

## DUALITE SYMPLECTIQUE, FEUILLETAGES ET GEOMETRIE DU MOMENT

P. MOLINO

### Abstract

---

One gives the links between the notions of singular foliations,  $\Gamma$ -structures and momentum mapping in the context of symplectic geometry.

---

### Introduction

Dans le premier paragraphe de ce papier, après quelques rappels élémentaires de géométrie symplectique, on introduit la notion de *moment généralisé* mise au point en collaboration avec M. Condevaux et P. Dazord [3] dans le cadre du *Seminaire Sud-Rhodanien de Geometrie*. Essentiellement, c'est la traduction en termes de dualité symplectique entre  $\Gamma$ -structures de Haefliger (ici, les  *$\Gamma$ -structures Poissoniennes*) et feuilletages singuliers de Stefan (ici les *feuilletages de Stefan-Liebermann*), de la notion de moment d'une action hamiltonienne due à J. M. Souriau [16].

Le second paragraphe est une contribution à la méthode de réduction symplectique [13]:  $(M, \omega, H)$  étant un système hamiltonien, on considère une sous-variété  $\Sigma$  de  $M$ , qui est une sous-variété de niveau d'une famille d'intégrales premières. On suppose que  $\omega$  induit sur  $\Sigma$  une forme  $\omega_\Sigma$  de rang constant; mais au lieu de supposer le feuilletage caractéristique  $\mathcal{C}_\Sigma$  simple, on suppose seulement qu'il admet une métrique *bundle-like* [15] complète. On peut alors introduire le *moment généralisé transverse* du feuilletage singulier défini par les adhérences des feuilles, et poursuivre la réduction en munissant l'espace  $\Sigma/\bar{\mathcal{C}}_\Sigma$  des adhérences de feuilles d'une structure de Poisson.

Un cas particulier intéressant est celui où la variété  $\Sigma$  est simplement connexe; on peut alors définir un vrai *moment transverse structural*  $J_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p$ , où  $p$  est la dimension de l'algèbre de Lie structurale [14]. On peut d'ailleurs prouver, si  $\Sigma$  est compacte, un théorème de convexité du moment structural du type du théorème de convexité du moment pour les actions hamiltoniennes de tores [2] [7].

Dans toute la suite, les structures considérées sont de classe  $C^\infty$ .

## I. $\Gamma$ -structures Poissoniennes, feuilletages de Stefan-Libermann, et moment généralisé [3]

### I.1- Commensons par quelques rappels élémentaires.

a) Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique,  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $g$ ,  $\phi : G \times M \rightarrow M$  une action différentiable. On pose  $\phi_g(x) = \phi(g, x)$ , et pour tout  $\xi \in g$  on note  $\xi_M(x) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \phi(\exp(t\xi), x)$ .  $\xi_M$  est le champ fondamental de l'action associé à  $\xi$ .

L'action  $\phi$  est symplectique si  $\phi_g^* \omega = \omega$  pour tout  $g$ . Dans ce cas, la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_{\xi_M} \omega$  s'annule pour tout champ fondamental, ce qui s'écrit encore  $d(i_{\xi_M} \omega) = 0$ . Autrement dit, les champs fondamentaux sont localement hamiltoniens.

Si en outre tous les champs fondamentaux sont globalement hamiltoniens, c.a.d. si  $i_{\xi_M} \omega$  est exacte pour tout  $\xi$ , l'action  $\phi$  est dite hamiltonienne. Étant donnée une base  $(\xi_1, \dots, \xi_p)$  de  $g$ , on peut alors trouver des fonctions  $f_{\xi_1}, \dots, f_{\xi_p}$  telles que  $i_{\xi_i} \omega = df_{\xi_i}$  pour  $i = 1, \dots, p$ . On définit une application  $J$  de  $M$  dans le dual  $g^*$  de  $g$  en posant:

$$\langle J(x), \sum_{i=1}^p \lambda^i \xi_i \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda^i f_{\xi_i}(x) \text{ quelsquesoient } x \in M \text{ et } \lambda^1, \dots, \lambda^p \in \mathbb{R}.$$

