrak{B}_0$ . Dado  $r \geq 1$ , definimos el  $r$ -borde de  $B$  como el conjunto

$$\partial^r B = \{x \in B \mid \exists e_1 \dots e_s \in E : e_1^- = x, e_i^+ = e_{i+1}^-, e_s^+ \notin B \text{ con } s \leq r\}$$

.

**Proposición 3.7** *El número de ramificación*

$$br(G) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}$$

para todo  $r \in \mathbb{N}$ .



**Demostración.** Dado  $B \in \mathfrak{B}_0$ , nótese que

$$\sharp \partial B \leq \sharp \partial^r B \leq R \sharp \partial B$$

siendo  $R$  una constante que depende de  $r$ . La primera desigualdad es inmediata, puesto que  $\partial B \subset \partial^r B$ . Veamos por tanto que se da la segunda. Sea  $x \in \partial^r B$ , entonces existe un camino  $\{e_i\}_{i=1}^s$  con  $e_1^- = x$  y  $e_s^+ \notin B$  para algún  $s \leq r$ . Si  $s = 1$ , entonces  $x \in \partial B$ . En el caso de que  $s \neq 1$ , existe  $i \leq s-1$  tal que  $x_i \in B$  y  $x_{i+1} \notin B$ , luego  $x_i \in \partial B$ . Además,

$$d(0, x_i) \leq d(0, x) + r,$$

de manera que  $x$  pertenece a la bola de radio  $r$  de algún elemento de  $\partial B$ . Por lo tanto,  $\sharp \partial^r B$  está acotado por el número de vértices de todas las bolas de radio  $r$  centradas en elementos de  $\partial B$ . Es decir,

$$\sharp \partial^r B \leq (1 + K + \dots + K^r) \sharp \partial B = R \sharp \partial B.$$

Teniendo esto presente, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x_i)+r} \leq R \lambda^r \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)},$$

de donde deducimos que

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0 \iff \inf_{B \in \mathfrak{B}_0} \sum_{x \in \partial^r B} \lambda^{-d(0,x)} = 0,$$

obteniendo de ese modo el resultado buscado.  $\square$

**Teorema 3.8** Sean  $G$  y  $G'$  dos grafos casi-isométricos cuya constante de Lipschitz entre sus respectivas  $C$ -redes es  $c > 0$ . Los números de ramificación de  $G$  y  $G'$  se relacionan de la siguiente manera:

$$br(G')^{\frac{1}{\tilde{c}}} \leq br(G) \leq br(G')^{\tilde{c}}$$

donde  $\tilde{c} = c(2[C] + 1)^2$ .

**Demostración.** Sean  $A$  y  $A'$  las respectivas  $C$ -redes de  $G$  y  $G'$ . Por la proposición 3.4 sabemos que se verifica lo siguiente:

$$br(G) \leq br(G_A) \leq br(G)^{2[C]+1},$$

$$br(G') \leq br(G_{A'}) \leq br(G')^{2[C]+1}.$$

Basta, por tanto, encontrar una relación entre los números de ramificación de los grafos  $G_A$  y  $G_{A'}$ . Recordemos que  $A$  y  $A'$  son lipschitzianamente equivalentes con constante  $c'$  y que podemos identificarlos cuando convenga. Sea  $B \in \mathfrak{B}_0^A$ , es decir un subgrafo finito de  $G_A$  que contiene el origen. Obviamente el conjunto de vértices de  $B$  es un subconjunto de  $A$  y por tanto puede verse como un subconjunto de  $A'$ , que denotaremos por  $B'$ . Nótese que  $B'$  es un subgrafo finito de  $G_{A'}$  que contiene al origen, es decir  $B' \in \mathfrak{B}_0^{A'}$ . Además,  $\partial B \subset \partial^{c'} B'$ . En efecto, si  $a \in \partial B$  significa que  $a \in B$  y que existe una arista  $(a, b) \in E_A$  tal que  $b \notin B$ . Obviamente,  $a \in B'$  y  $b \notin B'$ , sin embargo no podemos asegurar que exista la arista  $(a, b)$  en  $E_{A'}$ . De todos modos, por ser la identidad entre los vértices una aplicación bilipschitziana sabemos:

$$d_{A'}(a, b) \leq c' d_A(a, b) = c',$$

es decir, existe un camino de aristas en el grafo  $G_{A'}$  de longitud a lo sumo  $c'$  que une los vértices  $a$  y  $b$ . Luego  $a \in \partial^{c'} B'$ .

Una vez demostrada la inclusión, el procedimiento es el habitual. Puesto que  $\sharp \partial B \leq \sharp \partial^{c'} B'$ , tenemos que:

$$\sum_{a \in \partial B} \lambda^{-d_A(0, a)} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} \lambda^{-d_A(0, a)} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} \lambda^{-\frac{d_{A'}(0, a)}{c'}} \leq \sum_{a \in \partial^{c'} B} (\lambda^{\frac{1}{c'}})^{-d_{A'}(0, a)}.$$

Siguiendo el razonamiento usado en la proposición 3.4 , obtenemos la desigualdad

$$br(G_A) \leq br(G_{A'})^{c'}.$$

Evidentemente de modo análogo obtenemos que:

$$br(G_{A'}) \leq br(G_A)^{c'}.$$

□

Nótese que en el caso en que  $A = V$  y  $A' = V'$ , el valor de  $C$  es  $\frac{1}{2}$  y su parte entera  $[C] = 0$ , de manera que la relación entre los números de ramificación es la siguiente:

$$br(G')^{\frac{1}{c}} \leq br(G) \leq br(G')^c.$$

## 3.2. Dimensión de Hausdorff

El propósito de esta sección es recordar la relación que existe entre el número de ramificación de un árbol y la dimensión de Hausdorff de su espacio de finales ([25, 24]).

### 3.2.1. Espacio de finales de un espacio topológico.

Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  de un espacio Hausdorff  $X$  en un espacio localmente compacto Hausdorff  $Y$  se dice *propia* si  $f^{-1}(K) \subseteq X$  es compacto para todo  $K \subseteq Y$  compacto.

**Definición 3.9** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Se llama *geodésica* a una aplicación isométrica  $c : [0, l] \rightarrow X$ , y *segmento geodésico* (de origen  $c(0) = x$  y extremo  $c(l) = y$ ) a su imagen.
- ii) Se dice que  $(X, d)$  es *geodésico* si dos puntos cualesquiera  $x$  e  $y$  se pueden unir por un segmento geodésico.

**Definición 3.10** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico localmente compacto.

- i) Un *rayo* de  $X$  es una aplicación  $r : [0, +\infty) \rightarrow X$  continua y propia. Diremos que  $r$  es un *rayo geodésico* si además es una isometría.
- ii) Se dice que dos rayos  $r$  y  $r'$  *convergen al mismo final* si para todo compacto  $K \subset X$  existe un entero  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $r[N, \infty)$  y  $r'[N, \infty)$  pertenecen a la misma componente conexa de  $X \setminus K$ . La clase de equivalencia de un rayo  $r$  se denota  $\varepsilon(r)$  y el conjunto de clases de equivalencia  $\varepsilon(X)$  se denomina *espacio de finales* de  $X$ .

Si  $X$  es conexo por caminos y fijamos un punto base  $x_0 \in X$ , cada clase de equivalencia  $\varepsilon(r)$  contiene al menos un rayo geodésico que parte de  $x_0$ . La prueba puede verse en [5].

Para definir una topología sobre  $\varepsilon(X)$  basta con describir la convergencia entre finales. Una sucesión  $\varepsilon(r_n) \rightarrow \varepsilon(r)$  si y sólo si para cada compacto  $K \subset X$  existe una sucesión de enteros  $N_n$  tal que  $r_n[N_n, \infty)$  y  $r[N_n, \infty)$  pertenecen a la misma componente conexa de  $X \setminus K$  para un  $n$  suficientemente grande. Luego  $B \subset \varepsilon(X)$  es un conjunto cerrado si dada una sucesión  $\varepsilon(r_n) \rightarrow \varepsilon(r)$  con  $\varepsilon(r_n) \in B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\varepsilon(r) \in B$ .

**Proposición 3.11** Si  $X$  e  $Y$  son espacios geodésicos localmente compactos, entonces cada *casi-isometría*  $f : X \rightarrow Y$  induce un homeomorfismo  $f_* : \varepsilon(X) \rightarrow \varepsilon(Y)$ .

Aunque no detallaremos la demostración, conviene describir de manera explícita el homeomorfismo  $f_*$ . El resto de la prueba puede verse en [5]. Sea  $r$  un rayo geodésico en  $X$  y sea  $f_*(r)$  el rayo de  $Y$  que se obtiene por concatenación de segmentos

geodésicos entre  $f(r(n))$  y  $f(r(n+1))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f$  es una casi-isometría,  $f_*(r)$  es un rayo propio. Además, el final que define es independiente de la elección de tales segmentos geodésicos. Definimos entonces  $f_* : \varepsilon(X) \rightarrow \varepsilon(Y)$  por  $f_*(\varepsilon(r)) = \varepsilon(f_*(r))$  para cada  $r$  rayo geodésico en  $X$ .

### 3.2.2. Borde de un árbol

Se define el *borde*  $\partial T$  de un árbol infinito y enraizado  $T$  como el conjunto formado por todos los rayos geodésicos de  $T$  que parten del origen. Nótese que la imagen de cada rayo geodésico es un camino de aristas infinito que parte del origen. Dotamos al espacio  $\partial T$  de la siguiente métrica: si dos rayos  $\xi, \eta \in \partial T$  tienen exactamente  $n$  aristas en común, entonces  $d(\xi, \eta) = e^{-n}$ .

Obsérvese que existe un homeomorfismo natural entre  $\partial T$  y el espacio de finales  $\varepsilon(T)$  que envía cada rayo geodésico  $r$  en su clase  $\varepsilon(r)$ . En [5] se prueba que cada clase de equivalencia de  $\varepsilon(T)$  se puede representar por un rayo geodésico y teniendo en cuenta que en un árbol dos rayos geodésicos que parten del origen sólo convergen al mismo final si son idénticos, obtenemos la biyección. La topología definida en  $\partial T$  a partir de la métrica coincide con la topología del espacio de finales, de manera que se trata del mismo espacio topológico.

A continuación introducimos el concepto de dimensión de Hausdorff del borde de un árbol. Dado  $T$  un árbol infinito, se dice que una colección  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $\partial T$  es un *recubrimiento* si

$$\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B = \partial T.$$

**Definición 3.12** La *dimensión de Hausdorff* de  $\partial T$  se define como

$$DH(\partial T) = \sup\{\alpha \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\}$$

donde  $\text{diam}(B) = \max\{d(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in B\}$ .

### 3.2.3. Casi-isometría y dimensión de Hausdorff

En este apartado, seguiremos como referencia el libro [11]. Aportaremos algunos resultados que nos ayudarán a ver cómo afecta la casi-isometría a la dimensión de Hausdorff.

Sea  $T$  un árbol de geometría acotada y  $\partial T$  su espacio de finales.

