Percolación de Bernoulli sobre pseudogrupos grafados

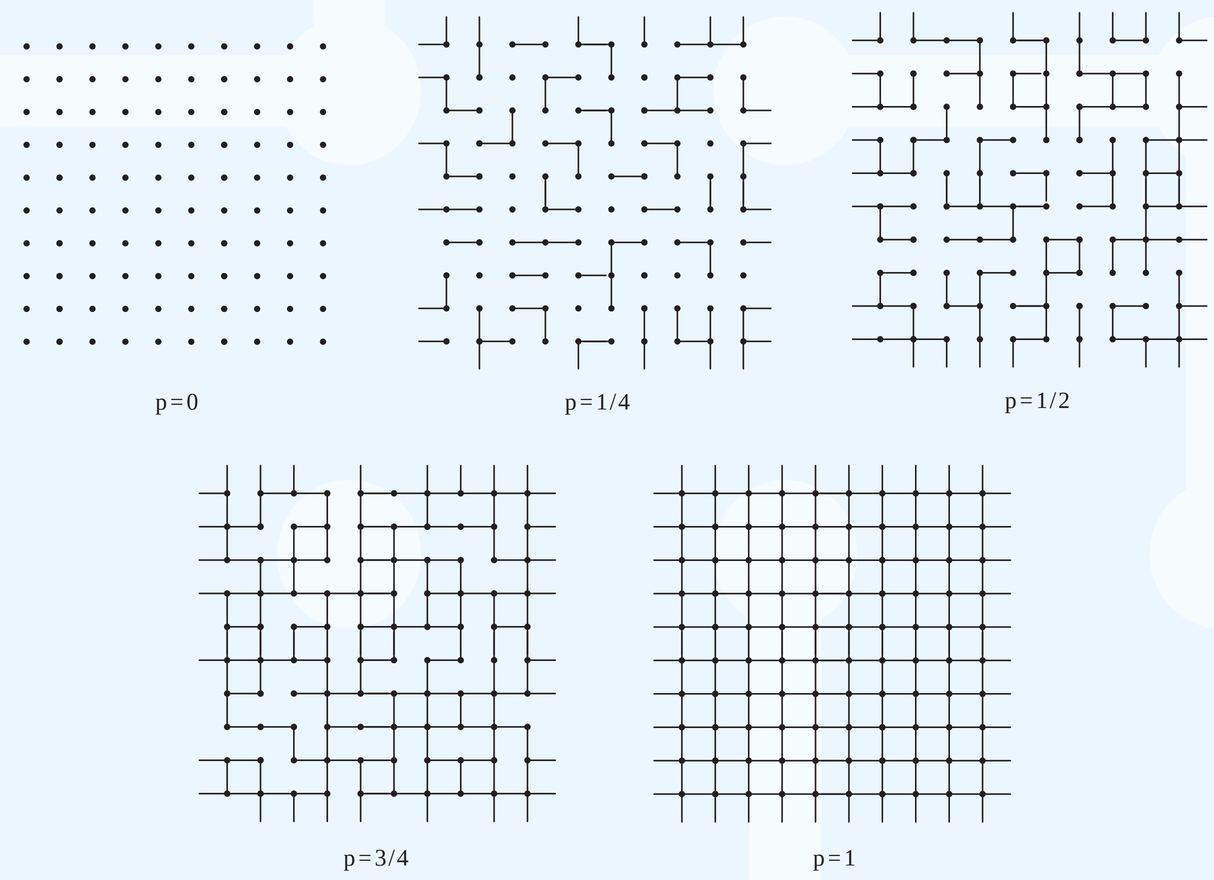
María Pérez Fernández de Córdoba
Universidade de Santiago de Compostela

Abstract

La teoría de la percolación surge para modelar procesos físicos aleatorios como la filtración de un fluido por un medio poroso, el contagio de una enfermedad o la propagación de un incendio. Hacer percolación de Bernoulli sobre un grafo consiste en eliminar aristas al azar independiente unas de otras. El objetivo es estudiar la existencia de *clústeres* (subgrafos conexos) infinitos en el grafo aleatorio resultante. En nuestro trabajo extendemos el proceso de percolación de Bernoulli al contexto de pseudogrupos grafados de tipo finito sobre espacios de probabilidad.