L'application  $J$  est appelée *moment* de l'action hamiltonienne  $\phi$ , voir [16]. Visiblement,  $J$  est définie modulo l'addition d'un vecteur arbitraire  $\mu_0 \in g^*$ .

b) Dans le cas particulier où les orbites de  $\phi$  définissent un feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension  $r$  sur  $M$ , l'application moment  $J$  est de rang constant  $r$ . Les composantes connexes des sous-variétés de niveau de  $J$  forment alors sur  $M$  un nouveau feuilletage  $\mathcal{F}^\sigma$ , de codimension  $r$ . Les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^\sigma$  sont orthogonaux au sens symplectique, et les intégrales premières locales de chacun d'eux définissent des champs hamiltoniens tangents à l'autre.

De manière générale, P. Libermann [11] a observé que, pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur la variété symplectique  $(M, \omega)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (L1) Le champ d'éléments de contact orthogonal à  $\mathcal{F}$  est complètement intégrable.
- (L2)  $\mathcal{F}$  est localement engendré par des champs hamiltoniens.
- (L3) Le crochet de Poisson de deux intégrales premières locales de  $\mathcal{F}$  est encore une intégrale première locale.

On appellera *feuilletage de Libermann* un feuilletage ayant ces propriétés. On notera encore  $\mathcal{F}^\sigma$  le feuilletage orthogonal—qui est lui-même de Libermann—et on observera que si  $f$  est une intégrale première locale de  $\mathcal{F}$  (respectivement de  $\mathcal{F}^\sigma$ ), son champ hamiltonien  $X_f$  est feuilleté pour  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{F}^\sigma$ ) et tangent à  $\mathcal{F}^\sigma$  (resp.  $\mathcal{F}$ ).

c) Une *variété de Poisson*  $(P, \Lambda)$  est une variété munie d'un 2-tenseur contravariant antisymétrique, de manière que l'opération de *crochet de Poisson* définie sur  $C^\infty(P)$  par  $\{f, g\}_\Lambda = \Lambda(df \wedge dg)$  soit un crochet d'algèbre de Lie. On renvoie à ce sujet à A. Lichnerowicz [12] et A. Weinstein [19]. Pour  $g \in C^\infty(P)$ ,

on définit son champ hamiltonien  $X_g$  par la relation  $X_g \cdot f = \{f, g\}_\Lambda$ . Les champs hamiltoniens forment une algèbre de Lie de champs de vecteurs dont les orbites constituent un feuilletage singulier  $\mathcal{S}_\Lambda$  au sens de P. Stefan [17] et H. Sussmann [18]. Les feuilles de  $\mathcal{S}_\Lambda$  sont munies d'une structure symplectique pour laquelle le crochet de Poisson est induit par le crochet  $\{\}_\Lambda$ . On dira que  $\mathcal{S}_\Lambda$  est le feuilletage symplectique de  $(P, \Lambda)$ . Enfin, un morphisme de Poisson de  $(P, \Lambda)$  dans  $(P', \Lambda')$  est une application différentiable  $\varphi : P \rightarrow P'$  telle que  $\{\varphi^* f', \varphi^* g'\}_\Lambda = \varphi^* \{f', g'\}_{\Lambda'}$ , quelles que soient  $f', g' \in C^\infty(P')$ .

Ceci étant, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de Libermann sur  $(M, \omega)$ , le fait que le crochet de Poisson de deux intégrales premières locales soit encore une intégrale première locale permet de définir une structure naturelle de variété de Poisson sur les transversales au feuilletage. Si l'on veut, la structure transverse d'un feuilletage de Libermann est une structure de variété de Poisson, et la projection locale sur une transversale est un morphisme de Poisson.

Un exemple important de structure de Poisson est le suivant: on définit la structure de Lie-Poisson  $(g^*, \Lambda_0)$  sur le dual de l'algèbre de Lie  $g$  du groupe de Lie  $G$  en posant  $\{\xi, \eta\}_{\Lambda_0} = [\xi, \eta]$  quelsquesoient  $\xi, \eta \in g$ . Plus généralement, si  $H \in \Lambda^2 g^*$  est un 2-cocycle sur l'algèbre de Lie  $g$ , on définit une structure de Poisson affine  $(g^*, \Lambda)$  en posant  $\{\xi, \eta\}_\Lambda = [\xi, \eta] + H(\xi, \eta)$ . Il est facile de voir [16] que le moment  $J$  de Souriau d'une action hamiltonienne  $\phi : G \times M$  est un morphisme de Poisson de  $M$  sur  $g^*$  munie d'une telle structure affine. Si l'on remplace  $J$  par  $J + \mu_0$ , on devra remplacer  $H$  par  $H + \delta\mu_0$ .