**Proposición 3.13** *Todo isomorfismo isométrico  $f : T \rightarrow T'$  entre dos árboles  $T$  y  $T'$  induce un homeomorfismo lipschitziano  $f_* : \partial T \rightarrow \partial T'$  sobre sus bordes.*

**Demostración.** Ya vimos en la proposición 3.9 que existe tal homeomorfismo entre bordes. Veamos por tanto que se trata de una aplicación bilipschitziana. En primer lugar notemos que cuando hablamos de árboles isométricos  $T$  y  $T'$ , podemos suponer que se trata del mismo árbol y que la isometría es la identidad. No obstante, la estructura métrica de sus bordes no es la misma porque depende del origen que tomemos. Dados dos rayos geodésicos  $\xi$  y  $\eta$  con origen 0, denotaremos  $\xi'$  y  $\eta'$  los rayos geodésicos con origen  $0'$  que representan a los finales  $\varepsilon(\xi)$  y  $\varepsilon(\eta)$ . Si  $\xi$  y  $\eta$  tienen  $n$  aristas en común, entonces  $\xi'$  y  $\eta'$  tendrán al menos  $n - d$  y a lo sumo  $n + d$  aristas en común, siendo  $d = d(0, 0')$ . Luego

$$e^{-d}d(\xi, \eta) = e^{-n-d} \leq d(\xi', \eta') \leq e^{-n+d} = e^d d(\xi, \eta)$$

□

Recordemos que un homeomorfismo  $h : (X, d) \rightarrow (X', d')$  es *hölderiano* si existen constantes  $c > 0$  y  $\alpha > 0$  tales que:

$$\frac{1}{c}d(x, y)^{\frac{1}{\alpha}} \leq d'(h(x), h(y)) \leq cd(x, y)^{\alpha}$$

para todo  $x, y \in X$ . Decimos que  $\alpha$  es la *constante de Hölder* de  $h$ .

**Proposición 3.14** *Una casi-isometría entre dos árboles  $T$  y  $T'$  induce un homeomorfismo hölderiano entre sus bordes  $\partial T$  y  $\partial T'$ .*

**Demostración.** Una vez más usaremos la definición 3.4 de grafos casi-isométricos. En ese caso,  $T$  tiene una  $C$ -red  $A$ , a la cual dotamos de la estructura de grafo  $T_A = (A, E_A)$  y de la métrica natural de grafo  $d_A$ , que resulta ser un árbol por serlo  $T$ . Recordemos que la aplicación identidad entre  $(A, d)$  y  $(A, d_A)$  es bilipschitziana con constante  $2[C] + 1$ .

La aplicación  $p : T \rightarrow T_A$  definida en la demostración de la proposición 3.5 es una casi-isometría y por tanto, por la proposición 3.9, se obtiene el homeomorfismo entre los espacios de finales  $p_* : \partial T \rightarrow \partial T_A$ . Dado un rayo geodésico  $\xi \in \partial T$ , denotamos por  $\xi_A$  al rayo geodésico de  $T_A$  que representa al final definido por  $p(\xi)$ . Si dos rayos geodésicos  $\xi$  y  $\eta$  de  $T$  tienen exactamente  $n$  aristas en común y los rayos proyectados  $\xi_A$  y  $\eta_A$  coinciden en  $s$  aristas, entonces  $s \leq n \leq (2[C] + 1)s$ . Luego,

$$d_A(\xi_A, \eta_A) = e^{-s} \geq d(\xi, \eta) = e^{-n} \geq d_A(\xi_A, \eta_A)^{2[C]+1}.$$

Del mismo modo, si  $A'$  es una  $C$ -red del árbol  $T'$ , se tiene:

$$d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'}) \geq d'(\xi', \eta') \geq d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'})^{2[C]+1}.$$

De nuevo, el problema se ve reducido al estudio de la aplicación bilipschitziana entre redes  $l : A \rightarrow A'$ , cuya constante de Lipschitz es  $c' = c(2[C] + 1)$ . Por el hecho de existir tal aplicación, los árboles  $T_A$  y  $T_{A'}$  son casi-isométricos y por ello existe un homeomorfismo  $l_* : \partial T_A \rightarrow \partial T_{A'}$ , que lleva cada rayo  $\xi_A$  de  $T_A$  en el rayo geodésico  $\xi_{A'}$  de  $T_{A'}$  que representa la clase del rayo propio  $l(\xi_A)$  formado por la concatenación de segmentos geodésicos que unen los vértices  $l(\xi(n))$  y  $l(\xi(n+1))$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Nótese que si dos rayos geodésicos  $\xi_A$  y  $\eta_A$  de  $T_A$  tienen exactamente  $n$  aristas en común, entonces  $l(\xi_A(i)) = l(\eta_A(i))$  para todo  $i \leq n$  y además  $l(\xi_A(n+1)) \neq l(\eta_A(n+1))$ . Luego,

$$d'_{A'}(l(\xi_A(0)), l(\xi_A(n))) \leq c' d_A(\xi(0), \xi(n)) = c'n,$$

y por tanto  $\xi_{A'}$  y  $\eta_{A'}$  tienen a lo sumo  $c'n + c'$  aristas en común. Por lo tanto,

$$d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'}) \geq e^{-c'} d_A(\xi_A, \eta_A)^{c'}$$

Puesto que se trata de una biyección, sucede lo mismo a la inversa,

$$d_A(\xi_A, \eta_A) \geq e^{-c'} d'_{A'}(\xi_{A'}, \eta_{A'})^{c'}.$$

De manera que la aplicación  $l_*$  es hölderiana con constante de Hölder  $\alpha = \frac{1}{c'}$ .

Si denotamos por  $p'$  a la proyección del árbol  $T'$  sobre  $T_{A'}$ , la composición  $f_* = (p')_*^{-1} \circ l_* \circ p_* : \partial T \rightarrow \partial T'$  es un homeomorfismo hölderiano con constante  $\alpha = c'(2[C] + 1)^2$ . □

### 3.2.4. Relación con el número de ramificación

La definición de dimensión de Hausdorff de un árbol resulta familiar ya que nos recuerda a la definición de número de ramificación. De hecho, para un árbol  $T$  arbitrario tenemos que:

$$br(T) = e^{DH(\partial T)}.$$

Para comprobarlo, consideramos para cada vértice  $x \in T$  el conjunto

$$B_x := \{\xi \in \partial T \mid \xi(|x|) = x\}$$

Obsérvese que  $\text{diam}(B_x) \leq e^{-|x|}$ . De hecho,  $\text{diam}(B_x) = e^{-|x|}$  para todo  $x \in T$  que tenga más de un hijo. Nótese que un conjunto de vértices  $\Pi$  es una  $v$ -separatriz de  $T$  si y sólo si la familia  $\{B_x \mid x \in \Pi\}$  es un recubrimiento de  $\partial T$ . Además, siempre podemos encontrar otra separatriz  $\Pi'$  de capacidad igual o menor que verifique  $\text{diam}(B_x) = e^{-x}$  para todo  $x \in \Pi'$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} br(T) &= \sup\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)} > 0\} = \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} e^{-\alpha|x|} > 0\} \\ &= \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\} = e^{DH(\partial T)}. \end{aligned}$$

Dado un rayo geodésico  $\xi$ , la familia  $\{B_{\xi(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$  es un sistema fundamental de entornos de  $\xi$ . Por ello, podemos sustituir la familia de recubrimientos arbitrarios por la familia de recubrimientos de la forma  $\{B_x \mid x \in \Pi\}$  con  $\Pi$  una  $v$ -separatriz.

En § 5.3.3 comprobaremos que el grafo de Cayley del grupo del sereno  $G_1$ , que no es un árbol ya que tiene relaciones no triviales, tiene número de ramificación igual a  $\Phi$ , aunque sólo posee 1 final. Esto probará que la identidad anterior sólo es válida para árboles.

Si  $T$  y  $T'$  son dos árboles casi-isométricos, podemos aplicar la relación existente entre el número de ramificación y la dimensión de Hausdorff y la proposición 3.14 para obtener otra prueba del teorema 3.8, es decir, tendremos que:

$$br(T) \leq br(T')^{\tilde{c}}$$

con  $\tilde{c} = c(2[C] + 1)^2$ .





# Capítulo 4

## Número de ramificación de un pseudogrupo

### 4.1. Definiciones básicas

El propósito de esta sección es recordar algunas definiciones básicas necesarias para introducir la noción de número de ramificación de un pseudogrupo.

#### 4.1.1. Pseudogrupos topológicos y medibles

Vamos a comenzar recordando la definición de pseudogrupo topológico (véase [15, 16, 17]).

**Definición 4.1** *Un pseudogrupo de transformaciones de un espacio topológico  $X$  es una familia  $\Gamma$  de homeomorfismos entre abiertos de  $X$  tales que:*

1. para cada par  $\gamma : U \rightarrow V$  y  $\gamma' : U' \rightarrow V'$  de  $\Gamma$ , la composición

$$\gamma\gamma' : \gamma'^{-1}(U \cap V') \rightarrow \gamma(U \cap V')$$

y la inversa  $\gamma^{-1} : V \rightarrow U$  pertenecen a  $\Gamma$ ,

2. la función identidad de  $X$  pertenece a  $\Gamma$ ,
3. si un homeomorfismo entre dos subconjuntos abiertos de  $X$  está localmente en  $\Gamma$ , entonces pertenece a  $\Gamma$ .

Se define la órbita de un elemento  $x \in X$  como  $\Gamma(x) = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}$  y la isotropía como  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}$ .

Si sustituimos  $X$  por un espacio boreliano estándar y los homeomorfismos locales  $\gamma \in \Gamma$  por isomorfismos borelianos entre partes borelianas de  $X$ , obtenemos de la misma manera la noción de *pseudogrupo medible*.

### 4.1.2. Ejemplos

Vamos a recordar algunos ejemplos para ilustrar esta noción.

**Ejemplo 4.2** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de un espacio localmente compacto, metrizable y separable  $M$ , definida por un atlas foliado  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ . Los abiertos distinguidos  $U_i$  forman un recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de  $M$  y las cartas locales  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i\}$  (donde  $P_i$  es un disco abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $X_i$  es un espacio topológico) verifican que el cambio de cartas sobre el dominio de definición está dado por:

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(x, y) = (\psi_{ij}^y(x), \gamma_{ij}(y))$$

donde  $\gamma_{ij}$  es un homeomorfismo y  $\psi_{ij}^y$  un difeomorfismo que depende continuamente de  $y$ . Siempre podemos suponer que el atlas foliado  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  es *bueno*, lo que significa que:

- i)  $\mathcal{A}$  es localmente finito y numerable (finito si  $M$  compacto),
- ii) los abiertos  $U_i$  son relativamente compactos,
- iii) si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cup U_j$  está contenido en un abierto distinguido  $U_{ij}$ .

Se llama *eje* de  $\mathcal{A}$  a la unión disjunta  $X = \bigsqcup X_i$ . Cuando el recubrimiento es bueno, los homeomorfismos locales  $\gamma_{ij}$  de  $X_i$  en  $X_j$  se extienden a un abierto maximal de  $X_i$ . Se define el *pseudogrupo de holonomía*  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}$  reducido a  $X$  como el pseudogrupo generado por los homeomorfismos  $\gamma_{ij}$ . La relación de equivalencia definida por la acción de  $\Gamma$  sobre  $X$  viene dada por la pertenencia a la misma hoja y se llama *relación de equivalencia definida por  $\mathcal{F}$*  sobre  $X$ . Si todas las hojas tienen holonomía trivial, la relación y la acción se pueden identificar.

