Tomás Fernández Bayort*
C.G.A. (Centro de Gestión Avanzado)
Consejería de Educación, Junta de Andalucía (Sevilla)
e-mail: tfernandez@andaluciajunta.es

Sobre la Topología de los continuos de Peano localmente 2-conexos

XIII Encuentro de Topología
Castro Urdiales, Cantabria
3 y 4 de noviembre de 2006

1. Síntesis

Este trabajo presenta un estudio alternativo al dado por Thomassen en [6] de los continuos de Peano que son localmente 2-conexos. En nuestra aproximación juegan un papel crucial algunos teoremas clásicos de Claytor, Kuratowski y Borsuk dentro de la teoría de continuos. De esta manera somos capaces de generalizar los resultados de Thomassen cuando la compacidad es reemplazada por la compacidad local. Más explícitamente demostramos los tres siguientes teoremas:

Teorema A. *Sea X un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo y localmente plano. Entonces X es un subconjunto cerrado de una superficie M_X cuyo borde $\partial M_X = \sqcup_{i\in I}\mathbb{R}$ consiste en una sucesión (posiblemente vacía o finita) de copias de la recta euclídea. Más aún, la inclusión $i : X \subset M_X$ induce un homeomorfismo $i_* : \mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(M_X)$ entre los espacios de finales de Freudenthal.*

Además, la superficie M_X está determinada por X en el siguiente sentido

Teorema B. *Dada una inmersión cerrada $\psi : Y \to M_X$ de cualquier espacio métrico unidimensional Y existe una inmersión cerrada $\varphi : Y \to X$ tal que el homeomorfismo $i_* : \mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(M_X)$ se restringe a un homeomorfirmo $\overline{\varphi(Y)} \cap \mathcal{F}(X) \cong \overline{\psi(Y)} \cap \mathcal{F}(M_X)$. Aquí las clausuras se toman en las correspondientes compactificaciones de Freudenthal.*

Como una consecuencia del Teorema B, probamos que la planaridad local de los continuos generalizados de Peano 2-conexos queda caracterizada por cualquiera de las curvas añadidas por Claytor [3] a los dos grafos prohibidos de Kuratowski $K_{3,3}$ and K_5 con el objeto de caracterizar los continuos de Peano. En este trabajo por *curva* entenderemos un continuo generalizado de Peano unidimensional. Concretamente probamos

Teorema C. *Un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo X no es localmente plano en $p \in X$ si y sólo si hay una inmersión $\varphi : L_i \to X$ de la curva L_i ($i = 1, 2$) tal que $\varphi(p_i) = p$.*

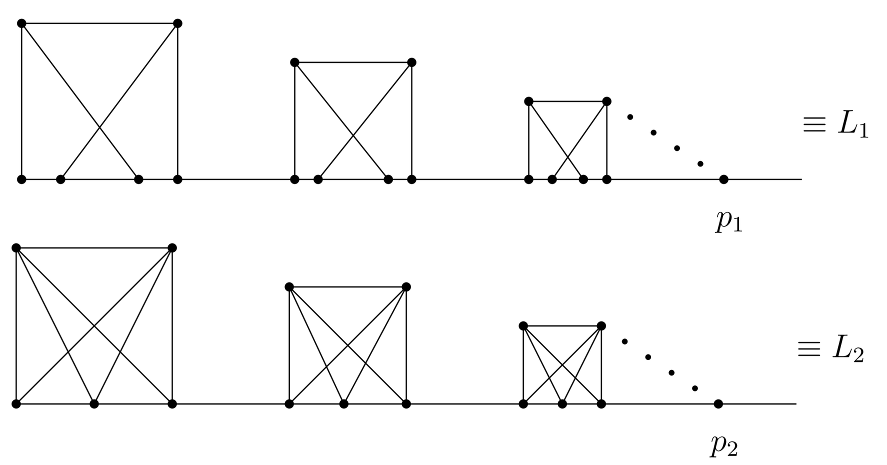


Figura 1: *Curvas de Claytor L_1 y L_2.*

Este teorema proporciona una caracterización alternativa a la dada por Thomassen en ([6]; 4.6) para continuos de Peano usando grafos completos infinitos. Aunque el teorema de Thomassen es más fuerte que el Teorema C, este último resalta las curvas de Claytor como las configuraciones prohibidas mínimas que caracterizan la planaridad local de un continuo (generalizado) de Peano localmente 2-conexo.