## I.2- Dualité symplectique et feuilletages singuliers.

a) Revenons un instant à l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur  $(M, \omega)$ . En général, ses orbites ne forment plus un feuilletage, mais un feuilletage *singulier*. De même, le moment de Souriau ne détermine plus un feuilletage, mais simplement un morphisme de Poisson sur une *variété de Poisson transverse*.

Ainsi, la relation définie par dualité symplectique entre un feuilletage de Libermann  $\mathcal{F}$  et son orthogonal  $\mathcal{F}^\sigma$  perd son caractère de symétrie:  $\mathcal{F}$  devient un feuilletage singulier au sens contravariant (les orbites d'une algèbre de Lie),  $\mathcal{F}^\sigma$  un feuilletage singulier au sens covariant (défini, si l'on veut, par une famille de 1-formes).

Cette remarque suggère, comme cadre général de la notion de moment, la relation établie par dualité symplectique entre certains feuilletages de Stefan (notion contravariante) [17] et certaines  $\Gamma$ -structures de Haefliger (notion covariante) [8].

b) Un feuilletage de Stefan peut être défini sur une variété  $M$  comme une partition  $\mathcal{F}$  en sous-variétés immergées (les feuilles) telle que, si  $\mathcal{X}_\mathcal{F}$  est le module des champs de vecteurs différentiables tangents aux feuilles, ses orbites soient précisément les feuilles. Dans le cas d'une variété symplectique  $(M, \omega)$ , nous appellerons *feuilletage de Stefan-Libermann* un feuilletage de Stefan tel que tout vecteur tangent en un point quelconque à une feuille soit la valeur d'un champ de vecteurs hamiltonien local tangent aux feuilles.

D'autre part, soit  $(P, \Lambda)$  une variété de Poisson. Une  $\Gamma$ -structure Poissonnienne modelée sur  $(P, \Lambda)$  sera définie sur  $(M, \omega)$  par une famille (maximale)  $(U_i, \pi_i, \gamma_{ij})_{i,j \in I}$  où  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ ,  $\pi_i : U_i \rightarrow P$  un morphisme de Poisson pour tout  $i$ , et  $\gamma_{ij}$  un isomorphisme de Poisson entre ouverts de  $P$  tel que  $\pi_i = \gamma_{ij} \circ \pi_j$ , quelsquesoient  $i, j \in I$  avec  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , avec en outre les relations de cohérence  $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$ .

Ceci étant, considérons sur  $(M, \omega)$  une  $\Gamma$ -structure Poissonnienne  $\mathcal{M}$  définie par  $(U_i, \pi_i, \gamma_{ij})_{i,j \in I}$ . Pour tout  $i \in I$ , considérons les fonctions  $\pi_i^* f$ , où  $f \in C^\infty(P)$ , et leurs champs hamiltoniens  $X_{\pi_i^* f}$ . On définit ainsi sur  $(M, \omega)$  un faisceau de germes de champs hamiltoniens locaux. Il est immédiat de vérifier que les orbites de ce faisceau déterminent sur la variété symplectique un feuilletage de Stefan-Libermann, que nous noterons  $\mathcal{F}$ .

On dira que  $\mathcal{F}$  est le feuilletage de Stefan-Libermann "action" de la  $\Gamma$ -structure Poissonnienne  $\mathcal{M}$ ; réciproquement, on dira que  $\mathcal{M}$  est un moment généralisé pour  $\mathcal{F}$ . On prendra garde qu'étant donné un feuilletage de Stefan-Libermann arbitraire sur  $(M, \omega)$ , l'existence d'un moment généralisé n'est pas assurée, et s'il en existe, il n'y a pas d'unicité.