Obsérvese que el pseudogrupo de holonomía de una laminación boreliana en el sentido de [4] es boreliano.

**Ejemplo 4.3** Una acción boreliana de un grupo numerable  $G$  sobre un espacio boreliano estándar  $X$  define un pseudogrupo medible generado por las restricciones a borelianos de los isomorfismos borelianos  $g : X \rightarrow X$  donde  $g(x) = g \cdot x$  para  $x \in X$  y  $g \in G$ .

**Ejemplo 4.4** Una relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  sobre un espacio boreliano estándar  $X$  se dice *medible discreta* si las clases de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$  son numerables y el grafo es un boreliano de  $X \times X$ . Según un resultado de [8], la relación  $\mathcal{R}$  está definida mediante la acción boreliana de un grupo numerable. En general, si llamamos *transformación parcial* de  $\mathcal{R}$  a cualquier isomorfismo boreliano  $\gamma : A \rightarrow B$  entre partes borelianas de  $X$  cuyo grafo  $G(\gamma) = \{(x, y) \in X \times X \mid y = \gamma(x)\} \subset \mathcal{R}$ , entonces el pseudogrupo formado por todas las transformaciones parciales define la relación  $\mathcal{R}$ .

### 4.1.3. Medidas

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible actuando sobre un espacio boreliano estándar  $X$  y  $\mu$  una medida positiva sobre  $X$ .

**Definición 4.5** Se dice que  $\mu$  es *casi-invariante* respecto de  $\Gamma$  si todos los elementos de  $\Gamma$  (o de un sistema de generadores) respetan los conjuntos de medida nula.

**Definición 4.6** Se dice que  $\mu$  es *invariante* por  $\Gamma$  si todos los elementos de  $\Gamma$  (o de un sistema de generadores) respetan  $\mu$ , es decir,

$$\gamma_*\mu(A) = \mu(\gamma^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$ , siendo  $A$  un boreliano de  $X$ .

En el caso de las relaciones de equivalencia, las nociones anteriores se definen de modo análogo. La medida  $\mu$  es *casi-invariante* respecto de la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  si las transformaciones parciales de  $\mathcal{R}$  conservan los conjuntos de medida nula, o equivalentemente, si el saturado  $\mathcal{R}[A]$  de un boreliano  $A$  de medida nula es de medida nula. De igual modo,  $\mu$  es *invariante* por  $\mathcal{R}$  si lo es por las transformaciones parciales de  $\mathcal{R}$ .

### 4.1.4. Estructuras métricas de las órbitas

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible actuando sobre un espacio boreliano estándar  $X$  y  $\Sigma$  un sistema numerable de generadores de  $\Gamma$ . Podemos realizar cada órbita  $\Gamma(x)$  como conjunto de vértices de un grafo conexo  $\Gamma_\Sigma(x)$ , al que llamaremos *órbita* de  $(\Gamma, \Sigma)$ . En efecto, dos elementos  $y$  y  $z$  estarán unidos por una arista si y sólo si existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $\sigma(y) = z$ . Si cada conjunto  $\Sigma_x = \{\sigma \in \Sigma \mid x \in \text{dom}(\sigma)\}$  es finito, entonces el grafo que contiene a  $x$  es localmente finito. Cuando  $\Sigma$  es finito, se obtiene un grafo de geometría acotada, en particular localmente finito. En general, podemos dotar a cada órbita de la métrica natural asociada a la estructura de

grafo correspondiente, definida como en el caso de los grafos de Cayley: la distancia  $d_\Sigma(x, y)$  entre dos puntos  $x$  e  $y$  de la misma órbita es el mínimo de los enteros  $k$  tales que  $y = \sigma_{i_1}^{\pm 1} \circ \sigma_{i_2}^{\pm 1} \circ \dots \circ \sigma_{i_k}^{\pm 1}(x)$  con  $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k} \in \Sigma$ .

De ahora en adelante, al hablar de pseudogrupos nos referiremos siempre a pseudogrupos de tipo finito, es decir, que poseen sistemas finitos de generadores.

## 4.2. Equivalencia de pseudogrupos

### 4.2.1. Equivalencia de pseudogrupos topológicos

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo actuando sobre un espacio topológico  $X$  e  $Y$  un abierto de  $X$  que corte a todas las órbitas. Se define el *pseudogrupo inducido*  $\Gamma|_Y$  como el pseudogrupo generado por los elementos de  $\Gamma$  cuyo dominio y rango está restringido a  $Y$ . La reducción de  $\Gamma$  a  $Y$  es el ejemplo básico que modela la *equivalencia de pseudogrupos* en el sentido de Haefliger, véase [16]. En efecto, puesto que  $Y$  corta a todas las órbitas de  $\Gamma$ , cada punto  $x \in X$  pertenece al dominio  $D_\gamma$  de algún  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(D_\gamma) \subset Y$ . Si denotamos  $\Phi_x^Y$  al conjunto formado por dichos elementos y  $\Phi_X^Y = \bigcup_{x \in X} \Phi_x^Y$ , la familia  $\Phi = \Phi_X^Y \cup (\Phi_X^Y)^{-1}$  define una *equivalencia entre  $\Gamma$  y  $\Gamma_Y$  en el sentido de [16]*. Recordemos la definición precisa:

**Definición 4.7** Dos pseudogrupos  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  que operan sobre espacios topológicos  $X$  y  $X'$  son *equivalentes* si existe una familia  $\Phi$  de homeomorfismos  $\varphi$  entre abiertos de  $X$  y abiertos de  $X'$  de manera que

$$\Gamma' = \Phi \circ \Gamma \circ \Phi^{-1} \quad y \quad \Gamma = \Phi^{-1} \circ \Gamma' \circ \Phi$$

es decir, si  $\varphi, \varphi' \in \Phi$  y  $\gamma \in \Gamma$ , entonces  $\varphi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi' \in \Gamma'$  y viceversa.

**Proposición 4.8** *Dos pseudogrupos  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  que operan sobre los espacios  $X$  y  $X'$  respectivamente son equivalentes si y sólo si existen abiertos  $Y \subset X$  y  $Y' \subset X'$  que cortan a todas las órbitas de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ , tales que los pseudogrupos inducidos  $\Gamma_Y$  y  $\Gamma'_{Y'}$  son isomorfos.*

Si sustituimos  $X$  y  $X'$  por espacios borelianos estándares y los homeomorfismos locales por isomorfismos borelianos entre partes borelianas, obtenemos de la misma manera la noción de equivalencia entre pseudogrupos medibles.

### 4.2.2. Proceso de reducción de Gaboriau

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible de tipo finito actuando sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Sea  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  un sistema finito de generadores e  $Y$  un boreliano de  $X$  que corta a todas las órbitas de  $\Gamma$ .

El objetivo de la sección es asociar al pseudogrupo inducido  $\Gamma_Y$  un sistema de generadores que defina en cada órbita una estructura de grafo localmente finito y conexo. Un primer intento puede consistir en restringir los dominios y rangos de los elementos de  $\Sigma$  al boreliano  $Y$ , pero las transformaciones que se obtienen no siempre generan  $\Gamma_Y$ , y en consecuencia, la estructura de grafo que definen sobre las órbitas puede ser no conexa. Otra idea es tomar como sistema de generadores el propio pseudogrupo  $\Gamma|_Y$ , pero las estructuras de grafo de las órbitas no tienen porqué ser localmente finitas.

El proceso de reducción descrito por Gaboriau en [9] permite dotar al pseudogrupo inducido  $\Gamma|_Y$  de un sistema de generadores finito  $\Sigma_Y$  tal que la estructura de grafo que define sobre cada órbita sea conexa y localmente finita.

El proceso consiste en descomponer en la unión disjunta  $\Sigma = \Sigma_v \sqcup \Sigma_h$  de dos sistemas  $\Sigma_v$  y  $\Sigma_h$  tales que:

- i) las órbitas de  $(\Gamma, \Sigma_v)$  son árboles que cortan a  $Y$  en un único punto.
- ii) se puede deslizar cada elemento de  $\Sigma_h$  a lo largo de  $\Sigma_v$  para obtener un sistema de generadores  $\Sigma_Y$  del pseudogrupo  $\Gamma|_Y$ .

Describiremos en primer lugar cómo se definen a los sistemas *vertical*  $\Sigma_v$  y *horizontal*  $\Sigma_h$ . Sea  $Y_0 = Y$  y  $Y_i = \{x \in X \mid d_\Sigma(x, Y_0) = i\}$  para  $i \in \mathbb{N}$ . Mediante particiones de dominios y rangos de los generadores, y en ocasiones sustituyéndolos por sus inversos, podemos suponer que el dominio y el rango de cada generador  $\sigma : A \rightarrow B$  están contenidos en algún  $Y_i$  y además, el dominio está *más lejos* de  $Y$  que el rango, es decir,  $A \subset Y_i$  y  $B \subset Y_j$  con  $i - 1 \leq j \leq i$ . Si numeramos los generadores y llamamos  $Z_i^\sigma$  para  $i > 0$  y  $\sigma \in \Sigma$  al conjunto de los  $x \in Y_i$  para los que  $\sigma$  es el primer generador definido en  $x$  cuya imagen está en  $Y_{i-1}$ . Los  $Z_i^\sigma$  forman una partición disjunta de  $X \setminus Y$ .

Descomponemos entonces cada generador  $\sigma : A \rightarrow B$  en dos isomorfismos borelianos  $\sigma_v$  y  $\sigma_h$  donde  $\sigma_v$  es la restricción de  $\sigma$  a  $Z_i^\sigma$  y  $\sigma_h$  es la restricción de  $\sigma$  a  $A \setminus Z_i^\sigma$ . Denotamos por  $\Sigma_v$  a la familia formada por los  $\sigma_v$  y  $\Sigma_h$  a la familia formada por los  $\sigma_h$ .

Para cada elemento  $x \in Y_i$ , existe un único generador en  $\Sigma_v$  definido en  $x$  que lo envía en un punto de  $Y_{i-1}$ . Luego existe una única  $\Sigma_v$ -palabra  $m_x$  que envía  $x$  en

$Y$ . Esto prueba que las órbitas que define el sistema vertical  $\Sigma_v$  son árboles y que cortan a  $Y$  en un sólo punto.

A continuación describiremos el proceso de deslizamiento de los elementos de  $\Sigma_h$  a lo largo de las órbitas de  $(\Gamma, \Sigma_v)$ . De nuevo mediante particiones en los dominios y rangos de los elementos de  $\Sigma_h$ , podemos suponer que para  $\sigma_h : A \rightarrow B$ , existe una  $\Sigma_v$ -palabra  $m_{A,\sigma_h}$  (resp.  $m_{B,\sigma_h}$ ) que para todo  $x \in A$  (resp.  $y \in B$ ) es la  $\Sigma_v$ -palabra que envía  $x$  (resp.  $y$ ) en  $Y$ . En caso de que  $A$  (resp.  $B$ ) esté contenido en  $Y$ , la palabra será por definición la identidad. Definimos para cada  $\sigma_h$  la transformación  $\psi_{\sigma_h} = (m_{B,\sigma_h}) \circ \sigma_h \circ (m_{A,\sigma_h})^{-1}$  y denotamos por  $\Sigma_Y$  la familia de los  $\psi_{\sigma_h}$ .