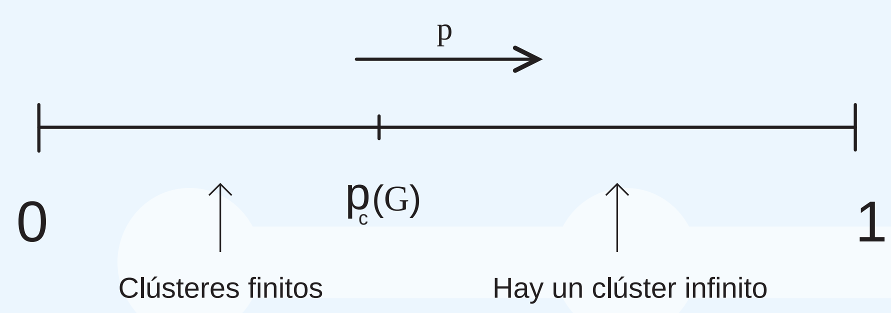
1 PERCOLACIÓN DE BERNOULLI

La *percolación de Bernoulli* sobre un grafo infinito $\mathcal{G}$ es el proceso aleatorio que consiste en borrar cada arista con probabilidad $1-p$ o mantenerla con probabilidad p, independientemente unas de otras. El objetivo inicial es estudiar la probabilidad $\Phi(p)$ de que exista una componente conexa (*clúster*) infinita.



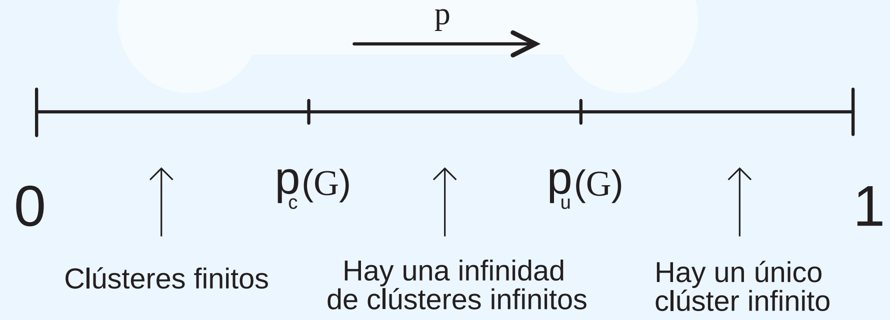
Percolación de Bernoulli sobre $\mathbb{Z}^2$ con distintos parámetros.

Como es natural, la probabilidad $\Phi(p)$ es monótona creciente con respecto a p. Además, $\Phi(p) = 0$ ó 1 por la ley $0-1$ de Kolmogorov. Por tanto, existe un punto crítico $p_c(\mathcal{G}) \in [0,1]$, llamado *percolación crítica*, a partir del cual $\Phi(p)$ cambia de 0 a 1:



2 PERCOLACIÓN DE BERNOULLI EN GRAFOS DE CAYLEY

Sea G un grupo generado por un conjunto finito S y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G,S)$ su grafo de Cayley. Si hacemos percolación sobre el grafo $\mathcal{G}$, el número de clústeres infinitos es constante igual a 0, 1 ó ∞ ([5]). Además, existe un nuevo valor crítico $p_u(\mathcal{G})$ que verifica:



Algunas propiedades geométricas de los grafos de Cayley determinan el número de clústeres infinitos. Presentamos a continuación algunos resultados clásicos, prestando especial interés en los relacionados con el espacio de finales:

- G promediable $\Rightarrow p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G})$ (véase [2]).
- $\mathcal{G}$ es un árbol $\Rightarrow p_c(\mathcal{G}) = 1/br(\mathcal{G})$ y $p_u(\mathcal{G}) = 1$, siendo $br(\mathcal{G})$ el número de ramificación de $\mathcal{G}$ (véase [5]).
- $\mathcal{G}$ tiene dos finales $\Rightarrow p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G}) = 1$.
- $\mathcal{G}$ tiene infinitos finales $\Rightarrow p_u(\mathcal{G}) = 1$.