### 1.3 L'exemple des actions symplectiques.

#### a) Existence d'un moment généralisé

Soit  $\phi : G \times M \rightarrow M$  une action symplectique sur  $(M, \omega)$ . On note encore  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , et  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  l'idéal dérivé. Comme le crochet de deux champs localement hamiltoniens est globalement hamiltonien, pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}'$ , le champ fondamental  $\xi_M$  est globalement hamiltonien. Ceci permet de définir un moment dérivé.

$$J' : M \rightarrow \mathfrak{g}'^*$$

Considérons alors un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $M$  par des ouverts contractiles dont les intersection 2 à 2 soient contractiles. Dans chaque ouvert  $U_i$  du recouvrement, les champs fondamentaux de l'action  $\phi$  sont hamiltoniens, ce qui permet de définir un moment local de l'action:

$$J_i : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

On peut d'ailleurs choisir ces moments locaux de manière que, pour tout  $i$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{J_i} & \mathfrak{g}^* \\ & & \downarrow \psi \\ & & \mathfrak{g}'^* \end{array}$$

commute, où  $\psi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}'^*$  est la projection naturelle.

On en déduit que, si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , on a dans  $U_i \cap U_j$ :

$$J_i = J_j + \mu_{ij}, \text{ où } \mu_{ij} \text{ appartient à l'annulateur } \mathfrak{g}'^\perp \text{ de } \mathfrak{g}'.$$

Ceci étant, on sait que pour tout  $i, J_i : M \rightarrow g^*$  est un morphisme de Poisson, quand on munit  $g^*$  du crochet de Poisson défini par

$$\{\xi, \eta\}_{\wedge_i} = [\xi, \eta] + H_i(\xi, \eta)$$

et, d'après la formule rappelée en I.1.c), on aura, si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

$$H_i = H_j + \delta\mu_{ij}$$

soit  $H_i(\xi, \eta) = H_j(\xi, \eta) + \mu_{ij}([\xi, \eta]) = H_j(\xi, \eta)$ .

$M$  étant supposée connexe, les structures de Poisson  $\wedge_i$  définies sur  $g^*$  coïncident. On adoptera la notation unique  $\wedge = \wedge_i$ . Si  $\mu_{ij}$  désigne également la translation de vecteur  $\mu_{ij}$  dans  $g^*$ , la famille  $(U_i, J_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$  définit sur  $(M, \omega)$  un moment généralisé pour le feuilletage des orbites.

**b) Moment réduit**

On considère encore l'action symplectique  $\phi : G \times M \rightarrow M$ . La construction que l'on va donner s'apparente au *développement de Darboux* d'un feuilletage de Lie [4]:

Sur  $M \times g^*$ , considéré comme  $g^*$ -fibré principal à groupe structural vectoriel, on définit une connexion plate à l'aide de la 1-forme fermée  $\alpha_J$  sur  $M$  à valeurs dans  $g^*$  déterminée par la condition:

$$\langle \alpha_J, \xi \rangle = i_{\xi_M} \omega \quad \text{pour tout } \xi \in g.$$

Notons  $\tilde{M}$  une nappe d'holonomie de cette connexion, et  $\tilde{J} : \tilde{M} \rightarrow g^*$  la seconde projection.  $\tilde{J}$  est un moment de l'action infinitésimale relevée. C'est un morphisme de Poisson, pour la forme symplectique  $\tilde{\omega}$  relevée sur  $\tilde{M}$  et pour une structure de Poisson affine  $\wedge$  sur  $g^*$ .

Le groupe structural  $\Gamma$  de la projection  $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$  ( si l'on veut, c'est le groupe des périodes de  $\alpha_J$  ) est un groupe discret d'automorphismes de Poisson de  $(g^*, \wedge)$ . Son adhérence  $k^*$  est un groupe formé de translations de  $g^*$  qui respectent la structure de Poisson, de sorte que le quotient  $C = g^*/k^*$  est un cylindre muni d'une structure de Poisson affine  $\wedge_c$ . On a alors une factorisation naturelle:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{J}} & g^* \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{J_r} & C \end{array}$$

et  $J_r : M \rightarrow C$  est un morphisme de Poisson qui sera dit *moment réduit* de l'action. L'étude des propriétés géométriques de ce moment réduit pourrait s'avérer intéressante.