**Observación 4.9** i) Nótese que las órbitas de  $\Sigma_v$  son finitas y en consecuencia el deslizamiento de  $\Sigma_h$  da lugar a estructuras de grafo localmente finitas sobre las órbitas de  $\Gamma|_Y$ . Cuando las órbitas de  $\Sigma_v$  son de diámetro uniformemente acotado, las estructuras de grafo definidas por  $\Sigma_Y$  sobre las órbitas de  $\Gamma|_Y$  son además de geometría acotada.

ii) Si  $\Gamma$  es un pseudogrupo de transformaciones de un espacio topológico  $X$  e  $Y$  es un abierto relativamente compacto que corta a todas las órbitas, podemos dotar a las órbitas de  $\Gamma|_Y$  de una buena estructura métrica si  $\Gamma$  es un pseudogrupo de generación compacta (véase [17]) dotado de un *buen* sistema de generación compacta (véase [23]).

### 4.2.3. Equivalencia de Kakutani

Sean  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma', \Sigma')$  dos pseudogrupos de tipo finito actuando sobre espacios borelianos estándar  $X$  y  $X'$ , dotados de medidas casi-invariantes  $\mu$  y  $\mu'$  respectivamente.

**Definición 4.10** ([10]) Se dice que  $\Gamma'$  es un *factor de Kakutani* de  $\Gamma$  si existe una aplicación boreliana  $P : X \rightarrow X'$  tal que:

- i) un boreliano de  $X'$  tiene medida nula si y sólo si su imagen inversa tiene medida nula, es decir,  $P_*\mu$  es equivalente a  $\mu'$ ;
- ii) para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ , la aplicación  $P$  envía la órbita  $\Gamma(x)$  sobre la órbita  $\Gamma'(P(x))$ ;
- iii) existen constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que, para  $\mu$ -casi todo  $x$ , y para cada par  $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$ , se tiene:

$$\frac{1}{C_1}d_\Sigma(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\Sigma'}(P(x_1), P(x_2)) \leq C_1d_\Sigma(x_1, x_2) + C_2$$

Se dice que dos pseudogrupos medibles son *equivalentes en el sentido de Kakutani* si poseen un factor de Kakutani en común.

**Ejemplo 4.11** Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible que actúa sobre un espacio boreliano  $(X, \mu)$  dotado de una medida casi-invariante. Si  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son dos sistemas finitos de generadores, entonces  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma, \Sigma')$  son equivalentes en el sentido de Kakutani.

**Ejemplo 4.12** Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo medible de tipo finito que actúa sobre un espacio boreliano  $(X, \mu)$ , dotado de una medida casi-invariante. Sea  $Y$  un boreliano de  $X$  que corta a  $\mu$ -casi toda órbita de  $\Gamma$ . Aplicando el proceso de reducción,  $\Sigma$  se descompone como unión disjunta de  $\Sigma_v$  y  $\Sigma_h$ . Sea  $\Sigma_Y$  el deslizamiento de  $\Sigma_h$  a lo largo de las órbitas de  $\Sigma_v$ . Si las órbitas de  $(\Gamma, \Sigma_v)$  tienen diámetro uniformemente acotado, entonces los pseudogrupos  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$  son equivalentes en el sentido de Kakutani.

## 4.3. Número de ramificación

### 4.3.1. Número de ramificación de un pseudogrupo

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo de tipo finito que actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida de probabilidad casi-invariante  $\mu$ . Sean  $\Sigma$  un sistema finito de generadores de  $\Gamma$  y  $\Gamma_\Sigma(x)$  la órbita de  $(\Gamma, \Sigma)$  que pasa por  $x \in X$ .

**Definición 4.13** Se define la *aplicación de ramificación*  $br_\Sigma : X \rightarrow [1, \infty)$  como  $br_\Sigma(x) = br(\Gamma_\Sigma(x))$  para cada  $x \in X$ . La aplicación  $br_\Sigma$  está acotada superiormente por el número de elementos del sistema de generadores  $\Sigma$  y además es constante sobre las órbitas.

Antes de probar que la aplicación de ramificación  $br_\Sigma$  es boreliana, será conveniente fijar de antemano alguna de las notaciones que usaremos durante la prueba. Denotaremos por  $\mathfrak{B}$  al conjunto formado por grafos finitos conexos con un punto base fijado y tales que cada arista esté etiquetada por uno de los generadores de  $\Sigma$ . Nótese que por ser  $\Sigma$  finito, la familia  $\mathfrak{B}$  es numerable.

Dado un  $x \in X$ , diremos que un grafo  $B \in \mathfrak{B}$  es *realizable* en la órbita  $\Gamma(x)$  si para todo camino en  $B$  saliendo del punto base, la sucesión de aristas etiquetadas correspondientes  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  es tal que el elemento  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1$  de  $\Gamma$  está definido en  $x$  y llamaremos  $B_x$  al grafo realizado, que obviamente será un elemento de  $\mathfrak{B}_x$ . Denotaremos por  $X_B$  al conjunto de los elementos de  $X$  tales que  $B$  es realizable en

sus órbitas. Según la prueba del lema de la hipersuperficie de [10], para cada  $B \in \mathfrak{B}$ , el conjunto  $X_B$  es un boreliano y tenemos una aplicación boreliana

$$\varphi : B \times X_B \rightarrow X$$

que induce un isomorfismo de grafos

$$\varphi|_{B \times \{x\}} : B \times \{x\} \rightarrow B_x.$$

Este será el ingrediente fundamental de la prueba anunciada.

Con la notación establecida y fijado un grafo  $B \in \mathfrak{B}$  y un  $\lambda \geq 1$ , definimos la *aplicación capacidad*  $\|B\|^\lambda : X \rightarrow (0, \infty]$  por:

$$\|B\|_x^\lambda = \begin{cases} \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} & \text{si } x \in X_B \\ +\infty & \text{si } x \notin X_B \end{cases}$$

De este modo, se tiene que

$$\inf_{\mathfrak{B}_x} \sum_{y \in \partial B} \lambda^{-d_\Sigma(x,y)} = 0 \iff \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0$$

y por tanto, podemos expresar el número de ramificación de un elemento  $x \in X$  como:

$$br(x) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0\}.$$

**Proposición 4.14** *La aplicación  $br_\Sigma$  es una aplicación boreliana.*

**Demostración.** Basta con probar que los conjuntos  $br_\Sigma^{-1}([a, \infty))$  son borelianos para todo  $a \in [1, \infty)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} br_\Sigma^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda = 0\} \geq a\} \\ &= \{x \in X \mid \lambda < a \Rightarrow \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a)} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \end{aligned}$$

Si  $\lambda < \lambda'$  entonces  $\{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \supset \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^{\lambda'} > 0\}$ . De manera que dichos conjuntos con  $\lambda$  variando en  $[1, a)$  forman una familia contractiva,



y por tanto podemos quedarnos con una subfamilia numerable para expresar la intersección. Luego:

$$\begin{aligned}
br_{\Sigma}^{-1}([a, \infty)) &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda > 0\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid \inf_{\mathfrak{B}} \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\}.
\end{aligned}$$

Necesitamos probar que fijados  $B \in \mathfrak{B}$  y  $\lambda \geq 1$ , el conjunto  $\{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\}$  es boreliano para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar, notemos que dicho conjunto se descompone de la siguiente manera:

$$\{x \in X \mid \|B\|_x^\lambda \geq \frac{1}{n}\} = \{x \in X \mid \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_{\Sigma}(x, y)} \geq \frac{1}{n}\} \sqcup \{x \in X \mid x \notin X_B\}.$$

Según la demostración del lema de la hipersuperficie de [10], mencionado antes,  $X_B$  es boreliano y por tanto el segundo conjunto de la unión también lo es. De manera que la prueba se restringe a deducir el carácter boreliano del conjunto  $\{x \in X \mid \sum_{y \in \partial B_x} \lambda^{-d_{\Sigma}(x, y)} \geq \frac{1}{n}\}$ . Puesto que  $B$  es un grafo finito con un punto base fijado, los posibles bordes  $\partial B_x$  de los grafos realizados en las órbitas se corresponden con los distintos subconjuntos de vértices de  $B$ , y por tanto sólo puede haber una cantidad finita. Si  $F$  es un conjunto de vértices de  $B$ , denotamos por  $X_{(B, F)}$  al conjunto de elementos de  $X_B$  cuyos bordes en  $B$  se corresponden con el conjunto  $F$  y para cada  $b \in F$  denotaremos por  $y_b$  al elemento de  $\partial B_x$  que se corresponde con el punto  $b$ . Por tanto, basta ver si el conjunto

$$\{x \in X_{(B, F)} \mid \sum_{b \in F} \lambda^{-d_{\Sigma}(x, y_b)} \geq \frac{1}{n}\}$$

es boreliano.

En primer lugar, podemos afirmar que  $X_{(B, F)}$  es un boreliano como consecuencia otra vez de la prueba del lema de la hipersuperficie de [10]. En segundo lugar, dado  $b \in F$  y  $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_m}\}$  un camino geodésico en  $B$  que una el punto base de  $B$  con el punto  $b$ , se define la aplicación  $\gamma(b) : X_{(B, F)} \rightarrow X$  por  $\gamma(b)(x) = \sigma_{i_m} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(x) = y_b \in \partial B_x$  que es boreliana, ya que los generadores de  $\Sigma$  son isomorfismos borelianos y su dominio está restringido al boreliano  $X_{(B, F)}$ . Por otra parte, la aplicación distancia  $d_{\Sigma} : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  es boreliana y en consecuencia la aplicación

$$x \in X_{(B, F)} \mapsto d_{\Sigma}(x, \gamma(b)(x)) \in [0, \infty)$$

es boreliana para cada  $b \in F$ . Queda así probado que el conjunto

$$\{x \in X_{(B,F)} \mid \sum_{b \in F} \lambda^{-d_{\Sigma}(x,y_b)} \geq \frac{1}{n}\}$$

es boreliano.  $\square$

**Definición 4.15** Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo de tipo finito de transformaciones no singulares de un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  (es decir,  $\Gamma$  actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida de probabilidad casi-invariante  $\mu$ ) y  $\Sigma$  un sistema finito de generadores. Se define el *número de ramificación* de  $(\Gamma, \Sigma)$  relativo a  $\mu$  como:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int br_{\Sigma}(x) d\mu(x).$$

### 4.3.2. Crecimiento exponencial

En las condiciones anteriores, podemos introducir las siguientes definiciones:

**Definición 4.16** Se definen las *aplicaciones de crecimiento*  $gr_{\Sigma} : X \rightarrow [1, \infty)$  y  $\underline{Gr}_{\Sigma} : X \rightarrow [1, \infty)$  como  $gr_{\Sigma}(x) = \underline{gr}(\Gamma_{\Sigma}(x))$  y  $\underline{Gr}_{\Sigma}(x) = \underline{Gr}(\Gamma_{\Sigma}(x))$  para cada  $x \in X$ . Ambas aplicaciones están acotadas por el número de elementos de  $\Sigma$  y además son constantes sobre las órbitas.