2. Definiciones y Preliminares

Recordamos que un *continuo de Peano* X es un espacio metrizable, compacto, conexo y localmente conexo. Cuando la compacidad es reemplazada por la compacidad local, el espacio X se llama *continuo generalizado de Peano*. Cualquier conjunto abierto y conexo de un continuo generalizado de Peano X es conexo por caminos. Además, X de puede descomponer siempre como una unión numerable $\cup_{n=1}^{\infty} K_n$ de subconjuntos compactos $K_n \subset X$ con $K_n \subset intK_{n+1}$. Dada tal sucesión $\{K_n\}_{n\geq 1}$, un *final de Freudenthal* de X es una sucesión $\varepsilon = (C_n)_{n\geq 1}$ de componentes $C_n \subset X - K_n$ con $C_{n+1} \subset C_n$. Si $\mathcal{F}(X)$ denota el conjunto de finales de Freudenthal de X, la unión $\widehat{X} = X \cup \mathcal{F}(X)$ admite una topología compacta (*compactificación de Freudenthal* de X) generada por los conjuntos abiertos de X junto con los conjuntos $\widehat{C_n} = C_n \cup \{\varepsilon \in \mathcal{F}(X); C_n$ aparece en $\varepsilon\}$ $(n \geq 1)$. El subespacio $\mathcal{F}(X)$ resulta ser homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor. Es bien conocido que cualquier *aplicación propia* $f : X \longrightarrow Y$ (i.e., una aplicación continua tal que $f^{-1}(K)$ es compacto para cualquier subconjunto compacto K) entre continuos generalizados induce una aplicación continua $f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$.

Un espacio X se dice 2-*conexo* si ningún punto separa X. Generalizando, un espacio X se dice que es n-*conexo* si ningún conjunto con menos de $n-1$ puntos separa X. Por un espacio ω-*conexo* entendemos un espacio que es n-conexo para todo $n \geq 1$. La versión local correspondiente de 2-conexión es la siguiente. Un espacio X se dice *localmente 2-conexo* si para cualquier $x \in X$ y cualquier entorno de x, U, existe otro entorno $V \subset U$ tal que $V - \{x\}$ es conexo. En realidad la 2-conexión local es una propiedad considerablemente fuerte; en efecto, se tiene

Lema 2.1. *Cualquier subcontinuo (i.e., conjunto compacto y conexo) de un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo admite una base de entornos formada por ω-entornos.*

Aquí, por un ω-*entorno* de un subconjunto A entendemos un continuo de Peano ω-conexo V cuyo interior es un conjunto abierto y conexo (i.e., un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo) conteniendo a A.

En relación a la n-conexión, Zippin en [7] extendió el clásico teorema de Menger para grafos probando que dados dos conjuntos disjuntos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ en un continuo generalizado de Peano n-conexo X existen n arcos independientes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ conectando todos los puntos en A con todos los puntos en B; es decir, los arcos son disjuntos dos a dos y sus extremos caen en $A \cup B$. Más aún, dado cualquier $x \in X - B$ hay n arcos independientes de x a B.