## II- Réduction symplectique et feuilletages riemanniens

### II.1- Etude des feuilletages riemanniens complets transversalement symplectiques.

Dans ce paragraphe  $(V, \mathcal{F})$  est un feuilletage admettant une métrique riemannienne *bundle-like* complète  $g$ , et une structure symplectique transverse, c'est-à-dire une 2-forme fermée  $\omega$  dont  $\mathcal{F}$  est le feuilletage caractéristique.

a) On sait [14] que les adhérences des feuilles de  $\mathcal{F}$  sont les orbites d'un faisceau localement constant  $\mathcal{K}$  de germes de champs de Killing transverses. Ces adhérences forment un feuilletage de Stefan  $\bar{\mathcal{F}}$ , et l'algèbre de Lie  $g$  opposée à la fibre-type de  $\mathcal{K}$  est l'algèbre de Lie structurale du feuilletage.

Il est facile de voir que tout tenseur basique sur  $(V, \mathcal{F})$  est invariant par les sections locales de  $\mathcal{K}$ : on peut par exemple utiliser le point de vue de A. Haefliger-E. Salem [10], et regarder le faisceau  $\mathcal{K}_T$  induit sur une transversale totale  $T$  comme le faisceau en algèbres de Lie associé à l'adhérence du pseudogroupe d'holonomie du feuilletage, pseudogroupe qui respecte bien entendu les tenseurs basiques. En particulier, *les sections locales de  $\mathcal{K}$  sont des champs transverses localement hamiltoniens.*

On pourra donc définir des *moments transverses locaux* du feuilletage  $\bar{\mathcal{F}}$ , qui est transversalement un feuilletage de Stefan-Libermann. Plus précisément, soit  $(V_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert localement fini de  $V$  par des ouverts simplement connexes. Dans chaque  $V_i$ , on pourra définir un moment transverse local  $J_i : U_i \rightarrow (-g^*, \Lambda_i)$ , où  $\Lambda_i$  est une structure de Poisson affine sur  $-g^*$ . La famille de ces moments locaux détermine sur le feuilletage transversalement symplectique  $(V, \mathcal{F}, \omega)$  une  $\Gamma$ -structure de Poisson transverse, modelée sur la somme disjointe des variétés de Poisson affines  $(-g^*, \Lambda_i)$ . On obtient ainsi un *moment généralisé transverse* pour le feuilletage.

b) Notons  $W = V/\bar{\mathcal{F}}$  l'espace des adhérences de feuilles.

On sait que  $W$  est une variété singulière stratifiée, ayant la structure du quotient d'une vraie variété par l'action différentiable d'un groupe de Lie compact. La projection  $\pi : V \rightarrow W$  est un morphisme de variétés singulières. Dans  $V$ , la réunion des adhérences de feuilles d'une dimension donnée forme une sous-variété propre; si alors on considère les adhérences contenues dans cette sous-variété, et dont l'holonomie (dans la sous-variété) a un cardinal donné, elles forment une strate dont la projection sur  $W$  est une strate de  $W$ . Enfin, les fonctions basiques globales de  $(V, \mathcal{F})$  sont  $\pi$ -projectables, et définissent en projection l'anneau  $C^\infty(W)$  des fonctions différentiables de la variété singulière.

La structure symplectique transverse définit un crochet de Poisson sur les fonctions basiques globales, et par suite une structure de *variété de Poisson stratifiée* sur  $W$ . Si  $f$  est une fonction basique, on peut définir son champ hamiltonien transverse  $\bar{X}_f$  par la relation  $i_{\bar{X}_f} \omega = df$ . Le champ transverse  $\bar{X}_f$  définit à son tour un champ de vecteurs  $X_{f|_W}$  sur la variété singulière  $W$ , qui n'est autre que le champ hamiltonien de la fonction  $f|_W$  projectée. Comme tous les champs de vecteurs globaux sur  $W$  sont tangents à chaque strate, on voit

que les strates de  $W$  sont réunions de feuilles du feuilletage symplectique  $S_W$  de la variété de Poisson stratifiée. Chaque strate hérite en particulier d'une structure de Poisson ayant pour feuilletage symplectique le feuilletage induit par  $S_W$ .