**Proposición 4.17** Las aplicaciones de crecimiento  $gr_{\Sigma}$  y  $\underline{Gr}_{\Sigma}$  son borelianas.

**Demostración.** En el primer caso, la prueba es similar a la de la proposición 4.13, aunque más simple. En efecto, para todo  $a \in [1, +\infty)$ , se tiene

$$\begin{aligned} gr_{\Sigma}^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} = 0\} \geq a\} \\ &= \{x \in X \mid \lambda < a \Rightarrow \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a)} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > 0\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{k \geq 1} \{x \in X \mid \inf_n s_x(n)\lambda^{-n} > \frac{1}{k}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in [1, a) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid s_x(n) > \frac{\lambda^n}{k}\} \end{aligned}$$

Se trata de un conjunto boreliano, ya que la aplicación  $s : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $s(x, n) = s_x(n)$  es boreliana y en consecuencia los conjuntos  $\{x \in X \mid s_x(n) > \frac{\lambda^n}{k}\}$  también lo son.

En el segundo caso, también veremos que, para todo  $a \in [1, +\infty)$ , el siguiente conjunto es boreliano:

$$\begin{aligned} \underline{Gr}_\Sigma^{-1}([a, \infty)) &= \{x \in X \mid e^{\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log v_x(n)} \geq a\} \\ &= \{x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log v_x(n) \geq \log(a)\} \\ &= \bigcap_{b \in (\ln(a), +\infty) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{k \geq 1} \{x \in X \mid \inf_{n \geq k} \frac{1}{n} \log v_x(n) \geq b\}. \end{aligned}$$

En efecto, la función  $v : (x, n) \in X \times \mathbb{N} \mapsto v_x(n) \in \mathbb{N}$  es boreliana y en consecuencia el conjunto

$$\{x \in X \mid \inf_{n \geq k} \frac{1}{n} \log v_x(n) \geq b\} = \bigcup_{n \geq k} \{x \in X \mid v_x(n) \geq c = e^{bn}\}$$

es un boreliano. □

**Definición 4.18** Se definen las *tasas de crecimiento exponencial* de  $(\Gamma, \Sigma)$  respecto de  $\mu$  como:

$$\underline{gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int \underline{gr}_\Sigma(x) d\mu(x)$$

y

$$\underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = \int \underline{Gr}_\Sigma(x) d\mu(x).$$

Puesto que la aplicación de ramificación  $br_\Sigma$  está acotada superiormente por la aplicación de crecimiento  $Gr_\Sigma$ , tenemos la siguiente relación entre el número de ramificación y las tasas de crecimiento exponencial de un pseudogrupo de tipo finito:

$$br(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \underline{gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu).$$

**Definición 4.19** Diremos que  $\Gamma$  tiene *crecimiento subexponencial* respecto de  $\mu$  si  $\underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ , o equivalentemente si  $\underline{Gr}_\Sigma(x) = 1$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ .

**Proposición 4.20** Si el pseudogrupo  $\Gamma$  tiene crecimiento subexponencial respecto de  $\mu$ , entonces  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ . □

### 4.3.3. Caso ergódico

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo actuando sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida casi-invariante  $\mu$ .

**Definición 4.21** Se dice que  $\mu$  es *ergódica* si para todo conjunto  $B$  saturado por la acción de  $\Gamma$  (i.e. unión de órbitas de  $\Gamma$ ), se tiene  $\mu(B) = 0$  ó  $\mu(B) = 1$ .

**Teorema 4.22** *Si la medida  $\mu$  es ergódica, entonces*

- i)  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = br(\Gamma_\Sigma(x))$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ ,
- ii)  $gr(\Gamma, \Sigma, \mu) = gr(\Gamma_\Sigma(x))$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ ,
- iii)  $\underline{Gr}(\Gamma, \Sigma, \mu) = \underline{Gr}(\Gamma_\Sigma(x))$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ .

**Demostración.** Puesto que la demostración de los tres apartados es exactamente igual, nos limitaremos a probar el primero. La aplicación  $br_\Sigma$  es boreliana y está acotada superiormente por el número  $k$  de generadores de  $\Sigma$ . Luego  $br_\Sigma^{-1}([1, k])$  es un boreliano de medida total. Como  $br_\Sigma$  es constante sobre las órbitas, la imagen inversa de cualquier boreliano será un conjunto saturado. Por tanto, los conjuntos  $br_\Sigma^{-1}([a, k])$  serán, o bien de medida nula, o bien de medida total. Sea

$$\mathfrak{b} = \inf\{a \in [1, k] \mid \mu(br_\Sigma^{-1}([a, k])) = 0\}.$$

Entonces el conjunto  $br_\Sigma^{-1}([\mathfrak{b}, k]) = \bigcup_{a \in (\mathfrak{b}, k] \cap \mathbb{Q}} br_\Sigma^{-1}([a, k])$  es de medida nula. Por otra parte, el conjunto  $br_\Sigma^{-1}([\mathfrak{b}, k]) = \bigcap_{a \in [1, \mathfrak{b}] \cap \mathbb{Q}} br_\Sigma^{-1}([a, k])$  es de medida total. Luego, la función  $br_\Sigma$  es constante, igual a  $\mathfrak{b}$ , casi por doquier. □

### 4.3.4. Equivalencia de Kakutani

El número de ramificación asociado a un pseudogrupo de tipo finito  $\Gamma$  depende, como hemos visto, del sistema finito de generadores que tomemos. Tiene sentido preguntarse qué sucede con el número de ramificación cuando cambiamos el sistema de generadores  $\Sigma$  por otro sistema finito  $\Sigma'$ . Recordemos que  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma, \Sigma')$  son equivalentes en el sentido de Kakutani. Por ello, estudiaremos de manera más general cómo afecta la equivalencia de Kakutani al número de ramificación.

Sean  $(\Gamma, \Sigma)$  y  $(\Gamma', \Sigma')$  dos pseudogrupos de tipo finito actuando sobre espacios borelianos estándar  $X$  y  $X'$ , dotados de medidas de probabilidad casi-invariantes  $\mu$  y  $\mu'$  respectivamente. Si  $(\Gamma', \Sigma')$  es un factor de Kakutani de  $(\Gamma, \Sigma)$ , existe una

aplicación  $P : X \rightarrow X'$  que define una casi-isometría entre los grafos  $\Gamma_\Sigma(x)$  y  $\Gamma'_{\Sigma'}(P(x))$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ . En particular, existen  $C_1 > 0$  y  $C_2 \geq 0$  tales que

$$\frac{1}{C_1}d_\Sigma(x_1, x_2) - C_2 \leq d_{\Sigma'}(P(x_1), P(x_2)) \leq C_1d_\Sigma(x_1, x_2) + C_2$$

para todo par  $x_1, x_2 \in \Gamma(x)$ . Luego, para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ , sabemos que

$$(4.1) \quad br(\Gamma'_{\Sigma'}(P(x)))^{\frac{1}{C}} \leq br(\Gamma_\Sigma(x)) \leq br(\Gamma'_{\Sigma'}(P(x)))^C$$

donde  $C = (C_1 + C_2)(2[C_1C_2] + 1)^2$ . Nos basta aplicar el teorema 2.8 teniendo presentes las identidades descritas en § 2.1.1. Nótese que la imagen por  $P$  de un conjunto de  $\mu$ -medida total es un conjunto de  $\mu'$ -medida total. Por esto y por ser  $P$  sobreyectiva, podemos afirmar que el resultado anterior también se verifica para  $\mu'$ -casi todo  $x' \in X'$ . De ese modo, tenemos que  $br_\Sigma \leq br_{\Sigma'}^C$ .

En particular, si las medidas  $\mu$  y  $\mu'$  son ergódicas, se tiene

$$br(\Gamma', \Sigma', \mu')^{\frac{1}{C}} \leq br(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq br(\Gamma', \Sigma', \mu')^C$$

debido al teorema 3.22. En general, de las desigualdades (4.1) se deduce el resultado siguiente:

**Proposición 4.23** *Sean  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  dos pseudogrupos de transformaciones no singulares de dos espacios de probabilidad  $(X, \mu)$  y  $(X', \mu')$ , dotados de dos sistemas finitos de generadores  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . Supongamos que son equivalentes en el sentido de Kakutani. Entonces  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$  si y sólo si  $br(\Gamma', \Sigma', \mu') = 1$ .*



# Capítulo 5

## Pseudogrupos promediables

En este capítulo, demostraremos una condición de existencia de medias en términos de número de ramificación.

### 5.1. Preliminares

En esta sección describiremos los recorridos aleatorios en las órbitas de  $\Gamma$ . Esto significa que elegimos un punto de  $X$  al azar (respecto de una medida casi-invariante) y nos desplazamos también al azar en la órbita de  $x$  suponiendo que nos movemos de cada punto a un punto vecino con una cierta probabilidad de paso. Observemos que nuestros recorridos se efectúan a lo largo de las órbitas de  $\Gamma$  sin tener en cuenta la isotropía. Luego nuestro contexto es esencialmente el mismo que se describe en [1] y [26].

#### 5.1.1. Recorridos aleatorios

Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo de tipo finito que actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida de probabilidad casi-invariante  $\mu$ . Escribiremos  $x \sim y$  si  $x$  e  $y$  están en la misma órbita y  $x \sim_{\Sigma} y$  si existe un generador  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $\sigma(x) = y$ .

Se llama *núcleo de transición* a una aplicación medible  $\pi$  definida sobre el conjunto de las aristas de las órbitas  $\Gamma(x)$  con valores en  $(0, 1]$  y cuya restricción a las aristas de  $\mu$ -casi todo grafo  $\Gamma_{\Sigma}(x)$  es *markoviana*, es decir,  $\sum_{x \sim_{\Sigma} y} \pi(x, y) = 1$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ . Identificaremos abusivamente todas las aristas que compartan los mismos extremos, y por consiguiente identificaremos el conjunto de las aristas con el conjunto  $\mathcal{K} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim_{\Sigma} y\}$ . La aplicación medible

inducida por el núcleo de transición se extenderá a una aplicación medible sobre  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$  que denotaremos también  $\pi$  y que se identificará con un sistema medible de medidas de probabilidad  $\pi(x, -)$  sobre  $\Gamma(x)$  donde  $\pi(x, y)$  es la probabilidad de paso de  $x$  a  $y$  si  $x \sim_\Sigma y$  y  $\pi(x, y) = 0$  en otro caso.

**Definición 5.1** Se llama *recorrido aleatorio* sobre  $\Gamma_\Sigma(x)$  al conjunto de las sucesiones  $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sobre  $\Gamma_\Sigma(x)$ , dotado de la  $\sigma$ -álgebra generada por los cilindros  $\{Z \in \Gamma(x)^\mathbb{N} \mid Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n\}$ , donde  $x_0, \dots, x_n \in \Gamma(x)$ , y de la medida de probabilidad

$$P_x[Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n] = \pi_0^x(x_0)\pi(x_0, x_1) \dots \pi(x_{n-1}, x_n)$$

donde  $\pi_0^x$  es la medida de Dirac en  $x$ . Llamamos *distribución del recorrido aleatorio en tiempo  $n$*  a la medida de probabilidad  $\pi_n(x, -) = (\alpha_n)_*P_x$  inducida por la proyección  $\alpha_n : Z \in \Gamma(x)^\mathbb{N} \mapsto Z_n \in \Gamma(x)$ . Las medidas  $\pi_0^x$  y  $\pi(x, -)$  son las distribuciones de la marcha aleatoria en tiempo  $n = 0$  y  $n = 1$ . En lenguaje probabilístico, un recorrido aleatorio es una cadena de Markov  $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con espacio de estados numerable  $\Gamma(x)$ , probabilidad de transición  $\pi$  y distribución inicial  $\pi_0^x$ .

