

1. Introducción

En este trabajo estudiamos el comportamiento geométrico genérico de las imágenes de las aplicaciones estables de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n+1} , para $n = 2, 3$.

J. Mather [M] obtuvo en 1969 la clasificación de las aplicaciones estables de una n -variedad en $\mathbb{R}^{(n+1)}$. Cuando $n = 2$, tenemos aplicaciones estables con una singularidad aislada en el origen: el **paraguas de Whitney**, cuya parametrización es $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. En este caso, a la imagen del punto singular $(0, 0)$ se le conoce como el punto de "cross-cap" (Figura 1).

En [B-W] J. Bruce y J. West estudiaron el contacto del paraguas de Whitney con hiperplanos a fin de obtener informaciones sobre la geometría genérica del mismo. Para ello, West y Bruce determinaron las órbitas de los bigérmes de aplicaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 bajo la acción del grupo de gérmenes de difeomorfismos en \mathbb{R}^3 que preservan el paraguas de Whitney. Nuestro objetivo es aplicar este método a las aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^4 . En este caso, la imagen de una aplicación estable con singularidades contiene una curva de puntos de "cross-cap", tiene como parametrización $g(x, y, z) = (x, y, z^2, yz)$ y la llamamos **suspensión del paraguas de Whitney**.

2. Definiciones

Sean f, g aplicaciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n+1} .

Definición 1: Decimos que f y g son \mathcal{A} -equivalentes ($f \sim_{\mathcal{A}} g$) si existen difeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tales que $f = k \circ g \circ h^{-1}$.

Definición 2: Decimos que f es **estable** si existe algun entorno V_f de f en la topología C^∞ de Whitney tal que para todo $g \in V_f$, $g \sim_{\mathcal{A}} f$.

Definición 3: Decimos que el contacto de una n -variedad M con un hiperplano en un punto común p es de tipo A_k , $k \geq 0$, si el germen de la función altura de M sobre el hiperplano en p es \mathcal{A} -equivalente a $\pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \cdots \pm x_n^2$.

3. Geometría del paraguas de Whitney

Consideremos el paraguas de Whitney. La imagen de f contiene un punto de "cross-cap" en el origen y una curva de puntos dobles parametrizada por $\beta(t) = (0, t, 0)$, siendo $t \geq 0$.

Geoméricamente esta singularidad es no genérica.

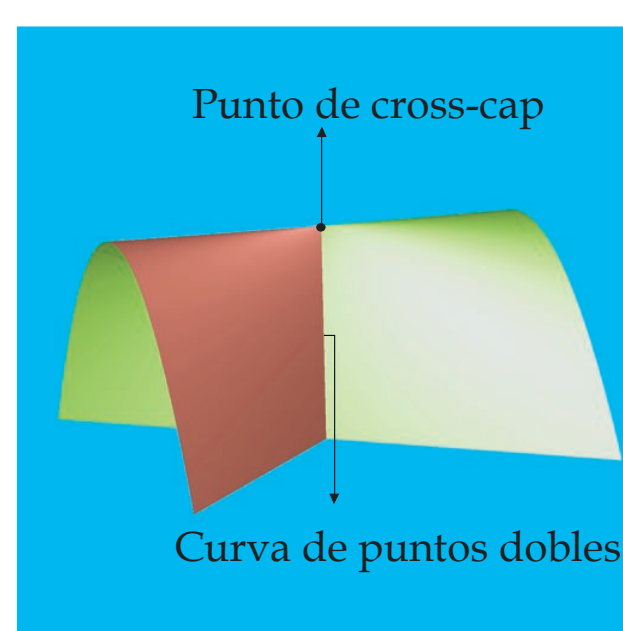


Figura 1: El paraguas de Whitney

Una manera de estudiar todos los posibles contactos del paraguas de Whitney con hiperplanos es estudiar las diferentes clases de bigérmes según la relación de \mathcal{A} -equivalencia. Em [B-W] Bruce y West obtuvieron una clasificación de bigérmes de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 bajo la acción del grupo \mathcal{A} .

Lo que ellos probaron, usando técnicas algebraicas de la teoría de singularidades, es el siguiente resultado.