3. Planaridad y 2-conexión

Comenzamos recordando que el teorema de Claytor; esto es, un continuo de Peano X es plano si y sólo si no contiene una copia de uno de los grafos $K_5, K_{3,3}$ o de las curvas L_1 y L_2, se extiende a los continuos generalizados de Peano (ver [1] para una demostración y otras caracterizaciones). Como señaló el propio Claytor ([3]; Th. (C)) las curvas L_1 y L_2 son redundantes si X es 2-conexo. Es decir

Teorema 3.1. *Un continuo generalizado de Peano 2-conexo es plano si y sólo si no contiene ninguno de los grafos de Kuratowski K_5 y $K_{3,3}$.*

Es también bien sabido que los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no juegan el mismo papel en el criterio de planaridad de Kuratowski-Claytor. En realidad, de cualquier inmersión $K_5 \subset X$ en un continuo (generalizado) de Peano 3-conexo se deduce una inmersión $K_{3,3} \subset X$ ([4]) y así $K_{3,3}$ es suficiente para caracterizar la planaridad en el dominio de los continuos generalizados 3-conexos. Bajo la condición de 2-conexión local los papeles de $K_{3,3}$ y K_5 resultan ser equivalentes. Esto es,

Proposición 3.2. *La inmersión de uno cualquiera de los grafos de Kuratowski $K_{3,3}$ o K_5 determina la no planaridad de un continuo generalizado de Peano localmente 2-conexo.*

4. Puntos terminales

Como una consecuencia inmediata del Lema 2.1, cualquier punto $x \in X$ en un continuo generalizado de Peano localmente plano y localmente 2-conexo X admite una base numerable de entornos $\mathfrak{B}_x$ formado por ω-entornos planos.

Como una consecuencia de ([5]; Th. 4(ii), §61 II) dada cualquier inmersión $\varphi : C_i^x \to S^2$ de $C_i^x \in \mathfrak{B}_x$, cada componente $R \subset S^2 - \varphi(C_i^x)$ es un disco abierto cuya frontera FrR es el borde de su círculo. Esta observación nos conduce a la siguiente

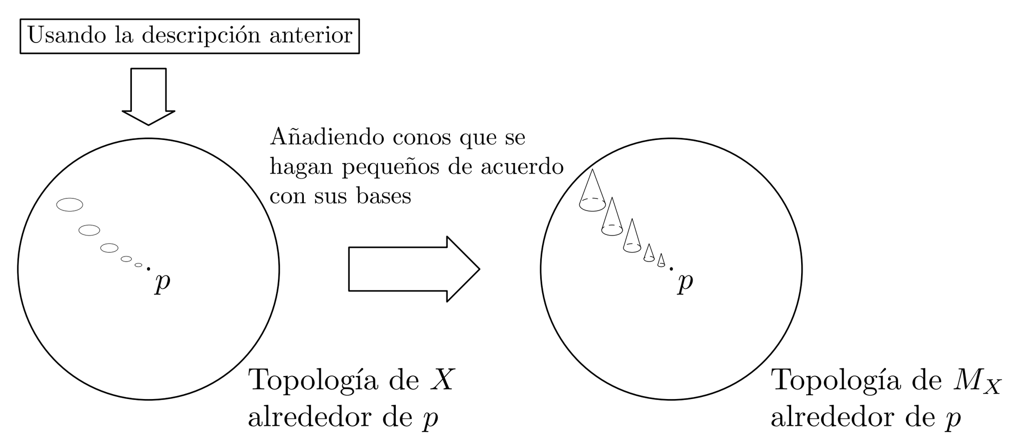
Definición 4.1. Una *carta* de X en $x \in X$ es un par (C_i^x, φ) donde C_i^x es un ω-entorno plano de x y $\varphi : C_i^x \to S^2$ es una inmersión. Un punto $x \in X$ se dice *terminal* si hay una carta (C_i^z, φ) en algún z tal que $x \in intC_i^z$ y $\varphi(x) \in FrR$ cae en la frontera de una componente $R \subset S^2 - \varphi(C_i^z)$.

Se prueba que la definición de punto terminal no depende de la elección de cartas. De hecho, tenemos

Proposición 4.2. *Cada componente arcoconexa C del subespacio T de puntos terminales es un círculo o un arco abierto que es un conjunto cerrado de X. En particular, si X es compacto entonces todas las componentes arcoconexas de T son círculos. Más aún la subfamilia de los círculos forman una sucesión nula mientras que la de los arcos abiertos es localmente finita.*

Recordemos que una colección $\mathcal{A} = \{A_i\}$ de subconjuntos de un espacio métrico (X, d) se dice que forma una *sucesión nula* si para cualquier compacto K y cualquier $\epsilon > 0$ sólo hay un número finito de conjuntos A_i con $A_i \cap K \neq \emptyset$ que tengan diámetro mayor que ϵ. Nótese que esta condición implica que $\mathcal{A}$ es en efecto una sucesión.