**Definición 5.2** Llamamos *recorrido aleatorio* sobre (las órbitas de) un pseudogrupo  $(\Gamma, X, \mu)$ , dotado de un sistema de generadores  $\Sigma$ , a la media respecto de  $\mu$  de los recorridos aleatorios sobre las órbitas  $\Gamma_\Sigma(x)$ , es decir, el conjunto  $\Omega = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)^\mathbb{N}$ , dotado de la  $\sigma$ -álgebra generada por los cilindros

$$C = \{Z \in \Omega \mid Z_0 \in B_0, \dots, Z_n \in B_n\}$$

determinados por un número finito de borelianos  $B_0, \dots, B_n$  de  $X$  y de la medida de probabilidad  $P = \int P_x d\mu(x)$  dada por:

$$P[Z_0 \in B_0, \dots, Z_n \in B_n] = P(C) = \int P_x(C \cap \Gamma(x)^\mathbb{N}) d\mu(x).$$

Llamamos *distribución del recorrido aleatorio en tiempo  $n$*  a la medida de probabilidad  $\alpha_n P$  inducida por la proyección  $\alpha_n : Z \in \Omega \mapsto Z_n \in X$ . De nuevo, en lenguaje probabilístico, el recorrido aleatorio sobre  $\Gamma$  es una *cadena de Markov*  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con espacio de estados  $X$ , probabilidad de transición  $\pi$  y distribución inicial  $\mu$ .

A continuación introducimos los operadores de difusión y laplaciano.

**Definición 5.3** Llamamos *operador de difusión* al operador

$$D_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$$



definido por:

$$D_\pi f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x, y) f(y).$$

Se trata de un operador markoviano, es decir, un operador lineal, con  $\|D_\pi\| \leq 1$ , que conserva las funciones constantes y es positivo sobre las funciones positivas.

**Definición 5.4** Llamamos *operador laplaciano* al operador

$$\Delta_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$$

definido por:

$$\Delta_\pi f(x) = D_\pi f(x) - f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x, y) f(y) - f(x).$$

En nuestro caso, puesto que las órbitas  $\Gamma_\Sigma(x)$  son grafos localmente finitos, podemos suponer que el paso de un vértice a cada uno de sus vecinos es equiprobable. Obtenemos de ese modo el *núcleo de transición simple*  $\pi(x, y) = \frac{1}{\text{val}_\Sigma(x)}$  que describe la probabilidad de paso de un vértice a cada uno de sus vecinos en el caso del *recorrido aleatorio simple*. Tenemos que el operador laplaciano está dado por  $\Delta_\pi f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} f(y) - \text{val}_\Sigma(x) f(x)$ .

El operador  $D_\pi$  actúa por dualidad sobre las medidas de  $X$ . En particular, las iteraciones del operador dual  $D_\pi^*$  aplicado a la medida  $\mu$  dan lugar a las distribuciones  $(\alpha_n)_* P$ . En efecto, para todo boreliano  $B$  de  $X$  se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha_n)_* P(B) &= \int \left( \int \mathbf{1}_B(Z_n) dP_x(Z) \right) d\mu(x) \\ &= \int \left( \sum_{x \sim_\Phi x_1 \sim_\Phi \dots \sim_\Phi x_n} \pi(x, x_1) \dots \pi(x_{n-1}, x_n) \mathbf{1}_B(x_n) \right) d\mu(x) \\ &= \int D_\pi^n \mathbf{1}_B(x) d\mu(x) = (D_\pi^*)^n \mu(B). \end{aligned}$$

Nótese que las distribuciones  $\pi_n(x, -) = (\alpha_n)_* P_x$  coinciden con las medidas  $(D_\pi^*)^n \pi_0^x$ , obtenidas por difusión de la medida de Dirac  $\pi_0^x$ .

**Definición 5.5** Una medida casi-invariante  $m$  sobre  $X$  se dice *armónica* o *estacionaria* respecto de  $\pi$  si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- i)  $m$  se conserva por el operador  $D_\pi^*$ ;
- ii) para toda función medible acotada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene  $\int \Delta_\pi f dm = 0$ .

En caso de que el operador de difusión  $D_\pi$  se pueda extender a las funciones continuas, tendremos garantizada la existencia de una medida armónica. En particular, si un grupo opera sobre un espacio compacto, entonces existe una medida armónica.

### 5.1.2. Entropía

En las condiciones anteriores, para cada punto  $x \in X$  se define la entropía  $H_1(x) = H(\pi(x, -))$  por:

$$H_1(x) = - \sum_{y \in \Gamma(x)} \pi(x, y) \log \pi(x, y) = - \int \log \pi(Z_0, Z_1) dP_x(Z) < +\infty.$$

Del mismo modo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se define la entropía  $H_n(x) = H_n(\pi_n(x, -))$  como:

$$H_n(x) = - \sum_{y \in \Gamma(x)} \pi_n(x, y) \log \pi_n(x, y) = - \int \log \pi_n(Z_0, Z_n) dP_x(Z) < +\infty.$$

Según [2] y [3], la sucesión  $H_n(x)$  es subaditiva, es decir,  $H_{n+m}(x) \leq H_n(x) + H_m(x)$  para todo par  $m, n \in \mathbb{N}$ . Luego existe el límite

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x) - H_{n-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int -\frac{1}{n} \log \pi_n(Z_0, Z_n) dP_x(Z)$$

que llamaremos *entropía de  $\Gamma(x)$  en  $x$*  (véanse [2], [3], [7] y [20]).

**Observación 5.6** Si suponemos que la medida  $\mu$  es armónica y que la entropía  $H_1$  es integrable, entonces

$$\int H_1(x) d\mu(x) = - \int \log \pi(Z_0, Z_1) dP(Z)$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la función  $h$  es integrable y la *entropía media*  $\mathfrak{h} = \int h(x) d\mu(x)$  está dada por:

$$\mathfrak{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int H_n(x) d\mu(x) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \pi_n(Z_0, Z_n) dP(Z).$$

Por otra parte, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que:

$$\mathfrak{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int H_n(x) - H_{n-1}(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \log \frac{\pi_{n-1}(Z_1, Z_n)}{\pi_n(Z_0, Z_n)} dP(Z)$$

Por analogía con la entropía de los recorridos aleatorios sobre los grupos discretos (ver [7],[20] y [22] ), en el caso ergódico esta cantidad tiene la *propiedad de equidistribución del teorema de Shannon-Breiman-McMillan*, es decir,

$$(5.1) \quad \mathfrak{h} = \int h(x) d\mu(x) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n}$$

para  $P$ -casi toda trayectoria  $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ . En efecto, la sucesión de las funciones integrables  $f_n(Z) = -\log \pi_n(Z_0, Z_n)$  es subaditiva para el desplazamiento de Bernouilli  $\sigma(Z)_n = Z_{n+1}$ , es decir,

$$f_{n+m}(Z) \leq f_n(Z) + f_m(\sigma^n(Z))$$

$$\|\frac{1}{n}f_n\|_1 = \frac{1}{n} \int f_n(z) dP(z) = \frac{1}{n} \int H_n(x) d\mu(x) \leq \int H_1(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Como  $P$  es una medida ergódica conservada por  $\sigma$ , aunque  $\sigma$  no sea inversible, podemos aplicar el teorema ergódico subaditivo de Kingman para tener la propiedad requerida (5.1). En efecto, M. A. Akcoglu et L. Sucheston han probado que toda sucesión subaditiva para una contracción positiva markoviana de  $L^1$  se descompone en la suma de una sucesión subaditiva positiva y de una sucesión aditiva. Por otra parte, el teorema ergódico de Birkhoff sigue siendo válido en el caso no inversible (véase [1]).

### 5.1.3. Velocidad

El operador markoviano inducido por  $D_\pi$  sobre  $\Gamma_\Sigma(x)$  tiene un primer momento  $L_1(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} d_\Sigma(x, y) \pi(x, y) = \int d_\Sigma(Z_0, Z_1) dP_x(Z) = 1$ . De hecho, el primer momento medio  $\int L_1(x) d\mu(x) = \int d_\Sigma(Z_0, Z_1) dP(Z) = 1$ . Como para la entropía, la sucesión de distribuciones  $\pi_n(x, -)$  determina una sucesión subaditiva

$$L_n(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} d_\Sigma(x, y) \pi_n(x, y) = \int d_\Sigma(Z_0, Z_n) dP_x(Z) < +\infty$$

y existe el límite

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} dP_x(Z),$$

que llamaremos *velocidad del recorrido aleatorio sobre  $\Gamma_\Sigma(x)$  en  $x$* .

**Observación 5.7** De nuevo, si suponemos  $\mu$  armónica, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue muestra que la función  $l$  es integrable y que la velocidad media

$$\iota = \int l(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int L_n(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} dP(Z).$$

Puesto que la sucesión de funciones integrables  $f_n(Z) = d_\Sigma(Z_0, Z_n)$  es subaditiva, el teorema ergódico subaditivo de Kingman muestra que, en el caso ergódico,  $\iota$  tiene la propiedad de equidistribución del teorema de Shannon-Breiman-McMillan, es decir,

$$(5.2) \quad \iota = \int l(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n}$$

para  $P$ -casi toda trayectoria  $Z = \{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ .

#### 5.1.4. Operador de difusión regular

**Definición 5.8** El operador de difusión  $D_\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$  se dirá *regular* si su restricción a las órbitas

$$D_\pi : l^\infty(\Gamma(x)) \rightarrow l^\infty(\Gamma(x))$$

es *regular* [21] para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ , es decir, si existen constantes

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)), \iota(\Gamma(x)) > 0$$

tales que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} - \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n} = \mathfrak{h}(\Gamma(x))$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} = \iota(\Gamma(x))$$

Si el operador de difusión  $D_\pi$  es regular, el teorema de la convergencia dominada nos garantiza que:

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int - \frac{\log \pi_n(Z_0, Z_n)}{n} dP_x(Z) = \mathfrak{h}(\Gamma(x)),$$

para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ . En particular,  $h(x)$  es constante sobre las órbitas. En tal caso diremos que  $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$  es la *entropía asintótica de  $\Gamma(x)$* . Siguiendo el mismo razonamiento, tenemos que:

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int - \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} dP_x(Z) = \iota(\Gamma(x))$$

para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ . Ahora diremos que  $l(\Gamma(x))$  es la *velocidad del recorrido aleatorio sobre  $\Gamma(x)$* .