Teorema 1 [B-W]: Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ un bigermen de \mathcal{A} -codimensión ≤ 2 , donde una de las ramas es el paraguas de Whitney. Entonces f tiene una de las siguientes formas normales ($k \geq 1$):

$$(i) \begin{cases} (x, y^2, xy) \\ (\pm x^{k-1}, x, y) \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} (x, y^2, xy) \\ (x, \pm x^{k+1}, y) \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} (x, y^2, xy) \\ (x, y, y^2) \end{cases}$$

que tienen \mathcal{A} -codimensión $k-1$, k y 2 , respectivamente.

A partir de esto se determinan los posibles contactos genéricos del paraguas de Whitney y de la curva de puntos dobles con los planos de \mathbb{R}^3 en el punto de "cross-cap". Veamos un ejemplo:

Consideremos el bigermen (ii) $\begin{cases} (x, y^2, xy) \\ (x, \pm x^{k+1}, y) \end{cases}$.

Realizando cambio de coordenadas con respecto al grupo \mathcal{A} , obtenemos un bigermen equivalente a (ii), $\begin{cases} (x, y^2 \pm x^{k+1}, xy) \\ (x, 0, y) \end{cases}$. Ahora, proyectamos la superficie obtenida con este cambio, $(x, y^2 \pm x^{k+1}, xy)$, en la dirección de la normal al plano $(x, 0, y)$, obteniendo el tipo de contacto de la superficie con el plano. Este viene dado por $c(x, y) = y^2 \pm x^{k+1}$, $k = 1, 2$, o sea, es un contacto de tipo A_k . Observemos que para $k = 1, 2$ tenemos que el plano es transversal a la curva de puntos dobles.

Con eso obtenemos las siguientes posibilidades geométricas genéricas del paraguas de Whitney:

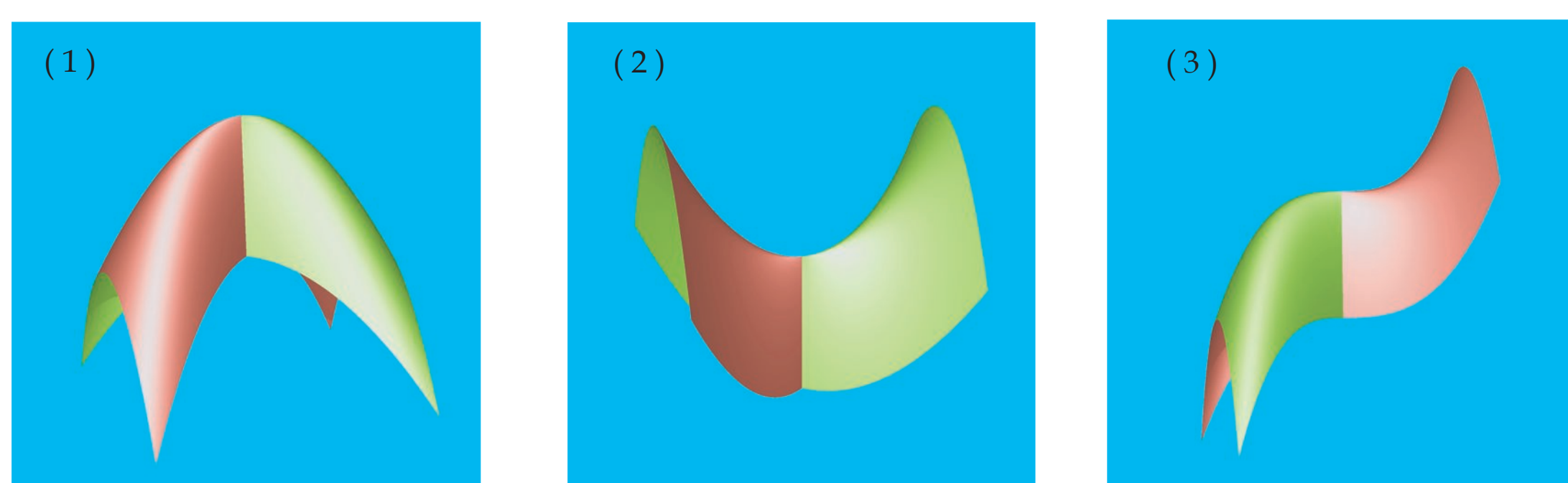


Figura 2: (1) Paraguas de Whitney elíptico, (2) hiperbólico y (3) parabólico, con respectivos contacto de tipo A_1 , A_1 y A_3 con el plano $(x, 0, y)$.