3 PERCOLACIÓN DE BERNOULLI EN PSEUDOGRUPOS

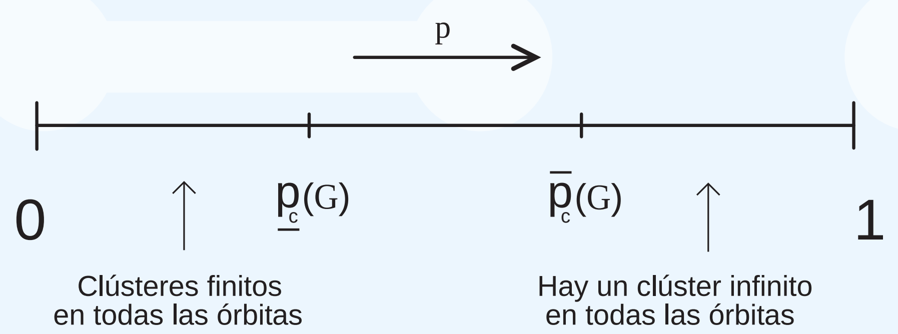
Sea Γ un *pseudogrupo de transformaciones no singulares* de un espacio de probabilidad (X,μ) generado por un conjunto finito Σ. Cada órbita $\Gamma(x)$ es el conjunto de vértices de un grafo localmente finito $\Gamma_\Sigma(x)$, donde dos elementos $y,z \in \Gamma(x)$ están unidos por una arista si existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = z$.

El proceso de *percolación de Bernoulli* sobre (Γ,Σ) consiste en hacer percolación de Bernoulli en cada órbita del pseudogrupo grafado de manera independiente. Ahora, el objetivo es estudiar el número de clústeres infinitos de las órbitas genéricas.

DEFINICIÓN 1. Definimos la *aplicación de percolación* $p_c : X \to [0,1]$ como $p_c(x) := p_c(\Gamma_\Sigma(x))$ y los valores críticos

$$\underline{p_c}(\Gamma,\Sigma) = inf\ \ ess\ \ p_c(x), \qquad \overline{p_c}(\Gamma,\Sigma) = sup\ \ ess\ \ p_c(x)$$

que actúan como transición de fase:



Utilizando una versión discreta del lema de la hipersuperficie de Ghys [4], probamos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1. ([3]) *La aplicación $p_c(\Gamma,\Sigma)$ es una aplicación boreliana constante sobre las órbitas.*

Como consecuencia de la proposición anterior, se tiene:

PROPOSICIÓN 2. ([3]) *Si la medida μ es ergódica, entonces $\underline{p_c}(\Gamma,\Sigma) = \overline{p_c}(\Gamma,\Sigma) = p_c(x)$, para μ-casi todo $x \in X$.*

Puesto que las órbitas no son grafos de Cayley, no tenemos definido el valor crítico p_u. No obstante, Ghys prueba en [4] que las órbitas de un pseudogrupo grafado (Γ,Σ) presentan cierta periodicidad propia de los grafos de Cayley.

Utilizando estas propiedades, obtenemos los resultados siguientes, análogos a los enunciados anteriormente para grafos de Cayley:

TEOREMA 1. ([3]) Si μ-c.t. órbita es un árbol, entonces $p_c(\Gamma,\Sigma) = 1/br(\Gamma,\Sigma)$ donde $br(\Gamma,\Sigma)$ es el número de ramificación definido en [1] y además μ-c.t. órbita tiene una infinidad de clústeres infinitos cuando $p > p_c(\Gamma,\Sigma)$.

TEOREMA 2. ([3]) Si μ-c.t. órbita tiene dos finales, $p_c(\Gamma,\Sigma) = 1$.

TEOREMA 3. ([3]) Si μ-c.t. órbita tiene una infinidad de finales, entonces μ-c.t. órbita tiene una infinidad de clústeres infinitos cuando $p > p_c(\Gamma,\Sigma)$.

Bibliografía

[1] F. Alcalde, M.P. Fernández de Córdoba, Nombre de branchement d'un pseudogroupe. Por aparecer en Monatshefte für Mathematik. DOI: 10.1007/s00605-010-0230-z

[2] R. Burton, M. Keane, Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 501-505.

[3] M.P. Fernández de Córdoba, Número de ramificación y Percolación. Tesis en preparación.

[4] E. Ghys, Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.* , **141** (1995), 347-422.

[5] R. Lyons, Y. Peres, *Probability on trees and networks.* En preparación.