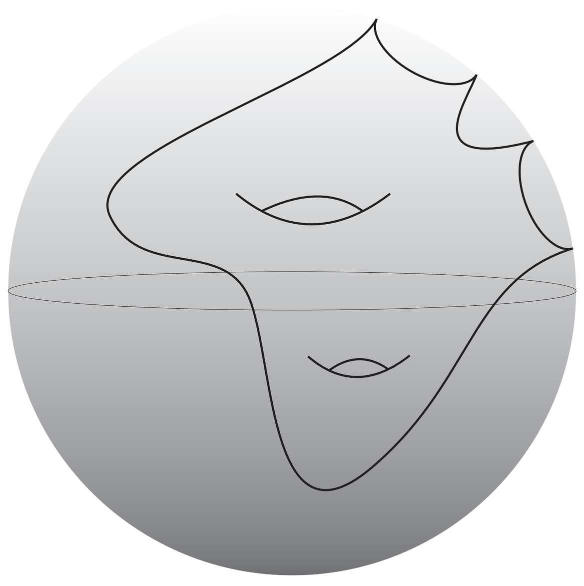


Estabilidad homológica para configuraciones de superficies

Federico Cantero Morán*
Universidad de Barcelona

Resumen

En 1975 McDuff demostró que los grupos de homología del espacio de configuraciones $C_n(M)$ de n puntos en una variedad M con borde son independientes de n en grados pequeños con respecto al número de puntos. Segal demostró que esos grupos de homología son los grupos de homología de cierto espacio de secciones. Partiendo de teoremas de Harer (1984) y Madsen–Weiss (2002) sobre *mapping class groups*, en este trabajo conjunto con Oscar Randal-Williams generalizamos los resultados de McDuff y Segal a los espacios de configuraciones de superficies compactas y orientadas en una variedad M con borde.

1. Espacios de configuraciones

Consideremos una variedad diferenciable M y una superficie compacta conexa orientada $\Sigma_{g,b}$ de género g cuyo borde tiene b componentes conexas. El *espacio de configuraciones* $\mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ *de superficies de tipo* $\Sigma_{g,b}$ *en* M *con condición de frontera una subvariedad* δ *de* ∂M tiene como puntos las subvariedades W de M difeomorfas a $\Sigma_{g,b}$ con $\partial W = \delta$ tales que $\mathring{W} \subset \mathring{M}$.

Para definir una topología en $\mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$, denotamos por $\mathrm{Emb}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ al espacio de *embeddings* $f\colon \Sigma_{g,b} \to M$ tales que $f_{|\partial\Sigma_{g,b}}\colon \partial\Sigma_{g,b} \to \delta$ está fijada y $f(\mathring{\Sigma}_{g,b}) \subset \mathring{M}$. El grupo $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,b})$ de difeomorfismos de $\Sigma_{g,b}$ relativos al borde actua libremente sobre $\mathrm{Emb}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ y la aplicación

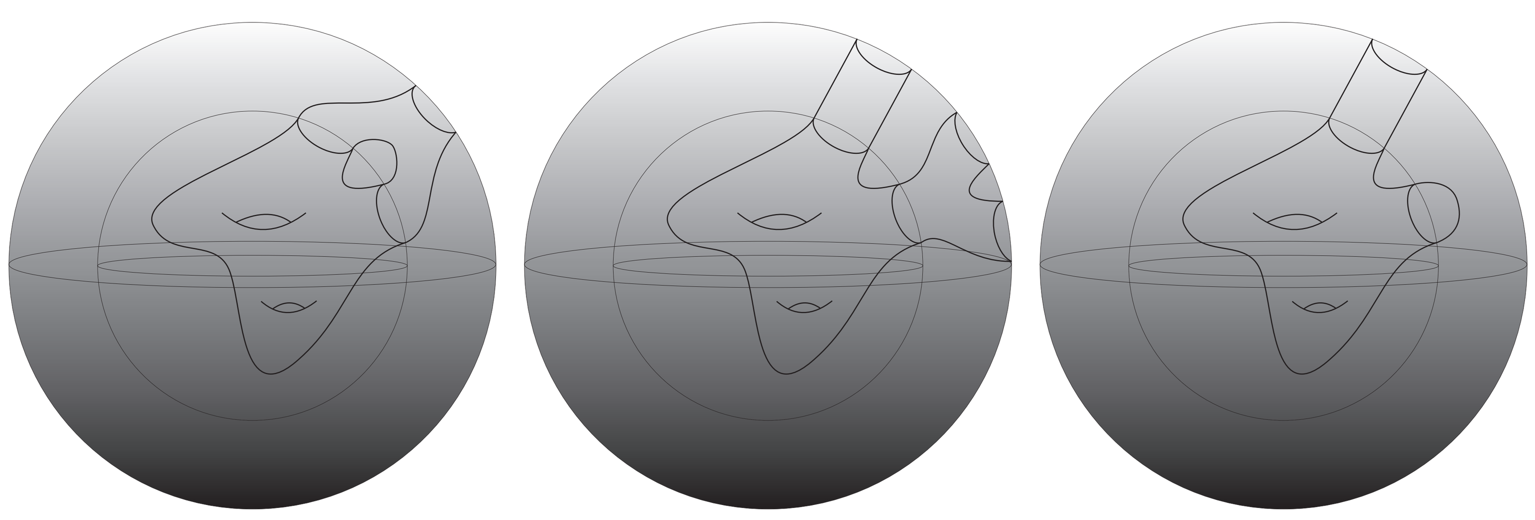
$$\mathrm{Emb}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,b}) \longrightarrow \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$$

que asigna a cada órbita $[f]$ la subvariedad $\mathrm{Im} f$ es una biyección, lo cual dota a $\mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ de una topología.