Geometría de la suspensión del paraguas de Whitney

Consideremos el germen singular estable $g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ dado por la suspensión del paraguas de Whitney.

La imagen de g es una 3-variedad con singularidades ("cross-cap") a lo largo de una curva. Nos referimos a esta imagen como **discriminante** de g . La parametrización de la curva de puntos de "cross-cap" es $\alpha(t) = (t, 0, 0, 0)$ y de la superficie de puntos dobles, contenida en la imagen, viene dada por $\beta(u, v) = (u, 0, v, 0)$, donde $v \geq 0$.

Nuestro objetivo es determinar los posibles contactos genéricos de la suspensión del paraguas de Whitney, de la curva de puntos de "cross-cap" y de la superficie de puntos dobles con hiperplanos. Para ello utilizamos la técnica descrita anteriormente.

Empezamos con la clasificación de los bigérmes de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^4 bajo la acción del grupo \mathcal{A} .

Teorema 2: Sea $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ un bigermen de \mathcal{A} -codimensión ≤ 3 , donde una de las ramas es la suspensión del paraguas de Whitney. Entonces f tiene una de las siguientes formas normales ($k \geq 1$):

	\mathcal{A} -codimensión		\mathcal{A} -codimensión
(1) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \pm x^{k+1}, y, z) \end{cases}$	$k-1$	(5) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, \pm y^2 \pm x^{k+2}, z) \end{cases}$	$k+1$
(2) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y^{k+1}, y, z) \end{cases}$	k	(6) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, xy \pm x^{k+2}, y, z) \end{cases}$	$k+1$
(3) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, x^2 \pm y^{k+1}, z) \end{cases}$	k	(7) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, xy \pm x^{k+2}, z) \end{cases}$	$k+1$
(4) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y^2 \pm x^{k+2}, y, z) \end{cases}$	$k+1$	(8) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, z, x^2 \pm z^2) \end{cases}$	2.

Estudiando cada caso por separado, obtenemos los siguientes tipos de contactos genéricos con el discriminante, la curva de puntos de "cross-cap" y la superficie de puntos dobles.

Teorema 3: Los posibles tipos de contactos genéricos de la suspensión del paraguas de Whitney con hiperplanos de \mathbb{R}^4 son:

Bigérmes	k	Contacto con el discriminante	Contacto con la superficie de puntos dobles	Contacto con la curva de cross-cap
(1)	$1 \leq k \leq 4$	Transversal	Transversal	Tipo A_k
(2)	$1 \leq k \leq 3$	Transversal	Tipo A_k	Tipo A_1
(3)	$1 \leq k \leq 3$	Tipo A_k	Transversal	Tipo A_1
(4)	1, 2	Transversal	Tipo A_{k+1}	Tipo A_{k+1}
(5)	1, 2	Tipo A_{k+1}	Transversal	Tipo A_{k+1}
(6)	1, 2	Transversal	Tipo A_1	Tipo A_{k+1}
(7)	1, 2	Tipo A_1	Transversal	Tipo A_{k+1}
(8)		Tipo A_1	Tipo A_1	Tipo A_1

A título de ilustración de estos resultados y a fin de visualizar las imágenes de las aplicaciones de 3-variedades en \mathbb{R}^4 hemos considerado una foliación de \mathbb{R}^4 por 3-espacios dependiendo de un parámetro. Al variar este, encontramos diferentes secciones 3-dimensionales de la imagen.