## II.2- Application à la réduction symplectique.

On considère le système hamiltonien  $(M, \omega, H)$ , et une sous-variété  $\Sigma$  de  $M$  qui est une sous-variété de niveau d'un système d'intégrales premières. On suppose que la forme  $\omega_\Sigma$  induite par  $\omega$  sur  $\Sigma$  est de rang constant, et qu'il existe sur  $\Sigma$  une métrique riemannienne complète  $g_\Sigma$  qui est *bundle-like* pour le feuilletage caractéristique  $C_\Sigma$  de  $\omega_\Sigma$ .

On notera comme au paragraphe précédent  $W$  la variété singulière  $\Sigma/\bar{C}_\Sigma$ , et  $\pi : \Sigma \rightarrow W$  la projection. La restriction  $H_\Sigma$  à  $\Sigma$  du hamiltonien est basique pour le feuilletage caractéristique, et se projecte donc sur  $W$  en une fonction différentiable  $H_W$ , dont on notera  $X_{H_W}$  le champ hamiltonien.

Si  $S$  est une feuille quelconque du feuilletage symplectique  $S_W$  de  $W$ , c'est une variété au sens usuel, munie par la structure de Poisson de  $W$  s'une forme symplectique  $\omega_S$ . Notant  $H_S$  la fonction différentiable induite par  $H_W$  sur  $S$ , on dira que  $(S, \omega_S, H_S)$  est un *système hamiltonien réduit*. La trajectoire du champ hamiltonien  $X_H$  passant par un point  $x_0 \in \bar{\pi}^{-1}(S)$  se projecte par  $\pi$  suivant la trajectoire du champ hamiltonien  $X_{H_S}$  passant par  $\pi(x_0)$ .

## II.3. Cas où la variété est simplement connexe.

Reprenons la situation et les notations de II.1, et supposons de plus la variété  $V$  simplement connexe.

a) Le faisceau  $K$  est alors globalement constant, et l'algèbre de Lie structurale abélienne [14]. Soit  $g = \mathbb{R}^p$ . Soit  $(\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_p)$  une base de l'espace vectoriel des sections globales de  $K$ . Les 1-formes  $i_{\bar{Z}_i}\omega$  sont fermées, donc exactes. On posera  $i_{\bar{Z}_i}\omega = dJ_S^i$ , pour  $i = 1, \dots, p$ . Les fonctions  $J_S^1, \dots, J_S^p$  ainsi définies sont alors des fonctions basiques globales, d'où une application

$$J_s = (J_s^1, \dots, J_s^p) : V \rightarrow \mathbb{R}^p = g^*$$

qui est définie [en regardant  $\mathbb{R}^p$  comme le dual de l'algèbre de Lie structurale] à l'addition près d'un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^p$ .

On dira que  $J$  est le *moment transverse structural* du feuilletage transversalement symplectique  $(V, \mathcal{F}, \omega)$ . C'est [modulo l'addition d'un vecteur constant] un invariant du feuilletage, ce qui justifie la terminologie.

L'existence de l'application  $J_s$  implique déjà une contrainte topologique. On a en effet:

**Proposition.** *Sur une variété simplement connexe munie d'un feuilletage riemannien complet transversalement symplectique, la codimension minimum des adhérences de feuilles est  $\leq \frac{q}{2}$ , si  $q$  est la codimension du feuilletage.*

**Preuve:** l'algèbre de Lie structurale étant  $\mathbb{R}^p$ , la codimension minimum des adhérences est exactement  $q-p$ . Mais en un point d'une adhérence régulière (de codimension minimum), le rang du moment-transverse est exactement  $p$ . Comme  $J_s$  est basique, on en déduit le résultat.

Le cas où on a exactement  $q=2p$  est intéressant, puisque dans ce cas les feuilles symplectiques de la variété de Poisson singulière  $W$  sont réduites à des points [c'est vrai dans la strate régulière de  $W$ , et par continuité cela reste vrai partout]. En d'autres termes, dans ce cas, le moment transverse structural  $J_s$  se factorise en un plongement:

$$J_W : W \hookrightarrow \mathbb{R}^p$$

[Bien entendu, dans tous les cas,  $J$  se factorise en  $J_W : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ ].