Idea de la prueba del Teorema A.



5. S-curvas

En la prueba del Teorema B usamos la noción de S-curva. Recordemos que una S-*curva* en un superficie M es una curva X cuyo complemento $M - X$ es la unión de los interiores de una sucesión de discos cerrados disjuntos dos a dos $D_k \subset M - \partial M$ $(k \geq 1)$. Nótese que $\partial M \subset X$.

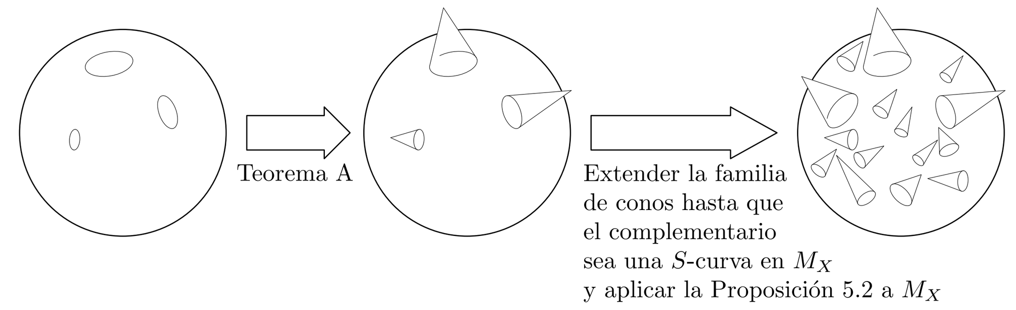
Un teorema debido a Borsuk ([2]; 7.4) establece que cualesquiera dos S-curvas en una superficie cerrada M son homeomorfas. Los mismos argumentos, basados en el teorema de descomposición de superficies de Moore (ver [2]), también funcionan para probar el mismo resultado para S-curvas en una superficie con borde, compacta o no. A saber

Teorema 5.1. *La inclusión $i : A \subset M$ de cualquier S-curva en una superficie M induce un homeomorfismo $i_* : \mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}(M)$. Más aún, dada la inclusión $i' : A' \subset M$ de otra S-curva A', existe un homeomorfismo $\psi : A \to A'$ tal que $i'_* \circ \psi_* = i_* : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(M)$.*