Forma normal clásica (no genérica) de la suspensión del paraguas de Whitney

Perturbación genérica (\mathcal{A} -equivalente) de la suspensión del paraguas de Whitney

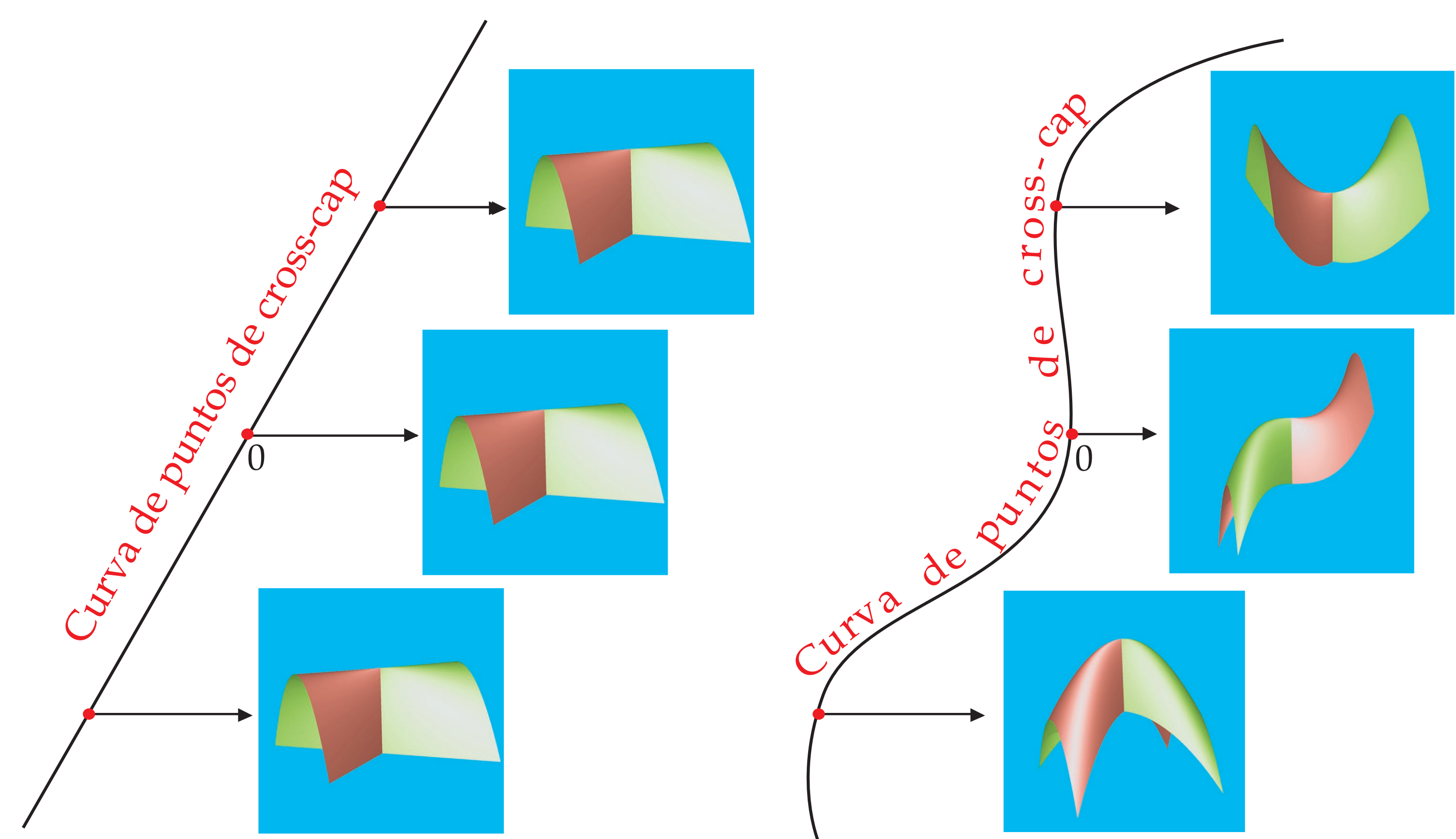


Figura 3: Diferentes secciones 3-dimensionales de la suspensión del paraguas de Whitney no genérica y de la genérica.

* Póster basado en el trabajo conjunto con M.C. Romero Fuster y R.G. Wik Atique. Con apoyo financiero del CNPq - Brasil.

References

[M] J.N. Mather. Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by R -algebra. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 37, p. 223-248, 1969.
 [B-W] J.W. Bruce y J.M. West. Functions on a cross-cap. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1998), 123, 19.