**b) Supposons maintenant la variété  $V$  compacte.**

On a alors un *théorème de conversité* du type du théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg relatif aux actions hamiltoniennes de tores [2] [7]:

**Théorème.** *Soit  $(V, \mathcal{F}, \omega)$  un feuilletage riemannien transversalement symplectique sur une variété compacte simplement connexe. Alors, l'image du moment transverse structural  $J_s : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un polytope convexe fermé de  $\mathbb{R}^p$ .*

**Preuve:** nous donnons ici simplement le schéma de la démonstration.

On s'inspire de la démonstration du théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg mise au point en collaboration avec M. Condevaux et P. Dazord [3]: en utilisant la description due à A. Haefliger [9] du voisinage d'une adhérence de feuille dans un feuilletage riemannien, on obtient sans difficulté une variante feuilletée du *lemme de convexité locale* donné dans [3] pour les actions hamiltoniennes de Tores.

Ceci fait, on continue comme en [3] en introduisant l'espace  $\hat{V}$  des composantes connexes des préimages des points par  $J_s$ , et en munissant  $\hat{V}$  d'une structure de variété riemannienne plate à bords et coins affines, localement convexe. Il ne reste plus qu'à vérifier que l'application factorisée  $\hat{J}_s : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une isométrie; l'argument est exactement le même qu'en [3].

**Corollaire.** *Tout feuilletage riemannien transversalement symplectique sur une variété compacte simplement connexe a des feuilles compactes.*

**Preuve:** il suffit d'observer que les sommets du polytope  $J_s(V)$  correspondent à des feuilles compactes du feuilletage.

Pour l'étude des feuilletages riemanniens sur les variétés compactes simplement connexes, voir E. Ghys [6].

## References

1. R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, *Foundations of mechanics*, Benjamin, Reading 2d. ed (1978).



2. M. ATIYAH, Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. Lond. Math. Soc* 14 (1982), 1-15.
3. M. CONDEVAUX, P. DAZORD, P. MOLINO, Geometrie du moment, in: Seminaire Sud-Rhodanien I, *Multigraphié* (1988), 131-160, Lyon.
4. E. FEDIDA, Sur les feuilletages de Lie, *C.R. Acad. Sc.* 272 (1971), 999-1002, Paris.
5. T. FRANKEL, Fixed points on Kähler manifolds, *Ann. Math.* 70 (1959), 1-8.
6. E. GHYS, Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, *Ann. Inst. Fourier* 34 (1984), 203-293.
7. V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Convexity properties of the moment mapping, *Inv. Math.* 67 (1982), 491-513.
8. A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. Math. Helvet* 32 (1958), 248-329.
9. A. HAEFLIGER, Leaf closures in riemannian foliations, A fete of topology. Papers dedicated to I. Tamura, *Academic Press* (1988).
10. A. HAEFLIGER, E. SALEM, Pseudogroupes d'holonomie des feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, *preprint* (1986).
11. P. LIBERMANN, Problèmes d'équivalence en géometrie symplectique, *Asterisque* 107-108 (1984), 43-68.
12. A. LICHNEROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *Jour. of Diff. Geom.* 12 (1977), 253-300.
13. J. MARSDEN, A. WEINSTEIN, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Rep. Math. Phys.* 5 (1974), 121-130.
14. P. MOLINO, Geometrie globale des feuilletages riemanniens, *Ned. Akad. van Wet.* A 85 (1982), 45-76.
15. B. REINHART, Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann. of Math.* 69 (1959), 119-132.
16. J. M. SOURIAU, Structure des systemes dynamiques, *Dunod* (1969), Paris.
17. P. STEFAN, Accessibility and foliations with singularities, *Bull. A.M.S.* 86 (1974), 1142-1145.
18. H. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. A.M.S.* 180 (1973), 171-188.
19. A. WEINSTEIN, The local structure of Poisson manifolds, *Jour. of Diff. Geom.* 18 (1983), 523-557.

Departement de Mathématiques  
Université des Sciences et Techniques du Languedoc  
Place E. Bataillon  
34060 Montpellier, FRANCE

Rebut el 3 de Novembre de 1988