**Lema 5.9** ([22]) *Si  $D_\pi$  es regular, entonces para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$  se tiene*

$$\mathfrak{h}(\Gamma(x)) \leq \underline{Gr}(\Gamma(x))l(\Gamma(x)).$$

□

**Proposición 5.10** *Supongamos que  $D_\pi$  es regular. Si  $br_\Sigma(x) = 1$ , entonces  $l(\Gamma(x)) = 0$ . En particular, si  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ , entonces  $l(\Gamma(x)) = 0$  para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$  y por tanto, la entropía asintótica  $\mathfrak{h}(\Gamma(x))$  también será nula para  $\mu$ -casi toda órbita.*

**Demostración.** Según el teorema 1.1 de [28], si  $br_\Sigma(x) = 1$ , entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_\Sigma(Z_0, Z_n)}{n} = 0.$$

En el caso regular, esta cantidad coincide con  $l(\Gamma(x))$  y la proposición resulta del lema anterior. □

**Observación 5.11** Según [1] y [21], si  $\mu$  es armónica, entonces  $D_\pi$  es regular y podemos aplicar los resultados previos.

## 5.2. Pseudogrupos promediables

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformaciones medibles no singulares sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida casi-invariante  $\mu$ .

**Definición 5.12** Diremos que  $\Gamma$  es *promediable* respecto de  $\mu$  o  $\mu$ -*promediable*, si posee un sistema medible  $m = \{m_x\}_{x \in X}$  de medias sobre las órbitas  $m_x \in l^\infty(\Gamma(x))_1^{*+}$  (i.e. funcionales lineales positivos y unitarios definidos sobre  $l^\infty(\Gamma(x))$ ) que es invariante en el siguiente sentido: para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$  y para todo  $y \in \Gamma(x)$  se tiene  $m_x = m_y$ . En tal caso se dirá que  $m$  es un *sistema invariante de medias locales*. Recordemos que  $m = \{m_x\}_{x \in X}$  se dice *medible* si para toda función  $F : \mathcal{R} \subset X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  medible, se tiene que la función  $m(F) : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $m(F)(x) = m_x(F(x, -))$  es medible.

Observemos que  $\Gamma$  es promediable si y sólo si lo es la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  definida por la acción de  $\Gamma$  sobre  $X$ . En otros términos, estamos obviando los grupos de isotropía de  $\Gamma$ . Por un teorema de A. Connes, J. Feldman y B. Weiss [6], el pseudogrupo  $\Gamma$  es promediable si y sólo si  $\mathcal{R}$  es hiperfinita, es decir, si existen relaciones de equivalencia finitas  $\mathcal{R}_n$  sobre  $X$  tales que  $\mathcal{R}[x] = \bigcup \mathcal{R}_n[x]$  para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ .

**Definición 5.13** Se dice que un recorrido aleatorio sobre las órbitas de un pseudogrupo tiene la *propiedad de Liouville* si para  $\mu$ -casi toda órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$ , cualquier función armónica acotada es constante.

En [1] y [6], se prueba el siguiente resultado:

**Proposición 5.14** *Si un recorrido aleatorio sobre las órbitas del pseudogrupo  $(\Gamma, \Sigma)$  tiene la propiedad de Liouville para  $\mu$ , entonces  $\Gamma$  es promediable para  $\mu$ .  $\square$*

**Teorema 5.15** *Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformaciones no singulares sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida armónica  $\mu$ . Si  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ , entonces el pseudogrupo  $\Gamma$  es  $\mu$ -promediable.*

**Demostración.** Puesto que  $\mu$  es armónica, el operador de difusión es regular. Según la proposición 5.10, si  $br(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ , entonces  $h(x) = 0$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ . Por el lema 1 de [19] se tiene que  $\Gamma_\Sigma(x)$  tiene la propiedad de Liouville para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ . Luego  $\Gamma$  es promediable por la proposición anterior.  $\square$

## 5.3. Un ejemplo interesante

### 5.3.1. Grupo del sereno

Consideremos el conjunto  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \{\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \mid \eta^{-1}(1) \text{ finito}\}$  y la acción de  $\mathbb{Z}$  por la derecha sobre  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  generada por el automorfismo

$$S : \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2,$$

dado por  $S(\eta)(i) = \eta(i - 1)$ .

**Definición 5.16** Se define el *grupo del sereno*  $G_1$  [20] como el producto semidirecto

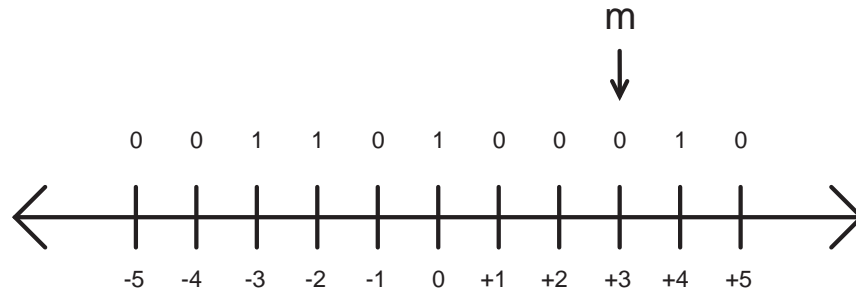
$$G_1 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}$$

con la operación de grupo

$$(\eta, m)(\eta', m') = (\eta + S^m(\eta'), m + m').$$

Dada una configuración  $\eta \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ , cada elemento  $n \in \mathbb{Z}$  puede interpretarse como un farol que puede estar encendido ( $\eta(n) = 1$ ) o apagado ( $\eta(n) = 0$ ). Nótese que el número de faroles encendidos es siempre finito. El entero  $m$  que acompaña a  $\eta$  señala en qué farol se encuentra el sereno.

Obsérvese que podemos identificar cada elemento  $\eta$  con su soporte, de manera que el conjunto  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  podemos identificarlo con el conjunto de las partes finitas de  $\mathbb{Z}$ . Ahora, dado un elemento  $(A, M) \in G_1$ , el subconjunto finito  $A \subset \mathbb{Z}$  representa el conjunto de faroles encendidos y  $m$  sigue siendo la posición del sereno. A partir de ahora, expresaremos los elementos del grupo del sereno de esta manera para simplificar los cálculos.



*Representación del elemento  $(A, m)$  con  $A = \{-3, -2, 0, +4\}$  y  $m = +3$ .*

En estos términos, el producto se expresa como

$$(A, m)(A', m') = (A \Delta \{A' + m\}, m + m')$$

donde  $A, A' \subset \mathbb{Z}$  son finitos y  $\Delta$  representa su diferencia simétrica. Por tanto, multiplicar el elemento  $(A, m)$  por  $(\emptyset, m')$  significa que el sereno cambia su posición de  $m$  a  $m'$ . Por otro lado, la multiplicación por  $(A' = \{n_1, \dots, n_k\}, 0)$  significa que el

sereno se traslada a cada uno de los faroles  $m + n_i$  y los apaga si están encendidos, o los enciende si están apagados, y al finalizar vuelve a su posición inicial  $m$ . Puesto que todo elemento  $(A, m)$  se puede escribir como

$$(A, m) = (A, 0)(\emptyset, m),$$

queda totalmente determinada la interpretación del producto del grupo del sereno. Notemos que el elemento  $(\emptyset, 0)$  es el elemento neutro del grupo.

### 5.3.2. Grafo de Cayley del grupo del sereno

Nos vamos a interesar por el grafo de Cayley  $\mathcal{G}_1 = (G_1, S)$  del grafo del sereno  $G_1$  con el sistema de generadores simétrico  $S = \{a = (\{0\}, 0), b = (\emptyset, \{1\}), b^{-1} = (\emptyset, \{-1\})\}$ . Nótese que el elemento  $a$  coincide con su inverso. De hecho,  $G_1$  admite la siguiente presentación

$$G_1 = \langle a, b : a^2 = 1, [b^i a b^{-i}, b^j a b^{-j}] = 1 \rangle$$

que determina al grafo  $\mathcal{G}_1$ . En efecto, dado un elemento  $(\{n_1, \dots, n_k\}, m)$  del grupo del sereno, su expresión en función de los generadores es la siguiente:

$$(\{n_1, \dots, n_k\}, m) = b^{n_1} a b^{-n_1} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m.$$

Cada expresión de la forma  $b^{n_i} a b^{-n_i}$  se interpreta como que el sereno parte del origen, va al farol  $n_i$ , lo enciende (o apaga) y vuelve al origen. El último elemento  $b^m$  es el que hace que, tras haber encendido los correspondientes faroles, el sereno se traslade a la posición  $m$ .

### 5.3.3. Número de ramificación del grupo del sereno

Puesto que se trata de un grafo de Cayley, el número de ramificación y la tasa de crecimiento exponencial de  $\mathcal{G}_1$  coinciden. Por otra parte, el árbol de Fibonacci  $T'$  descrito en §3.1.3 es un subárbol del grafo  $\mathcal{G}_1$ . En efecto, si tomamos como vértices de  $T'$  los elementos  $(A, m)$  de  $G_1$  tales que  $A$  no contiene enteros negativos y  $m \geq \max A$ , entonces obtenemos dicho árbol. Los vértices que verifican  $m = \max A$  tienen un único hijo, el elemento  $(A, m + 1)$ . Los vértices para los que  $m > \max A$  tienen como hijos los elementos  $(A, m + 1)$  y  $(A \Delta \{m\}, m)$ . Sabemos que

$$br(T') = gr(T') = \Phi,$$

luego

$$br(\mathcal{G}_1) = gr(\mathcal{G}_1) \geq \Phi.$$



No es difícil ver que el número de elementos a distancia  $n$  del origen del grafo de Cayley  $\mathcal{G}_1$ , es decir,  $s(n)$  tienen como cota superior el producto de una constante por  $\sum_{k \leq n} \Phi^k$ , que converge asintóticamente al mismo producto por  $\Phi^n$ . Luego,

$$br(\mathcal{G}_1) = gr(\mathcal{G}_1) = \Phi.$$

Tal y como anunciamos en § 3.2.4, el logaritmo del número de ramificación de  $\mathcal{G}_1$  no coincide con la dimensión de Hausdorff de su espacio de finales  $\partial G_1$ . En efecto, nos basta observar que  $\partial G_1$  se reduce a un único final. Para ello, recordemos que, según un resultado clásico de H. Hopf, un grupo infinito de tipo finito debe tener 1, 2 o un conjunto de Cantor de finales. Teniendo en cuenta su definición como producto semidirecto de  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z}$ , resulta claro que  $G_1$  es un grupo promediable. Luego, según el corolario IV.24 de [9], el grupo del sereno  $G_1$  no puede tener un conjunto de Cantor de finales. Tampoco puede tener 2 finales, ya que tales grupos son extensiones finitas de  $\mathbb{Z}$  o de  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  como consecuencia de un teorema de J. Stallings. Por consiguiente,  $G_1$  tiene exactamente 1 final.

### 5.3.4. Acción de $G_1$ sobre el conjunto de Cantor

Consideremos el anillo de polinomios

$$\mathbb{Z}_2[[t]] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

que identificaremos con el *conjunto de Cantor*  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , dotado de la topología generada por los cilindros

$$C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \{ (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid x_0 = \alpha_0, \dots, x_n = \alpha_n \}.$$

Este conjunto admite una medida de probabilidad  $\mu$  que asigna a cada cilindro  $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$  la probabilidad

$$\mu(C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = 2^{-n}.$$

El objetivo de este apartado es describir una acción esencialmente libre del grupo del sereno  $G_1$  sobre el conjunto de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Recordemos que una acción se dice *libre* si el único elemento del grupo que tiene puntos fijos es el elemento neutro, es decir, si  $Fix(g) \neq \emptyset$  entonces  $g = e$ . En el caso topológico diremos que la acción es *esencialmente libre* si la unión de los puntos fijos de todos los elementos del grupo (excepto el neutro) es un conjunto magro, es decir, unión numerable de

conjuntos cerrados con interior vacío. En el caso medible, diremos que la acción es *esencialmente libre* respecto de una medida casi-invariante si la unión de los puntos fijos de todos los elementos del grupo (excepto el neutro) es un conjunto de medida nula.