2. Estabilidad homológica

Pegando pares de pantalones, discos y cilindros en $\partial M \times I$ a las superficies $W \in \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ se obtienen aplicaciones

$$\begin{aligned}
\alpha_{g,b}(M)\colon \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta) &\longrightarrow \mathrm{E}(\Sigma_{g+1,b-1}, M; \delta')\\
\beta_{g,b}(M)\colon \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta) &\longrightarrow \mathrm{E}(\Sigma_{g,b+1}, M; \delta')\\
\gamma_{g,b}(M)\colon \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta) &\longrightarrow \mathrm{E}(\Sigma_{g,b-1}, M; \delta')
\end{aligned}$$



$\alpha_{2,2}(D^3)$ $\beta_{2,2}(D^3)$ $\gamma_{2,2}(D^3)$

TEOREMA A. *Sea* M *una variedad diferenciable simplemente conexa con borde no vacío de dimension* $m \geq 5$ *y* δ *una condición de frontera arbitraria. Entonces, para* g, b *y* δ' *dados,*

- $\alpha_{g,b}(M)$ *induce un isomorfismo en homología en grados* $* \leq \frac{2g-2}{3}$ *y un epimorfismo en grados* $* \leq \frac{2g+1}{3}$.
- $\beta_{g,b}(M)$ *induce un isomorfismo en homología en grados* $* \leq \frac{2g-3}{3}$ *y un epimorfismo en grados* $* \leq \frac{2g}{3}$. *Si* δ' *tiene una componente contráctil, entonces* $\beta_{g,b}(M)$ *induce siempre un monomorfismo.*
- $\gamma_{g,b}(M)$ *induce un isomorfismo en homología en grados* $* \leq \frac{2g-3}{3}$ *y un epimorfismo en grados* $* \leq \frac{2g}{3}$. *Si* $b > 1$ *induce siempre un epimorfismo.*

3. Grupos de homología estables

Fijemos una métrica de Riemann en M y sea $\mathrm{Gr}_2(TM)$ el conjunto de pares (x, V), donde $x \in M$ y V es un plano en T_xM. Sea $\gamma^\perp(TM)$ el conjunto de tuplas (x, V, v) con $(x, V) \in \mathrm{Gr}_2(TM)$ y $v \in V^\perp$. Finalmente, sea $\mathrm{Th}^{fib}(\gamma^\perp(TM))$ el resultado de aplicar la construcción de Thom a cada fibra de $\gamma^\perp(TM) \to M$.

TEOREMA B. *Si* M *es una variedad diferenciable simplemente conexa con borde no vacío de dimensión* $m \geq 5$, δ *es una condición de frontera arbitraria y* $* \leq \frac{2g-3}{3}$, *entonces*

$$H_* \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta) \cong H_* \Gamma_c(\mathrm{Th}^{fib}(\gamma^\perp(T\mathring{M})) \to \mathring{M}),$$

donde Γ_c *denota el espacio de secciones con soporte compacto del fibrado.*

La correspondencia viene de la construcción de Pontryagin–Thom: a cada $W \in \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ le podemos asociar, de manera continua, un entorno tubular $W \subset \overline{W} \subset M$. Los puntos de $\overline{W}$ están parametrizados por el fibrado normal $\pi\colon NW \to W$ de W en M, esto es, son pares (x, v) con $x \in W, v \in N_xW$. Entonces W determina una sección con soporte compacto

$$y \mapsto \begin{cases} * & \text{si } x \notin \overline{W} \\ (v + T_xW, -v) & \text{si } y = (x, v) \in \overline{W}. \end{cases}$$

4. Observaciones

- Ambos teoremas se generalizan a superficies no conexas.
- No se sabe si el Teorema A es cierto cuando $\partial M = \emptyset$. El resultado de McDuff para espacios de configuraciones de puntos ha sido generalizado recientemente en [5] a variedades sin borde tomando homología con coeficientes *racionales*.
- Si $\pi_1(M) \neq 0$, el Teorema A es falso, ya que en ese caso la dimensión de $\pi_0 \mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ crece con el género g.
- El Teorema A se basa en las técnicas desarrolladas en [3].
- El Teorema B se basa en [2], [4] y aplica las técnicas de [1].
- Si X es un espacio topológico, el espacio $\mathrm{E}(\Sigma_{g,b}, M; \delta)$ clasifica subfibrados de superficies de tipo $\Sigma_{g,b}$ del fibrado trivial $X \times M$.

Referencias

[1] S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann, M. Weiss, *The homotopy type of the cobordism category*, Acta Math. **202** (2) (2009) 195–239.

[2] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, Geometry & Topology **14** (3) (2010) 1243–1302.

[3] O. Randal-Williams, *Resolutions of moduli spaces and homological stability*, arXiv:0909.4278.

[4] O. Randal-Williams, *Embedded cobordism categories and spaces of manifolds*, Internat. Math. Res. Notices **3** (2010) 572–608.

[5] O. Randal-Williams, *Homological stability for unordered configuration spaces*, arXiv:1105.5257.

* Trabajo conjunto con Oscar Randal-Williams.