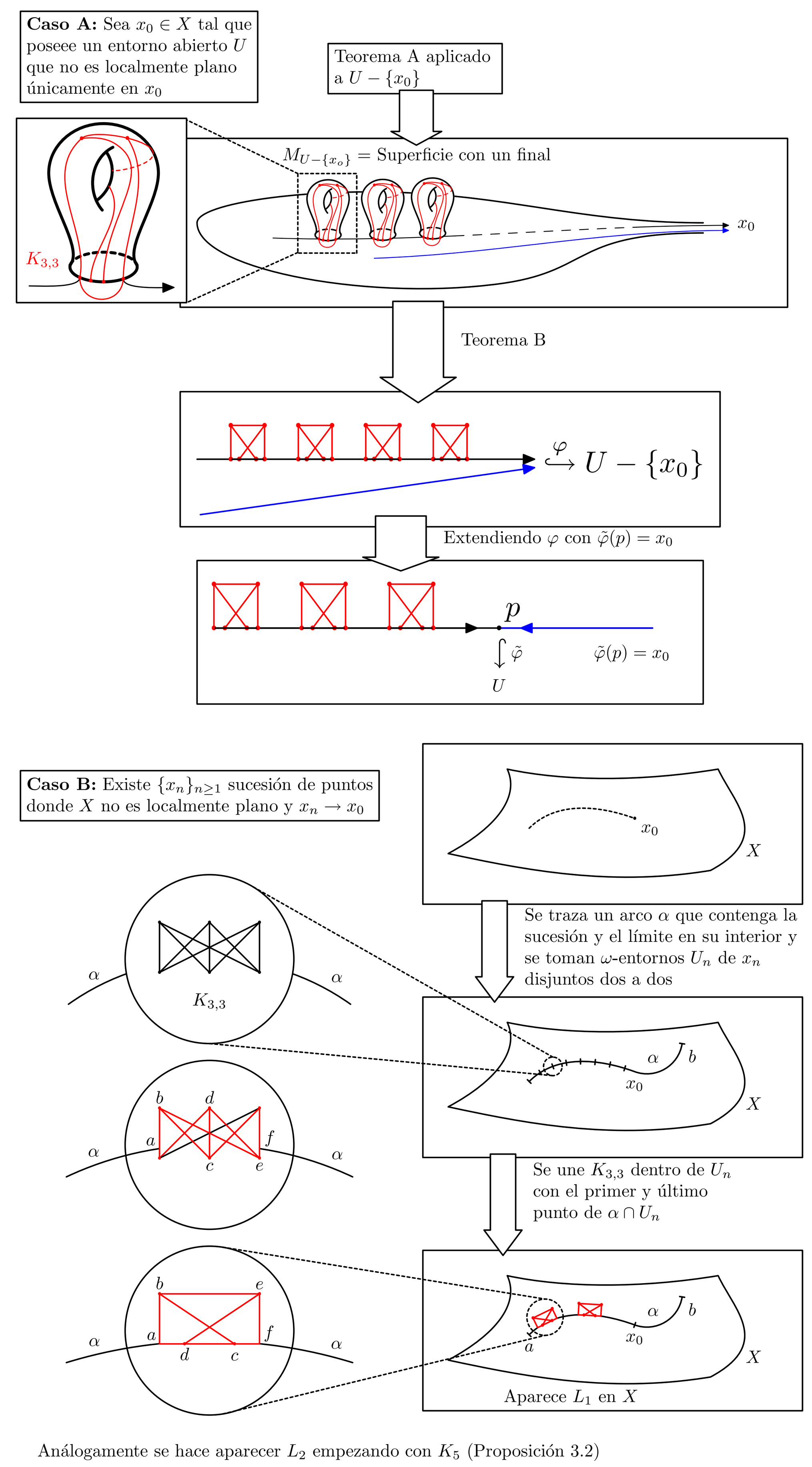
La siguiente proposición es consecuencia del Teorema 5.1.

Proposición 5.2. *Toda S-curva U en una superficie M contiene una copia de cualquier conjunto cerrado unidimensional $C \subset M$. Más aún, existe una inmersión cerrada $\rho : C \to U$ para la cual el homeomorfismo $i_* : \mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}(M)$ se restringe a un homeomorfismo $\overline{\rho(C)} \cap \mathcal{F}(U) \cong \overline{C} \cap \mathcal{F}(M)$. Aquí las clausuras se toman en las correspondientes compactificaciones de Freudenthal.*

Idea de la prueba del Teorema B.



Idea de la prueba del Teorema C.



Referencias

[1] R. Ayala, M. J. Chávez and A. Quintero, On the planarity of Peano generalized continua: an extension of a theorem of S. Claytor, Colloq. Math., **2** (1998), 175-181.

[2] K. Borsuk, On embedding curves in surfaces, Fund. Math. **59** (1966), 73-89.

[3] S. Claytor, Peanian continua not imbeddable in a spherical surface, Ann. of Math. **38** (1937), 631-646.

[4] D. W. Hall, A note on primitive skew curves, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 935-936.

[5] K. Kuratowski, Topology. Volume II. Academic Press, 1968.

[6] C. Thomassen, Classification of locally 2-connected compact metric spaces, Combinatorica **25** (1) (2005), 85-103.

[7] L. Zippin, Independent arcs of a continuous curve, Annals of Math. **34** (1933), 95- 113.

* Los resultados presentados han sido obtenidos en colaboración con M. J. Chávez, A. Quintero y M. T. Villar.