Recordemos que el grupo del sereno admite una presentación

$$G_1 = \langle a, b : a^2 = 1, [b^i a b^{-i}, b^j a b^{-j}] = 1 \mid$$

donde  $a = (\{0\}, 0)$  y  $b = (\emptyset, 1)$ . Luego, si definimos de qué modo actúan los generadores, tendremos determinada la acción. En efecto, la acción

$$G_1 \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

está generada por:

$$\begin{aligned} (a, (x_0, x_1, \dots)) &\mapsto (x_0 + 1, x_1, \dots) \\ (b, (x_0, x_1, \dots)) &\mapsto (x_0, x_1 + x_0, x_2 + x_1, \dots) \end{aligned}$$

Para manejar la acción anterior, nos será más útil expresar el conjunto de Cantor como anillo de polinomios infinitos. De ese modo, tenemos la acción:

$$G_1 \times \mathbb{Z}_2[[t]] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[[t]]$$

generada por:

$$\begin{aligned} (a, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i) &\mapsto 1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \\ (b, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i) &\mapsto (1 + t) \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \end{aligned}$$

Puesto que  $\mathbb{Z}_2[[t]]$  es un anillo local cuyo ideal maximal es el generado por  $t$ , el polinomio  $1 + t$  pertenece al conjunto de las unidades y su inverso es de la forma  $(1+t)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i t^i$ . En estos términos, podemos expresar la acción del elemento  $b^{-1}$  sobre un polinomio arbitrario  $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$  como  $(1+t)^{-1}p$ . Mediante cálculos muy sencillos, se prueba que dicha acción es compatible con las relaciones de los generadores y por tanto, está bien definida. Además, si tenemos en cuenta que todo elemento  $g = (m, \{n_1, \dots, n_k\})$  de  $G_1$  se puede escribir como  $b^{n_1} a b^{-n_1} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m$ , la acción queda descrita de manera explícita para todo el grupo. De hecho, el elemento

$g$  actúa sobre  $\mathbb{Z}_2[[t]]$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i &= b^{n_1} a b^{-n_1} \dots b^{n_k} a b^{-n_k} b^m \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i \\ &= (1+t)^{n_1} + \dots + (1+t)^{n_k} + (1+t)^m \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i t^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i t^i \end{aligned}$$

donde

$$y_i = \sum_{l=1}^k \binom{n_l}{k} + \sum_{j=0}^i \binom{m}{j} x_{i-j}.$$

Además, la medida  $\mu$  sobre el conjunto de Cantor es invariante por la acción del grupo del sereno. En efecto, dado un cilindro  $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ , tenemos

$$\begin{aligned} a \cdot C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} &= C_{\alpha_0+1, \alpha_1, \dots, \alpha_n} \\ b \cdot C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} &= C_{\alpha_0, \alpha_1+\alpha_0, \dots, \alpha_n+\alpha_{n-1}} \end{aligned}$$

**Proposición 5.17** *La acción de  $G_1$  sobre  $\mathbb{Z}_2[[t]]$  es esencialmente libre respecto de la medida  $\mu$ .*

**Demostración.** En primer lugar, notemos que la acción no es libre porque el elemento  $b \in G_1$  tiene al menos un punto fijo: la sucesión de ceros. Por tanto, veremos que dicha acción es esencialmente libre respecto de la medida  $\mu$ . En realidad, probaremos que es siempre esencialmente libre independientemente de la medida que tomemos sobre el Cantor. Si vemos que cada uno de los conjuntos  $Fix(g)$  es de medida nula, entonces la unión numerable  $\bigcup_{g \in G_1} Fix(g)$  es de medida nula.

Sea  $g = (A, m) \in G_1$  y supongamos que existe un polinomio  $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$  tal que  $p \in Fix(g)$ . Nos preguntamos si habrá alguna restricción sobre  $m$  para que dicho punto fijo pueda existir y tras unos pocos cálculos comprobamos que, efectivamente,  $m$  tiene que ser distinto de cero. No es necesario estudiar los dos casos  $m > 0$  y  $m < 0$  ya que si  $p$  es un punto fijo de  $g = (A, m)$ , entonces también lo es del elemento  $g^{-1} = (A - m, -m)$  y viceversa. Por lo tanto, podemos suponer  $m > 0$ .

Si consideramos las restricciones  $m$  positivo y  $A$  un conjunto de enteros no negativos, se obtiene de modo sencillo que  $Fix(m, A) = \{p\}$ . Lo mismo sucede si tomamos  $A$  un conjunto finito arbitrario de  $\mathbb{Z}$ . En efecto, si  $p \in Fix(m, A)$ , entonces  $(1+t)^{-n_1} p \in Fix(m, A - n_1) = \{(1+t)^{-n_1} p\}$ , ya que  $A - n_1$  está formado por positivos, luego  $p$  es también el único punto fijo posible. Por tanto, tenemos que cada elemento de  $G_1$  tiene a lo sumo un punto fijo, y en consecuencia, el conjunto

$\bigcup_{g \in G_1} \text{Fix}(g)$  es de medida nula por ser unión numerable de conjuntos de medida nula.  $\square$

Nótese que la acción también es esencialmente libre en el sentido topológico ya que los conjuntos  $\text{Fix}(g)$  son cerrados de interior vacío, y en consecuencia  $\bigcup_{g \in G_1} \text{Fix}(g)$  es magro. En realidad, la acción es esencialmente libre no sólo para la medida  $\mu$ , sino también para toda medida sobre el conjunto de Cantor que no tenga átomos. Si vemos que toda órbita de la acción es infinita, entonces todas las medidas de Borel invariantes sobre el conjunto de Cantor han de ser sin átomos, de modo que quedaría probado que la acción es esencialmente libre independientemente de la medida invariante que tomemos.

Recordemos que el *grupo de isotropía* de un polinomio  $p \in \mathbb{Z}_2[[t]]$  es el subgrupo de  $G_1$  formado por los elementos que dejan fijo el polinomio  $p$ , es decir,

$$I_p = \{g \in G_1 \mid g \cdot p = p\}.$$

Nótese que  $G_1/I_p$  es la órbita que pasa por  $p$ . Consideramos la segunda proyección  $\pi : G_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $\pi((A, m)) = m$ . Obviamente  $\pi$  es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y en consecuencia, la imagen por  $\pi$  del subgrupo  $I_p$  ha de ser un subgrupo de  $\mathbb{Z}$ . Es decir,  $\pi(I_p)$  o bien es  $\{0\}$ , o bien es  $n\mathbb{Z}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Nótese que no puede ser el subgrupo  $\{0\}$  porque en ese caso, todos los elementos de  $I_p$  tendrían  $m = 0$ , cosa que no es posible porque sabemos que los elementos de  $G_1$  con  $m = 0$  no tienen puntos fijos. Por tanto,  $\pi(I_p) = n\mathbb{Z}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otro lado, resulta trivial que el núcleo  $\ker(\pi) = \mathbb{Z}_2 \wr \{0\}$ . Luego, usando de nuevo el argumento de que un elemento de  $G_1$  con  $m = 0$  no tiene puntos fijos, se tiene:

$$\text{Ker}(\pi|_{I_p}) = \text{Ker}(\pi) \cap I_p = \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} = \{e\}.$$

Por tanto, por el lema del Ker-Coker, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \{e\} & \xrightarrow{i} & I_p & \xrightarrow{\pi} & n\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} & \xrightarrow{i} & G_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 \wr \{0\} & \xrightarrow{\bar{i}} & G_1/I & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

Obsérvese que la órbita  $G_1/I$  siempre contiene al subgrupo infinito  $\mathbb{Z}_2 \wr \{0\}$ . Luego todas las órbitas son infinitas y no puede existir ninguna medida invariante con átomos.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.18** *El pseudogrupo de transformaciones de  $\mathbb{Z}_2[[t]]$  generado por la acción de  $G_1$  tiene número de ramificación igual a  $\Phi$  respecto del sistema de generadores  $\Sigma = \{a, b\}$  de  $G_1$  y de cualquier medida invariante.*



# Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, Moyennes harmoniques. Preprint, 2004.
- [2] A. Avez, Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **275** (1972), 1363-1366.
- [3] A. Avez, Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques, in *Théorie Ergodique (Rennes, 1973/1974)*. Lectures Notes in Math. 532, Springer, Berlin, 1976, 35-49.
- [4] M. Bermúdez. *Laminations boréliennes*, Thèse UCB-Lyon 1, 2004.
- [5] M. R. Bridson, A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [6] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1** (1981), 431–450.
- [7] Y. Derriennic, Entropie, théorèmes limites et marches aléatoires, in *Probability Measures on Groups VIII (Oberwolfach, 1985)*. Lectures Notes in Math. 1210, Springer, Berlin, 1986, 241-284.
- [8] J. Feldman, C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289-324.
- [9] D. Gaboriau. Coût des relations d'équivalence et des groupes, *Invent. Math.*, **139** (2000), 41–98.
- [10] E. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141** (1995), 387–422.
- [11] E. Ghys, De la Harpe. *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [12] M. Gromov. *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*. Cedec/Fernand Nathan, Paris, 1981.

- [13] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math. IHES*, **53** (1981), 53–78.
- [14] M. Gromov. Asymptotic Invariants of Infinite Groups, in *Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [15] A. Haefliger. Groupoïdes d’holonomie et classifiants, in *Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982)*. *Astérisque*, **116** (1984), 70-97.
- [16] A. Haefliger. Pseudogroups of local isometries, in *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174-197.
- [17] A. Haefliger. Foliations and compactly generated pseudogroups, in *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*, World Sci. Publishing, River Edge, 2002, 275-295.
- [18] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable, in *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry*. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **202** (2001), 151-166.
- [19] V. A. Kaimanovich, Brownian motion on foliations: entropy, invariant measures, mixing. *Funct. Anal. Appl.*, **22** (1988), 326-328.
- [20] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *Ann. Probab.*, **11** (1983), 457-490.
- [21] V. A. Kaimanovich, Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18** (1998), 631-660.
- [22] V. A. Kaimanovich, W. Woess, Boundary and entropy of space homogeneous Markov chains. *Ann. Probab.*, **30** (2002), 323-363.
- [23] A. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Publ. de la RSME*, **10** (2006), 267-272.
- [24] R. Lyons, Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, **18** (1990), 931-958.
- [25] R. Lyons, Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Draft, version of 22 November 2004.



- [26] F. Paulin, Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, **5** (1999), 163-200.
- [27] C. Series, Foliations of polynomial growth are hyperfinite. *Israel J. Math.*, **34** (1979), 245-258.
- [28] B. Virág, On the speed of random walks on graphs. *Ann. Probab.*, **28** (2000), 379-394.